Systèmes non linéaires

Théorème de Cauchy Lipschitz / Temps d'explosion

Exercice 1
On considère les équations différentielles suivantes

$$x' = x^2, \quad x' = \frac{1}{t}x, \quad , x' = x - 1, \quad x' = -\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}.$$

1. Sur quels intervalles peut–on énoncer le théorème de Cauchy–Lipschitz.
2. Déterminer les solutions stationnaires. Que peut-on en déduire pour les autres solutions ?
3. Résoudre ces équations suivant les données de Cauchy.

Exercice 2
On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une et une seule solution maximale notée (I, x).
2. Montrer que si $x_0 \in]0,1[$, alors : $\forall t \in \mathrm{I},\ x(t) \in \,]\,0\,;1\,[$. En déduire que dans ce cas, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
3. Montrer que si $x_0 > 1$, alors : $\forall t \in \mathrm{I}, x(t) > 1$. En déduire que dans ce cas, I est de la forme $]\,a\,;+\infty\,[$.
4. Résoudre explicitement l'équation et dessiner les solutions.

Exercice 3
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{x}{1+t^2+x^2}, \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il admet une unique solution maximale (I, x) pour une donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions stationnaires. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que pour $\pm x_0 > 0$, $\pm x'(t) > 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$. En déduire que l'extrémité gauche de I est $-\infty$.
4. Montrer que $(x^2)' \leqslant 2$. En déduire que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Exercice 4
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathrm{P}' &= -\mathrm{P}^3 + 3\mathrm{P}^2 - 2\mathrm{P}, \quad t \geqslant 0, \\ \mathrm{P}(0) &= \alpha > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions stationnaires
2. Montrer qu'il admet une unique solution globalement définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et que l'on a $0 \leqslant \mathrm{P}(t) \leqslant \max(\alpha, 2)$

Exercice 5

On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On note $\wedge$ le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$. Soit e un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Soit u_0 un vecteur de norme 1. On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{u} = u \wedge e - u \wedge (u \wedge e) \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où u est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz.
2. Montrer que la solution maximale u est telle que pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\mid u(t) \mid \; = 1$, où I désigne le domaine d'existence de la solution maximale.
3. En déduire que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
4. Tracer l'allure de la trajectoires de u, et montrer que u a une limite lorsque t tend vers $+\infty$. Que vaut cette limite ?

Exercice 6

Soit $a > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \qquad |\langle x | f(t,x) \rangle| \leqslant a \langle x | x \rangle$$

Soit φ une solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ que l'on suppose définie sur l'intervalle I.

1. On pose $\mathrm{N}(t) = \langle \varphi(t) | \varphi(t) \rangle$. Montrer que l'application N est dérivable sur I, calculer sa dérivée, et montrer qu'elle vérifie $|\mathrm{N}'(t)| \leqslant 2 \, a \, \mathrm{N(t)}$
2. Soient t et t_0 deux points. Comparer $\mathrm{N}(t)$ et $\mathrm{N}(t_0$.
3. Montrer que les solutions maximales de l'équation que l'on considère sont définies sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les solutions maximales du système

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + t x_2(t) + x_2^2(t) \\ x_2'(t) = -t x_1(t) + x_2(t) - x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

   sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit f un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux solutions de l'équation $x' = f(x)$.

1. Si f est bornée sur U, et $\varphi : \mathrm{J} \to \mathrm{U}$ est une solution de l'équation, avec $\mathrm{J} = \,]\, a\,; b\,[$, alors φ admet une limite en b.
2. Soit φ une solution de l'équation, où $]\, 0\,; +\infty\,[\subset \mathrm{J}$, et on suppose que φ admet une limite finie a en $+\infty$. Montrer que $f(a) = 0$.

Exercice 8

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, et $t \mapsto \mathrm{A}(t)$ et $t \mapsto \mathrm{B}(t)$ deux applications de $\mathrm{J} = \,]\,\alpha\,; +\infty\,[$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ On considère deux équations

$$\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) \tag{1}$$

$$\mathrm{X}'(t) = (\mathrm{A}(t) + \mathrm{B}(t))\mathrm{X}(t) \tag{2}$$

Soit $a \in \mathrm{J}$. On note $\mathrm{R}(t,a)$ la résolvante de (1) telle que $\mathrm{R}(a,a) = \mathrm{id}$.

1. Si Y est solution de (2), montrer que la fonction z définie par $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{R}(t,a)\mathrm{Z}(t)$ est solution d'une équation de la forme

$$\mathrm{Z}'(t) = \mathrm{C}(t)\mathrm{Z}$$

   avec $\mathrm{C}(t) = \mathrm{R}(a,t)\mathrm{B}(t)\mathrm{R}(t,a)$.

2. On suppose que $\|\mathrm{R}(t,s)\| \leqslant k$, pout tous $t, s \in \mathrm{J}$, où k est une constante, et que $\|\mathrm{B}(t)\| \leqslant \varepsilon(t)$, où ε est continue sur J. Trouver une inégalité faisant intervenir z, C et ε. Montrer que si l'on suppose que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$, alors $\|\mathrm{Z}(t)\|$ est uniformément bornée, puis que Z admet une limite lorsque $t \to +\infty$

Exercice 9
On s'intéresse à la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 + t^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

En comparant cette solution aux solutions de $x' = x^2$ et de $x' = t^2$, montrer qu'il existe $t_0 < \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ tel que $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$.

Exercice 10
Soit $\mathrm{V} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On considère le système différentiel

$$\mathrm{X}'' = -\nabla \mathrm{V}(\mathrm{X})$$

1. Montrer que ce système admet une solution unique.
2. On suppose de plus que $\|\mathrm{V}(\mathrm{X})\| \xrightarrow[\|\mathrm{X}\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que les solutions du système sont définies sur $\mathbb{R}$ (on cherchera une intégrale première du système).

Exercice 11
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2x - x^2 - 3xy \quad t > 0 \\ y' = 3y - 2y^2 - xy \quad t > 0 \\ x(0) = \alpha > 0 \qquad y(0) = \beta > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les solutions stationnaires, puis montrer que les axes $x = 0$ et $y = 0$ sont réunions d'orbites.
2. Dans le plan $\Gamma = \Big\{ x > 0 \quad y > 0 \Big\}$, tracer les isoclines nulles, et selon les régions de Γ déterminées par ces isoclines, donner l'orientation du vecteur vitesse
3. Montrer que le système possède une unique solution globalement définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$, et que l'on a
$$0 \leqslant x(t) \leqslant \max(\alpha, 2)$$
$$0 \leqslant y(t) \leqslant \max\left(\beta, \frac{3}{2}\right)$$

Exercice 12
On considère un seau cylindrique contenant de l'eau, percé d'un trou en son fond.

1. En écrivant que la perte d'énergie potentielle causée par la baisse du niveau d'eau pendant un temps $\mathrm{d}t$ est compensée par l'énergie cinétique de l'eau évacuée pendant le même temps, montrer que la hauteur d'eau dans le seau $h(t)$ obéit à une équation différentielle du type
$$h' = -\mathrm{C}\sqrt{h}$$
2. Intégrer cette équation, et vérifier qu'il n'y a pas unicité de la solution pour la condition initiale $h(0) = 0$. Donner une interprétation à ce résultat.

Comparaison de solutions

Exercice 13
Inégalité de Gronwall
Soient u et v deux fonctions d'un intervalle $[\,0\,;\beta\,]$ vers $\mathbb{R}$, continues et positives, telles que

$$u(t) \leqslant \mathrm{C} + \int_0^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s$$

où C est une constante positive ou nulle. Montrer que

$$u(t) \leqslant \mathrm{C}e^{\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s}$$

Exercice 14
Sous–solutions
Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$, et soit u la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Soit v une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui vérifie l'inégalité $v' \leqslant f(t,v)$. On suppose de plus que $v(0) \leqslant x_0$.

Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a $v(t) \leqslant u(t)$.

Exercice 15
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{R})$ une matrice symétrique, soit $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} - \|\mathrm{X}\|\mathrm{X} \\ \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale de $(\mathbf{P})$.
2. Montrer que cette solution est globale sur $\mathbb{R}^+$.
3. On considère α le maximum des modules des valeurs propres de A. Montrer que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|\mathrm{X}(t)\| \leqslant \max(\|\mathrm{X}_0\|, \alpha)$$

(on montrera que $t \mapsto \|\mathrm{X}(t)\|^2$ est sous–solution d'une équation différentielle)

Stabilité

Exercice 16
En construisant une fonctionnelle de Liapounov de la forme $\mathrm{V}(x,y) = a\,\dfrac{x^2}{2} + b\,\dfrac{y^2}{2}$, étudier la stabilité du point $(0,0)$ pour

$$\begin{cases} x' = -x - 2y^3 \\ y' = x\,y^2 - y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x,y)\,y - \lambda x \end{cases} \text{ avec } f \geqslant 0,\ \lambda > 0$$

$$\begin{cases} x' &=& -x^3 + xy^2 \\ y' &=& -2x^2y - y^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &=& -\dfrac{x^3}{2} + 2xy^2 \\ y' &=& -y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &=& -x^3 + 2y^3 \\ y' &=& -2xy^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &=& x^3 - y^3 \\ y' &=& 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -y - x\sqrt{x^2+y^2} \\ y' = x - y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Exercice 17
Étudier la stabilité des solutions stationnaires de

$$\left\{\begin{array}{lcc} x' & = & x^2+y^2-25 \\ y' & = & xy-12 \end{array}\right.$$

Exercice 18
Soit $\mathrm{V} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On considère le système différentiel

$$\mathrm{X}'' = -\nabla \mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Montrer que si X_0 est un minimum local strict de V, alors la solution $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0$ est stable.

Exercice 19
On considère l'équation différentielle

$$x'' + x - x^2$$

1. Écrire cette équation sous forme de système du premier ordre, et trouver les points d'équilibre
2. Étudier par la méthode de linéarisation la stabilité des points d'équilibre. Que peut–on dire du point d'équilibre $(1, 0)$ et des deux autres points d'équilibres notés A et B ?
3. Chercher une fonction de Liapounov pour les points d'équilibre A et B de la forme $\mathrm{V}(x, y) = \frac{1}{2}\, y^2 + g(x)$, et conclure quant à la stabilité des points d'équilibre A et B.