Analyse numérique, Matmeca 1ere année
Corrigé de la feuille 6[1]

1. Méthodes à un pas

1.a On s'intéresse au schéma d'Euler explicite

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

> **Rappel : Erreur de troncature locale**
> On appelle *erreur de troncature locale* l'erreur commise lorsqu'on effectue un seul pas de temps du schéma. Autrement dit, on compare la solution de l'EDO
> $$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$$
> au temps t_{n+1} et la valeur y_{n+1} obtenue avec le schéma. On la note parfois $\varepsilon_n = y_{n+1} - y(t_{n+1})$.
> **Consistance du schéma**
> Le schéma sera dit *consistant* si
> $$\lim_{h\to 0} \varepsilon_n = 0$$
> Et il sera dit *d'ordre p* s'il existe K tel que
> $$|\varepsilon_n| \leqslant \mathrm{K}h^{p+1}$$

Afin de démontrer la consistance du schéma, on effectue un développement limité de l'erreur de troncature locale. Notons y la solution de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$$

alors on a

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_n - hf(t_n, y_n) \\ &= y(t_{n+1}) - y_n - hy'(t_n) \\ &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right) - y_n - hy'(t_n) \\ &= \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe K tel que

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant \mathrm{K}h^2$$

[1] généré avec LaTeX 2_ε. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

On en déduit que la méthode d'Euler explicite est consistante, et d'ordre 1. Montrons à présent qu'elle est stable : on va comparer d'une part la solution approchée obtenue au temps n avec le schéma exact, et d'autre part la solution obtenue avec le schéma perturbé :

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) + h\tau_n \\ z_0 = y_0 + \varepsilon_0 \end{cases}$$

On commence par rechercher une égalité sur un seul pas de temps, que l'on va ensuite itérer

$$\begin{aligned} z_{n+1} - y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) - z_n - hf(t_n, z_n) - h\tau_n \\ &= (y_n - z_n) + h(f(t_n, y_n) - f(t_n, z_n)) - h\tau_n \end{aligned}$$

comme f est lipschitzienne, on en déduit l'inégalité

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leqslant (1 + h\mathrm{L})\, |y_n - z_n| + h\, |\tau_n|$$

Si on utilise cette inégalité pour $n = 0$, on trouve

$$|y_1 - z_1| \leqslant (1 + h\mathrm{L})\, |\varepsilon_0| + h\, |\tau_0|$$

Si on l'utilise pour $n = 1$, on trouve

$$|y_2 - z_2| \leqslant (1 + h\mathrm{L})\, |y_1 - z_1| + h\, |\tau_1|$$

En utilisant l'inégalité trouvée pour $n = 0$, il vient

$$|y_2 - z_2| \leqslant (1 + h\mathrm{L})^2\, |\varepsilon_0| + h(1 + h\mathrm{L})\, |\tau_0| + h\, |\tau_1|$$

On va montrer la propriété suivante par récurrence sur n

$$\mathscr{P}(n) \ : \ \text{«}\ |y_n - z_n| \leqslant (1 + h\mathrm{L})^n\, |\varepsilon_0| + h \sum_{i=0}^{n-1} (1 + h\mathrm{L})^{n-1-i}\, |\tau_i|\ \text{»}$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie par définition de z_0.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$ On a montré l'inégalité

  $$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leqslant (1 + h\mathrm{L})\, |y_n - z_n| + h\, |\tau_n|$$

  par hypothèse de récurrence, on a l'inégalité

  $$|y_n - z_n| \leqslant (1 + h\mathrm{L})^n\, |\varepsilon_0| + h \sum_{i=0}^{n-1} (1 + h\mathrm{L})^{n-1-i}\, |\tau_i|$$

  on en déduit

  $$\begin{aligned} |y_{n+1} - z_{n+1}| \leqslant (1 + h\mathrm{L}) \times &\left((1 + h\mathrm{L})^n\, |\varepsilon_0| + h \sum_{i=0}^{n-1} (1 + h\mathrm{L})^{n-1-i}\, |\tau_i| \right) \\ &+ h\, |\tau_n| \end{aligned}$$

  d'où

  $$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leqslant (1 + h\mathrm{L})^{n+1}\, |\varepsilon_0| + h \sum_{i=0}^{n} (1 + h\mathrm{L})^{n-i}\, |\tau_i|$$

  ce qui est l'égalité recherchée au rang $n + 1$

- Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |y_n - z_n| \leqslant (1+h\mathrm{L})^n\,|\varepsilon_0| + h\sum_{i=0}^{n-1}(1+h\mathrm{L})^{n-1-i}\,|\tau_i|$$

il vient alors

$$\begin{aligned}
h\sum_{i=0}^{n-1}(1+h\mathrm{L})^{n-i-1}\,|\tau_i| &\leqslant \max|\tau_i|\,h\sum_{i=0}^{n-1}(1+h\mathrm{L})^{n-i-1}\\
&\leqslant \max|\tau_i|\,h\sum_{i=0}^{n-1}(1+h\mathrm{L})^{i}\\
&\leqslant \max|\tau_i|\,h\,\frac{(1+h\mathrm{L})^n-1}{h\mathrm{L}}\\
h\sum_{i=0}^{n-1}(1+h\mathrm{L})^{n-i-1}\,|\tau_i| &\leqslant \max|\tau_i|\,\frac{(1+h\mathrm{L})^n-1}{\mathrm{L}}
\end{aligned}$$

Enfin, on sait que $(1+h\mathrm{L}) \leqslant \mathrm{e}^{h\mathrm{L}}$, et on en déduit que $(1+h\mathrm{L})^n \leqslant \mathrm{e}^{h\mathrm{L}n}$. Comme nh est inférieur au temps maximal que l'on va atteindre, on a $nh \leqslant b-a$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |y_n - z_n| \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{L}(b-a)}\,|\varepsilon_0| + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{L}(b-a)}-1}{\mathrm{L}}\max|\tau_i|$$

soit

$$\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |y_n - z_n| \leqslant \mathrm{K}\max(|\varepsilon_0| + \max|\tau_i|)$$

La méthode d'Euler explicite est donc stable.

> On est revenu ici à la définition de la stabilité. Dans la pratique, pour les méthodes à un pas, on utilisera le théorème suivant
> **Théorème sur la stabilité des méthodes à un pas**
> Soit une méthode à un pas de la forme
>
> $$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$
>
> alors la méthode est stable si $(t,y,h) \mapsto \Phi(t,y,h)$ est lipschitzienne par rapport à y.

1.b On s'intéresse au schéma suivant (de Taylor)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)\\ \Phi(t_n, y_n, h) = f(t_n, y_n) + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + f(t_n, y_n)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n)\right)\end{cases}$$

Afin de déterminer l'ordre et la consistance du schéma, on étudie l'erreur de troncature locale, c'est à dire l'écart entre le y_{n+1} calculé par le schéma, et la valeur $y(t_{n+1})$ de la solution de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t))\\ y(t_n) = y_n\end{cases}$$

Pour la solution de ce système, commençons par calculer les dérivées successives de y en fonction des dérivées de f :

Pour dériver $t \mapsto f(t, y(t))$, on remarque qu'il s'agit de la composée de

$$f \,:\, (t, y) \mapsto f(t, y)$$

et de

$$u \,:\, t \mapsto (t, y(t))$$

Or on sait que $(f \circ u)' = \mathrm{D}f \cdot u'$, et ici, on a

$$\mathrm{D}f(t, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y), \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right)$$

et $u'(t) = (1, y'(t))$. d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f(t, y(t))\Big) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\right) \cdot (1, y'(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t))\,\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= f(t, y(t)) \\
y''(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + y'(t)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t))\,\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \\
y^{(3)}(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,(t, y(t)) + y'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t} \\
&\quad + (\frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t))\,\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)))\,\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \\
&\quad + f(t, y(t))\,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t}(t, y(t)) + y'(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2f(t, y(t))\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(t, y(t)) + \Big(f(t, y(t))\Big)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t)) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))\;\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) + f(t, y(t))\,\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(t, y(t))
\end{aligned}$$

En écrivant la formule de Taylor pour y, on a

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

en utilisant l'équation différentielle vérifiée par y, ce développement de Taylor devient

$$y(t_{n+1}) = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\,\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + f(t_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n)\right) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

on en déduit

$$\exists \mathrm{K} \qquad |y_{n+1} - y(t_{n+1})| \leqslant \mathrm{K}h^3$$

on en déduit que ce schéma est consistant, et d'ordre 2.

> Pour montrer qu'un schéma est convergent, on utilise très très souvent le théorème suivant
> **Théorème**
> Un schéma stable et consistant est convergent.

On vient de montrer que la schéma est consistant. Afin de montrer qu'il est convergent, montrons qu'il est stable. Pour que

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

soit stable, il suffit que $\Phi(t_n, y_n, h)$ soit lipschitzienne par rapport à la variable y_n. La fonction f étant lipschitzienne, il suffit que g_2 soit lipschitzienne pour que $\Phi(t_n, y_n, h)$ soit lipschitzienne.

On désire construire une méthode d'ordre 3. Pour cela, il suffit que $\Phi(t_n, y_n, h)$ corresponde exactement au développement de Taylor de y au voisinage de t_n. On pose donc

$$\begin{aligned}\Phi(t_n, y_n, h) = {} & f(t_n, y_n) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + f(t_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n)\right) \\ & + \frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n, y_n) + 2f(t_n, y_n)\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(t_n, y_n)\right. \\ & + \Big(f(t_n, y_n)\Big)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) \\ & \left. + f(t_n, y_n)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(t_n, y_n)\right)\end{aligned}$$

Pour construire une méthode d'ordre p, il suffit de poser

$$\Phi(t_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{h^{i-1}}{i!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}t^{i-1}}\,\big(f(t, y(t))\big)_{|t=t_n, y=y_n}$$

1.c On étudie le schéma de Runge–Kutta suivant

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\,f(t_n, y_n)\right)$$

Pour déterminer l'erreur de troncature locale, on commence par développer

$$f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\,f(t_n, y_n)\right)$$

au voisinage du point (t_n, y_n)

> On rappelle la formule de Taylor pour une fonction de n variables à l'ordre p. On développe la fonction au voisinage de $x \in \mathbb{R}^n$, et on se donne h un vecteur « petit » de $\mathbb{R}^n$. Notons $h_1, \dots h_n$ les coordonnées de h
>
> $$f(x+h) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{\{i_1+i_2+\dots i_n = k\}} \frac{h_1^{i_1}h_2^{i_2}\dots h_n^{i_n}}{k!}\,\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}} + \mathrm{O}\left(\|h\|^{p+1}\right)$$
>
> Pour les premiers termes, on écrit parfois ce développement sous la forme
>
> $$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)\cdot h + \frac{1}{2}\,{}^t h\,\mathrm{D}^{(2)}f(x)h + \mathrm{O}\left(\|h\|^3\right)$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2, on trouve

$$\begin{aligned}
f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right) &= f(t_n,y_n)+\nabla f(t_n,y_n)\cdot\left(\frac{h}{2},\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right)\\
&+{}^t\left(\frac{h}{2},\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n,y_n) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(t_n,y_n)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(t_n,y_n) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_n,y_n)\end{pmatrix}\left(\frac{h}{2},\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right)\\
&+\mathrm{O}\left(\|h\|^3\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right) = f(t_n,y_n)+\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,y_n)+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n,y_n)\\
+\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n,y_n)\right.\\
+\frac{h^2}{2}\, f(t_n,y_n)\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial y}(t_n,y_n)\\
\left.+\frac{h^2}{4}\,\left(f(t_n,y_n)\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)+\mathrm{O}\left(h^3\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1})-y_{n+1} &= y(t_{n+1})-y_n-hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2} f(t_n,y_n)\right)\\
&= \mathrm{O}\left(h^3\right)
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe K tel que $|y(t_{n+1})-y_{n+1}|\leqslant \mathrm{K}h^3$. Cela veut dire que le schéma est consistant, d'ordre 2.

Autre méthode

Lorsqu'on regarde le schéma

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right)$$

on voit que l'incrément essaie d'imiter la valeur $f\left(t_n+\dfrac{h}{2}, y\left(t_n+\dfrac{h}{2}\right)\right)$. On écrit donc l'erreur de troncature locale sous la forme

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1})-y_{n+1} &= y(t_{n+1})-y_n-hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\right)\\
&\quad+hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\right)-hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right)\\
&= y(t_{n+1})-y_n-hy'\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\\
&\quad+hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\right)-hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right)\\
|y(t_{n+1})-y_{n+1}| &\leqslant \left|y(t_{n+1})-y_n-hy'\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\right|\\
&\quad+h\left|f\left(t_n+\frac{h}{2}, y\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\right)-f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)\right)\right|\\
&\leqslant \left|y(t_{n+1})-y_n-hy'\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\right|\\
&\quad+\mathrm{L}h\left|y_n+\frac{h}{2}\, f(t_n,y_n)-y\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

On effectue un développement limité de chacun des termes :

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y_n - hy'\left(t_n + \frac{h}{2}\right) &= y_n + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right) \\
&\quad - y_n - h\left(y'(t_n) + \frac{h}{2} y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^2\right)\right) \\
&= \mathrm{O}\left(h^3\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_n + \frac{h}{2}\, f(t_n, y_n) - y\left(t_n + \frac{h}{2}\right) &= y_n + \frac{h}{2}\, y'(t_n) - y\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \\
&= y_n + \frac{h}{2}\, y'(t_n) - y_n - \frac{h}{2}\, y'(t_n) + \mathrm{O}\left(h^2\right) \\
&= \mathrm{O}\left(h^2\right)
\end{aligned}$$

et on en déduit que l'erreur de troncature locale est un $\mathrm{O}\left(h^3\right)$.

Montrons à présent que ce schéma est stable. Pour cela, il suffit de montrer que $y \mapsto \Phi(t_n, y, h)$ est lipschitzienne par rapport à y.

$$\begin{aligned}
|\Phi(t_n, u, h) - \Phi(t_n, v, h)| &= \left| f\left(t_n + \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2} f(t_n, u)\right) \right. \\
&\qquad \left. - f\left(t_n + \frac{h}{2}, v + \frac{h}{2} f(t_n, v)\right) \right| \\
&\leqslant \mathrm{L} \left| u + \frac{h}{2} f(t_n, u) - v - \frac{h}{2} f(t_n, v) \right| \\
&\leqslant \mathrm{L}\, |u - v| + \frac{\mathrm{L}h}{2}\, |f(t_n, u) - f(t_n, v)| \\
&\leqslant \left(\mathrm{L} + \frac{\mathrm{L}^2 h}{2}\right) |u - v|
\end{aligned}$$

On en déduit que pour h donné, Φ est uniformément lipschitzienne. D'après le cours, le schéma est donc stable.

$\boxed{\textbf{1.d}}$ Sur la Figure 1, on a tracé les solutions obtenues pour le schéma d'Euler explicite, pour le schéma de Taylor, d'ordre 2 et 3, et pour le schéma de Runge–Kutta d'ordre 2. L'équation différentielle à laquelle on s'est intéressé est une équation linéaire du premier ordre, on peut donc l'intégrer directement, et le calcul donne

$$x \mapsto \mathrm{e}^{1-\cos(x)}$$

comme solution exacte.

Pour étudier numériquement l'ordre du schéma, on procède de la manière suivante : on suppose que l'erreur e est de la forme $\mathrm{K}h^p$. On a ainsi

$$\log(e) = \log(\mathrm{K}) + p \log(h)$$

On calcule donc l'erreur pour différentes valeurs de h, et on trace $\log(e)$ fonction de $\log(h)$. On est alors censé trouver une droite, de pente p. Comme l'ordre est une valeur asymptotique, il est possible (voire fréquent) que les valeurs de l'erreur trouvées ne soient pas tout à fait alignées. Ce qui compte alors, c'est la direction asymptotique lorsque $\log(h) \to -\infty$. Évidemment, pour obtenir une courbe potable, il vaut mieux utiliser une progression géométrique pour h, et exclure les valeurs trouvées pour h

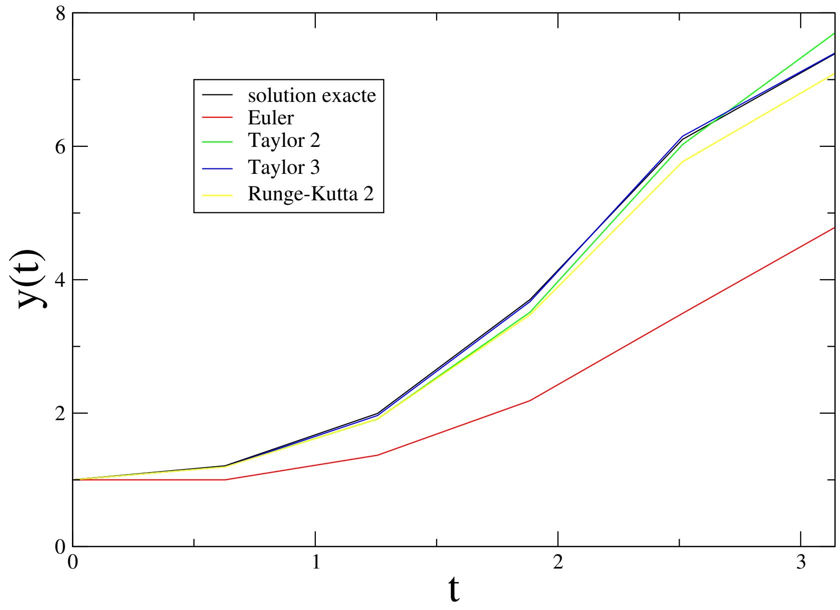

FIG. 1 – Les solutions trouvées pour les différents schémas, avec 5 points de discrétisation.

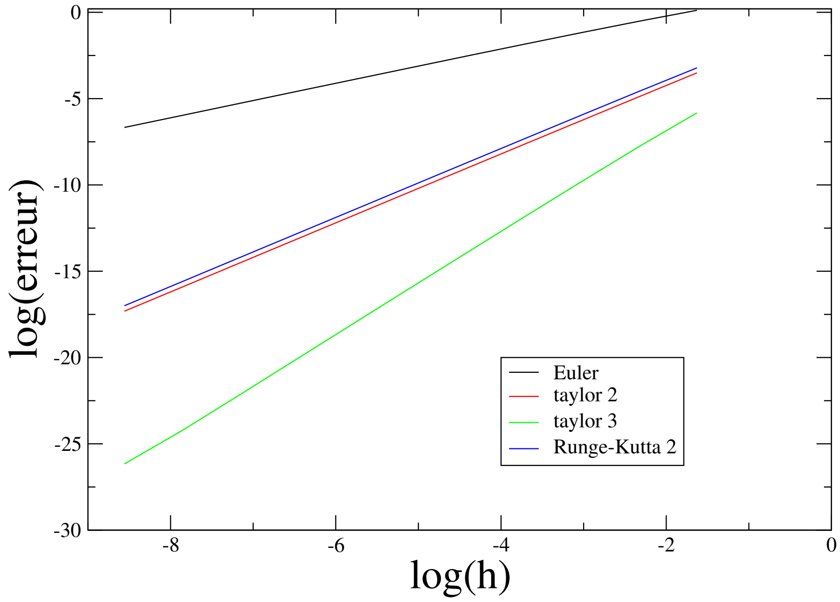

FIG. 2 – Les ordres trouvés pour les différentes méthodes étudiées dans l'exercice.

trop grand. Les résultats que l'on a trouvés sont réprésentés sur la Figure 2. Les pentes des courbes trouvées confirment les études théoriques que l'on a faites.

1.e On s'intéresse aux méthodes à un pas, donc de la forme

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

avec

$$\Phi(t, y, h) = a_1 f(t, y) + a_2 f(t + p_1 h, y + p_2 h f(t, y))$$

La première condition que l'on veut est que la méthode soit consistante. D'après le cours, pour que la méthode soit consistante, il suffit que

$$\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

et on doit donc avoir

$$a_1 + a_2 = 1$$

Comme on l'a déjà vu plusieurs fois avant, on a

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right) \\ &= y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + f(t_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) \right) + \mathrm{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

Et par ailleurs, pour le schéma auquel on s'intéresse

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\Phi(t_n, y_n, h) \\ &= y_n + h\left(a_1 f(t_n, y_n) + a_2 f(t_n + p_1 h, y_n + p_2 h f(t_n, y_n))\right) \\ &= y_n + a_1 h f(t_n, y_n) + a_2 h f(t_n + p_1 h, y_n + p_2 h f(t_n, y_n)) \\ &= y_n + a_1 h f(t_n, y_n) + a_2 h \Bigg(f(t_n, y_n) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) \\ &\qquad + p_2 h f(t_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) + \mathrm{O}\left(h^2\right) \Bigg) \\ y_{n+1} &= y_n + (a_1 + a_2) h f(t_n, y_n) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) \\ &\qquad + a_2 p_2 h^2 f(t_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right) \end{aligned}$$

Pour que les termes d'ordre 1 et 2 s'identifient aux termes que l'on trouve dans le développement de $y(t_{n+1})$, il suffit que l'on ait

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 p_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 p_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

et dans ce cas, on a

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

et le schéma est bien d'ordre au moins 2. Φ est de la forme

$$\Phi(t, y, h) = (1 - \lambda) f(t, y) + \lambda f\left(t + \frac{h}{2\lambda}, y + \frac{h}{2\lambda} f(t, y)\right)$$

Pour que la méthode soit convergente, il suffit qu'elle soit stable. D'après le cours, ceci est réalisé si Φ est lipschitzienne par rapport à la variable y. Pour tout y, z

$$\begin{aligned}
|\Phi(t,y,h)-\Phi(t,z,h)| &= \left|(1-\lambda)f(t,y)+\lambda f\left(t+\frac{h}{2\lambda}, y+\frac{h}{2\lambda}f(t,y)\right)\right. \\
&\qquad \left. -(1-\lambda)f(t,z)-\lambda f\left(t+\frac{h}{2\lambda}, z+\frac{h}{2\lambda}f(t,z)\right)\right| \\
&\leqslant |1-\lambda|\,\mathrm{L}\,|y-z| \\
&\qquad +|\lambda|\,\mathrm{L}\left|y+\frac{h}{2\lambda}f(t,y)-z+\frac{h}{2\lambda}f(t,z)\right| \\
&\leqslant |1-\lambda|\,\mathrm{L}\,|y-z| \\
&\qquad +|\lambda|\,\mathrm{L}\,|y-z|+\frac{\mathrm{L}h}{2}\,|f(t,y)-f(t,z)| \\
|\Phi(t,y,h)-\Phi(t,z,h)| &\leqslant \left(\mathrm{L}(|\lambda|+|1-\lambda|)+\frac{\mathrm{L}^2h}{2}\right)|y-z|
\end{aligned}$$

Ainsi, Φ est lipschitzienne par rapport à y, donc la méthode est stable.

2. Méthodes implicites

$\boxed{\textbf{2.a}}$ On s'intéresse ici au schéma de Cranck–Nicholson

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$$

Le schéma est bien défini si y_{n+1} est défini de manière unique par le schéma. Le réel y_{n+1} est un point fixe de l'application Φ avec $\Phi(y_{n+1}) = y_{n+1}$ avec

$$\Phi\,:\,u \in \mathbb{R} \mapsto y_n + \frac{h}{2}\,(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, u)) \in \mathbb{R}$$

> **Rappel : théorème du point fixe de Picard**
> Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit f une fonction de E dans E. On suppose que f est contractante, c'est à dire que
>
> $$\exists k < 1 \quad \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad d(f(x), f(y)) \leqslant k d(x, y)$$
>
> alors f admet un unique point fixe.

L'existence et l'unicité de Φ sont assurées si Φ est une application contractante. Pour tout u et v réels, on a

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)| &= \Big| y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, u)\Big) \\
&\qquad\qquad - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, v)\Big)\Big| \\
&= \Big|\frac{h}{2}\Big(f(t_{n+1}, u) - f(t_{n+1}, v)\Big)\Big| \\
&\leqslant \frac{h\mathrm{L}}{2}\,|u - v|
\end{aligned}$$

L'application Φ est donc contractante pourvu que $\dfrac{h\mathrm{L}}{2} < 1$, c'est à dire pour $h < \dfrac{2}{\mathrm{L}}$.

Afin de déterminer l'ordre du schéma, on calcule un développement de l'erreur de troncature locale, c'est à dire l'erreur commise dans le schéma entre la solution exacte au temps t_{n+1} du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$$

et la solution approchée

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big)$$

Dans les formules implicites, il est souvent commode de « remplacer » les termes contenant y_{n+1} par les mêmes termes contenant $y(t_{n+1})$:

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big) \\
&= y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big) \\
&\qquad - \frac{h}{2}\Big(f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)
\end{aligned}$$

> Dans cette dernière expression, on voit que si l'on suppose que
>
> $$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant \mathrm{K}h^{p+1}$$
>
> alors le dernier terme
>
> $$\begin{aligned}\left|\frac{h}{2}\Big(f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\right| &\leqslant \frac{\mathrm{L}h}{2}\,|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \\ &\leqslant \frac{\mathrm{KL}h^{p+2}}{2}\end{aligned}$$
>
> est négligeable devant les autres termes. On peut donc mettre ce morceau là dans un coin.

On en déduit

$$\begin{aligned}|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| &\leqslant \left|y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\right| \\ &\quad + \frac{h}{2}\,|f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))| \\ &\leqslant \left|y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\right| \\ &\quad + \frac{h\mathrm{L}}{2}\,|y(t_{n+1}) - y_{n+1}|\end{aligned}$$

d'où

$$\left(1 - \frac{h\mathrm{L}}{2}\right)|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant \left|y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\right|$$

Il reste à développer à l'aide de la formule de Taylor la dernière expression trouvée :

$$\begin{aligned}&y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big) \\ &\qquad = y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\left(y'(t_n) + y'(t_{n+1})\right)\end{aligned}$$

On développe $y(t_{n+1})$ et $y'(t_{n+1})$:

$$y(t_{n+1}) = y_n + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,y''(t_n) + \frac{h^3}{6}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)$$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

On trouve ainsi

$$y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big) = -\frac{h^3}{12}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)$$

donc il existe une réel C tel que

$$\left|y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\right| \leqslant \mathrm{C}h^3$$

On trouve finalement

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant \frac{\mathrm{C}h^3}{1 - \dfrac{h\mathrm{L}}{2}}$$

et on en déduit que la formule est d'ordre 2.

2.b On utilise le schéma

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big)$$

et on étudie l'erreur

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_{n+1}) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big)$$

on va de même essayer de substituer $y(t_n)$ à y_n et $y(t_{n+1})$ à y_{n+1} :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1} = & \, y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big) \\ & + y(t_n) - y_n - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n))\Big) \\ & - \frac{h}{2}\Big(f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant & \left| y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\right| \\ & + |y(t_n) - y_n| + \frac{h}{2}\,|f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n))| \\ & + \frac{h}{2}\,|f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))| \end{aligned}$$

en utilisant le fait que f est lipschitzienne, on trouve

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{h\mathrm{L}}{2}\right)|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant & \bigg| y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y(t_n)) \\ & + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\bigg| + \left(1 + \frac{h\mathrm{L}}{2}\right)|y(t_n) - y_n| \end{aligned}$$

On développe à présent l'expression

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)$$

à l'aide de la formule de Taylor. Il s'agit exactement du même développement qu'à la question précédente, et on a ainsi

$$\left| y(t_{n+1}) - y(t_n) - \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)\right| \leqslant \mathrm{C}h^3$$

On en déduit

$$\left(1 - \frac{h\mathrm{L}}{2}\right)|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant \left(1 + \frac{h\mathrm{L}}{2}\right)|y(t_n) - y_n| + \mathrm{C}h^3$$

soit

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant \left(1 + \frac{h\mathrm{L}}{1 - \dfrac{h\mathrm{L}}{2}}\right) |y(t_n) - y_n| + \frac{\mathrm{C}h^3}{1 - \dfrac{h\mathrm{L}}{2}}$$

2.c

> **Rappel : Lemme de Gronwall discret**
> Si une suite θ_n est telle que
>
> $$0 \leqslant \theta_n \leqslant (1 + h\mathrm{K})\theta_{n-1} + h\tau_{n-1}$$
>
> et h est tel que $0 \leqslant nh \leqslant \mathrm{T} - \mathrm{T}_0$ alors
>
> $$\theta_n \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{K}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)} \left(\theta_0 + \max \frac{\tau_{n-1}}{k}\right)$$

En appliquant le lemme de Gronwall discret à la suite $\theta_n = |y_n - y(t_n)|$, qui est telle que $\theta_0 = 0$, on trouve

$$\theta_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{L}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)}{1-\frac{h\mathrm{L}}{2}}} \frac{\mathrm{C}h^2}{1 - \dfrac{h\mathrm{L}}{2}} = \mathrm{C}'h^2$$

2.d Le schéma est bien défini, pourvu qu'il existe un unique y_{n+1} tel que

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y_{n+1} + (1-\theta)y_n\right)$$

y_{n+1} apparaît comme un point fixe de la fonction

$$\Phi \,:\, z \longmapsto y_n + hf\left(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta z + (1-\theta)y_n\right)$$

Pour qu'un tel point fixe existe et soit unique, il suffit que la fonction Φ soit contractante. Or

$$\begin{aligned}
|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| &= |y_n + hf\left(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta z_1 + (1-\theta)y_n\right) \\
&\qquad - y_n - hf\left(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta z_2 + (1-\theta)y_n\right)| \\
&= h\left|f\left(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta z_1 + (1-\theta)y_n\right)\right. \\
&\qquad \left. - f\left(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta z_2 + (1-\theta)y_n\right)\right| \\
&\leqslant h\mathrm{L}\left|\theta z_1 + (1-\theta)y_n - \theta z_2 - (1-\theta)y_n\right| \\
&\leqslant h\theta\mathrm{L}\left|z_1 - z_2\right|
\end{aligned}$$

On en déduit que la méthode bien définie si $h\theta\mathrm{L} < 1$. Cherchons maintenant l'erreur de troncature locale. On compare la valeur y_{n+1} trouvée par le schéma avec la valeur au temps t_{n+1} de la solution de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$$

Pour cela, on fait apparaître des termes contenant $y(t_{n+1})$ à la place des termes contenant y_{n+1} dans l'erreur de troncature locale

$$\begin{aligned}
y(t_{n+1}) - y_{n+1} &= y(t_{n+1}) - y_n - hf(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y_{n+1} + (1-\theta)y_n) \\
&= y(t_{n+1}) - y_n - hf(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n) \\
&\qquad + h\left(f(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n)\right. \\
&\qquad\quad \left. - f(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y_{n+1} + (1-\theta)y_n)\right)
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant{}& |y(t_{n+1}) - y_n - hf(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n)| \\ &+h\,|f(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n) \\ &\quad -f(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y_{n+1} + (1-\theta)y_n)|\end{aligned}$$

On commence par majorer le second terme. La fonction f étant lipschitzienne en sa deuxième variable, on a

$$\begin{aligned}&|f(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n) \\ &\quad -f(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y_{n+1} + (1-\theta)y_n)| \leqslant \theta \mathrm{L}\,|y(t_{n+1}) - y_{n+1}|\end{aligned}$$

on a donc montré que

$$\begin{aligned}(1-\theta h\mathrm{L})\,|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant{}& |y(t_{n+1}) - y_n - \\ &- hf\Big(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n\Big)\Big|\end{aligned}$$

Il reste à développer cette dernière expression, en commençant par développer

$$f(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n)$$

que l'on peut réecrire sous la forme

$$f\big(t_n + \theta h, y_n + \theta(y(t_{n+1}) - y_n)\big)$$

On a

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}f\big(t_n + \theta h, y_n + \theta(y(t_{n+1}) - y_n)\big) &= f(t_n + \theta h, y_n + \theta h y'(t_n) + \mathrm{O}\left(h^2\right)) \\ &= f(t_n, y_n) + \theta h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) \\ &\quad + \theta h y'(t_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) + \mathrm{O}\left(h^2\right) \\ &= f(t_n, y_n) + \theta h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) \\ &\quad + \theta h f(t_n, y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) + \mathrm{O}\left(h^2\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs, si on développe $y(t_{n+1})$ à un ordre supérieur, on trouve

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right) \\ &= y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\,\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}\,f(t_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}&y(t_{n+1}) - y_n - hf(\theta t_{n+1} + (1-\theta)t_n, \theta y(t_{n+1}) + (1-\theta)y_n) \\ &\quad = \left(\frac{1}{2} - \theta\right) h^2 y''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\end{aligned}$$

On en déduit que le schéma est d'ordre 1 si $\theta \neq \dfrac{1}{2}$, et d'ordre 2 si $\theta = \dfrac{1}{2}$.

3. Méthodes de Runge–Kutta

> **Rappel sur les méthodes de Runge–Kutta**
> Les méthodes de Runge–Kutta sont des méthodes à **un pas** (malgré les apparences) de la forme
>
> $$\begin{aligned} y_{n,i} &= y_n + h\sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f(t_{n,j}, y_{n,j}) \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, y_{n,i}) \\ t_{n,i} &= t_n + c_i h \end{aligned}$$
>
> On les représente sous la forme suivante
>
> $$\begin{array}{c|ccccc} c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ c_n & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

3.a Si $q = 1$, $a_{1,1} = 0$ et $c_1 = 0$, alors

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

il s'agit de la méthode d'Euler explicite. Cette méthode de Runge–Kutta se représente sous la forme

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Si $q = 1$, $a_{1,1} = \theta$, $c_1 = \theta$, $b_1 = 1$, alors

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, y_{n,1})$$

où $y_{n,1}$ est défini implicitement par l'équation

$$y_{n,1} = y_n + \theta hf(t_n + \theta h, y_{n,1})$$

Évidemment, il faut vérifier que $y_{n,1}$ existe et est unique. Ceci est réalisé par exemple si la fonction

$$y \mapsto y_n + \theta hf(t_n + \theta h, y)$$

est strictement contractante, c'est à dire si $\theta h\mathrm{L} < 1$.

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array}$$

Dans ce dernier cas, la méthode se représente sous la forme

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \hline & 1 - \dfrac{1}{2\alpha} & \dfrac{1}{2\alpha} \end{array}$$

et on peut écrire la méthode sous la forme d'une méthode à un pas

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha h, y_n + \alpha h f(t_n + \alpha h, y_n))\right)$$

$\boxed{\textbf{3.b}}$ Les $y_{n,i}$ sont solutions du système non linéaire

$$\forall i \leqslant q \qquad y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t_{n,j}, y_{n,j})$$

que l'on peut écrire sous la forme $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{Y})$ avec

$$\mathrm{Y} \mapsto \mathbf{1} y_n + h\mathrm{A} \begin{pmatrix} f(t_{n,1}, y_{n,1}) \\ f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ \vdots \\ f(t_{n,q}, y_{n,q}) \end{pmatrix}$$

où **1** est le vecteur ne comportant que des 1. Supposons que la fonction F admette un unique point fixe (l'existence de ce point fixe sera démontrée, sous une certaine condition, à la question ($3.e.i$)). Alors ce point fixe dépend de y_n, de t_n et de h. On a donc $y_{n,i} = y_{n,i}(t_n, y_n, h)$. On a alors

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

avec

$$\Phi(t_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^{q} b_i f\big(t_n + c_i h, y_{n,i}(t_n, y_n, h)\big)$$

$\boxed{\textbf{3.c}}$ D'après le cours, on sait que pour qu'une méthode à un pas sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

soit consistante, il suffit que $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$. Si $h = 0$, alors on a pour tout i, $y_{n,i} = y$, et $t_{n,i} = t_n$. On en déduit

$$\Phi(t, y, 0) = \sum_{i=1}^{q} b_i f(t, y)$$

La condition de consistance est donc que

$$\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$$

Comme on vient de le voir, on a $y_{n,i} = y_n$ lorsque $h = 0$. De plus, si f est suffisamment régulière, alors d'après le théorème des fonctions implicites, les $y_{n,i}$ sont des fonctions régulières de y_n et de h. On en déduit que

$$y_{n,i} = y_n + \mathrm{o}\,(1)$$

De plus, on a $t_{n,i} = t_n + \mathrm{o}\,(1)$. En injectant ces deux développements dans l'équation définissant $y_{n,i}$, on obtient

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f(t_n + \mathrm{o}\,(1)\,, y_n + \mathrm{o}\,(1))$$

La fonction f étant une fonction continue de ses deux variables, on en déduit, en composant les développements limités

$$y_{n,i} = y_n + h\sum_{j=1}^{q} a_{i,j}(f(t_n, y_n) + \mathrm{o}(1)) = y_n + h\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t_n, y_n) + \mathrm{o}(h)$$

On a ainsi un développement limité à l'ordre 1 de $y_{n,i}$.

> En réinjectant à nouveau le développement limité dans l'équation définissant $y_{n,i}$, on peut obtenir un développement limité à n'importe quel ordre de $y_{n,i}$. Il suffit juste de quelques kilos de papier, quelques litres d'encre et d'un peu de patience. Ne pas oublier de boire frais (de l'eau, pas de l'encre !) et de s'alimenter régulièrement.

Il vient alors

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f\left(t_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t_n, y_n) + \mathrm{o}(h)\right)\\
&= y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i \Bigg[f(t_n, y_n)\\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n), \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n)\right) \cdot \left(c_i h, h\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t_n, y_n)\right) + \mathrm{o}(h)\Bigg]\\
&= y_n + h\left(\sum_{i=1}^{q} b_i\right) f(t_n, y_n) + h^2\left(\sum_{i=1}^{q} b_i c_i\right)\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n)\\
&\quad + h^2\left(\sum_{i=1}^{q} b_i \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}\right) f(t_n, y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) + \mathrm{o}\left(h^2\right)
\end{aligned}$$

Pour que le schéma soit d'ordre 2, il faut que ce dernier développement corresponde au même développement à l'ordre 2 de la solution exacte de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t))\\ y(t_n) = y_n \end{cases}$$

Comme on l'a déjà vu des milliers de fois

$$y(t_{n+1}) = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + f(t_n, y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n)\right) + \mathrm{o}\left(h^2\right)$$

On en déduit que le schéma est d'ordre 2 si et seulement si

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i = 1\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i c_i = \frac{1}{2}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3.d D'après les questions précédentes, le schéma est consistant, et d'ordre 2. Il est même d'ordre 4, mais j'ai la flemme de le montrer [2].

[2] Cet argument ne sera pas retenu comme valable le jour de l'examen. En même temps, ça m'étonnerait qu'il y ait un schéma à un pas d'ordre 4 à étudier.

3.e.i On reprend les notations de la question (3.c). Alors

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{F}(\mathrm{Y})-\mathrm{F}(\mathrm{Z})\|_\infty &= \|h\mathrm{A}\begin{pmatrix} f(t_{n,1},y_{n,1})\\ f(t_{n,2},y_{n,2})\\ \vdots \\ f(t_{n,q},y_{n,q})\end{pmatrix} - h\mathrm{A}\begin{pmatrix} f(t_{n,1},z_{n,1})\\ f(t_{n,2},z_{n,2})\\ \vdots \\ f(t_{n,q},z_{n,q})\end{pmatrix}\|_\infty \\
&\leqslant h\|\mathrm{A}\|_\infty \left\| \begin{pmatrix} f(t_{n,1},y_{n,1})\\ f(t_{n,2},y_{n,2})\\ \vdots \\ f(t_{n,q},y_{n,q})\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(t_{n,1},z_{n,1})\\ f(t_{n,2},z_{n,2})\\ \vdots \\ f(t_{n,q},z_{n,q})\end{pmatrix}\right\|_\infty \\
&\leqslant h\|\mathrm{A}\|_\infty \sup_{1\leqslant i\leqslant q} |f(t_{n,i},y_{n,i})-f(t_{n,i},z_{n,i})| \\
&\leqslant h\|\mathrm{A}\|_\infty \mathrm{L} \sup_{1\leqslant i\leqslant q} |y_{n,i}-z_{n,i}| \\
&\leqslant h\mathrm{L}\|\mathrm{A}\|_\infty \|\mathrm{Y}-\mathrm{Z}\|_\infty
\end{aligned}
$$

on en déduit que sous la condition $h\mathrm{L}\|\mathrm{A}\|_\infty$, la fonction F est contractante, donc elle admet un unique point fixe.

On se donne deux réels y et z, et un temps t. Soit h tel que $h\mathrm{L}\|\mathrm{A}\|_\infty < 1$. Aux réels y et z on associe les suites de réels y_i et z_i tels que $1 \leqslant i \leqslant q$, avec

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant q \qquad y_i = y + h\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t_j, y_j)$$

et

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant q \qquad z_i = z + h\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} f(t_j, z_j)$$

Si Φ est définie comme à la question (3.b), alors, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que f est L–lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, on obtient

$$|\Phi(t,y,h)-\Phi(t,z,h)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{q} |b_i|\right) \mathrm{L} \sup_{1\leqslant i\leqslant q} |y_i - z_i|$$

Il reste à trouver une inégalité sur $|y_i - z_i|$. En utilisant les deux égalités définissant les suites y_i et z_i, on a

$$y_i - z_i = y - z + h\sum_{i=1}^{q} a_{i,j}\Big(f(t,y_j) - f(t,z_j)\Big)$$

En refaisant exactement la même chose que ce qu'on a fait pour montrer que F était contractante, on obtient

$$\|\mathrm{Y}-\mathrm{Z}\| \leqslant |y-z| + h\|\mathrm{A}\|_\infty \mathrm{L}\|\mathrm{Y}-\mathrm{Z}\|$$

où on a noté Y et Z les vecteurs de $\mathbb{R}^q$ de coordonnées respectives y_i et z_i. On en déduit que si $h \leqslant h^\star$, où $h^\star$ est tel que $h^\star \mathrm{L}\|\mathrm{A}\|_\infty < 1$, on obtient

$$\|\mathrm{Y}-\mathrm{Z}\| \leqslant \frac{1}{1-h^\star \mathrm{L}\|\mathrm{A}\|_\infty} \, |y-z|$$

On aboutit finalement à

$$|\Phi(t,y,h)-\Phi(t,z,h)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{q} |b_i|\right) \leqslant \frac{\mathrm{L}}{1-h^\star \mathrm{L}\|\mathrm{A}\|_\infty} \, |y-z|$$

et donc Φ et contractante, ce qui assure que la méthode est stable.

3.e.ii Un des corollaires du théorème du point fixe nous assure que si l'une des itérées de F est contractante, alors F admet un point fixe. Si on itère n fois l'inégalité trouvée à la question (3.e.i), on obtient

$$\|\mathrm{F}^n(\mathrm{Y}) - \mathrm{F}^n(\mathrm{Z})\|_\infty \leqslant h^n \mathrm{L}^n \| \,|\mathrm{A}|^n\, \|_\infty \|\mathrm{Y} - \mathrm{Z}\|_\infty$$

où $|\mathrm{A}|$ est la matrice dont les coefficients sont les $|a_{i,j}|$. Or on sait que si $h^n \mathrm{L}^n \rho(|\mathrm{A}|) < 1$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} h^n \mathrm{L}^n \| \,|\mathrm{A}|^n\, \|_\infty = 0$$

on en déduit qu'il existe n_0 tel que $h^{n_0} \mathrm{L}^{n_0} \| \,|\mathrm{A}|^{n_0}\, \|_\infty < 1$, et pour ce n_0, F est contractante.

En reeprenant la démarche de la question précédente, mais en prenant des valeurs absolues plutôt que directement des normes, on a

$$|\mathrm{Y} - \mathrm{Z}| \leqslant |y - z| \,\mathbf{1} + h^\star \mathrm{L}\, |\mathrm{A}|\, |\mathrm{Y} - \mathrm{Z}|$$

où « $\leqslant$ » signifie que chacune des composante est inférieure, et $|\mathrm{Y}|$ est le vecteur ayant pour composantes $|y_i|$. En itérant cette inégalité, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{Y} - \mathrm{Z}| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{n} h^{\star n} \mathrm{L}^n \,|\mathrm{A}|^n \right) \mathbf{1} + h^{\star n+1} \mathrm{L}^{n+1} \,|\mathrm{A}|^{n+1}\, |\mathrm{Y} - \mathrm{Z}|$$

Cette dernière somme converge si $h^\star \mathrm{L}\rho(|\mathrm{A}|) \leqslant 1$, d'où

$$|\mathrm{Y} - \mathrm{Z}| \leqslant (\mathrm{Id} - h^\star \mathrm{L}\, |\mathrm{A}|)^{-1}\, |y - z| \,\mathbf{1}$$

soit

$$\|\mathrm{Y} - \mathrm{Z}\|_\infty \leqslant \|(\mathrm{Id} - h^\star \mathrm{L}\mathrm{A})^{-1}\|_\infty \,|y - z|$$

et on prouve alors, de la même manière qu'à la question précédente, que $y \mapsto \Phi(t, y, h)$ est lipschitzienne.

4. Méthodes multipas

Remarque sur les formules de Taylor
On rappelle les différentes formules de Taylor (avec les hypothèses de régularité sur f)

- **Formule de Taylor–Young**
Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors
$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{D}f(x)[h] + \cdots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{D}^{(n)}f(x)[h,h,\ldots,h] + \mathrm{o}\left(\|h\|^n\right)$$
Si la fonction est $\mathscr{C}^{n+1}$, alors
$$f(x+h) = f(x)+\mathrm{D}f(x)[h]+\cdots+\frac{1}{n!}\,\mathrm{D}^{(n)}f(x)[h,h,\ldots,h]+\mathrm{O}\left(\|h\|^{n+1}\right)$$
- **Formule de Taylor–Lagrange**
Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et que la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de f est bornée par un réel M_{n+1}, alors
$$\Big|f(x+h) - f(x) - \mathrm{D}f(x)[h] - \cdots - \frac{1}{n!}\,\mathrm{D}^{(n)}f(x)[h,h,\ldots,h]\Big| \leqslant \frac{\|h\|^{n+1}\mathrm{M}_{n+1}}{(n+1)!}$$
(dans le cas $n = 0$, l'inégalité de Taylor–Lagrange est l'inégalité des accroissements finis)

D'autre part, deux formules de Taylor sont spécifiques aux fonctions d'une seule variable

- **Formule de Taylor–Mac Laurin** Si la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ alors il existe θ dans $[\,0\,;1\,]$ tel que
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!} + \frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}$$
(dans le cas $n = 0$, la formule de Taylor–Mac Laurin n'est autre que le théorème des accroissements finis)
- **Formule de Taylor avec reste intégral**
$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!}+\int_x^{x+h}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x+h-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Remarquons enfin qu'il arrive qu'on ait besoin d'un reste de type Mac Laurin ou d'un reste intégral, mais avec des fonctions de plusieurs variables. Dans ce cas, on utilise la fonction
$$\varphi\,:\,t \mapsto f(x+th)$$
(où t est un réel, et x et h dont des vecteurs) qui est bien une fonction d'une

> seule variable, à laquelle on peut appliquer les formules de Taylor–Mac Laurin ou Taylor avec reste intégral.

4.a On utilise la formule de Taylor Mac Laurin à l'ordre 2 afin de majorer la première erreur de consistance :

$$\exists \theta \in [\,0\,;1\,] \qquad y(t_1) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2}\, y''(\theta h)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0 &= \frac{y(t_1) - y(0)}{h} - f(0, y(0)) \\ &= \frac{y(t_1) - y(0)}{h} - y'(0) \\ &= y'(0) + \frac{h}{2}\, y''(\theta h) - y'(0) \\ \mathrm{E}_0 &= \frac{h}{2}\, y''(\theta h) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\mathrm{E}_0| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h}{2}$$

Pour majorer la deuxième erreur de consistance, on utilise la formule de Taylor–Mac Laurin à l'ordre 3, d'une part en t_{n+1}, et d'autre part en t_{n-1}

$$\exists \theta_1 \in [\,0\,;1\,] \qquad y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_n) + \frac{h^3}{6}\, y^{(3)}(t_n + \theta_1 h)$$

$$\exists \theta_2 \in [\,0\,;1\,] \qquad y(t_{n-1}) = y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_n) - \frac{h^3}{6}\, y^{(3)}(t_n - \theta_2 h)$$

donc

$$\exists \theta_1, \theta_2 \qquad y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) = 2hy'(t_n) + \frac{h^3}{6}\, \Big(y^{(3)}(t_n + \theta_1 h) + y^{(3)}(t_n - \theta_2 h)\Big)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_n &= \frac{y(t_{n+1}) - y(t_{n-1})}{h} - 2f(t_n, y(t_n)) \\ &= \frac{y(t_{n+1}) - y(t_{n-1})}{h} - 2y'(t_n) \\ &= 2y'(t_n) + \frac{h^2}{6}\, \big(y^{(3)}(t_n + \theta_1 h) + y^{(3)}(t_n - \theta_2 h)\big) - 2y'(t_n) \\ \mathrm{E}_n &= \frac{h^2}{6}\, \big(y^{(3)}(t_n + \theta_1 h) + y^{(3)}(t_n - \theta_2 h)\big) \end{aligned}$$

il vient alors

$$|\mathrm{E}_n| \leqslant \frac{\mathrm{M}_3 h^2}{3}$$

4.b La suite θ_n vérifie

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \theta_{n+1} \leqslant \theta_{n-1} + 2\beta\theta_n + \alpha_n$$

Montrons la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante par récurrence sur n

$$\mathscr{P}(n) \;:\; « \forall n \geqslant 2 \qquad \theta_n \leqslant \mathrm{e}^{(n-1)\beta} \sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta} »$$

• **Initialisation** On commence par vérifier que la propriété est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$. Dans le cas où $n = 2$, on veut montrer que

$$\theta_2 \leqslant \mathrm{e}^{\beta}\sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \alpha_1$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$\theta_0 + 2\beta\theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\beta \end{pmatrix} \leqslant \left\| \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2\beta \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2}\sqrt{1 + 4\beta^2}$$

Par ailleurs, comme $\beta \leqslant 1$, on a $\beta^2 \leqslant \beta$, soit

$$\begin{aligned} 1 + 4\beta^2 &\leqslant 1 + 2\beta + 2\beta^2 \\ &\leqslant 1 + 2\beta + \frac{(2\beta)^2}{2} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{2\beta} \end{aligned}$$

d'où

$$\theta_2 \leqslant \mathrm{e}^{\beta}\sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \alpha_1$$

ce qui prouve $\mathscr{P}(2)$.
Montrons à présent $\mathscr{P}(3)$. Par hypothèse sur la suite θ_n, on a

$$\theta_3 \leqslant \theta_1 + 2\beta\theta_2 + \alpha_2$$

et

$$\theta_2 \leqslant \theta_0 + 2\beta\theta_1 + \alpha_1$$

soit

$$\theta_3 \leqslant 2\beta\theta_0 + (1 + 4\beta^2)\theta_1 + 2\beta\alpha_1 + \alpha_2$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on trouve

$$2\beta\theta_0 + (1 + 4\beta^2)\theta_1 \leqslant \sqrt{4\beta^2 + (1 + 4\beta^2)^2}\sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2}$$

Majorons le terme un peu bizarre qui est sous la racine

$$\begin{aligned} 4\beta^2 + (1 + 4\beta^2)^2 &= 1 + 12\beta^2 + 16\beta^4 \\ &\leqslant 1 + (4\beta + 8\beta^2) + 16\beta^4 \\ &\leqslant 1 + 4\beta + \frac{(4\beta)^2}{2} + 16\beta^4 \end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on utilise le fait que

$$16\beta^4 = \frac{96}{6}\beta^4 \leqslant \frac{128}{6}\beta^4 \leqslant \frac{64}{6}\beta^3 + \frac{64}{6}\beta^4 = \frac{(4\beta)^3}{6} + \frac{(4\beta)^4}{24}$$

on a donc montré que

$$4\beta^2 + (1 + 4\beta^2)^2 \leqslant 1 + 4\beta + \frac{(4\beta)^2}{2} + \frac{(4\beta)^3}{6} + \frac{(4\beta)^4}{24} \leqslant \mathrm{e}^{4\beta}$$

donc

$$2\beta\theta_0 + (1 + 4\beta^2)\theta_1 \leqslant \mathrm{e}^{2\beta}\sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2}$$

Enfin, en utilisant le fait que $\beta \leqslant 1$, il vient $2\beta \leqslant 1+\beta \leqslant \mathrm{e}^{\beta}$, d'où

$$\theta_3 \leqslant \mathrm{e}^{2\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\mathrm{e}^{\beta}\alpha_1+\alpha_2$$

ce qui prouve $\mathscr{P}(3)$.

• **Hérédité** Montrons à présent que $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ impliquent $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a les deux inégalités suivantes

$$\theta_{n-1} \leqslant \mathrm{e}^{(n-2)\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i \mathrm{e}^{(n-2-i)\beta}$$

et

$$\theta_{n} \leqslant \mathrm{e}^{(n-1)\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta}$$

en injectant ces deux inégalités dans l'inégalité suivante

$$\theta_{n+1} \leqslant \theta_{n-1}+2\beta\theta_n+\alpha_n$$

on obtient

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} \leqslant\; & \mathrm{e}^{(n-2)\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i \mathrm{e}^{(n-2-i)\beta}\\ & +2\beta\left(\mathrm{e}^{(n-1)\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta}\right)+\alpha_n\end{aligned}$$

En regroupant les termes, il vient

$$\theta_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{(n-2)\beta}(1+2\beta\mathrm{e}^{\beta})\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i(1+2\beta\mathrm{e}^{\beta})\mathrm{e}^{(n-2-i)\beta}+2\beta\alpha_{n-1}+\alpha_n$$

Afin de démontrer $\mathscr{P}(n+1)$, il paraît bon de montrer l'inégalité

$$1+2\beta\mathrm{e}^{\beta} \leqslant \mathrm{e}^{2\beta}$$

Posons $\varphi\,:\,\beta\in\mathbb{R}\mapsto \mathrm{e}^{2\beta}-2\beta\mathrm{e}^{\beta}-1$, et étudions cette fonction. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$, et

$$\forall \beta\in\mathbb{R} \qquad \varphi'(\beta)=2\mathrm{e}^{\beta}(\mathrm{e}^{\beta}-1-\beta)$$

or on sait que $\mathrm{e}^{\beta}\geqslant 1+\beta$, donc $\varphi'\geqslant 0$. On en déduit que $\varphi(\beta)\geqslant\varphi(0)=0$.
On obtient ainsi

$$\theta_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{n\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i \mathrm{e}^{(n-i)\beta}+2\beta\alpha_{n-1}+\alpha_n$$

enfin, en utilisant à nouveau $2\beta\leqslant 1+\beta\leqslant \mathrm{e}^{\beta}$,

$$\theta_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{n\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i \mathrm{e}^{(n-i)\beta}+\mathrm{e}^{\beta}\alpha_{n-1}+\alpha_n$$

soit

$$\theta_{n+1} \leqslant \mathrm{e}^{n\beta}\sqrt{\theta_0^2+\theta_1^2}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \mathrm{e}^{(n-i)\beta}$$

ce qui achève la preuve.

$\boxed{\textbf{4.c}}$ Par définition du schéma, on a l'égalité

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n)$$

et par définition de l'erreur de consistance

$$y(t_{n+1}) = y(t_{n-1}) + 2hf(t_n, y(t_n)) + h\mathrm{E}_n$$

soit

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = y(t_{n-1}) - y_{n-1} + 2h(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)) + h\mathrm{E}_n$$

d'où

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant |y(t_{n-1}) - y_{n-1}| + 2h\,|f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)| + h\,|\mathrm{E}_n|$$

en utilisant le fait que f est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable,

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leqslant |y(t_{n-1}) - y_{n-1}| + 2h\mathrm{L}\,|y(t_n) - y_n| + h\,|\mathrm{E}_n|$$

en posant $e_n = |y(t_n) - y_n|$, $\beta = h\mathrm{L}$, et $\alpha_n = h\,|\mathrm{E}_n|$, on obtient l'inégalité

$$e_{n+1} \leqslant e_{n-1} + 2\beta e_n + \alpha_n$$

qui est (oh miracle !) l'inégalité que l'on a torturée à la question précédente. Par ailleurs, par définition du schéma, $y(0) = y_0$, donc $e_0 = 0$. De plus, par définition, on a

$$y_1 = y_0 + hf(0, y_0)$$

et

$$y(t_1) = y_0 + hf(0, y_0) + h\mathrm{E}_0$$

d'où

$$e_1 \leqslant h\mathrm{E}_0$$

En utilisant la question (b), il vient

$$\forall n \qquad e_n \leqslant \mathrm{e}^{(n-1)\beta} h\mathrm{E}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta}$$

Il reste à simplifier la dernière somme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta} &= \sum_{i=1}^{n-1} h\,|\mathrm{E}_i|\,\mathrm{e}^{(n-1-i)\beta} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} h\frac{\mathrm{M}_3 h^2}{3}\,\mathrm{e}^{(n-1-i)\beta} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{M}_3 h^3}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{M}_3 h^3}{3} \frac{\mathrm{e}^{(n-1)\beta} - 1}{\mathrm{e}^{\beta} - 1}
\end{aligned}$$

en utilisant $\mathrm{e}^{\beta} \geqslant 1 + \beta$, on a

$$\frac{\beta}{\mathrm{e}^{\beta} - 1} \leqslant 1$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta} \leqslant \frac{\mathrm{M}_3 h^3}{3} \frac{\mathrm{e}^{(n-1)\beta} - 1}{\beta}$$

Puis on utilise l'expression de β :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathrm{e}^{(n-1-i)\beta} \leqslant \frac{\mathrm{M}_3 h^2}{3} \frac{\mathrm{e}^{(n-1)\beta} - 1}{\mathrm{L}}$$

et enfin, on utilise $t_n \leqslant \mathrm{T}$, ce qui implique

$$n\beta = nh\mathrm{L} \leqslant \mathrm{N}h\mathrm{L} = \mathrm{TL}$$

pour aboutir à

$$e_n \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{LT}} \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2} + \frac{\mathrm{M}_3 h^2}{3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{LT}} - 1}{\mathrm{L}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{LT}} \frac{\mathrm{M}_2}{2} + \frac{\mathrm{M}_3}{3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{LT}} - 1}{\mathrm{L}} \right) h^2 = \mathrm{C}h^2$$

4.d On développe cette fois–ci $y(t_{n+1})$ et $y(t_{n-1})$ à l'ordre 5

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(t_n) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) - \frac{h^3}{6} y^{(3)}(t_n) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

d'où

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) = 2hy'(t_n) + \frac{h^3}{3} y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

ou encore

$$y(t_{n+1}) - y(t_{n-1}) = 2hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^3}{3} y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

Par ailleurs, le schéma donne l'égalité

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf(t_n, y_n)$$

En combinant les deux dernière égalités, on aboutit à

$$e_{n+1} - e_{n-1} = -2h(f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n))) + \frac{h^3}{3} y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

Pour montrer l'égalité demandée, il reste à montrer que

$$2h(f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n))) = 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

Pour cela, on applique l'inégalité de Taylor–Lagrange à la fonction $y \mapsto f(t_n, y)$, au voisinage du point $y(t_n)$.

$$\left| f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n)) - \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) e_n \right| \leqslant \max_{t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,]} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \right| \frac{e_n^2}{2}$$

Comme on l'a montré à la question précédente, on a $|e_n| \leqslant \mathrm{C}h^2$, donc $|e_n|^2 \leqslant \mathrm{C}^2 h^4$. On vient donc de montrer que

$$f(t_n, y_n) = f(t_n, y(t_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) + \mathrm{O}\left(h^4\right)$$

soit

$$hf(t_n, y_n) = hf(t_n, y(t_n)) + h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n)) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

Finalement, en rassemblant les morceaux, on arrive (enfin) à

$$e_{n+1} - e_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))e_n = y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)$$

4.e Pour les premiers termes :

$$w_0 = y(t_0) - y_0 - h^2\phi(0) = 0$$

$$\begin{aligned} w_1 &= y(t_1) - y_1 - h^2\psi(t_1) \\ &= y(t_1) - y_0 - hf(0, y_0) - h^2\psi(t_1) \\ &= \left(y(t_1) - y_0 - hy'(0) - \frac{h^2}{2}\,y''(0) - \frac{h^3}{6}\,y^{(3)}(0)\right) \\ &\qquad + h^2\left(\frac{1}{2}\,y''(0) + \frac{h}{6}\,y^{(3)}(0) - \psi(t_1)\right) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Taylor–Lagrange, appliquée à la fonction y, à l'ordre 4

$$\left|y(t_1) - y_0 - hy'(0) - \frac{h^2}{2}\,y''(0) - \frac{h^3}{6}\,y^{(3)}(0)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_4 h^4}{24}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à ψ à l'ordre 2 donne

$$|\psi(t_1) - \psi(t_0) - h\psi'(t_0)| \leqslant \frac{\|\psi''\|_\infty h^2}{2}$$

et d'après l'énoncé

$$\psi(0) = \frac{1}{2}\,y''(0) \qquad \text{et} \qquad \psi'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0)\phi(0) + \frac{1}{6}\,y^{(3)}(0) = \frac{1}{6}\,y^{(3)}(0)$$

Finalement

$$|w_1| \leqslant \left(\frac{\mathrm{M}_4}{24} + \frac{\|\psi''\|_\infty}{2}\right)h^4 = c_1 h^4$$

Notons ζ_n le réel égal à $\phi(t_n)$ si n est pair, et égal à $\psi(t_n)$ si n est impair. On a ainsi, pour tout n

$$w_n = e_n - h^2\zeta_n$$

On a alors

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))w_n &= e_{n+1} - h^2\zeta_{n+1} - e_{n-1} + h^2\zeta_{n-1} \\ &\qquad - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))(e_n - h^2\zeta_n) \\ &= e_{n+1} - e_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))e_n \\ &\qquad - h^2(\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1}) + 2h^3\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\zeta_n \\ &= \frac{h^3}{3}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\ &\qquad - h^2(\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1}) + 2h^3\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\zeta_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))w_n &= \frac{h^3}{3}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\ &\qquad - h^2\left(\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\zeta_n\right) \end{aligned}$$

Développons à présent le terme contenant les ζ_n.
• **Si** n **est pair** alors $n+1$ et $n-1$ sont impairs, on a ainsi

$$\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\zeta_n = \psi(t_{n+1}) - \psi(t_{n-1}) - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\phi(t_n)$$

On développe $\psi(t_{n+1})$ et $\psi(t_{n-1})$

$$\psi(t_{n+1}) = \psi(t_n) + h\psi'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,\psi''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

$$\psi(t_{n-1}) = \psi(t_n) - h\psi'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,\psi''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\psi(t_{n+1}) - \psi(t_{n-1}) &= 2h\psi'(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\\ &= 2h\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\phi(t_n) + \frac{1}{6}\,y^{(3)}(t_n)\right) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\end{aligned}$$

soit

$$\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\zeta_n = \frac{h}{3}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

• **Si** n **est impair** alors $n+1$ et $n-1$ sont pairs, on a ainsi

$$\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\zeta_n = \phi(t_{n+1}) - \phi(t_{n-1}) - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\psi(t_n)$$

On développe $\phi(t_{n+1})$ et $\phi(t_{n-1})$

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + h\phi'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,\phi''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

$$\phi(t_{n-1}) = \phi(t_n) - h\phi'(t_n) + \frac{h^2}{2}\,\phi''(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi(t_{n+1}) - \phi(t_{n-1}) &= 2h\phi'(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\\ &= 2h\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\psi(t_n) + \frac{1}{6}\,y^{(3)}(t_n)\right) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\end{aligned}$$

soit

$$\zeta_{n+1} - \zeta_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))\zeta_n = \frac{h}{3}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

En reprenant le développement de la grosse expression avec les w_n, on obtient alors

$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))w_n &= \frac{h^3}{3}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)\\ &\quad - h^2\left(\frac{h}{3}\,y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\right)\\ &= \mathrm{O}\left(h^5\right)\end{aligned}$$

Ainsi, il existe C' tel que

$$\left| w_{n+1} - w_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))w_n \right| \leqslant \mathrm{C}'h^5$$

$\boxed{\textbf{4.f}}$ La question précédente nous donne

$$\begin{aligned} |w_{n+1}| &\leqslant \left| w_{n+1} - w_{n-1} - 2h\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))w_n \right| + 2h\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))w_n \right| + |w_{n-1}| \\ &\leqslant |w_{n-1}| + 2h\mathrm{L}\,|w_n| + \mathrm{C}'h^5 \end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité de la question (b), pour trouver que $w_n = \mathrm{O}\left(h^4\right)$. Comme

$$w_n = \begin{cases} e_n - h^2\phi(t_n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ e_n - h^2\psi(t_n) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On a en fait prouvé que

$$e_{2n} \sim h^2\phi(t_{2n}) \qquad \text{et} \qquad e_{2n+1} \sim h^2\psi(t_{2n+1})$$

V. Schéma rétrograde

On rappelle les deux théorèmes qu'il faut savoir **absolument** sur les méthodes multipas, c'est à dire les méthodes de la forme

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i y_{n-i} + \sum_{i=-1}^{r} \beta_i f_{n-i}$$

avec $f_k = f(t_k, y_k)$.

Consistance et ordre des méthodes multipas
Soit

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - \sum_{i=0}^{r} \alpha_i y(t_{n-i}) - \sum_{i=-1}^{r} \beta_i f(t_{n-i}, y(t_{n-i}))$$

La méthode est diste consistante d'ordre p si pour toute solution suffisamment régulière on a $|\varepsilon_n| \leqslant \mathrm{K}h^{p+1}$.

Stabilité des méthodes multipas
Soit P le polynôme

$$\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^{r+1} - \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \lambda^{r-i}$$

Si toutes les racines de P sont de module $\leqslant 1$, et si les racines de module 1 de P sont simples, alors la méthode est stable.

Si on connait ces deux théorèmes, les méthodes multipas, c'est du gâteau.

$\boxed{\textbf{5.a}}$ La méthode proposée est implicite. On doit donc d'abord vérifier que y_{n+1} existe et est unique. Le réel y_{n+1} apparaît comme un point fixe de la fonction

$$\Phi \,:\, y \mapsto \frac{4}{3}\, y_n - \frac{1}{3}\, y_{n-1} + \frac{2h}{3}\, f(t_{n+1}, y)$$

pour que point fixe existe et soit unique, il suffit que Φ soit contractante

$$\begin{aligned} |\Phi(z) - \Phi(y)| &= \frac{2h}{3}\, |f(t_{n+1}, z) - f(t_{n+1}, y)| \\ &\leqslant \frac{2h\mathrm{L}}{3}\, |y - z| \end{aligned}$$

car f est lipschitzienne. On en déduit que si $\dfrac{2h\mathrm{L}}{3} < 1$, alors Φ est contractante, et y_{n+1} est bien défini.

Montrons que cette méthode est stable. D'après le cours, il suffit que les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - \dfrac{4}{3}\mathrm{X} + \dfrac{1}{3}$ soient toutes de module inférieur à 1, et que les racines de module 1 soient simples. Ce polynôme du second degré a pour discriminant

$$\Delta = \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

et il admet donc pour racines

$$r = \frac{\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}}{2}$$

c'est à dire 1 et $\frac{1}{3}$. La méthode est donc stable.

Cherchons à présent l'erreur de consistance pour déterminer si la méthode est consistante, puis pour déterminer son ordre. On étudie donc

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - \frac{4}{3}\, y(t_n) + \frac{1}{3}\, y(t_{n-1}) - \frac{2h}{3}\, f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

où y est solution de l'ésuation différentielle. Développons au voisinage de t_n les quantités $y(t_{n+1})$ et $y(t_{n-1})$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_n) + \frac{h^3}{6}\, y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)$$
$$y(t_{n-1}) = y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_n) - \frac{h^3}{6}\, y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)$$

on développe également $f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$, qui est égal à $y'(t_{n+1})$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n =& y(t_{n+1}) - \frac{4}{3}\, y(t_n) + \frac{1}{3}\, y(t_{n-1}) - \frac{2h}{3}\, f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \\
=& y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_n) + \frac{h^3}{6}\, y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right) - \frac{4}{3}\, y(t_n) \\
&+ \frac{1}{3}\left(y(t_n) - hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(t_n) - \frac{h^3}{6}\, y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)\right) \\
&- \frac{2h}{3}\left(y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}\, y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^3\right)\right) \\
=& -\frac{2h^3}{9}\, y^{(3)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\exists \mathrm{K} \qquad |\varepsilon_n| \leqslant \mathrm{K}h^3$$

Et on en déduit que le schéma est consistant, d'ordre 2.

5.b Pour montrer la stabilité du schéma, il suffit que les racines du polynôme $\mathrm{X}^4 - 1$ soient de module inférieur à 1, et que les racines de module 1 soient simples. Or les racines de ce polynôme sont simples, de module 1 (ce sont les racines quatrièmes de l'unité). Afin d'étudier la consistance et l'ordre éventuel du schéma, on développe l'espression

$$\varepsilon_n = y(t_{n+4}) - y(t_n) - \frac{4h}{3}\, \left(2f(t_{n+3}, y(t_{n+3})) - f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) + 2f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\right)$$

Pour cela, on va développer $y(t_{n+4})$, $f(t_{n+3}, y(t_{n+3})) = y'(t_{n+3})$, $f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) = y'(t_{n+2})$ et $f(t_{n-3}, y(t_{n-3})) = y'(t_{n-3})$

$$\begin{aligned}
y(t_{n+4}) =& y(t_n) + 4hy'(t_n) + 8h^2y''(t_n) + \frac{32h^3}{3} + \frac{128h^4}{3} + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\
y'(t_{n+3}) =& y'(t_n) + 3hy''(t_n) + \frac{9h^2}{2} + \frac{27h^3}{6} + \mathrm{O}\left(h^4\right) \\
y'(t_{n+2}) =& y'(t_n) + 2hy''(t_n) + 2h^2 + \frac{8h^3}{6} + \mathrm{O}\left(h^4\right) \\
y'(t_{n-h}) =& y'(t_n) - hy''(t_n) + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \mathrm{O}\left(h^4\right)
\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\varepsilon_n = & y(t_{n+4}) - y(t_n) - \frac{4h}{3}\Big(2f(t_{n+3}, y(t_{n+3})) - f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) \\ & \qquad +2f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\Big) \\ = & y(t_n) + 4hy'(t_n) + 8h^2y''(t_n) + \frac{32h^3}{3} + \frac{128h^4}{3} + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\ & -\frac{8h}{3}\left(y'(t_n) + 3hy''(t_n) + \frac{9h^2}{2} + \frac{27h^3}{6} + \mathrm{O}\left(h^4\right)\right) \\ & +\frac{4h}{3}\left(y'(t_n) + 2hy''(t_n) + 2h^2 + \frac{8h^3}{6} + \mathrm{O}\left(h^4\right)\right) \\ & -\frac{8h}{3}\left(y'(t_n) - hy''(t_n) + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \mathrm{O}\left(h^4\right)\right) \\ = & \frac{296h^4}{9} + \mathrm{O}\left(h^5\right)\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe K tel que

$$|\varepsilon_n| \leqslant \mathrm{K}h^4$$

et que le schéma est consistant, d'ordre 3.

$\boxed{\textbf{5.c.i}}$ Le schéma proposé est stable, si les racines du polynôme $\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} + a(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})$ sont de module inférieur à 1, et si les racines de module 1 sont simples.

$$\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} + a(\mathrm{X}^2 - 1) = (\mathrm{X}^2 - 1)(\mathrm{X} + a) = (\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - a)$$

on en déduit que le schéma est stable si $|a| < 1$, ou si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$.

$\boxed{\textbf{5.c.ii}}$ Pour que la méthode soit consistante, d'ordre 3, il suffit que l'erreur de consistance locale

$$\begin{aligned}\varepsilon_n = & \ y(t_{n+3}) - y(t_{n+1}) + a(y(t_{n+2}) - y(t_n)) \\ & -h\Big(bf(t_{n+2}, y(t_{n+2})) + cf(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + df(t_n, y(t_n))\Big)\end{aligned}$$

soit majorée par $\mathrm{K}h^4$, où K est une constante. Comme à la question suivante, on demande d'étudier la montée à l'ordre 4, on va directement développer ε_n à la précision $\mathrm{O}\left(h^5\right)$. Pour cela, on développe $y(t_{n+3})$, $y(t_{n+2})$ et $y(t_{n+1})$ à la précision $\mathrm{O}\left(h^5\right)$ ainsi que $y'(t_{n+2}) = f(t_{n+2}, y(t_{n+2}))$ et $y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ à la précision $\mathrm{O}\left(h^4\right)$.

$$\begin{aligned}y(t_{n+3}) &= y(t_n) + 3hy'(t_n) + \frac{9h^2}{2}y''(t_n) + \frac{27h^3}{6}y^{(3)}(t_n) + \frac{81h^4}{24}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\ y(t_{n+2}) &= y(t_n) + 2hy'(t_n) + 2h^2y''(t_n) + \frac{4h^3}{3}y^{(3)}(t_n) + \frac{2h^4}{3}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\ y(t_{n+1}) &= y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y^{(3)}(t_n) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'(t_{n+2}) &= y'(t_n) + 2hy''(t_n) + 2h^2y^{(3)}(t_n) + \frac{4h^3}{3}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right) \\ y'(t_{n+1}) &= y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}y^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{6}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)\end{aligned}$$

En combinant ces développements, on obtient un développement de ε_n

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n = & \, y(t_n) + 3hy'(t_n) + \frac{9h^2}{2}y''(t_n) + \frac{27h^3}{6}y^{(3)}(t_n) + \frac{81h^4}{24}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\
& -y(t_n) - hy'(t_n) - \frac{h^2}{2}y''(t_n) - \frac{h^3}{6}y^{(3)}(t_n) - \frac{h^4}{24}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right) \\
& +a\Big(y(t_n) + 2hy'(t_n) + 2h^2y''(t_n) + \frac{4h^3}{3}y^{(3)}(t_n) \\
& \qquad + \frac{2h^4}{3}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right) - y(t_n)\Big) \\
& -hb\left(y'(t_n) + 2hy''(t_n) + 2h^2y^{(3)}(t_n) + \frac{4h^3}{3}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)\right) \\
& -hc\left(y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}y^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{6}y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^4\right)\right) \\
& -hdy'(t_n) \\
= & \, (2 + 2a - b - c - d)hy'(t_n) \\
& +(4 + 2a - 2b - c)h^2y''(t_n) \\
& + \left(\frac{13}{3} + \frac{4a}{3} - 2b - \frac{c}{2}\right)h^3y^{(3)}(t_n) \\
& + \left(\frac{10}{3} + \frac{2a}{3} - \frac{4b}{3} - \frac{c}{6}\right)h^4y^{(4)}(t_n) + \mathrm{O}\left(h^5\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour que le schéma soit consistant, d'ordre 3, il suffit que les termes en h, h^2, et h^3 s'annulent, c'est à dire qu'il suffit que l'on ait

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccl}
b & + & c & + & d & = & 2a + 2 \\
2b & + & c & & & = & 2a + 4 \\
2b & + & \frac{1}{2}c & & & = & \frac{2a + 13}{3}
\end{array}
\right.
$$

En résolvant ce système, on obtient

$$
\left\{
\begin{array}{l}
b = \frac{7 + a}{3} \\
c = \frac{4a - 2}{3} \\
d = a
\end{array}
\right.
$$

$\boxed{\textbf{5.c.iii}}$ Pour que le schéma soit d'ordre 4, il suffit que le terme devant h^5 dans le développement de ε_n s'annule. On a donc

$$
\frac{10}{3} + \frac{2a}{3} - \frac{4b}{3} - \frac{c}{6} = 0
$$

Étant donnés les relations trouvées à la question précédente, on a

$$
10 + 2a - 4b - \frac{c}{2} = 1
$$

on en déduit qu'il n'existe pas de réel a tel que le schéma soit d'ordre 4.