

METHODES ET ALGORITHMES DE FIABILITE DYNAMIQUE POUR LA QUANTIFICATION DE PETITS SYSTEMES REDONDANTS DYNAMIC RELIABILITY METHODS AND ALGORITHMS FOR QUANTITATIVE EVALUATION OF SMALL REDUNDANT SYSTEMS

Christiane Coccozza-Thivent, Robert Eymard, Sophie Mercier

Université de Marne-la-Vallée

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR CNRS 8050)

5 Boulevard Descartes

Champs-sur-Marne

77454 Marne-la-Vallée Cedex 2 - France

adresses électroniques : christiane.coccozza@univ-mlv.fr, robert.eynard@univ-mlv.fr, sophie.mercier@univ-mlv.fr

Résumé

Lorsque les taux de défaillance ou de réparation ne sont pas constants, de petits problèmes a priori élémentaires comme le calcul de la disponibilité d'un composant ou le calcul de la fiabilité d'un système formé de deux composants redondants réparables sont des problèmes qui ne semblent être résolus qu'en faisant appel à des simulations ou des approximations dépendant du contexte (c'est-à-dire des valeurs des taux de défaillance et de réparation). Nous proposons ici une nouvelle interprétation de ce type de problèmes à l'aide du formalisme de la fiabilité dynamique, dont le développement est relativement récent. Un tel formalisme nous permet non seulement de décrire très facilement de "petits problèmes" tels que ceux évoqués ci-dessus, mais aussi de prendre en compte d'éventuelles interactions entre les composants (par exemple : redondance passive et pas seulement active, taux de défaillance et de réparation dépendant du contexte et pas seulement de l'âge du composant ou de la durée de la réparation en cours). Cette interprétation nous permet alors d'utiliser des algorithmes numériques que nous avons établis dans un cadre très général de fiabilité dynamique et qui peuvent être écrits facilement dans les cas qui nous préoccupent ici.

Abstract

When the failure and repair rates are not constant, some elementary problems of reliability theory (for example computation of the availability of a component or of the reliability of two redundant components) seem to be solved only using simulations or approximations related to the context, i.e. mainly the values of the failure and repair rates. We show how the formalism of the dynamic reliability allows to modelize such problems, including interactions between components, and to develop an algorithm for the computation of the availability and the reliability of the system.

1. Introduction

Pour le fiabiliste, le comportement du système étudié se modélise par un processus stochastique à valeurs dans un espace fini (les états du système) formé de deux parties : les états de marche et les états de panne. Les transitions, à des instants aléatoires, entre les états, sont quantifiées statistiquement à l'aide des taux de transition. Ceux-ci dépendent évidemment des états entre lesquels s'effectue la transition, mais également, dans le cas de composants avec des taux de défaillance et de réparation généraux, de durées écoulées. Ces durées sont vues comme les variables "physiques" de la fiabilité dynamique. Les équations différentielles qui régissent leur évolution sont particulièrement simples puisqu'elles correspondent à des évolutions dont les vitesses sont soit égales à 1 soit égales à 0.

Dans le cadre de modèles de fiabilité dynamique assez généraux, en considérant le processus formé à la fois de l'état du système étudié et des valeurs des variables physiques, nous avons établi des équations aux dérivées partielles permettant d'obtenir les lois marginales de ce nouveau processus ([1]). A partir de la formulation faible de ces équations, nous avons proposé un algorithme de volumes finis pour leur résolution. Un tel

algorithme nécessite une discrétisation en temps et en espace. Nous avons démontré ([2]) que lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0, la solution fournie par l'algorithme converge (en loi, c'est-à-dire dans le bon sens pour le contexte) vers la quantité cherchée.

L'adaptation de cet algorithme à de "petits problèmes" de fiabilité classique fournit une méthode originale, facile à programmer et mathématiquement solide, de quantification de tels modèles (calculs de disponibilité et de fiabilité par exemple).

Dans le paragraphe 2, nous donnons la forme générale de l'algorithme de base pour ces "petits problèmes", puis nous le modifions pour tenir compte des ordres de grandeurs différents qui peuvent exister entre taux de défaillance et taux de réparation.

Dans le paragraphe 3, nous explicitons le calcul de la disponibilité d'un composant de taux de défaillance et de réparation quelconques dans deux situations : réparation complète et réparation minimale.

Dans le paragraphe 4, nous montrons comment calculer la disponibilité et la fiabilité de deux composants en interaction.

Nous concluons dans le paragraphe 5.

2. Le modèle et l'algorithme

2.1. Le modèle

On suppose que le matériel peut se trouver dans un nombre fini d'états notés i, j, \dots . L'ensemble de ces états est noté E . Le taux de transition de l'état i vers l'état j dépend de d variables réelles positives (les variables physiques), il est noté $a(i, j, (x_1, \dots, x_d))$. Typiquement les variables x_k correspondent aux âges des composants, aux durées des réparations en cours...

Les variables physiques x_k croissent comme le temps, c'est-à-dire avec vitesse 1, ou restent constantes. Lors d'une transition d'un état à un autre, certaines de ces variables peuvent être remises à 0.

Par exemple, dans le cas d'un composant avec réparations parfaites, on prend une seule variable physique égale à la durée écoulée dans l'état courant. Cette variable croit toujours avec vitesse 1 et est remise à 0 à chaque transition.

Dans le cas d'un composant avec réparations minimales, on a deux variables physiques : x_1 est l'âge du composant et x_2 est la durée écoulée depuis le début de la réparation en cours (lorsqu'il n'y a pas de réparation en cours, la valeur de x_2 peut être choisie arbitrairement, on la prendra égale à 0). Lorsque le composant est en marche, la variable x_1 croit avec vitesse 1 (et par convention la variable x_2 reste égale à 0), et lorsque le composant est en panne, la variable x_1 reste constante (car le composant est supposé ne pas vieillir pendant la réparation) et la variable x_2 croit avec vitesse 1. Lors de chaque transition, la variable x_2 est mise à 0, alors que la variable x_1 reste inchangée.

2.2. L'algorithme de base

On note $C(i, j)$ l'ensemble formé des numéros des variables physiques qui sont mises à 0 lors du passage de l'état i à l'état j . On pose

$$\varepsilon(i) = (\varepsilon_1(i), \dots, \varepsilon_d(i)),$$

où $\varepsilon_m(i)$ est la vitesse de croissance de la variable x_m lorsque le matériel est dans l'état i (donc $\varepsilon_m(i) \in \{0, 1\}$).

L'algorithme que nous allons présenter permet de calculer une approximation de la loi à l'instant t de l'état du matériel et des variables physiques. Pour construire cette approximation, on discrétise le temps en intervalles de longueur h (intervalles de la forme $[nh, (n+1)h[$, $n \in \mathbb{N}$) et l'espace d'états des variables physiques en pavés dont les côtés sont de longueur h également, c'est-à-dire en pavés de la forme

$$V_k = [k_1 h, (k_1 + 1)h[\times \dots \times [k_d h, (k_d + 1)h[,$$

avec $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$.

La probabilité qu'à l'instant t , le matériel soit dans l'état i et que les variables physiques soient respectivement dans $[x_m, x_m + dx_m[$ est approchée, pour $nh \leq t < (n+1)h$, par

$$p_n(i, (k_1, \dots, k_d)) dx_1 \dots dx_d$$

lorsque $(x_1, \dots, x_d) \in V_k$ (avec $k = (k_1, \dots, k_d)$). Pour simplifier les notations, on pose

$$p_n(i, (k_1, \dots, k_d)) = p_n(i, k).$$

La probabilité qu'à l'instant t , le matériel soit dans l'état i , est donc approchée par

$$P_t^{(h)}(i) = h^d \sum_k p_{[t/h]}(i, k),$$

où $[t/h]$ désigne la partie entière de t/h . Remarquons que la somme précédente n'est en général pas une série car, si par

exemple le matériel est neuf à l'instant initial, les variables physiques sont inférieures ou égales à t à l'instant t , donc $p_{[t/h]}(i, k)$ est nul si l'un des k_m est strictement supérieur à $[t/h]$.

On pose :

$$\bar{a}(i, j, k) = \frac{1}{h^d} \int_{V_k} a(i, j, y) dy,$$

En fait, on écrit l'algorithme pour la quantité

$$x_n(i, k) = h^d p_n(i, k),$$

qui est l'approximation pour qu'à l'instant $t \in [nh, (n+1)h[$, le matériel soit dans l'état i et que les variables physiques appartiennent au pavé V_k . Nous avons donc :

$$P_t^{(h)}(i) = \sum_k x_{[t/h]}(i, k).$$

Notons $\rho_0 = (\rho_0(i, dx))_{i \in E}$ la loi initiale : $\rho_0(i, dx) = \rho_0(i, dx_1, \dots, dx_d)$ est la probabilité qu'à l'instant $t = 0$, le matériel soit dans l'état i et que les variables physiques appartiennent à $[x_1, x_1 + dx_1[\times \dots \times [x_d, x_d + dx_d[$.

L'algorithme s'écrit :

$$x_0(i, k) = \int_{V_k} \rho_0(i, dx),$$

$$\tilde{x}_{n+1}(i, k) = \frac{x_n(i, k - \varepsilon(i))}{1 + h \sum_{j \in E} \bar{a}(i, j, k)},$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i, k) &= \tilde{x}_{n+1}(i, k) + h \sum_{j \in E} \prod_{m \in C(j, i)} 1_{\{k_m=0\}} \\ &\times \sum_{\substack{\ell_m: \\ m \in C(j, i)}} \bar{a}(j, i, \ell^{k, C(j, i)}) \tilde{x}_{n+1}(j, \ell^{k, C(j, i)}) \end{aligned}$$

avec

$$\ell_m^{k, C(j, i)} = \begin{cases} \ell_m & \text{si } m \in C(j, i), \\ k_m & \text{si } m \notin C(j, i). \end{cases}$$

Dans [2], nous avons montré, dans un cadre beaucoup plus général, que l'algorithme ci-dessus converge vers la loi cherchée, lorsque h tend vers 0.

2.3. L'algorithme modifié

Lorsque les taux de défaillance sont petits devant les taux de réparation, les résultats obtenus ne sont assez précis qu'avec des pas de temps faibles et des temps de calcul très élevés. Il se pose également des problèmes de place mémoire. Pour pallier ces inconvénients, nous proposons une modification de l'algorithme de base qui prend en compte les différents ordres de grandeur. Dans ce nouvel algorithme, la discrétisation de \mathbb{R}^d que l'on emploie, dépend de l'état du matériel.

Pour chaque état i de E , et chaque direction m de \mathbb{R}^d , on se donne un entier $q(i, m)$ supérieur ou égal à 1, et pour $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose :

$$V_k^i = \prod_{m=1}^d [k_m q(i, m) h, (k_m + 1) q(i, m) h[,$$

$$\bar{a}(i, j, k) = \frac{1}{|V_k^i|} \int_{V_k^i} a(i, j, y) dy,$$

où $|V_k^i|$ désigne le volume du pavé V_k^i .

Pour éviter des “redistributions” de masses à l’intérieur des pavés, les entiers q sont pris de telle sorte que, si la fonction $a(i, j, \cdot)$ n’est pas nulle, alors $q(i, m) = q(j, m)$ pour $m \notin C(i, j)$.

On note $\xi_m(i)$ le vecteur de \mathbb{R}^d dont la composante numéro m est égale à $\varepsilon_m(i)$ et dont toutes les autres composantes sont nulles. Remarquons que $\varepsilon(i) = \sum_{m=1}^d \xi_m(i)$.

Le nouvel algorithme s’écrit :

$$x_0(i, k) = \int_{V_k^i} \rho_0(i, dx),$$

$$\tilde{x}_{n+1}(i, k) = \frac{1}{1 + h \sum_{j \in E} \bar{a}(i, j, k)} x_n(i, k) - \sum_{\substack{m: \\ n/q(i, m) \in \mathbb{N}}} \xi_m(i),$$

$$x_{n+1}(i, k) = \tilde{x}_{n+1}(i, k) + h \sum_{j \in E} \prod_{m \in C(j, i)} 1_{\{k_m=0\}} \times \sum_{\substack{\ell_m: \\ m \in C(j, i)}} \bar{a}(j, i, \ell^{k, C(j, i)}) \tilde{x}_{n+1}(j, \ell^{k, C(j, i)}).$$

Dire que $n/q(i, m) \in \mathbb{N}$ signifie que n divisé par $q(i, m)$ est un entier, c’est-à-dire que n est multiple de $q(i, m)$.

En outre, par convention, $x_n(i, k) = 0$ si $k < 0$.

3. Disponibilité d’un composant

Nous considérons un composant de taux de défaillance λ et de taux de réparation μ , ces taux n’étant pas supposés constants. Lors d’une défaillance, le composant est mis immédiatement en réparation.

3.1. Réparations parfaites

Nous regardons tout d’abord le cas d’un composant pour lequel les réparations sont parfaites : à la fin d’une réparation, le composant peut être considéré comme neuf, c’est-à-dire que son âge est égal à 0.

Comme nous l’avons mentionné dans le paragraphe 2.1, la variable physique est la durée passée par le composant dans son état courant, c’est-à-dire son âge lorsqu’il est en marche (état 1) et la durée écoulée depuis le début de la réparation lorsqu’il est en panne (état 0). Cette variable est remise à 0 à chaque transition.

Donc :

$$E = \{1, 0\}, \quad d = 1,$$

$$a(1, 0, x) = \lambda(x), \quad a(0, 1, x) = \mu(x),$$

$$\varepsilon(1) = \varepsilon(0) = 1, \quad C(1, 0) = C(0, 1) = \{1\}.$$

On pose :

$$\bar{\lambda}(k) = \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} \lambda(s) ds = \bar{a}(1, 0, k),$$

$$\bar{\mu}(k) = \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} \mu(s) ds = \bar{a}(0, 1, k).$$

À l’instant initial le composant est neuf, donc :

$$x_0(1, k) = 1_{\{k=0\}}, \quad x_0(0, k) = 0.$$

L’algorithme de base s’écrit :

$$\tilde{x}_{n+1}(1, k) = \frac{x_n(1, k-1)}{1 + h \bar{\lambda}(k)}, \quad \tilde{x}_{n+1}(0, k) = \frac{x_n(0, k-1)}{1 + h \bar{\mu}(k)},$$

$$x_{n+1}(1, k) = \tilde{x}_{n+1}(1, k) + 1_{\{k=0\}} h \sum_{\ell \geq 1} \bar{\mu}(\ell) \tilde{x}_{n+1}(0, \ell-1),$$

$$x_{n+1}(0, k) = \tilde{x}_{n+1}(0, k) + 1_{\{k=0\}} h \sum_{\ell \geq 1} \bar{\lambda}(\ell) \tilde{x}_{n+1}(1, \ell-1).$$

A quoi cela correspond dans le cas de taux constants ?

Supposons que pour tout s , $\lambda(s) = \lambda$, $\mu(s) = \mu$. On pose $z_n(i) = \sum_{k \geq 0} p_n(i, k) = \frac{1}{h} \sum_{k \geq 0} x_n(i, k)$. Remarquons que $P_t(i) = h z_n(i)$ est l’approximation, pour $nh \leq t < (n+1)h$, de la probabilité que le composant soit dans l’état i à l’instant t .

On obtient :

$$\begin{pmatrix} z_{n+1}(1) \\ z_{n+1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+h\lambda} & \frac{h\mu}{1+h\mu} \\ \frac{h\lambda}{1+h\lambda} & \frac{1}{1+h\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n(1) \\ z_n(0) \end{pmatrix},$$

ce qui est de la forme

$$z_{n+1} = M_h z_n.$$

Un calcul montre que

$$(a_h + b_h) M_h^n =$$

$$\begin{pmatrix} b_h + a_h(1 - a_h - b_h)^n & b_h - b_h(1 - a_h - b_h)^n \\ a_h - a_h(1 - a_h - b_h)^n & a_h + b_h(1 - a_h - b_h)^n \end{pmatrix},$$

avec

$$a_h = \frac{h\lambda}{1+h\lambda}, \quad b_h = \frac{h\mu}{1+h\mu}.$$

Nous avons :

$$\begin{pmatrix} P_t^{(h)}(1) \\ P_t^{(h)}(0) \end{pmatrix} = h z_{[t/h]} = M_h^{[t/h]} h z_0 = M_h^{[t/h]} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la disponibilité à l’instant t est approché par

$$P_t^{(h)}(1) = \frac{b_h}{a_h + b_h} + \frac{a_h}{a_h + b_h} (1 - a_h - b_h)^{[t/h]}.$$

On vérifie facilement que $b_h/(a_h + b_h)$ tend vers $\mu/(\lambda + \mu)$ et que $(1 - a_h - b_h)^{[t/h]}$ tend vers $\exp(-(\lambda + \mu)t)$ lorsque h tend vers 0. Par suite l’approximation de la disponibilité converge vers

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t},$$

ce qui correspond au résultat de convergence vers la bonne loi, annoncé à la fin du paragraphe 2.2.

On peut interpréter l’algorithme de la façon suivante : $h z_n$ est la loi de Z_n , $(Z_n)_{n \geq 0}$ étant la chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0, 1\}$, de probabilité de transition M_h et telle que $Z_0 = 1$. Or cette chaîne de Markov est une approximation du processus markovien de sauts de taux de transition λ et μ . En effet, si on discrétise le temps en pas de longueurs h , ce processus markovien de sauts est approché par une chaîne de Markov dont la probabilité de transition de l’état 1 vers l’état 0 est un équivalent de $1 - e^{-\lambda h}$ et dont la probabilité de transition de l’état 0 vers l’état 1 est un équivalent de $1 - e^{-\mu h}$. Or :

$$1 - e^{-\lambda h} \sim \lambda h \sim \frac{\lambda h}{1 + \lambda h}, \quad 1 - e^{-\mu h} \sim \mu h \sim \frac{\mu h}{1 + \mu h},$$

Prise en compte des ordres de grandeur différents

Lorsqu’on veut prendre en compte les ordres de grandeur différents entre λ et μ on prend $q(1, 1) = q$, $q(0, 1) = 1$.

L’algorithme s’écrit :

$$\tilde{x}_{n+1}(1, k) = \begin{cases} \frac{x_n(1, k-1)}{1 + h \bar{\lambda}(k)} & \text{si } n \text{ est multiple de } q, \\ \frac{x_n(1, k)}{1 + h \bar{\lambda}(k)} & \text{si } n \text{ n'est pas multiple de } q, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{n+1}(0, k) = \frac{x_n(0, k-1)}{1 + h\bar{\mu}(k)},$$

$$x_{n+1}(1, k) = \tilde{x}_{n+1}(1, k) + 1_{\{k=0\}} h \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}(\ell) \tilde{x}_{n+1}(0, \ell),$$

$$x_{n+1}(0, k) = \tilde{x}_{n+1}(0, k) + 1_{\{k=0\}} h \sum_{\ell \geq 0} \bar{\lambda}(\ell) \tilde{x}_{n+1}(1, \ell),$$

avec

$$\bar{\lambda}(k) = \frac{1}{qh} \int_{kqh}^{(k+1)qh} \lambda(y) dy, \quad \bar{\mu}(k) = \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} \mu(y) dy.$$

Exemples numériques

Dans le premier cas, la durée de fonctionnement du composant est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 2500$ et de paramètre de forme $\beta = 2$. Sa moyenne est 2216 et son coefficient de variation est égal à 0.52.

La durée de réparation est de loi gamma de paramètre de forme 0.75 et de moyenne 1.5 (coefficient de variation : 1.15).

Nous avons pris $h = 0.002$, $q = 1000$.

Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 1. La ligne horizontale représente la valeur exacte de l'indisponibilité asymptotique. Elle est de 6.76×10^{-4} . L'erreur relative entre l'indisponibilité asymptotique trouvée et sa valeur exacte est inférieure à 0.7%.

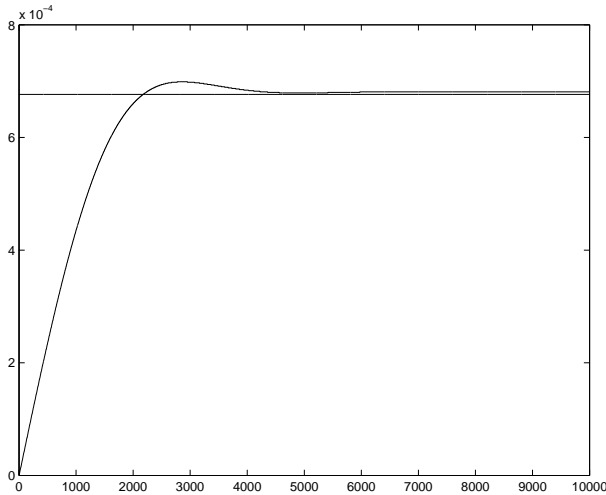


Figure 1: Indisponibilité

Dans le deuxième cas, nous avons considéré un composant de taux de défaillance et de réparation constants, les durées moyennes de fonctionnement et de réparation étant les mêmes que précédemment.

Nous avons pris $h = 0.002$, $q = 100$.

Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 2.

L'erreur relative entre l'indisponibilité asymptotique trouvée et l'indisponibilité asymptotique réelle est de 0.08%. Le maximum de l'erreur relative entre l'indisponibilité calculée par l'algorithme et l'indisponibilité réelle est de 1% et elle correspond aux petites valeurs du temps pour lesquelles la valeur réelle est de l'ordre de 8×10^{-5} .

On voit que la vitesse de convergence vers l'indisponibilité asymptotique est très différente dans le cas des taux constants et des taux non constants.

Des méthodes de calcul de la disponibilité d'un composant, qui reposent sur la discrétisation d'équations de renouvellement, ont été proposées dans [4]. Lorsque les ordres de grandeur des taux de défaillance et de réparation sont différents, notre algorithme, même de base, donne de meilleurs résultats (voir [3]).

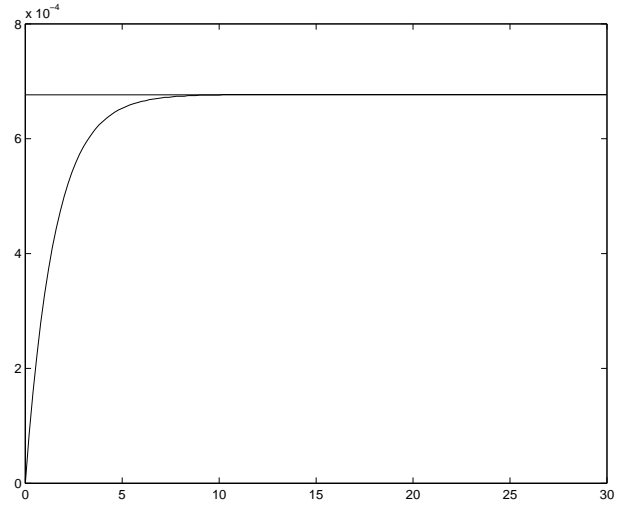


Figure 2: Indisponibilité (taux constants)

3.2. Réparations minimales

Nous supposons maintenant que le composant subit des réparations minimales, autrement dit, à la fin d'une réparation, le composant fonctionne mais il a l'âge qu'il avait au début de la réparation. En outre le taux de réparation (a priori non constant) peut dépendre de l'âge du composant qui est en cours de réparation (pendant les réparations le composant ne vieillit pas). On note μ_x le taux de réparation lorsque le composant est d'âge x .

Les variables physiques sont l'âge du composant (qui est aussi la durée cumulée de fonctionnement), noté x_1 , et le temps écoulé depuis le début de la réparation en cours, noté x_2 . Lorsqu'il n'y a pas de réparation en cours, la valeur de x_2 peut être choisie arbitrairement, on la prendra égale à 0. Lors d'une transition, la variable x_1 reste constante et la variable x_2 est mise à 0.

On a donc :

$$E = \{1, 0\}, \quad d = 2,$$

$$a(1, 0, (x_1, x_2)) = \lambda(x_1), \quad a(0, 1, (x_1, x_2)) = \mu_{x_1}(x_2),$$

$$\varepsilon(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C(1, 0) = C(0, 1) = \{2\}.$$

Pour $k = (k_1, k_2)$ on pose :

$$\bar{\lambda}(k) = \bar{\lambda}(k_1) = \frac{1}{h} \int_{k_1 h}^{(k_1+1)h} \lambda(s) ds = \bar{a}(1, 0, k),$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}((k_1, k_2)) &= \frac{1}{h^2} \int_{k_1 h}^{(k_1+1)h} \int_{k_2 h}^{(k_2+1)h} \mu_{x_1}(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \bar{a}(0, 1, k). \end{aligned}$$

Nous supposons que le composant est neuf à l'instant initial donc

$$x_0(1, (k_1, k_2)) = 1_{\{k_1=0\}} 1_{\{k_2=0\}}, \quad x_0(0, (k_1, k_2)) = 0.$$

Pour prendre en compte les ordres de grandeur différents de λ et μ on prend, pour i égal à 1 ou 0, $q(i, 1) = q$, $q(i, 2) = 1$. L'algorithme s'écrit :

$$\tilde{x}_{n+1}(1, (k_1, k_2)) = \begin{cases} \frac{x_n(1, (k_1-1, k_2))}{1+h\lambda(k_1)} & \text{si } n/q \in \mathbb{N}, \\ \frac{x_n(1, (k_1, k_2))}{1+h\lambda(k_1)} & \text{si } n/q \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{n+1}(0, (k_1, k_2)) = \frac{x_n(0, (k_1, k_2 - 1))}{1 + h \bar{\mu}(k_1, k_2)},$$

$$x_{n+1}(1, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_n(1, (k_1, k_2)) + 1_{\{k_2=0\}} h \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}(k_1, \ell) \tilde{x}_n(0, (k_1, \ell)),$$

$$x_{n+1}(0, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_n(0, (k_1, k_2)) + 1_{\{k_2=0\}} h \bar{\lambda}(k_1) \sum_{\ell \geq 0} \tilde{x}_n(1, (k_1, \ell)).$$

Exemple numérique

Comme dans le premier exemple du paragraphe 3.1, la durée de fonctionnement du composant est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 2500$ et de paramètre de forme $\beta = 2$ (moyenne 2216). La durée de réparation est de loi gamma de paramètre de forme $0.75 + 10^{-5}x_1$ et de moyenne $1.5 + 2 \times 10^{-5}x_1$.

Nous avons pris $h = 0.05$, $q = 400$.

Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 3. L'asymptote, qui ici est égale à 1, est loin d'être approchée pour $t = 10000$.

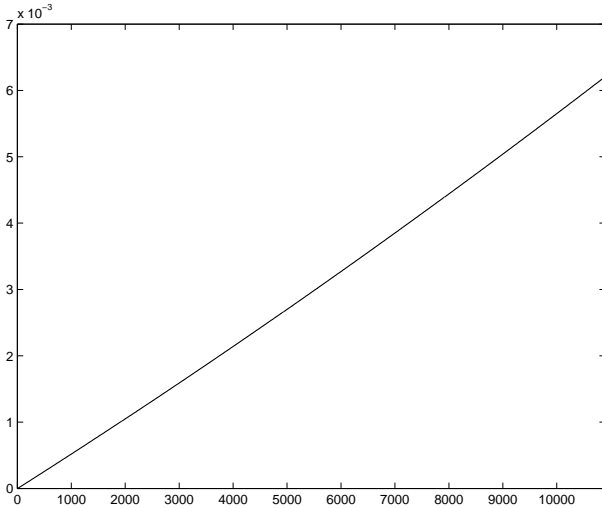


Figure 3: Indisponibilité (réparation minimale)

4. Deux composants en interaction

4.1. Interactions fonctionnelles

Nous considérons deux composants pouvant être chacun dans deux états : l'état de marche noté 1 et l'état de panne noté 0. Le système comporte donc quatre états :

$$e_1 = (1, 1), e_2 = (0, 1), e_3 = (1, 0), e_4 = (0, 0).$$

Il y a deux variables physiques, donc $d = 2$, $x = (x_1, x_2)$:

- x_1 est la durée de séjour du premier composant dans son état courant (âge ou durée de réparation),
- x_2 est la durée de séjour du deuxième composant dans son état courant (âge ou durée de réparation).

Ces variables physiques croissent avec vitesse 1 donc $\varepsilon_m(e_i) = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $m \in \{1, 2\}$.

Les taux de défaillance et de réparation d'un composant ne sont pas supposés constants et dépendent de l'état de l'autre composant :

- le taux de défaillance du composant numéro i ($i = 1, 2$) est $\lambda_i(x_i)$ (respectivement $\lambda'_i(x_i)$) lorsque l'âge de ce composant est x_i et lorsque l'autre composant est en marche (respectivement en panne),
- le taux de réparation du composant numéro i ($i = 1, 2$) est $\mu_i(x_i)$ (respectivement $\mu'_i(x_i)$) lorsque l'âge de ce composant est x_i et lorsque l'autre composant est en marche (respectivement en panne).

Lorsqu'un composant change d'état, la variable physique qui lui correspond est remise à 0, donc :

$$C(e_1, e_2) = C(e_2, e_1) = C(e_3, e_4) = C(e_4, e_3) = \{1\},$$

$$C(e_1, e_3) = C(e_3, e_1) = C(e_2, e_4) = C(e_4, e_2) = \{2\},$$

$$C(e_1, e_4) = \{1, 2\}.$$

Pour tenir compte des ordres de grandeur différents entre les taux de défaillance et de réparation, nous prenons :

$$q(e_1, 1) = q(e_1, 2) = q, \quad q(e_2, 1) = 1, \quad q(e_2, 2) = q,$$

$$q(e_3, 1) = q, \quad q(e_3, 2) = 1, \quad q(e_4, 1) = q(e_4, 2) = 1,$$

et nous posons, pour $i = 1, 2$:

$$\bar{\lambda}_i(m) = \frac{1}{qh} \int_{mqh}^{(m+1)qh} \lambda_i(s) ds, \quad \bar{\mu}_i(m) = \frac{1}{h} \int_{mh}^{(m+1)h} \mu_i(s) ds,$$

$$\bar{\lambda}'_i(m) = \frac{1}{qh} \int_{mqh}^{(m+1)qh} \lambda'_i(s) ds, \quad \bar{\mu}'_i(m) = \frac{1}{h} \int_{mh}^{(m+1)h} \mu'_i(s) ds.$$

Nous supposons que les composants sont neufs à l'instant initial, donc :

$$x_0(e_1, (k_1, k_2)) = 1_{\{k_1=0\}} 1_{\{k_2=0\}},$$

$$x_0(e_j, (k_1, k_2)) = 0 \text{ pour } j \neq 1.$$

L'algorithme s'écrit :

$$(1 + h(\bar{\lambda}_1(k_1) + \bar{\lambda}_2(k_2))) \tilde{x}_{n+1}(e_1, (k_1, k_2)) = \begin{cases} x_n(e_1, (k_1 - 1, k_2 - 1)) & \text{si } n/q \in \mathbb{N}, \\ x_n(e_1, (k_1, k_2)) & \text{si } n/q \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$x_{n+1}(e_1, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_{n+1}(e_1, (k_1, k_2)) + h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_2, (\ell, k_2)) + h 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}_2(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_3, (k_1, \ell)),$$

$$(1 + h(\bar{\mu}_1(k_1) + \bar{\lambda}'_2(k_2))) \tilde{x}_{n+1}(e_2, (k_1, k_2)) = \begin{cases} x_n(e_2, (k_1 - 1, k_2 - 1)) & \text{si } n/q \in \mathbb{N}, \\ x_n(e_2, (k_1 - 1, k_2)) & \text{si } n/q \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$x_{n+1}(e_2, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_{n+1}(e_2, (k_1, k_2)) + h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\lambda}_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_1, (\ell, k_2)) + h 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}'_2(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_4, (k_1, \ell)),$$

$$(1 + h(\bar{\lambda}'_1(k_1) + \bar{\mu}_2(k_2))) \tilde{x}_{n+1}(e_3, (k_1, k_2)) = \begin{cases} x_n(e_3, (k_1 - 1, k_2 - 1)) & \text{si } n/q \in \mathbb{N}, \\ x_n(e_3, (k_1, k_2 - 1)) & \text{si } n/q \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(e_3, (k_1, k_2)) &= \tilde{x}_{n+1}(e_3, (k_1, k_2)) \\
&+ h 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\lambda}_2(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_1, (k_1, \ell)) \\
&+ h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}'_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_4, (\ell, k_2)), \\
(1 + h(\bar{\mu}'_1(k_1) + \bar{\mu}'_2(k_2))) \tilde{x}_{n+1}(e_4, (k_1, k_2)) &= \\
x_n(e_4, (k_1 - 1, k_2 - 1)) & \\
x_{n+1}(e_4, (k_1, k_2)) &= \tilde{x}_{n+1}(e_4, (k_1, k_2)) \\
&+ h 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\lambda}'_2(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_2, (k_1, \ell)) \\
&+ h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\lambda}'_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_3, (\ell, k_2)).
\end{aligned}$$

Exemples numériques

Les deux composants sont supposés être en parallèle.

Dans le premier cas, la durée de fonctionnement du premier composant est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 2500$ et de paramètre de forme $\beta = 2$ (moyenne 2216) lorsque le deuxième composant est en marche, respectivement de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 2000$ et de paramètre de forme $\beta = 1.8$ (moyenne 1779) lorsque le deuxième composant est en panne. Sa durée de réparation est de loi gamma de paramètre de forme 1.5 et de moyenne 3.

La durée de fonctionnement du deuxième composant est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 1662$ et de paramètre de forme $\beta = 1.5$ (moyenne 1500) lorsque le deuxième composant est en marche, respectivement de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 1800$ et de paramètre de forme $\beta = 1.3$ (moyenne 1662) lorsque le deuxième composant est en panne. Sa durée de réparation est de loi lognormale de paramètres $m = 1.5$ et $\sigma = 0.5$ (moyenne 5.1).

Nous avons pris $h = 0.2$ et $q = 250$. Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 4.

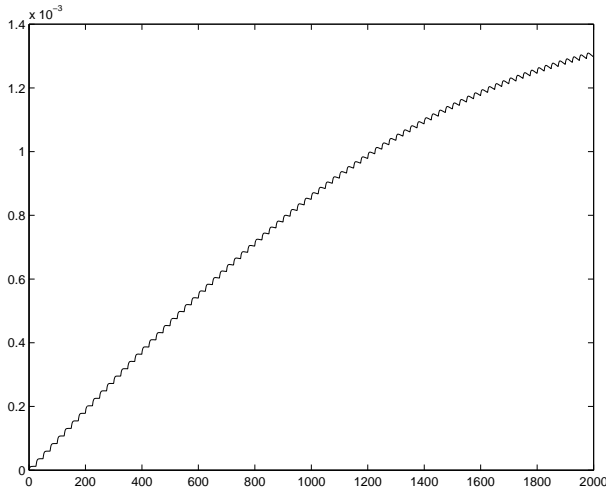


Figure 4: Indisponibilité (2 composants en interaction)

Dans le deuxième cas, nous avons pris pour les durées de fonctionnement et de réparation des lois exponentielles dont les moyennes sont les mêmes que dans le premier cas.

La comparaison entre les résultats trouvés par l'algorithme présenté ici et ceux obtenus par graphe de Markov donne une idée de la qualité de notre algorithme car le calcul par graphe de Markov dans le cas de quatre états est très performant.

Le maximum de l'erreur absolue entre les deux méthodes est de 5.4×10^{-8} et l'erreur relative sur la disponibilité asymptotique est de 1%, ce qui est tout à fait satisfaisant.

Nous développerons plus en détail les résultats numériques dans le cas de la redondance passive (paragraphe 4.3) dont l'algorithme est assez semblable à celui de ce paragraphe-ci.

4.2. Fiabilité d'un système formé de deux composants

Nous supposons que les deux composants sont indépendants et en parallèle. C'est un cas particulier du paragraphe 4.1 avec :

$$\mu'_1 = \mu'_2 = 0, \quad \lambda'_1 = \lambda_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2.$$

4.3. Redondance passive

On considère deux composants en redondance passive. Le premier composant est le composant principal. Le deuxième composant est un composant de secours. En régime nominal, le composant principal est en marche et le composant de secours est à l'arrêt. Lorsque le composant principal tombe en panne, on essaie de démarrer instantanément le composant de secours, mais il y a une probabilité p pour que celui-ci refuse de démarrer lors de la sollicitation.

Lorsque le composant principal est réparé, c'est celui-ci qui fonctionne et le composant de secours est mis à l'arrêt et remis à neuf instantanément.

Pendant qu'il est à l'arrêt, le composant de secours ne vieillit pas. Après une réparation, un composant est considéré comme neuf.

Les états du système sont $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec :

$$e_1 = (1, 1_a), \quad e_2 = (0, 1) \quad e_3 = (1, 0), \quad e_4 = (0, 0),$$

l'état 1_a signifiant que le composant de secours est en attente.

Il y a deux variables physiques, une pour chaque composant. La variable physique correspondant à un composant est son âge lorsque le composant n'est pas en panne et la durée écoulée depuis le début de la réparation si le composant est en panne. Comme le composant de secours ne vieillit pas lorsqu'il est en attente, nous avons

$$\epsilon(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon(e_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{2, 3, 4\}.$$

On note λ_1 et μ_1 (respectivement λ_2 et μ_2) les taux de défaillance et de réparation du composant principal (respectivement du composant de secours). Les taux de transition sont donc les suivants :

$$a(e_1, e_2, (x_1, x_2)) = (1 - p) \lambda_1(x_1),$$

$$a(e_1, e_4, (x_1, x_2)) = p \lambda_1(x_1),$$

$$a(e_2, e_1, (x_1, x_2)) = \mu_1(x_1), \quad a(e_3, e_1, (x_1, x_2)) = \mu_2(x_2),$$

$$a(e_2, e_4, (x_1, x_2)) = \lambda_2(x_2), \quad a(e_4, e_2, (x_1, x_2)) = \mu_2(x_2),$$

$$a(e_3, e_4, (x_1, x_2)) = \lambda_1(x_1), \quad a(e_4, e_3, (x_1, x_2)) = \mu_1(x_1).$$

La variable physique d'un composant est mise à 0 lorsque celui-ci change d'état, par conséquent :

$$C(e_1, e_2) = C(e_3, e_4) = C(e_4, e_3) = \{1\},$$

$$C(e_3, e_1) = C(e_2, e_4) = C(e_4, e_2) = \{2\},$$

$$C(e_2, e_1) = C(e_1, e_4) = \{1, 2\}.$$

Pour tenir compte des ordres de grandeur différents entre les taux de défaillance et de réparation, nous prenons, comme dans le paragraphe 4.1 :

$$q(e_1, 1) = q(e_1, 2) = q, \quad q(e_2, 1) = 1, \quad q(e_2, 2) = q,$$

$$q(e_3, 1) = q, q(e_3, 2) = 1, q(e_4, 1) = q(e_4, 2) = 1.$$

L'algorithme est le suivant :

$$x_0(e_1, (k_1, k_2)) = 1_{\{k_1=0\}} 1_{\{k_2=0\}},$$

$$x_0(e_j, (k_1, k_2)) = 0 \text{ pour } j \neq 1.$$

$$(1 + h \bar{\lambda}_1(k_1)) \tilde{x}_{n+1}(e_1, (k_1, k_2)) = \begin{cases} x_n(e_1, (k_1 - 1, k_2)) & \text{si } n/q \in \mathbb{N}, \\ x_n(e_1, (k_1, k_2)) & \text{si } n/q \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$x_{n+1}(e_1, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_{n+1}(e_1, (k_1, k_2)) + h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_2, (\ell, k_2)) + h 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}_2(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_3, (k_1, \ell)),$$

$$(1 + h (\bar{\mu}_1(k_1) + \bar{\lambda}_2(k_2))) \tilde{x}_{n+1}(e_2, (k_1, k_2)) = \begin{cases} x_n(e_2, (k_1 - 1, k_2 - 1)) & \text{si } n/q \in \mathbb{N}, \\ x_n(e_2, (k_1 - 1, k_2)) & \text{si } n/q \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$x_{n+1}(e_2, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_{n+1}(e_2, (k_1, k_2)) + h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} (1 - p) \bar{\lambda}_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_1, (\ell, k_2)) + h 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}_2(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_4, (k_1, \ell)),$$

$$(1 + h (\bar{\lambda}_1(k_1) + \bar{\mu}_2(k_2))) \tilde{x}_{n+1}(e_3, (k_1, k_2)) = \begin{cases} x_n(e_3, (k_1 - 1, k_2 - 1)) & \text{si } n/q \in \mathbb{N}, \\ x_n(e_3, (k_1, k_2 - 1)) & \text{si } n/q \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$x_{n+1}(e_3, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_{n+1}(e_3, (k_1, k_2)) + h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\mu}_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_4, (\ell, k_2)),$$

$$(1 + h (\bar{\mu}'_1(k_1) + \bar{\mu}'_2(k_2))) \tilde{x}_{n+1}(e_4, (k_1, k_2)) = x_n(e_4, (k_1 - 1, k_2 - 1))$$

$$x_{n+1}(e_4, (k_1, k_2)) = \tilde{x}_{n+1}(e_4, (k_1, k_2)) + h 1_{\{k_1=0\}} 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell_1 \geq 0} \sum_{\ell_2 \geq 0} p \bar{\lambda}_1(\ell_1) \tilde{x}_{n+1}(e_1, (\ell_1, \ell_2)) + h 1_{\{k_2=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\lambda}_2(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_2, (k_1, \ell)) + h 1_{\{k_1=0\}} \sum_{\ell \geq 0} \bar{\lambda}_1(\ell) \tilde{x}_{n+1}(e_3, (\ell, k_2)).$$

Exemples numériques

Dans le premier cas, la durée de fonctionnement du composant principal est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 2500$ et de paramètre de forme $\beta = 2$ (moyenne 2216). Sa durée de réparation est de loi gamma de paramètre de forme 1.5 et de moyenne 3.

La durée de fonctionnement du composant de secours est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\alpha = 1662$ et de paramètre de forme $\beta = 1.5$ (moyenne 1500). Sa durée de réparation est de loi lognormale de paramètres $m = 1.5$ et $\sigma = 0.5$ (moyenne 5.1).

La probabilité de refus de démarrage à la sollicitation pour le composant de secours et $p = 10^{-3}$.

Nous avons pris $h = 0.2$ et $q = 250$.

Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 5. Les oscillations qui apparaissent semblent dues à q , sans qu'on s'explique vraiment le phénomène. Un zoom sur le graphe laisse penser que la valeur asymptotique de l'indisponibilité est atteinte à partir de $t = 4500$. A partir de cette valeur du temps, l'indisponibilité oscille entre 1.40×10^{-6} et 1.54×10^{-6} .

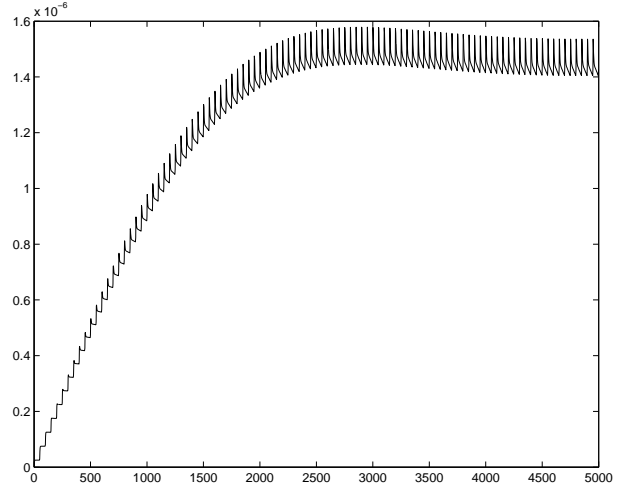


Figure 5: Indisponibilité (redondance passive)

Dans le deuxième cas, les durées de fonctionnement et de réparation sont de lois exponentielles dont les moyennes sont égales à celles du premier cas. Nous avons pris $h = 0.05$ et $q = 1000$. Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 6.

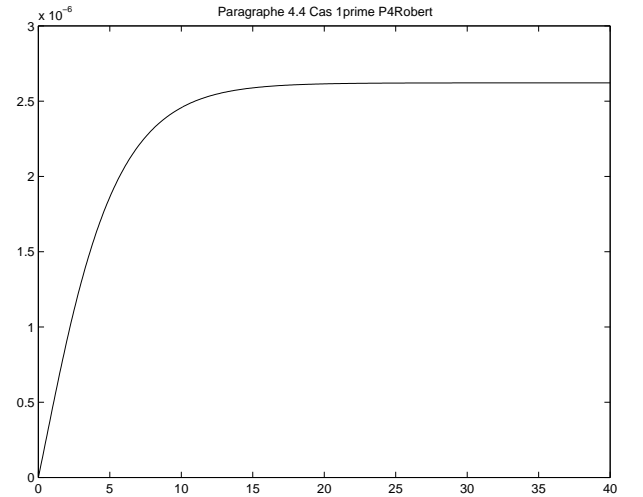


Figure 6: Indisponibilité (redondance passive, taux constants)

L'erreur absolue maximale entre le calcul de l'indisponibilité par l'algorithme présenté et par graphe de Markov est de 6.75×10^{-8} . L'erreur relative maximale est de 2.6%. Ces résultats montrent le bon comportement de notre algorithme.

L'indisponibilité au temps $t = 40$, trouvée par l'algorithme est de 2.62×10^{-6} . L'indisponibilité au même instant calculée en utilisant un graphe de Markov est de 2.52×10^{-6} . L'indisponibilité asymptotique réelle est de 2.55×10^{-6} . On peut donc considérer qu'à l'instant $t = 40$ l'indisponibilité est stabilisée, ce qui, d'après le graphe 5, ne semble se produire qu'au delà de 4000 dans le cas de taux non constants : la vitesse de convergence vers l'indisponibilité asymptotique dans le cas

de taux constants est, là aussi, beaucoup plus rapide que dans le cas de taux non constants.

D'autre part, la valeur de l'indisponibilité asymptotique semble être de l'ordre de 1.5×10^{-6} avec les taux non constants et elle est de l'ordre de 2.5×10^{-6} avec les taux constants. Bien qu'elles soient du même ordre de grandeur, ces valeurs diffèrent. Ceci n'est d'ailleurs pas en contradiction avec la théorie. En effet, dans le cas de taux non constants le processus considéré n'est pas un processus classique (ce n'est pas par exemple un processus semi-markovien) et il n'existe aucun résultat de comparaison avec le cas markovien.

Dans le troisième cas, les durées de fonctionnement des composants ont même loi que dans le premier cas mais les moyennes des durées de réparation sont 10 à 20 fois plus petites que dans les cas 1 et 2.

La durée de réparation du composant principal est de loi gamma de paramètre de forme 15 et de moyenne 0.3. La durée de réparation du composant de secours est de loi lognormale de paramètres $m = -1.5$ et $\sigma = 0.5$ (moyenne 0.25).

Nous avons toujours $p = 10^{-3}$. Nous avons pris $h = 0.02$ et $q = 1000$. Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 7.

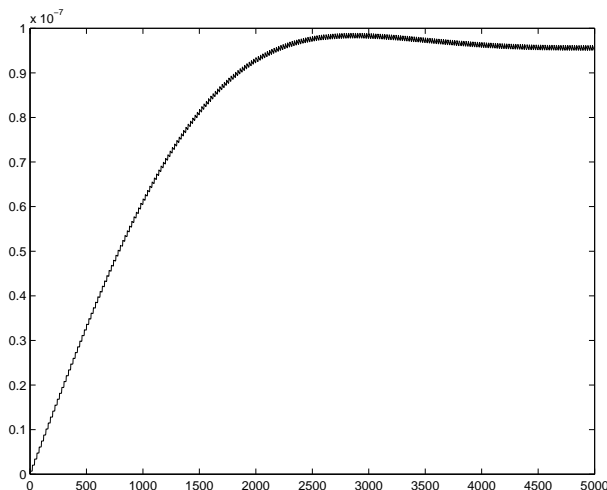


Figure 7: Indisponibilité (redondance passive)

Un zoom sur le graphe laisse penser que l'indisponibilité asymptotique est atteinte autour de $t = 4850$. Sa valeur oscille alors entre 9.50×10^{-8} et 9.63×10^{-8} .

Dans le quatrième cas, les durées de fonctionnement et de réparation sont de lois exponentielles dont les moyennes correspondent au troisième cas.

Nous avons pris $h = 0.004$ et $q = 1000$. Le graphe de l'indisponibilité est donné dans la figure 8.

L'erreur absolue maximale entre le calcul par notre algorithme et le calcul par graphe de Markov est de 2.17×10^{-9} . L'erreur relative maximale entre les deux calculs est de 2.93%.

Ces résultats confirment les commentaires sur les premiers et deuxième cas. En outre, nous voyons que la division par un facteur d'au moins 10 des durées de réparation n'affecte pas sensiblement la qualité de nos résultats.

5. Conclusion

Nous avons montré sur quelques exemples dont la liste n'est pas restrictive, que le formalisme de la fiabilité dynamique permet de décrire aisément des modèles variés de fiabilité classique.

Nous avons proposé un algorithme général de quantification de tels modèles reposant sur une méthode de volumes finis.

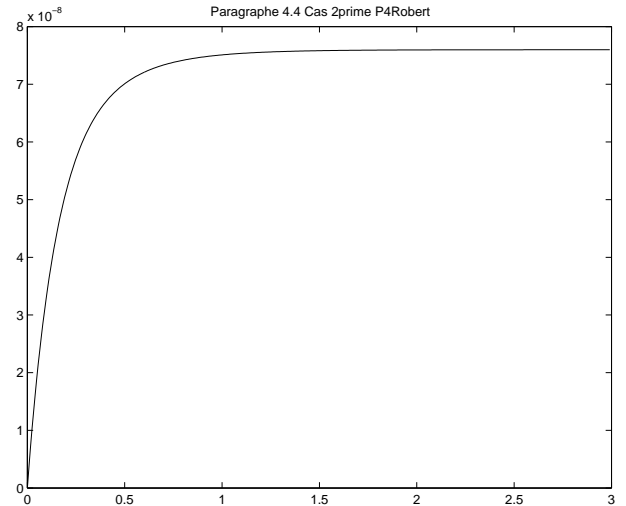


Figure 8: Indisponibilité (redondance passive, taux constants)

Il a été prouvé mathématiquement ([2]) que lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, cet algorithme converge vers la solution cherchée. Nous avons modifié cet algorithme pour tenir compte des ordres de grandeur différents entre taux de défaillance et de réparation.

Nous avons fait tourner l'algorithme proposé sur des exemples simples avec des taux correspondant à des lois de Weibull, gamma et lognormales. Pour tester sa qualité, nous avons également considéré le cas de taux constants, cas pour lequel les méthodes markoviennes donnent des résultats qui peuvent être considérés comme fiables. Ces résultats de comparaison sont très satisfaisants. Par contre, dans le cas de taux non constants, des oscillations apparaissent autour de ce qu'on peut supposer être la bonne valeur. Pour pallier cet inconvénient, on peut lisser le graphe à l'aide d'une moyenne mobile. On peut également tenter de trouver la cause profonde de ce phénomène pour y remédier par une modification de l'algorithme.

Enfin, dans les exemples traités, on constate que l'approximation faite en prenant des taux de défaillance et de réparation constants ne donne qu'une idée de l'ordre de grandeur de l'indisponibilité asymptotique du système considéré et ne permet pas de connaître la vitesse de convergence vers cette valeur asymptotique.

Références

- [1] C. COCOZZA-THIVENT, R. EYMARD, S. MERCIER, M. ROUSSIGNOL, *On the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability*, Prépublications de l'Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées UMR CNRS 8050, n. 02/2003, 2003.
- [2] C. COCOZZA-THIVENT, R. EYMARD, ET S. MERCIER, *Numerical scheme for the quantification of processes used in dynamic reliability*, en cours de rédaction.
- [3] C. COCOZZA-THIVENT ET R. EYMARD, *Numerical computation of the marginal distributions of a semi-Markov process*, en révision pour publication dans *Reliability Modeling, Analysis and Optimization*, H. Pham Editor.
- [4] A. FRITZ, P. POZSGAI, AND B. BERTSCHE B, *Notes on the Analytic Description and Numerical Calculation of the Time Dependent Availability*, MMR'2000 : Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability,, Bordeaux, France, July 4-7,2000, 413–416.