JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

SOPHIE BLOCH-MERCIER

Optimisation de la maintenance corrective d'un système repérable

Journal de la société française de statistique, tome 141, nº 3 (2000), p. 23-36.

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2000__141_3_23_0>

© Société française de statistique, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OPTIMISATION DE LA MAINTENANCE CORRECTIVE D'UN SYSTÈME REPÉRABLE

Sophie BLOCH-MERCIER [1]

RÉSUMÉ

Nous considérons un système réparable, pouvant être réparé de manière plus ou moins complète lorsqu'il tombe en panne. Notre problème est alors de trouver le degré optimal de réparation, le critère étant la disponibilité asymptotique. Tant qu'il est en marche, le système évolue selon un processus markovien à espace d'états fini, les durées de réparations suivant en revanche des lois générales. A l'issue d'une réparation, le système redémarre dans un état de marche i avec la probabilité $D_R(i)$. De façon étonnante, nous observons que la loi optimale de redémarrage D_R^{opt} peut être aléatoire, ce qui en complique notablement la recherche. Nous donnons alors des conditions suffisantes pour qu'elle ne le soit pas. Nous donnons aussi des conditions pour que les réparations complètes soient optimales. A titre d'illustration, nous étudions un système de type k sur n, pour lequel nous déterminons la loi optimale de redémarrage ainsi que le nombre optimal de composants à installer dans le système.

Mots clés : Disponibilité asymptotique, Degré optimal de réparation, Optimisation de redondances, Processus de Markov monotones, Ordre selon le taux de hasard inversé.

ABSTRACT

We consider a repairable system such that different completeness degrees are possible for the repair (or corrective maintenance), that go from a 'minimal' up to a 'complete' repair. Our problem is to find the optimal degree for the repair, namely such that the long-run availability is optimal The system evolves in time according to a Markov process with a finite state space as long as it is running, whereas duration of repairs follow general distributions. After repair, the system starts again in the up-state i with probability $D_R(i)$. Amazingly, we observe that the optimal restarting distribution D_R^{opt} may be random, which highly complicates its research. Sufficient conditions under which the optimal restarting distribution is non random are then given. Also, conditions under which complete repairs are optimal are provided. As an illustration of our results, the optimal restarting distribution is provided for a k out of n structure, as well as the optimal number of redundant components to be set up in such a structure.

1. Université de Marne-la Vallée, Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, 5 boulevard Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne la-Vallée cedex 2, France, e-mail : merciers@univ mlv.fr

Keywords : Long-run Availability, Optimal degree of Corrective maintenance; Redundancy Optimization; Monotone Markov Processes; Reversed Hazard Rate Ordering.

Le travail présenté ici a été effectué dans le cadre d'une thèse soutenue à l'Université de Marne-la Vallée en décembre 2000 ([1]).

1. INTRODUCTION

On considère un système réparable, que l'on peut choisir de réparer plus ou moins complètement lorsqu'il tombe en panne. Cela signifie par exemple que ce système comporte un certain nombre de composants indispensables à son bon fonctionnement, qu'il faut donc réparer lorsqu'ils tombent en panne, mais comporte aussi d'autres composants, dont la réparation est facultative. Pour un tel système, un problème naturel est alors de choisir judicieusement les composants à réparer lorsqu'ils tombent en panne, en fonction d'un certain critère que l'on souhaite optimiser, ou encore d'essayer de trouver le *degré optimal de maintenance corrective du système.*

En l'absence de contraintes technologiques ou économiques restreignant les architectures possibles du système (cela peut par exemple coûter moins cher de n'installer que des blocs de dix composants identiques plutôt que de devoir en fabriquer certains de huit ou neuf...), on peut remarquer qu'une telle étude peut alors être utile non seulement lors de la phase d'exploitation du système, mais aussi lors de la phase de conception. En effet, en l'absence de contraintes extérieures, il n'y a a priori pas de raisons d'installer des composants inutiles et tous doivent contribuer à l'amélioration du critère considéré. Dans ce cas, les réparations complètes doivent donc être optimales. Un second problème est alors la recherche de conditions pour qu'il en soit ainsi.

Pour les deux problèmes présentés, recherche du degré optimal de maintenance corrective et recherche de conditions sous lesquelles les réparations complètes sont optimales, le critère choisi pour mesurer les performances du système est la disponibilité asymptotique, c'est-à-dire la probabilité que le système fonctionne lorsque l'on s'intéresse à un horizon infini.

Le système étudié a un espace d'états fini. Son évolution est *markovienne* tant qu'il est en marche, c'est-à-dire que les taux de panne et les taux de transition entre les différents états de marche sont supposés constants. Le système peut éventuellement comporter des composants réparables pendant que le système fonctionne, avec des taux de réparation constants, mais le cadre d'application typique de notre étude correspond plus à un système qui ne peut que se dégrader en fonctionnant. Ce système peut être l'objet de différents types de panne. A chacune de ces pannes est associée une durée aléatoire de réparation, de loi *quelconque.* Les durées de réparation peuvent éventuellement dépendre de l'état de marche dans lequel le système redémarre après la panne (a priori, plus la réparation est complète, plus elle est longue). L'hypothèse concernant les différents degrés possibles de réparation est modélisée à l'aide d'une probabilité D_R, contrôlant les redémarrages après réparation. Plus précisément, nous supposons que le système redémarre de la même façon après n'importe quel type de panne et que la réparation remet le système dans l'état de marche i avec la probabilité $D_R(\imath)$. Avec cette hypothèse, le premier problème est alors de déterminer la « meilleure » loi de redémarrage D_R, le deuxième est de donner des conditions sous lesquelles les redémarrages dans l'état de marche parfaite sont optimaux.

Les notations sont précisées dans la deuxième partie de cet article, ainsi que la formule donnant la disponibilité asymptotique.

La troisième partie est consacrée à la recherche de la loi optimale de redémarrage. Les résultats obtenus montrent en particulier que, contrairement à ce que l'intuition pourrait nous suggérer, la loi optimale de redémarrage ne correspond pas toujours au redémarrage dans un état fixé, mais qu'elle peut être au contraire aléatoire. Remarquons que, dans le cas de sous-systèmes en parallèle par exemple, un tel redémarrage aléatoire peut être réalisé concrètement en commençant à réparer simultanément les différents sous-systèmes et en décidant de redémarrer le système dès que l'un d'entre eux est réparé. On peut alors contrôler la loi de redémarrage en affectant plus ou moins de réparateurs (ou de pièces de rechange) à chacun des sous-systèmes. La recherche de la loi optimale étant notablement compliquée lorsqu'elle est aléatoire (ainsi que sa réalisation pratique), nous donnons des conditions suffisantes pour que la loi optimale soit malgré tout déterministe, ce qui permet de limiter la recherche aux redémarrages dans un état de marche fixé (en nombre fini). Les conditions obtenues sont fréquemment vérifiées et montrent que la loi optimale est en général déterministe.

La quatrième partie est consacrée à la recherche de conditions sous lesquelles les réparations complètes sont optimales. Les résultats obtenus montrent en particulier que, si les durées de réparation sont indépendantes de leur degré d'achèvement (réparation minimale aussi longue qu'une réparation complète par exemple) et si le système se « détériore » réparation est complète. La notion de « détérioration » du système (ou encore de « vieillissement ») est traduite par une propriété de monotonie du processus de Markov sous-jacent, relativement à un ordre encore peu utilisé en fiabilité, à savoir l'ordre pour le taux de hasard inversé (voir définition dans cette partie). Cette propriété de monotonie est traduite explicitement par des conditions portant sur les taux de transition du processus de Markov et est aisément vérifiable. Le degré d'achèvement de la réparation est par ailleurs lui aussi mesuré avec l'ordre pour le taux de hasard inversé.

Nous présentons enfin dans la cinquième et dernière partie de cet article, un exemple d'optimisation de la maintenance corrective d'un système, pour lequel nous déterminons explicitement les composants à réparer lors d'une panne, ainsi que les composants à installer dans le système lorsqu'il n'y a aucune contrainte extérieure (ici, sans limitation sur le nombre possible de composants à installer).

2. NOTATIONS – DISPONIBILITÉ ASYMPTOTIQUE

Nous utilisons les notations suivantes :

- 1, 2, ...,m : états de marche du système,
- $m+1$, $m+2$, ..., $m+p$: états de panne du système.
- $\mathbb{P}_i$ = probabilité conditionnelle sachant que le système part de l'état de marche $i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$.
- $R_{m+k,i}$ = durée de la réparation associée à l'état de panne $m+k$ qui remet le système dans l'état de marche i, supposée indépendante de ce qui est antérieur à la panne ($1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant i \leqslant m$). La moyenne $\mathbb{E}\,(R_{m+k,i})$ est supposée finie. La loi de $R_{m+k,i}$ est *quelconque.*
- $\overline{\mathbb{E}\,(R_{\bullet,\bullet})} = \left(\mathbb{E}\,(R_{m+k,i})\right)_{1 \leqslant k \leqslant p, 1 \leqslant i \leqslant m}$.
- $D_R\,(i)$ = probabilité que le système redémarre dans l'état de marche i après une réparation. (On suppose que l'évolution ultérieure du système après une réparation est indépendante de l'évolution antérieure du système).
- $D_R = (D_R\,(1)\,, D_R\,(2)\,, ..., D_R\,(m))$.
- $(X_t)_{t \geqslant 0}$ = processus markovien décrivant l'évolution du système jusqu'à la première panne, les états de panne étant rendu absorbants :

$$X_t = \begin{cases} \text{état du système} & \text{si } t < T \\ m+k & \text{si } t \geqslant T \end{cases}$$

  où T désigne l'instant de première panne du système. (Le système part d'un état de marche et tombe en panne au bout d'un temps p.s. fini : $\mathbb{P}_i\,(T < +\infty) = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$).

- A = matrice génératrice associée à $(X_t)_{t \geqslant 0}$,

  A_1 = matrice A tronquée à l'ordre m, formée par les taux de transition entre états de marche $\left(A_1 = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}\right)$,

  A_2 = sous-matrice de A formée par les taux de panne $\left(A_2 = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, m+1 \leqslant j \leqslant m+p}\right)$.

  En complétant par p lignes de zéros $(0_{p,m+p})$, la matrice A s'écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \multicolumn{2}{c}{0_{p,m+p}} \end{pmatrix}$$

- $g = -A_1^{-1}$. Rappelons (**théorème 4.25** de [3]) que $g_{i,j} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i\,(X_t = j)\,dt$, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Le symbole $g_{i,j}$ représente alors la durée moyenne passée dans l'état j avant la panne, sachant que le système est parti de l'état i.

Grâce aux hypothèses concernant les redémarrages après réparation, il est facile de voir que l'évolution ultérieure du système après une réparation ne dépend que de l'état de marche dans lequel le système redémarre après cette réparation. Le processus décrivant l'évolution du système (non tronqué à l'instant de première panne T) apparaît alors comme un processus *semi-régénératif*, les points de *semi* renouvellement associés étant les instants de redémarrage après réparation. Ces instants ne sont en général pas de vrais points de renouvellement car les redémarrages sont ici aléatoires, de sorte que le système n'est pas nécessairement dans le même état à ces instants. En revanche, les états successifs du système à ces instants forment une chaîne de Markov et l'évolution du système est décrite par une succession de cycles indépendants conditionnellement à la chaîne de Markov.

Pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, on note alors :

- MUT_i = durée moyenne de bon fonctionnement sur un cycle commençant dans l'état i (Mean Up Time).
- MDT_i = durée moyenne de la réparation qui a lieu à la fin de ce même cycle (Mean Down Time).
- $\overline{MUT} = \begin{pmatrix} MUT_1 \\ MUT_2 \\ . \\ MUT_m \end{pmatrix}, \overline{MDT} = \begin{pmatrix} MDT_1 \\ MDT_2 \\ . \\ MDT_m \end{pmatrix}$.

Avec ces notations, on a maintenant :

THÉORÈME 1. — *La disponibilité asymptotique du système existe et se met sous la forme* $A_\infty(D_R) = \dfrac{1}{1 + a_\infty(D_R)}$ *avec*

$$a_\infty(D_R) = \frac{D_R\overline{MDT}}{D_R\overline{MUT}} = \frac{D_R g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})}\,({}^tD_R)}{D_R g \bar{1}^m}, \tag{1}$$

où ${}^tD_R$ *désigne le vecteur colonne transposé de* D_R *et* $\bar{1}^m$ *le vecteur colonne d'ordre* m *ne comportant que des 1.*

3. RECHERCHE DE LA LOI OPTIMALE DE REDÉMARRAGE

En étudiant numériquement quelques exemples (cf. **exemple 3** ci-dessous), nous nous sommes aperçus que la loi optimale de redémarrage n'était pas nécessairement déterministe mais qu'elle pouvait être aléatoire (cf. Introduction). Nous donnons ici des conditions sous lesquelles on peut affirmer qu'elle est déterministe, ce qui permet d'en restreindre la recherche à un nombre fini de lois.

Plus précisément, nous notons δ_i la masse de Dirac en i pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Avec cette notation, $D_R = \delta_i$ signifie que le système redémarre dans l'état i après une réparation. L'ensemble $\{A_\infty(\delta_i) / 1 \leqslant i \leqslant m\}$ étant fini, il admet clairement un plus grand élément. Nous notons i_0 l'un de ses arguments. La loi δ_{i_0} est alors optimale parmi toutes les lois δ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Nous donnons des conditions pour que δ_{i_0} soit aussi optimale parmi toutes les lois D_R.

THÉORÈME 2. — *Soient (H_1) et (H_2) les hypothèses suivantes :*

(H_1) *Pour tout $2 \leqslant k \leqslant p$ fixé, $\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i})$ est indépendant de i $(1 \leqslant i \leqslant m)$.*

(H_2) *Pour tout $2 \leqslant k \leqslant p$ fixé, $(\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i}))_{1\leqslant i\leqslant m}$* et
$\left(\sum_{l=k}^{p}(gA_2)(i,m+l)\right)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *sont monotones par rapport à i, de sens contraire de monotonie.*

Si l'une des hypothèses (H_1) **ou** *(H_2) est réalisée, il existe une loi optimale de redémarrage après réparation du type masse de Dirac. Plus précisément, si $1 \leqslant i_0 \leqslant m_0$ est tel que $A_\infty(\delta_{i_0}) = \max_{1\leqslant i\leqslant m_0} A_\infty(\delta_i)$, on a alors*

$$A_\infty(D_R) \leqslant A_\infty(\delta_{i_0}) \text{ pour toute loi } D_R.$$

(La démonstration de ce résultat peut être trouvée dans [1] ou dans [3]).

Nous indiquons ci-dessous quelques situations où (H_1) est clairement vérifiée :

- Il n'y a qu'un seul état de panne ou, plus généralement, la durée moyenne de réparation $\mathbb{E}(R_{m+k,i})$ est indépendante de $m+k$ et de i. Ce sera par exemple le cas si l'équipe de réparateurs n'est pas sur place au moment de la panne et doit être appelée, et si la durée de la réparation à proprement parler est négligeable devant le temps d'attente de l'équipe de réparateurs.

- $\mathbb{E}(R_{m+k,i})$ est indépendant de $m+k$ pour tout i. Ceci est vrai par exemple si les durées de réparation des composants nécessaires au bon fonctionnement du système sont *négligeables* devant les autres.

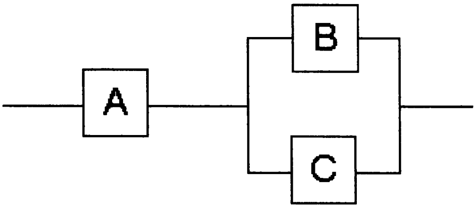
- $\mathbb{E}(R_{m+k,i})$ est indépendant de i pour tout $m+k$. Ceci est vrai par exemple si les durées de réparation des composants nécessaires au bon fonctionnement du système sont *grandes* devant les autres.

- La durée de la réparation est la somme des durées des réparations des différents composants, ce qui est par exemple le cas lorsqu'il n'y a qu'un seul réparateur.

Sous toutes ces hypothèses, on peut restreindre la recherche de la loi optimale aux seules lois déterministes.

En ce qui concerne l'hypothèse (H_2), si les états sont classés par ordre de dégradation croissante, la deuxième partie signifie que le système est dans un état de panne « stochastiquement » plus (ou moins) dégradé lorsqu'il part de i que lorsqu'il part de $i+1$ (cf. [1] pour plus de détails). Cette hypothèse est fréquemment vérifiée. La partie la plus restrictive de (H_2) concerne donc là encore (comme pour (H_1)) les durées moyennes de réparation. Nous en donnons ci-dessous une illustration.

EXEMPLE 3. — *On considère un système formé de trois composants A, B et C, de taux de panne constants notés respectivement λ_A, λ_B et λ_C, non réparables pendant que le système fonctionne. Le composant A est en série avec le sous-système formé par les composants B et C en parallèle (cf. schéma). La panne de A entraîne la panne de B et de C.*



On note $1 = ABC$, $2 = AB\bar{C}$, $3 = A\bar{B}C$ *les états de marche et* $4 = A\bar{B}\bar{C}$, $5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *les états de panne.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C) & \lambda_C & \lambda_B \\ 0 & -(\lambda_A+\lambda_B) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_A+\lambda_C) \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_A \\ \lambda_B & \lambda_A \\ \lambda_C & \lambda_A \end{pmatrix}$$

Nous envisageons deux hypothèses possibles pour les réparations. Sous la première hypothèse, la loi de redémarrage optimale est **aléatoire**, *sous la deuxième, elle est* **déterministe.**

1. *On peut réparer en même temps les composants B et C, ainsi que les composants A et C, mais pas les composants A et B. Les durées moyennes de réparation des composants A, B et C valent respectivement 0.009, 0.005, 0.006. On obtient ainsi :*

$$\overline{\mathbb{E}\,(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.006 & 0.005 & 0.006 \\ 0.015 & 0.014 & 0.009 \end{pmatrix}$$

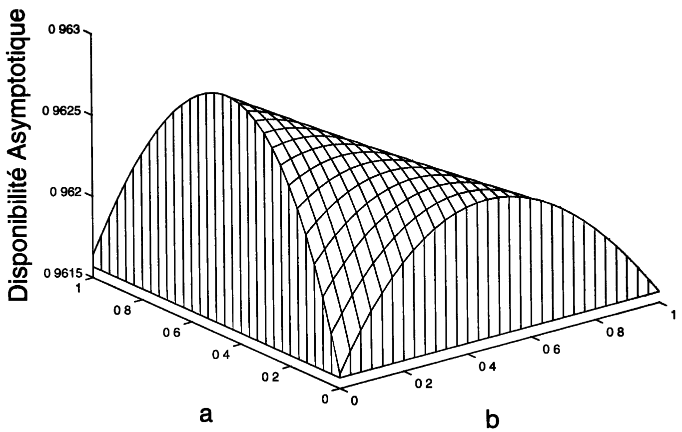
et nous sommes dans le cas où $\left(\mathbb{E}\,(R_{5,i}) - \mathbb{E}\,(R_{4,i})\right)_{1\leqslant i\leqslant m_0}$ *décroît avec* $\boldsymbol{i}$.
On prend par ailleurs

$$\lambda_A = 2.105;\ \lambda_B = 2.1;\ \lambda_C = 3.5.$$

On obtient $((gA_2)(i,5))_{1\leqslant i\leqslant 3} = \begin{pmatrix} 0.6030 \\ 0.5006 \\ 0.3756 \end{pmatrix}$ *et nous sommes dans le cas où* $\left(\sum_{l=k}^{p}(gA_2)(i,m+l)\right)_{1\leqslant i\leqslant m_0}$ *décroît avec i.*

(H_2) n'est donc pas vérifiée.

Pour $D_R = [a,b,1-a-b]$*, on obtient :*



La disponibilité est optimale pour

$$D_R^{opt} = [0.445, 0, 0.555]$$
$$\text{et } A_\infty^{opt} = 0.9630.$$

De plus, $A_\infty(\delta_1) = A_\infty(\delta_2) = A_\infty(\delta_3) = 0.9616.$

Ici, non seulement la loi optimale n'est pas déterministe, mais δ_1, δ_2, δ_3 correspondent même à des minima de A_∞ !

2. *On peut réparer en même temps les composants A et B, mais pas les composants B et C, ni les composants A et C. Les durées moyennes de réparation des composants A, B et C valent respectivement 0.02, 0.02, 0.001.*

   On obtient ainsi

$$\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.021 & 0.02 & 0.001 \\ 0.021 & 0.02 & 0.021 \end{pmatrix}$$

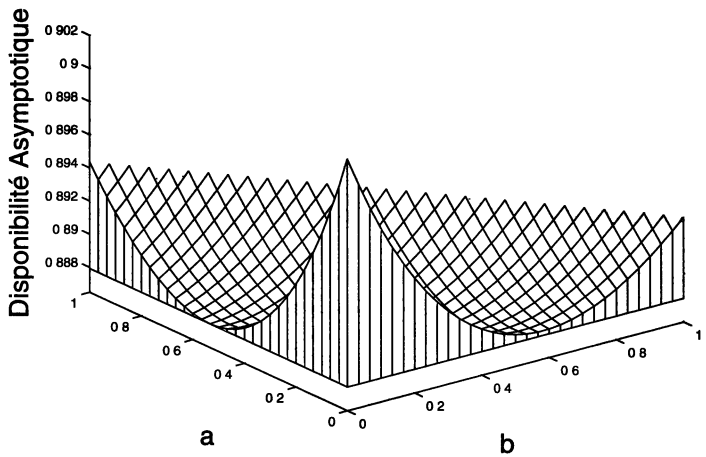
et nous sommes dans le cas où $(\mathbb{E}(R_{5,i}) - \mathbb{E}(R_{4,i}))_{1\leqslant i\leqslant m_0}$ *croît avec i.*

On prend par ailleurs $\lambda_A = 5, \lambda_B = 1$ *et* $\lambda_C = 4$.

On obtient $((gA_2)(i,5))_{1 \leqslant i \leqslant 3} = \begin{pmatrix} 0.8889 \\ 0.8333 \\ 0.5556 \end{pmatrix}$ *et nous sommes dans le cas où* $\left(\sum_{l=k}^{p} (gA_2)(i, m+l)\right)_{1 \leqslant i \leqslant m_0}$ *décroît avec* i.

(H_2) **est donc vérifiée.**

Pour $D_R = [a, b, 1-a-b]$, *on obtient :*



La disponibilité asymptotique est optimale pour la loi **déterministe** $D_R = \delta_3$ *et*

$$A_\infty(\delta_1) \simeq 0.8944, A_\infty(\delta_2) \simeq 0.8929, A_\infty(\delta_3) \simeq 0.9017.$$

4. UN CRITÈRE POUR QUE LES RÉPARATIONS COMPLÈTES SOIENT OPTIMALES

Nous ne présentons ici que le cas où les durées moyennes de réparation $\mathbb{E}(R_{m+k,i})$ ne dépendent pas de l'état de redémarrage i, le cas général pouvant être trouvé dans [1]. La durée moyenne de la réparation associée à l'état de panne $m+k$ est alors notée $\mathbb{E}(R_{m+k})$ et $\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ désigne le vecteur colonne d'ordre p formé par les $\mathbb{E}(R_{m+k})$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$.

Avec ces notations, il est facile de voir que $a_\infty(D_R)$ se met alors sous la forme

$$a_\infty(D_R) = \frac{D_R g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}}{D_R g \bar{1}^m}.$$

Le résultat obtenu (voir **théorème 4** ci-dessous) nous dit que, si les états sont rangés par ordre de « dégradation croissante » et si le système se « détériore » en fonctionnant, la disponibilité asymptotique est d'autant plus grande que la réparation est complète, c'est-à-dire que $A_\infty(D_{R_1}) \geqslant A_\infty(D_{R_2})$ lorsque D_{R_1} est plus petit que D_{R_2}. En particulier, les réparations complètes sont optimales.

Pour traduire le fait que les états de marche sont classés par ordre de dégradation croissante, nous supposons que le taux de panne « global » associé à l'état i, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,m+j}$, croît avec i pour $i \in \{1, ..., m\}$. Nous supposons aussi que la durée moyenne de la réparation qui suit une panne dans l'état i croît avec i. Si l'on convient qu'un vecteur réel est croissant si et seulement si ses coordonnées sont rangées par ordre croissant, ces deux hypothèses se traduisent respectivement par la croissance des vecteurs $A_2\bar{1}^p$ et $A_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$.

Le caractère vieillissant du système est quant à lui traduit par la condition « A_1 est triangulaire supérieure telle que $a_{i,j} \leqslant a_{i+1,j}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $i+2 \leqslant j \leqslant m$ ». Grâce aux travaux de Kijima [3] et à d'autres résultats que l'on peut trouver dans [1] ou [2], on peut montrer que cette condition jointe à la croissance de $A_2\bar{1}^p$ signifie que le système est, à l'instant s, dans un état supérieur (c'est-à-dire plus dégradé) à celui qu'il occupait à l'instant t, pour tous $0 \leqslant t < s$, l'ordre stochastique utilisé pour comparer les états étant l'ordre pour le taux de hasard inversé (ordre rh, voir ci-dessous) :

$$P_t(i,.) \prec_{rh} P_s(i,.)\,, \text{ pour tous } 0 \leqslant t < s, 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2}$$

où $P_t(i,.)$ représente la i-ème ligne du noyau de transition $(P_t(i,j))$ associé à (X_t) $(P_t(i,j) = \mathbb{P}_i(X_t = j))$.

Rappelons que l'ordre rh est défini de la façon suivante (rh pour « reversed hasard rate ») : si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{1, ...m\}$, on appelle taux de hasard inversé de X, la fonction h_X définie sur $\{1, ..., m\}$ par $h_X(i) = \mathbb{P}(X = i / X \leqslant i)$ lorsque $\mathbb{P}(X \leqslant i) > 0$ et $h_X(i) = +\infty$ sinon, le taux de hasard inversé de Y étant défini de la même façon. On dit alors que X (ou la loi de X) est inférieure à Y (ou la loi de Y) pour l'ordre selon le taux de hasard inversé si et seulement $h_X \leqslant h_Y$. Rappelons aussi que cet ordre est plus fort que l'ordre stochastique usuel.

On obtient alors le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Supposons que :*

(H_3) $A_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ *est croissant,*

(H_4) *$A_2 \bar{1}^p$ est un vecteur croissant et A_1 est triangulaire supérieure telle que $a_{i,j} \leqslant a_{i+1,j}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$ et $i+2 \leqslant j \leqslant m$) (ou encore $P_t(i,.) \prec_{rh} P_s(i,.)$ pour tous $0 \leqslant t < s$, $1 \leqslant i \leqslant m$).*

Alors, pour tous D_{R_1} et D_{R_2} :

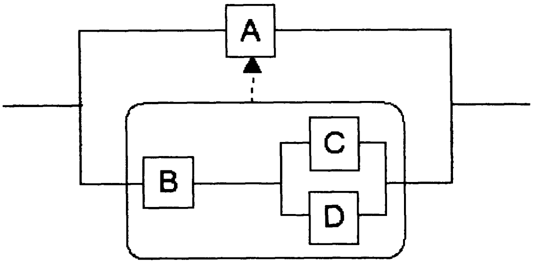
$$D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2} \Longrightarrow A_\infty(D_{R_1}) \geqslant A_\infty(D_{R_2}). \tag{3}$$

En particulier, la suite $(A_\infty(\delta_i))_{1 \leqslant i \leqslant m_0}$ est décroissante et la disponibilité asymptotique est optimale lorsque l'on répare complètement le système :

$$A_\infty(D_R) \leqslant A_\infty(\delta_1), \text{ pour tout } D_R. \tag{4}$$

Remarquons que les conditions (H_3) et (H_4) sont relativement fortes, et sans doute plus fortes que ce à quoi on pouvait a priori s'attendre. Il ne semble pourtant pas possible de beaucoup les affaiblir, comme le montre l'exemple ci-dessous.

EXEMPLE 5. — *On considère un système formé de quatre composants A, B, C et D, de taux de panne constants notés respectivement λ_A, λ_B, λ_C et λ_D. Les composants ne sont pas réparables pendant que le système fonctionne. Le composant A et le sous-système formé des composants B, C et D (cf. schéma) sont en redondance passive : le composant A est normalement en fonctionnement, le sous-système en attente. Lorsque le composant A tombe en panne, le sous-système prend le relais. La probabilité que le composant C « démarre» est γ_C. Les composants B et D « démarrent» toujours.*



Les états de marche sont : $1 = A(BCD)_a$, $2 = \bar{A}BCD$, $3 = \bar{A}BC\bar{D}$, $4 = \bar{A}B\bar{C}D$, *les états de panne :* $5 = \bar{A}\bar{B}CD$, $6 = \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$, $7 = \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$, $8 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_A & \lambda_A\gamma_C & 0 & \lambda_A(1-\gamma_C) \\ 0 & -(\lambda_B+\lambda_C+\lambda_D) & \lambda_D & \lambda_C \\ 0 & 0 & -(\lambda_B+\lambda_C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda_B+\lambda_D) \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_B & \lambda_C & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_D & \lambda_B \end{pmatrix}.$$

On prend $\lambda_A = 1$, $\lambda_B = 0.8$, $\lambda_C = 0.1$, $\lambda_D = 0.1$ *et* $\gamma_C = 0.1$.

Par ailleurs, on suppose qu'il n'y a qu'un seul réparateur et que la durée de réparation de A est négligeable devant les autres. La durée moyenne de réparation ne dépend alors pas de l'état dans lequel le système redémarre après une réparation (état 1 ou 2). La durée moyenne de réparation de B (respectivement C, D) est 0.001 (respectivement 0.1, 0.01). On obtient ainsi $\mathbb{E}(R_5) = 0.001$, $\mathbb{E}(R_6) = 0.011$, $\mathbb{E}(R_7) = 0.11$ *et* $\mathbb{E}(R_8) = 0.101$.

Les vecteurs $A_2\bar{1}^p$ *et* $A_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ *sont alors croissants et* A_1 *est triangulaire supérieure. En revanche, on peut vérifier (cf. [1]) que la propriété de vieillissement* (2) *n'est* **pas** *vérifiée ici pour l'ordre* rh *mais uniquement pour l'***ordre stochastique usuel** *(*$P_t(i,.) \prec_{sto} P_s(i,.)$*, pour tous* $0 \leqslant t < s$, $1 \leqslant i \leqslant m$*).*

On obtient

$$A_\infty(\delta_1) = 0.9580 < A_\infty(\delta_2) = 0.9893$$

(le mieux est de ne pas réparer le composant A) et **les propriétés** (3) **et** (4) **sont fausses**.

En conclusion de cet exemple, on peut voir que, si l'on substitue l'ordre stochastique usuel à l'ordre rh dans l'hypothèse de vieillissement, les propriétés (3) et (4) ne sont plus vraies.

Les conditions de vieillissement utilisées ne peuvent donc guère être affaiblies.

De la même façon, on peut aussi trouver dans [1] ou [2], un exemple montrant que l'ordre stochastique usuel ne convient pas non plus pour mesurer le degré d'achèvement de la réparation : même sous (H_3) et (H_4), « $D_{R_1} \prec_{sto} D_{R_2}$ » est insuffisant pour conclure que $A_\infty(D_{R_1}) \geqslant A_\infty(D_{R_2})$.

5. UN EXEMPLE : CAS D'UN SYSTÈME k SUR n

Nous terminons maintenant la présent» ($k \geqslant 1$). Le cas d'un système formé par n composants en redondance passive a aussi été étudié et peut être trouvé dans [1] ou [3]. Le système de type « k sur n » étudié ici est composé de n composants identiques et indépendants, non réparables tant que le système fonctionne, de taux de défaillance constant λ (non nul). Le système fonctionne si et seulement si au moins k composants fonctionnent. Nous supposons qu'il n'y a qu'un seul réparateur, qu'il met en moyenne une durée c pour arriver lorsqu'on l'appelle (à l'instant où le système tombe en panne) et qu'il met en moyenne une durée r pour réparer *un* composant (r, $c \in \mathbb{R}^+$). Nous nous posons alors les deux questions suivantes : pour un tel système (avec k et n fixés), quel est le meilleur état de redémarrage après réparation, c'est-à-dire combien faut-il réparer de composants ? Par ailleurs, si l'on peut installer autant de composants qu'on le souhaite (pas de contrainte sur n à part $k \geqslant n$), et si le nombre k de composants nécessaires à la bonne marche du système est fixé, combien faut-il prévoir de composants dans le système, c'est-à-dire quelle est la valeur de n pour laquelle la disponibilité asymptotique est maximale lorsque l'on effectue des réparations complètes?

On note i l'état où $i-1$ composants sont en panne, pour $i \in \{1, ..., n\}$. On a $m = n-k+1$ états de marche. Le système ne peut tomber en panne qu'à partir de l'état m et l'état de panne (unique) correspond à $n-k+1$ composants en panne.

D'après le **théorème 2** (H_1), nous savons alors que nous pouvons rechercher la loi optimale de redémarrage parmi les δ_i pour $1 \leqslant i \leqslant n-k+1$.

Par ailleurs, les hypothèses concernant les durées de réparation nous permettent d'écrire $\mathbb{E}(R_{m+1,i})$ sous la forme $\mathbb{E}(R_{m+1,i}) = c + (n-i-k+2)\,r$, car il faut réparer $n-i-k+2$ composants pour faire passer le système de l'état de panne $n-k+2$ à l'état de marche i $(1 \leqslant i \leqslant m = n-k+1)$.

On obtient alors les résultats suivants, le critère utilisé étant bien sûr la disponibilité asymptotique :

PROPOSITION 6.

- *Si $r = 0$ ou $n = k$, il faut réparer tous les composants.*
- *Si $r \neq 0$ et $n > k$,*
  - *Si $\frac{c}{r} \leqslant \frac{1}{k}$, il ne faut réparer qu'un seul composant.*
  - *Si $\frac{c}{r} \geqslant \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1\right)$, il faut réparer tous les composants.*
  - *Si $\frac{1}{k} < \frac{c}{r} < \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1\right)$, le meilleur redémarrage est celui en i_0 $(2 \leqslant i_0 \leqslant m-1)$, c'est-à-dire qu'il faut réparer $n-i_0-k+2$ composants, où i_0 est donné par*

$$\sum_{j=k}^{n-i_0} \left(\frac{n-i_0+1}{j} - 1\right) \leqslant \frac{c}{r} \leqslant \sum_{j=k}^{n-i_0+1} \left(\frac{n-i_0+2}{j} - 1\right).$$

COROLLAIRE 7. — *Si l'on effectue des réparations complètes et s'il n'y a aucune contrainte extérieure sur le nombre n de composants $(n \geqslant k)$, pour k fixé $(k \geqslant 1)$:*

- *Si $r = 0$, il faut installer le plus grand nombre possible de composants $(n = \infty)$.*
- *Si $r \neq 0$,*
  - *si $c = 0$, il faut installer exactement k composants,*
  - *si $c \neq 0$, il faut installer n_0 composants ($n_0 \geqslant k$, indépendant de λ), où n_0 est l'unique entier tel que :*

$$\sum_{j=k}^{n_0-1} \left(\frac{n_0}{j} - 1\right) \leqslant \frac{c}{r} < \sum_{j=k}^{n_0} \left(\frac{n_0+1}{j} - 1\right).$$

EXEMPLE 8. — *Pour un système 5 sur n et $r = 0.1$, le nombre optimal de composants à installer dans le système est donné par le tableau suivant, en fonction de la valeur de c :*

c	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.60	0.65
n_0	5	6	7	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14

c	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.4
n_0	14	14	15	15	16	16	16	17	17	18	18	18	19	19

RÉFÉRENCES

[1] BLOCH-MERCIER S. (2000). Chapitre 1 de « Modèles et optimisation de politiques de maintenance de systèmes », *Thèse de l'Université de Marne-la-Vallée*, dirigée par M. Roussignol, décembre 2000.

[2] BLOCH-MERCIER S. (2001). Monotone Markov Processes with respect to the Reversed Hazard Rate Ordering : an Application to Reliability, *Journal of Applied Probability*, **38** (1), pp. 1–14.

[3] BLOCH-MERCIER S. (à paraître, 2001). Optimal restarting distribution after repair for a Markov deteriorating system, *Reliability Engineering and System Safety.*

[4] KIJIMA M. (1998). Hazard Rate and Reversed Hazard Rate Monotonicities in Continuous-Time Markov Chains. *Journal of Applied Probability*, **35**, 545–556.