Systèmes dynamiques, Licence 3ème année
Corrigé de l'exercice 12[1]

$\boxed{\mathbf{1}}$ On cherche un changement de fonction inconnue sous la forme $y = zu$, où z est à déterminer, y est solution de l'équation (1) et u est solution d'une équation du type de (2). En calculant les dérivées successives de y, on trouve

$$\begin{cases} y' = z'u + zu' \\ y'' = z''u + 2u'z' + zu'' \end{cases}$$

Si y est solution de l'équation différentielle (1), alors

$$a(z''u + 2u'z' + zu'') + b(z'u + zu') + czu = 0$$

On rassemble les termes afin de faire apparaître une équation différentielle en u :

$$azu'' + (2az' + bz)u' + (az'' + bz' + cz)u = 0$$

Pour que u soit solution d'une équation du type de (2), il suffit de choisir z solution de

$$2az' + bz = 0$$

et u est alors solution de l'équation

$$u'' + qu = 0$$

avec

$$q = \frac{az'' + bz' + cz}{az}$$

$\boxed{\mathbf{2.a}}$ Soit t_0 un zéro d'une solution non identiquement nulle de (2). Alors $u'(t_0) \neq 0$. En effet on sait que la solution nulle est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'' + qu = 0 \\ u(t_0) = 0 \\ u'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Par unicité de la solution de ce problème de Cauchy, si $u'(t_0) = u(t_0) = 0$, alors u est identiquement nulle. Donc si u n'est pas identiquement nulle et que $u(t_0) = 0$, alors $u'(t_0) \neq 0$.

$\boxed{\mathbf{2.b}}$ D'après le cours, on sait que le Wronskien d'un système linéaire vérifie :

$$\mathrm{W}(t) = \mathrm{W}(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(\mathrm{A}(s))\,\mathrm{d}s \right)$$

Si on écrit l'équation (2) sous la forme d'un système linéaire, on trouve

$$\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Y}$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

Dans notre cas, on a donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}(s)) = 0$. On en déduit que le Wronskien est constant, soit :

$$\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad x_1'(t)x_2(t) - x_1(t)x_2'(t) = \mathrm{K}$$

Soient t_0 et t_1 deux zéros consécutifs de x_1. En évaluant le Wronskien en t_0, puis en t_1, on a

$$x_1'(t_0)x_2(t_0) = x_1'(t_1)x_2(t_1)$$

Comme t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs, isolés de x_1, on a

$$x_1'(t_0)x_1'(t_1) < 0$$

d'où

$$x_2(t_0)x_2(t_1) < 0$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t' tel que $x_2(t') = 0$.

Supposons qu'il existe deux zéros t' et t'' de x_2 entre t_0 et t_1. Alors, en inversant les rôles de x_1 et x_2 dans ce que l'on vient de faire, il existe t_2 entre t' et t'' tel que $x_1(t_2) = 0$, ce qui contredit le fait que t_0 et t_1 sont deux zéros consécutifs de x_1.

2.c **On rajoute l'hypothèse :** $q_2 - q_1 > 0$

On note φ la quantité $x_1x_2' - x_2x_1'$. On a

$$\varphi' = x_1'x_2' + x_1x_2'' - x_2'x_1' - x_2x_1'' = x_1x_2(q_1 - q_2)$$

φ' est donc du signe de $-x_1x_2$. Soient t_0 et t_1 deux zéros consécutifs de x_1. On a alors

$$\varphi(t_0) = -x_1'(t_0)x_2(t_0)$$

et

$$\varphi(t_1) = -x_1'(t_1)x_2(t_1)$$

Supposons que x_2 ne s'annule pas sur $[\,t_0\,; t_1\,]$. Alors x_2 et x_1 sont de signe constant sur $[\,t_0\,; t_1\,]$, donc selon les signes respectifs de x_1 et x_2, φ est croissante ou décroissante strictement. Distinguons plusieurs cas :

- si $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ sur $[\,t_0\,; t_1\,]$. Alors $x_1'(t_0) > 0$ et $x_1'(t_1) < 0$. On en déduit que

  $$x_1'(t_0)x_2(t_0) > 0 \qquad \text{et} \qquad x_1'(t_1)x_2(t_1) < 0$$

  on en déduit également que φ est décroissante, donc que

  $$-x_1'(t_0)x_2(t_0) > -x_1'(t_1)x_2(t_1)$$

  ce qui est contradictoire avec les deux premières inégalités trouvées.
- si $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ sur $[\,t_0\,; t_1\,]$. Alors $x_1'(t_0) > 0$ et $x_1'(t_1) < 0$. On en déduit que

  $$x_1'(t_0)x_2(t_0) < 0 \qquad \text{et} \qquad x_1'(t_1)x_2(t_1) > 0$$

  on en déduit également que φ est croissante, donc que

  $$-x_1'(t_0)x_2(t_0) < -x_1'(t_1)x_2(t_1)$$

  ce qui contredit les deux premières inégalités trouvées.

- si $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ sur $[\,t_0\,;t_1\,]$. Alors $x_1'(t_0) < 0$ et $x_1'(t_1) > 0$. On en déduit que
$$x_1'(t_0)x_2(t_0) < 0 \qquad \text{et} \qquad x_1'(t_1)x_2(t_1) > 0$$
on en déduit également que φ est croissante, donc que
$$-x_1'(t_0)x_2(t_0) < -x_1'(t_1)x_2(t_1)$$
ce qui contredit les deux premières inégalités trouvées.
- si $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$ sur $[\,t_0\,;t_1\,]$. Alors $x_1'(t_0) < 0$ et $x_1'(t_1) > 0$. On en déduit que
$$x_1'(t_0)x_2(t_0) > 0 \qquad \text{et} \qquad x_1'(t_1)x_2(t_1) < 0$$
on en déduit également que φ est décroissante, donc que
$$-x_1'(t_0)x_2(t_0) > -x_1'(t_1)x_2(t_1)$$
ce qui contredit les deux premières inégalités trouvées.

On aboutit donc dans les quatre cas possibles, à une contradiction. On en déduit que x_2 ne peut pas être de signe constant sur $[\,t_0\,;t_1\,]$, donc x_2 admet au moins un zéro sur $[\,t_0\,;t_1\,]$.

2.d Supposons que q est à valeurs négatives. On utilise le résultat de la question précédente, avec
$$\begin{cases} q_2 = 0 \\ q_1 = q \end{cases}$$
Supposons que x_1, solution de l'équation différentielle, admette deux zéros t_0 et t_1. Alors toutes les solutions de $x'' = 0$ s'annulent au moins une fois sur $[\,t_0\,;t_1\,]$, ce qui veut dire que toutes les fonctions affines s'annulent sur $[\,t_0\,;t_1\,]$, ce qui n'est pas le cas. On en déduit que x_1 ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant que q est minorée sur $\mathbb{R}$. Appliquons le résultat de la question précédente avec
$$\begin{cases} q_2 = q \\ q_1 = m \end{cases}$$
D'après la question précédente, entre deux zéros d'une solution de $x'' + mx = 0$, il existe un zéro de x_2. Or les solutions de $x'' + mx = 0$ s'annulent une infinité de fois (ce sont des fonctions $\cos$ et $\sin$), donc x s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

3 On effectue le changement de fonction inconnue $y = zu$, où z est solution de
$$2t^2z' + tz = 0$$
On a ainsi $z' = -\dfrac{1}{2t}\,z$, donc
$$z'' = \frac{1}{2t^2}\,z - \frac{1}{2t}\,z' = \frac{1}{2t^2}\,z + \frac{1}{4t^2}\,z = \frac{3}{4t^2}\,z$$
on en déduit
$$q(t) = \frac{\dfrac{3}{4}\,z - \dfrac{1}{2}\,z + (t^2 - n^2)z}{t^2z} = \frac{\dfrac{1}{4} - n^2}{t^2} + 1$$

q admet 1 comme limite en $+\infty$. On en déduit qu'il existe t_0 telle que $q(t) > \dfrac{1}{2}$ sur $[\,t_0\,;+\infty\,[$. D'après la question précédente, les solutions de $u'' + qu = 0$ admettent donc une infinité de zéros sur $[\,t_0\,;+\infty\,[$. En résolvant l'équation différentielle définissant z, on trouve $z(t) = \dfrac{z_0}{\sqrt{|t|}}$. Les fonctions de Bessel J_n, solutions de

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathrm{J}_n = zu$$

où u s'annule une infinité de fois. On en déduit que J_n s'annule une infinité de fois.