Analyse numérique, Matmeca 1ere année Corrigé de la feuille 5[1]

1. Formule des trapèzes

1.a On cherche une formule de quadrature approchée de la forme

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha f(a) + \beta f(a+h)$$

Soit P un polynôme constant, égal à C . L'intégration exacte donne

$$\int_a^{a+h} \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{C}h$$

Par ailleurs, la formule approchée donne la valeur $(\alpha+\beta)\mathrm{C}$. D'où, si la formule est exacte

$$\alpha + \beta = h$$

Si P est le polynôme égal à $x \mapsto x$, alors

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^{a+h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{2} \\ &= \frac{h^2}{2} + ah\end{aligned}$$

Si la formule est exacte, alors

$$\alpha f(a) + \beta f(a+h) = \alpha a + \beta(a+h) = (\alpha+\beta)a + \beta h$$

On en déduit

$$\alpha = \beta = \frac{h}{2}$$

Montrons que la formule n'est pas exacte sur $\mathcal{P}_2$: l'intégration exacte de $x \mapsto x^2$ donne

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} x^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{a+h} \\ &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{3} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{3} \\ \int_a^{a+h} x^2\,\mathrm{d}x &= a^2h + ah^2 + \frac{h^3}{3}\end{aligned}$$

La formule approchée donne

$$\frac{h}{2}\left(a^2 + (a+h)^2\right) = \frac{h}{2}\left(a^2 + a^2 + 2ah + h^2\right) = a^2h + ah^2 + \frac{h^3}{2}$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

La différence entre la formule de quadrature approchée et la valeur exacte de l'intégrale est égale à $\dfrac{h^3}{6} \neq 0$. Donc la formule n'est pas exacte sur $\mathcal{P}_2$.

$\boxed{\textbf{1.b}}$ Le polynôme interpolateur q de $\mathcal{P}_1$ est l'unique polynôme de degré 1 tel que $q(a) = f(a)$ et $q(a+h) = f(a+h)$. Le polynôme q est de la forme $q(x) = \lambda x + \mu$, où les coefficients λ et μ vérifient

$$\begin{aligned} q(a) &= \lambda a + \mu \\ q(a+h) &= \lambda a + \lambda h + \mu \end{aligned}$$

on trouve alors

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{q(a+h) - q(a)}{h} \\ \mu &= q(a) - a\,\frac{q(a+h) - q(a)}{h} \end{aligned} \right.$$

On en déduit

$$q(x) = \frac{q(a+h) - q(a)}{h}\,(x-a) + q(a)$$

Comme le polynôme q est supposé être une bonne approximation de f, on approche l'intégrale de f sur $[\,a\,;a+h\,]$ par l'intégrale de q sur $[\,a\,;a+h\,]$:

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^{a+h} q(x)\,\mathrm{d}x$$

Comme $q \in \mathcal{P}_1$, la formule de quadrature approchée est exacte pour q :

$$\int_a^{a+h} q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\,\big(q(a) + q(a+h)\big)$$

Enfin, comme $q(a) = f(a)$ et $q(a+h) = f(a+h)$, on en déduit

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^{a+h} q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\,\big(f(a) + f(a+h)\big)$$

$\boxed{\textbf{1.c}}$ D'après la question précédente, l'erreur entre la formule de quadrature approchée et l'intégration exacte est égale à l'intégrale de l'erreur d'interpolation. D'après le cours sur l'interpolation, on a

$$\forall x \in [\,a\,;a+h\,] \quad \exists \xi_x \in [\,a\,;a+h\,] \qquad f(x) - q(x) = \frac{(x-a)(x-a-h)}{2}\,f^{(2)}(\xi_x)$$

On a alors

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\,\big(f(a) + f(a+h)\big) = \int_a^{a+h} \Big(f(x) - q(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

de plus, la formule d'erreur d'interpolation donne la majoration

$$\forall x \in [\,a\,;a+h\,] \qquad |f(x) - q(x)| \leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2}\,|(x-a)(x-a-h)|$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\left(f(a)+f(a+h)\right)\right| &= \left|\int_a^{a+h} \left(f(x)-q(x)\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^{a+h} |f(x)-q(x)|\;\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2}\int_a^{a+h} |(x-a)(x-a-h)|\;\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2}\int_a^{a+h} (x-a)(h+a-x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2}\int_a^{a+h} \left(h(x-a)-(x-a)^2\right)\;\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2}\Bigg(h\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^{a+h} \\
&\qquad -\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^{a+h}\Bigg) \\
\left|\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\left(f(a)+f(a+h)\right)\right| &\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty\, h^3}{12}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1.d}}$ Pour calculer une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[\,c\,;d\,]$, on découpe l'intervalle $[\,c\,;d\,]$ en intervalles $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$, et on utilise la formule de quadrature des trapèzes sur chacun des $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\approx \sum_{i=0}^{n}\frac{h}{2}\,\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) \\
&\approx h\,\frac{f(c)+f(d)}{2} + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)
\end{aligned}$$

On commence par découper l'erreur en petits morceaux afin d'utiliser l'erreur trouvée pour la formule simple des trapèzes :

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x - \left(h\,\frac{f(c)+f(d)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) &= \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)f(x_{i+1})}{2} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\Bigg(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad -h\,\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Bigg)
\end{aligned}$$

D'après la question (c), on a

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - h\,\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right| \leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty h^3}{12}$$

On trouve finalement

$$\begin{aligned}\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x - \left(h\,\frac{f(c)+f(d)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\right| &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \right.\\ &\qquad\left. -h\,\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{\|f^{(2)}\|_\infty h^3}{12}\\ &\leqslant (d-c)\,\frac{\|f^{(2)}\|_\infty h^2}{12}\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\sum\limits_{i=0}^{n} h = d-c$.

$\boxed{\textbf{1.e}}$ Notons $f \mapsto \sin(x)\mathrm{e}^{-x^2}$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et l'on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2x\sin(x)\mathrm{e}^{-x^2}\\ f''(x) &= (4x^2-3)\sin(x)\,\mathrm{e}^{-x^2} - 4x\cos(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

Sur $[\,0\,;3\,]$, la fonction $x \mapsto 4x^2-3$ est croissante, on a donc $-3 \leqslant 4x^2-3 \leqslant 33$, d'où l'on déduit que $\left|4x^2-3\right| \leqslant 33$. Par ailleurs, sur ce même intervalle, on a $|4x| \leqslant 12$. On en déduit, en majorant les fonctions circulaires par 1, et les exponentielles par 1 également :

$$\|f''\|_\infty \leqslant 45$$

Notons N le nombre de points de la subdivision ; dans notre cas, on a $d-c=3$, et $h = \dfrac{3}{\mathrm{N}}$. On en déduit que l'erreur est majorée par $\dfrac{45\times 9}{4\mathrm{N}^2}$. On en déduit que si l'on veut avoir une erreur E, il suffit d'avoir

$$\mathrm{N} \geqslant \sqrt{\frac{45\times 9}{4\mathrm{E}}}$$

Application numérique

- Si on désire une erreur inférieure à $0,1$, il suffit de prendre $\mathrm{N}=32$.
- Si on désire une erreur égale à 10^{-2}, il suffit de prendre $\mathrm{N}=101$.
- Si on désire une erreur inférieure à 10^{-8}, il suffit de prendre $\mathrm{N}=100\,624$.

2. Formule de moyenne

2.a On veut que la formule soit exacte sur $\mathcal{P}_0$, donc pour $f = 1$:

$$\int_a^b 1 \, \mathrm{d}x = (b-a) = \alpha$$

on en déduit que $\alpha = (b-a)$. Montrons maintenant que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_1$, en vérifiant que la formule est exacte pour $x \mapsto x$:

- La formule de quadrature approchée donne $(b-a)\,\dfrac{a+b}{2}$
- Le calcul de l'intégrale exacte donne

$$\int_a^b x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(a+b)(a-b)}{2}$$

la formule est donc exacte sur $\mathcal{P}_1$. On teste cette formule sur $\mathcal{P}_2$, pour $x \mapsto x^2$

- La formule de quadrature approchée donne

$$\mathrm{I}_{app} = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (b-a)\,\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

- Le calcul exact de l'intégrale donne

$$\mathrm{I}_{exact} = \int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3} = (b-a)\frac{b^2+ab+b^2}{3}$$

On a ainsi

$$\mathrm{I}_{app} - \mathrm{I}_{exact} = -(b-a)\,\frac{(a-b)^2}{12} \neq 0$$

2.b Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$, et soit P son polynôme d'interpolation d'Hermite au point $\dfrac{a+b}{2}$. Alors, d'après le cours sur l'interpolation, on a la formule d'erreur

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \quad \exists \xi \in [\,a\,;b\,] \qquad f(x) - \mathrm{P}(x) = \frac{\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2}{2} f^{(2)}(\xi)$$

donc

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \frac{\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2}{2} \|f^{(2)}\|_\infty$$

Par ailleurs, comme P est de degré 1 et que la formule de quadrature est de degré 1, la formule est exacte pour P :

$$\int_a^b \mathrm{P}(x) \, \mathrm{d}x = (b-a)\mathrm{P}\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

qui est la formule de quadrature approchée pour f. On en déduit

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| &= \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_a^b (f(x)-\mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(x)-\mathrm{P}(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]_a^b \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right) \\
\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x &= \frac{(b-a)^3}{12}
\end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3\,\|f^{(2)}\|_\infty}{24}$$

$\boxed{\textbf{2.c}}$ En utilisant la formule d'intégration sur chacun des $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)
\end{aligned}$$

3. Formule de Simpson

3.a On cherche une formule de quadrature approchée sous la forme

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$$

Afin de déterminer les coefficients α, β, γ, on écrit que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

- si $f \,:\, x \mapsto 1$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

  $$\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2$$

  tandis que la formule de quadrature approchée donne

  $$\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1) = \alpha + \beta + \gamma$$

  on a donc l'équation

  $$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

- si $f \,:\, x \mapsto x$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

  $$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0$$

  tandis que la formule de quadrature approchée donne

  $$\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1) = -\alpha + \gamma$$

  on a donc l'équation

  $$-\alpha + \gamma = 0$$

- si $f \,:\, x \mapsto x^2$, alors le calcul exact de l'intégrale donne

  $$\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

  tandis que la formule de quadrature approchée donne

  $$\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1) = \alpha + \gamma$$

  on a donc l'équation

  $$\alpha + \gamma = \frac{2}{3}$$

En résolvant le système

$$\left\{\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 2 \\ -\alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \gamma &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right.$$

on trouve

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3} \\ \beta = \dfrac{4}{3} \\ \gamma = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

> **Remarque**
> Ici, les calculs ont été beaucoup simplifiés, car on s'est placé sur un intervalle symétrique par rapport à 0. Ainsi, une fois sur deux, l'intégrale de $x \mapsto x^k$ est nulle.
> D'une manière générale, sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$, on a plutôt intérêt à utiliser une base de polynômes de $\mathcal{P}_k$ qui soit constituée de polynômes symétriques sur $[\,a\,;b\,]$, comme la base des $x \mapsto \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^k$.

On teste à présent cette formule sur $\mathcal{P}_3$

- L'intégration de $x \mapsto x^3$ donne

$$\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

- La formule approchée donne

$$\alpha(-1)^3 + \gamma 1^3 = -\alpha + \gamma = 0$$

donc la formule est aussi exacte sur $\mathcal{P}_3$. Testons maintenant cette formule sur $\mathcal{P}_4$

- L'intégration de $x \mapsto x^4$ donne

$$\int_{-1}^{1} x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

- et la formule approchée donne

$$\alpha(-1)^4 + \gamma 1^4 = \frac{2}{3}$$

On en déduit que la formule n'est pas exacte sur $\mathcal{P}_4$. La formule de Simpson est donc de degré 3.

Afin de déterminer l'erreur de quadrature, on va utiliser une formule d'erreur d'interpolation. Comme la formule est de degré 3, on cherche un polynôme P qui interpole f, qui soit de degré maximal, et tel que la formule de quadrature approchée de f sur $[\,-1\,;1\,]$ donne le même résultat que l'intégrale exacte de P. On peut par exemple prendre le polynôme qui interpole f en $-1, 0, 1$, et qui interpole f' en 0. Ce polynôme est en effet de degré 3, et on a

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \mathrm{P}(-1) + \beta \mathrm{P}(0) + \gamma \mathrm{P}(1) = \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$$

De plus, on a l'erreur d'interpolation suivante

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \quad \exists \xi \in [\,-1\,;1\,] \qquad f(x) - \mathrm{P}(x) = \frac{x^2(x-1)(x+1)}{4!}\, f^{(4)}(\xi)$$

d'où l'on déduit la majoration

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad |\mathrm{P}(x) - f(x)| \leqslant \frac{\left|x^2(x-1)(x+1)\right|}{4!}\, \|f^{(4)}\|_\infty$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha f(-1) - \beta f(0) - \gamma f(1)\right| &= \left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - \mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - \mathrm{P}(x)|\,\mathrm{d}x \\
\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha f(-1) - \beta f(0) - \gamma f(1)\right| &\leqslant \|f^{(4)}\|_\infty \int_{-1}^{1} \frac{\left|x^2(x-1)(x+1)\right|}{4!}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale trouvée

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left|x^2(x-1)(x+1)\right|\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\
\int_{-1}^{1} \left|x^2(x-1)(x+1)\right|\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \alpha f(-1) - \beta f(0) - \gamma f(1)\right| \leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{90}$$

$\boxed{\textbf{3.b}}$ Pour déterminer une formule de quadrature approchée sur $[\,a\,;a+h\,]$, cherchons une transformation affine envoyant le segment $[\,-1\,;1\,]$ sur $[\,a\,;a+h\,]$: celle–ci est de la forme $\varphi\,:\,x \mapsto \mathrm{A}x + \mathrm{B}$, où les réels A et B vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{A} + \mathrm{B} = a \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = a + h \end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} = \dfrac{h}{2} \\ \mathrm{B} = a + \dfrac{h}{2} \end{array}\right.$$

Pour approcher l'intégrale $\displaystyle\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x$, on pose donc $x = \dfrac{h}{2}\,x + a + \dfrac{h}{2}$. Cette fonction est bien un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme, et on a $\mathrm{d}x = \dfrac{h}{2}\,\mathrm{d}u$, d'où

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}\,u + a + \frac{h}{2}\right)\,\frac{h}{2}\,\mathrm{d}u$$

on en déduit la formule de quadrature approchée suivante

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{3}\,f(a) + \frac{4}{3}\,f\left(a+\frac{h}{3}\right) + \frac{1}{3}\,f(a+h)\right)$$

En appliquant la formule d'erreur trouvée sur $[\,-1\,;1\,]$ à la fonction

$$u \longmapsto \frac{h}{2}\,f\left(\frac{h}{2}\,u + a + \frac{h}{2}\right)$$

dont la dérivée quatrième est égale à $\dfrac{h^5}{32}\,f^{(4)}\left(\dfrac{h}{2}\,u + a + \dfrac{h}{2}\right)$ permet de prouver que

$$\left|\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\left(\frac{1}{3}\,f(a) + \frac{4}{3}\,f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\,f(a+h)\right)\right| \leqslant \frac{h^5\|f^{(4)}\|_\infty}{2880}$$

Partant de la formule de Simpson sur $[\,a\,;a+h\,]$, on écrit la formule composite suivante :

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(\frac{1}{3}\,f(a) + \frac{4}{3}\,f\left(a+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\,f(a+h)\right)\\
&\approx \frac{h}{2}\,f(c) + \frac{h}{2}\,f(d) + \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Et on a alors la formule d'erreur suivante :

$$\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\frac{h}{2}\,f(c) + \frac{h}{2}\,f(d) + \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^5\|f^{(4)}\|_\infty}{2880} = \frac{(d-c)h^4\|f^{(4)}\|_\infty}{2880}$$

4. Autres méthodes

4.a On étudie la formule de Newton–Cotes à quatre points :

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(a+\frac{h}{3}\right) + \alpha_2 f\left(a+\frac{2h}{3}\right) + \alpha_3 f(a+h)$$

Commençons par déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en écrivant que la formule de quadrature approchée est exacte sur $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$

- Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0$, alors elle est exacte pour la fonction constante, égale à 1. On en déduit

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = h$$

- Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_1$, alors elle est exacte pour la fonction $x \mapsto \left(x-a-\frac{h}{2}\right)$. L'intégration exacte donne

$$\int_a^{a+h} \left(x-a-\frac{h}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\left(x-a-\frac{h}{2}\right)^2\right]_a^{a+h} = 0$$

tandis que la formule de quadrature approchée donne

$$\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(a+\frac{h}{3}\right) + \alpha_2 f\left(a+\frac{2h}{3}\right) + \alpha_3 f(a+h)$$
$$= -\frac{h}{2}\,\alpha_0 - \frac{h}{6}\,\alpha_1 + \frac{h}{6}\,\alpha_2 + \frac{h}{2}\,\alpha_3$$

on en déduit la relation

$$-\frac{h}{2}\,\alpha_0 - \frac{h}{6}\,\alpha_1 + \frac{h}{6}\,\alpha_2 + \frac{h}{2}\,\alpha_3 = 0$$

ou encore

$$-\alpha_0 - \frac{1}{3}\,\alpha_1 + \frac{1}{3}\,\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

- Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_2$, alors elle est exacte pour la fonction $x \mapsto \left(x-a-\frac{h}{2}\right)^2$. L'intégration exacte donne

$$\int_a^{a+h} \left(x-a-\frac{h}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\left(x-a-\frac{h}{2}\right)^3\right]_a^{a+h} = \frac{2}{3}\,\frac{h^3}{8}$$

tandis que la formule de quadrature approchée donne

$$\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(a+\frac{h}{3}\right) + \alpha_2 f\left(a+\frac{2h}{3}\right) + \alpha_3 f(a+h)$$
$$= \frac{h^2}{4}\,\alpha_0 + \frac{h^2}{36}\,\alpha_1 + \frac{h^2}{36}\,\alpha_2 + \frac{h^2}{4}\,\alpha_3$$

on en déduit la relation

$$\frac{h^2}{4}\,\alpha_0 + \frac{h^2}{36}\,\alpha_1 + \frac{h^2}{36}\,\alpha_2 + \frac{h^2}{4}\,\alpha_3 = \frac{h^3}{12}$$

ou encore

$$3\alpha_0 + \frac{1}{3}\,\alpha_1 + \frac{1}{3}\,\alpha_2 + 3\alpha_3 = h$$

- Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_3$, alors elle est exacte pour la fonction $x \mapsto \left(x-a-\frac{h}{2}\right)^3$. L'intégration exacte donne

$$\int_a^{a+h} \left(x-a-\frac{h}{2}\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\left(x-a-\frac{h}{2}\right)^4\right]_a^{a+h} = 0$$

La formule de quadrature approchée donne

$$\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(a+\frac{h}{3}\right) + \alpha_2 f\left(a+\frac{2h}{3}\right) + \alpha_3 f(a+h)$$
$$= -\frac{h^3}{8}\alpha_0 - \frac{h^3}{216}\alpha_1 + \frac{h^3}{216}\alpha_2 + \frac{h^3}{8}\alpha_3$$

on en déduit la relation

$$\frac{h^3}{8}\alpha_0 - \frac{h^3}{216}\alpha_1 + \frac{h^3}{216}\alpha_2 + \frac{h^3}{8}\alpha_3 = 0$$

ou encore

$$-\alpha_0 - \frac{1}{27}\alpha_1 + \frac{1}{27}\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

On trouve ainsi le système

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = h \\ -\alpha_0 - \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + 3\alpha_3 = h \\ -\alpha_0 - \frac{1}{27}\alpha_1 + \frac{1}{27}\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\alpha_0 = \alpha_3 = \frac{h}{8} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3h}{8}$$

Cherchons si cette formule de quadrature approchée est exacte sur $\mathcal{P}_4$. On teste cette formule sur $x \mapsto \left(x-a-\frac{h}{2}\right)^4$.

- L'intégration exacte donne

$$\int_a^{a+h} \left(x-a-\frac{h}{2}\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left[\left(x-a-\frac{h}{2}\right)^5\right]_a^{a+h} = \frac{h^5}{80}$$

- la formule de quadrature approchée donne

$$\frac{h}{8}\frac{h^4}{16} + \frac{3h}{8}\frac{h^4}{36^2} + \frac{3h}{8}\frac{h^4}{36^2} + \frac{h}{8}\frac{h^4}{16} = \frac{7h^5}{432} \neq \frac{h^5}{80}$$

la formule n'est donc pas exacte sur $\mathcal{P}_4$. Cette formule est donc de degré 3.

Soit f une fonction $\mathscr{C}^4$. Pour déterminer l'erreur d'intégration, on utilise le polynôme interpolateur de Lagrange P de f en les points $a, a+\frac{h}{3}, a+\frac{2h}{3}, a+h$. Ce polynôme vérifie

$$\left\{\begin{aligned} f(a) &= \mathrm{P}(a) \\ f\left(a+\frac{h}{3}\right) &= \mathrm{P}\left(a+\frac{h}{3}\right) \\ f\left(a+\frac{2h}{3}\right) &= \mathrm{P}\left(a+\frac{2h}{3}\right) \\ f(a+h) &= \mathrm{P}(a+h) \end{aligned}\right.$$

De plus, il est de degré 3, donc la formule de quadrature approchée est exacte pour ce polynôme. On a l'erreur d'interpolation suivante :

$$\forall x \in [\,a\,;a+h\,] \quad \exists \xi \in [\,a\,;a+h\,]$$
$$f(x)-\mathrm{P}(x) = \frac{(x-a)\left(x-a-\frac{h}{3}\right)\left(x-a-\frac{2h}{3}\right)(x-a-h)}{4!}\, f^{(4)}(\xi)$$

d'où l'on déduit

$$|f(x)-\mathrm{P}(x)| \leqslant \frac{\left|(x-a)\left(x-a-\frac{h}{3}\right)\left(x-a-\frac{2h}{3}\right)(x-a-h)\right|}{4!}\, \|f^{(4)}\|_\infty$$

Le calcul exact de cette intégrale donne

$$\int_a^{a+h} \frac{\left|(x-a)\left(x-a-\frac{h}{3}\right)\left(x-a-\frac{2h}{3}\right)(x-a-h)\right|}{4!} = \frac{49\,h^5}{174960}$$

on a donc la majoration d'erreur d'intégration suivante

$$\left|\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\frac{h}{8}\,f(a) + \frac{3h}{8}\,f\left(a+\frac{h}{3}\right) + \frac{3h}{8}\,f\left(a+\frac{2h}{3}\right) + \frac{h}{8}\,f(a+h)\right]\right| \leqslant \frac{49\,h^5 \|f^{(4)}\|_\infty}{174960}$$

4.b On s'intéresse ici à une formule de quadrature approchée à deux points

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{A}g(0) + \mathrm{B}g(t_0)$$

Afin de déterminer les coefficients A et B, on écrit que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$.

- Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0$, alors elle est exacte pour la fonction constante, égale à 1, donc
$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = 1$$
- Si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_1$, alors elle est exacte pour la fonction $t \mapsto t$; l'intégration exacte donne
$$\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
et la formule de quadrature approchée donne la valeur $\mathrm{B}t_0$.

On en déduit que

$$\mathrm{A} = \frac{2t_0 - 1}{2t_0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{2t_0}$$

(On exclut le cas $t_0 = 0$, qui correspondrait à la formule des rectangles à gauche). Cherchons à présent le degré de précision de la formule. Pour cela, on teste la formule sur $\mathcal{P}_2$.

- l'intégration exacte de $t \mapsto t^2$ donne

$$\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

- la formule de quadrature approchée donne $\dfrac{1}{2t_0}\, t_0^2 = \dfrac{t_0}{2}$

La formule est donc exacte sur $\mathcal{P}_2$, si et seulement si $t_0 = \dfrac{2}{3}$.

Dans ce dernier cas, on cherche si la formule est exacte sur $\mathcal{P}_3$, par exemple pour $t \mapsto t^3$, l'intégration exacte donne

$$\int_0^1 t^3 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

et la formule de quadrature approchée donne la valeur $\dfrac{2}{9}$. On en déduit que la formule n'est jamais exacte sur $\mathcal{P}_3$.

Concernant la formule d'erreur de quadrature :

- Si $t_0 \neq \dfrac{2}{3}$, la formule est de degré 1. Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$, et P son polynôme d'interpolation aux points 0 et t_0. On a alors la formule d'erreur d'interpolation :

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \quad \exists \xi \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) - \mathrm{P}(t) = \frac{t(t-t_0)}{2}\, f^{(2)}(\xi)$$

d'où la majoration

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad |f(t) - \mathrm{P}(t)| \leqslant \|f^{(2)}\|_\infty \, \frac{t\,|t-t_0|}{2}$$

De plus

$$\mathrm{A}f(0) + \mathrm{B}f(t_0) = \mathrm{AP}(0) + \mathrm{BP}(t_0) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Finalement, on calcule l'erreur d'intégration :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{2t_0-1}{2t_0}\, f(0) - \frac{1}{2t_0}\, f(t_0)\right| &= \left|\int_0^1 (f(t) - \mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t) - \mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2} \int_0^1 t\,|t-t_0|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2} \left[-\int_0^{t_0} t(t-t_0)\mathrm{d}t \right. \\
&\qquad \left. + \int_{t_0}^1 t(t-t_0)\mathrm{d}t \right] \\
&\leqslant \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{t_0}{2} + \frac{t_0^3}{3} \right)
\end{aligned}$$

- si $t_0 = \dfrac{2}{3}$, alors la formule est de degré 2. On recommence le même tralala en prenant pour P le polynôme interpolant les points $f(0), f(t_0), f'(t_0)$. On a encore

$$\mathrm{A}f(0) + \mathrm{B}f(t_0) = \mathrm{AP}(0) + \mathrm{BP}(t_0) = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Si on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^3$, alors on a la formule d'erreur d'interpolation

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \quad \exists \xi \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) - \mathrm{P}(t) = \frac{t(t-t_0)^2}{6}\, f^{(3)}(\xi)$$

Finalement, on calcule l'erreur d'intégration :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\,f(0) - \frac{3}{4}\,f\left(\frac{2}{3}\right)\right| &= \left|\int_0^1 (f(t) - \mathrm{P}(t))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t) - \mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{6} \int_0^1 t\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{6} \left[\int_0^1 \left(t - \frac{2}{3}\right)^3 \mathrm{d}t \right. \\
&\qquad \left. + \frac{2}{3}\int_0^1 \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 \mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{108}
\end{aligned}$$

> Cette formule, dans le cas où $t_0 = \dfrac{2}{3}$, est une formule de type *Gauss–Lobato* : l'un des points de quadrature est imposé, et le second point de quadrature est cherché de telle sorte que la formule soit de degré maximal.

Remarque sur le choix des points de quadrature
Comme on l'a vu pour les formules de Simpson, des trapèzes, etc.., on voit que lorsqu'on a une formule d'intégration numérique du type

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

alors on peut déterminer les λ_i en écrivant que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \ldots \mathcal{P}_{n-1}$ (En écrivant que cette formule est exacte pour $x \mapsto x^k$, où l'entier k est dans $[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, on trouve un système de Van–Der–Monde).

On sait que cette formule est au plus de degré $2n$, car pour la fonction $x \mapsto \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$, la formule de quadrature approchée est nulle, tandis que l'intégrale de cette fonction est strictement positive.

Soit P un polynôme de degré au plus $2n-1$. Pour évaluer la différence entre le calcul de l'intégrale exacte et la valeur donnée par la formule de quadrature approchée, on pose R le reste de la division euclidienne de P par $\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-x_i)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}) \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-x_i) + \mathrm{R}(\mathrm{X})$$

On a alors $\mathrm{R}(x_i) = \mathrm{P}(x_i)$ pour tout i, donc les valeurs données par la formule de quadrature approchée sont les mêmes pour P et R. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathrm{P}(x_i) &= \int_a^b \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathrm{R}(x_i)\\
&= \int_a^b \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \mathrm{R}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \mathrm{Q}(t)\prod_{i=1}^{n}(t-x_i)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On en déduit que la formule est exacte pour tout P dans $\mathcal{P}_{2n-1}$, si

$$\int_a^b \mathrm{Q}(t)\prod_{i=1}^{n}(t-x_i)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout Q de degré inférieur à $n-1$. Il suffit donc que $\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-x_i)$ soit le $n$ième polynôme orthogonal pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

5. Méthode de Gauss–Legendre

$\boxed{\text{5.a}}$ Afin de déterminer les coefficients de la formule de quadrature approchée, on écrit que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0$ et sur $\mathcal{P}_1$.

- Sur $\mathcal{P}_0$, par exemple pour $x \mapsto 1$, l'intégration exacte donne

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$$

alors que la formule de quadrature approchée donne

$$\alpha f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \beta f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \alpha + \beta$$

on trouve donc l'équation

$$\alpha + \beta = 2$$

- On écrit à présent que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_1$, donc pour $x \mapsto x$. L'intégration exacte de cette fonction donne

$$\int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

alors que la formule de quadrature approchée donne

$$\alpha - \beta$$

on trouve ainsi l'équation

$$\alpha - \beta = 0$$

On en déduit ainsi que $\alpha = \beta = 1$.

Vérifions à présent que la formule est de degré 3.

- Pour que la formule soit exacte sur $\mathcal{P}_2$, il suffit que la formule soit exacte sur une base de cet espace, donc il suffit qu'elle soit exacte pour $x \mapsto x^2$. Pour cette fonction, l'intégration exacte donne

$$\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

tandis que la formule de quadrature approchée donne

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}$$

Et on en déduit que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_2$

- Pour que la formule soit exacte sur $\mathcal{P}_3$, il suffit que la formule soit exacte sur une base de cet espace, donc il suffit qu'elle soit exacte pour $x \mapsto x^3$. Pour cette fonction, l'intégration exacte donne

$$\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x = 0$$

car la fonction est impaire, et intégrée sur un intervalle symétrique par rapport à 0. La formule de quadrature approchée donne

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

Et on en déduit que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_3$

- En revanche, la formule n'est pas exacte sur $\mathcal{P}_4$. En effet, soit $f : x \longmapsto \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$. Alors l'intégrale exacte de cette fonction est strictement positive, tandis que la formule de quadrature approchée utilisée avec cette fonction donne 0.

On en déduit que la formule de quadrature approchée est de degré 3.

5.b Le polynôme d'interpolation d'Hermite construit sur les abscisses de Gauss est l'unique polynôme P de degré 3 tel que

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \mathrm{P}'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \mathrm{P}'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}\right.$$

De plus, on dispose de la formule d'erreur d'interpolation suivante

$$\forall x \in [-1\,;1] \quad \exists \xi \in [-1\,;1] \qquad f(x) - \mathrm{P}(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

De cette égalité, on déduit la majoration

$$\left|\int_{-1}^{1} (f(x) - \mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!} \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

De plus, comme la formule de quadrature approchée est exacte sur $\mathcal{P}_3$, elle est exacte pour P :

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

qui est la formule de quadrature approchée. On en déduit que

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - \mathrm{P}(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

d'où la majoration de l'erreur de quadrature suivante

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| \leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!} \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Il reste à calculer l'intégrale intervenant dans la majoration, ce que l'on va faire les doigts dans le nez

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{1}{9}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{9}\,[x]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \\ \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathrm{d}x &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

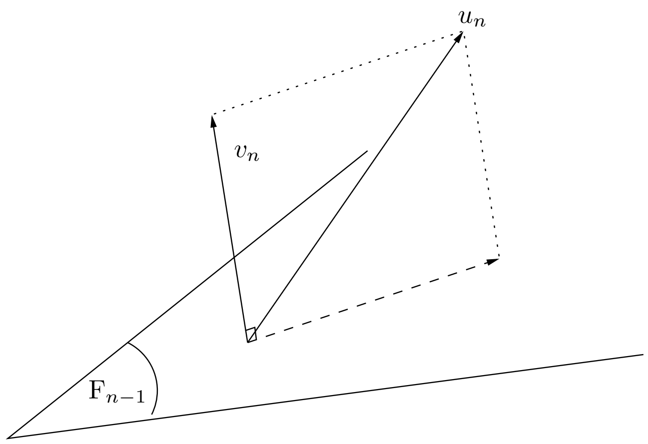

FIG. 1 – Pour passer de l'étape $n-1$ à l'étape n de l'algorithme d'orthonormalisation, on retire au vecteur u_n sa composante sur $\mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_{n-1}) = \mathrm{Vect}\,(v_1,\ldots,v_{n-1}) = \mathrm{F}_{n-1}$ (ce vecteur est représenté en pointillés sur la figure). Comme la base $v_1,\ldots v_{n-1}$ est orthonormale, il est très simple de décomposer $u_n - v_n$ sur cette base à l'aide du produit scalaire.

On trouve ainsi la majoration de l'erreur de quadrature

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| \leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!}\,\frac{8}{45}$$

$\boxed{\textbf{5.c}}$ La famille des polynômes de Legendre $(\mathscr{L}_0,\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\ldots,\mathscr{L}_n)$ est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de $\mathcal{P}_n$ pour le produit scalaire

$$(f,g)\in\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_n \longmapsto \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour l'explication de l'orthonormalisation de Schmidt, voir la Figure 1

- Le polynôme $\mathscr{L}_0$ est proportionnel à 1, c'est à dire qu'il est de la forme α_0. Pour qu'il soit normalisé, il faut que $\displaystyle\int_{-1}^{1}\alpha_0^2\,\mathrm{d}t = 1$. On choisit donc $\alpha_0 = \dfrac{1}{2}$.
- Le polynôme $\mathscr{L}_1$ est de la forme

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1 &= \alpha_1\,(\mathrm{X} - \langle \mathrm{X},\mathscr{L}_0\rangle\mathscr{L}_0)\\ &= \alpha_1\left(\mathrm{X} - \int_{-1}^{1}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\;\mathscr{L}_0\right)\\ &= \alpha_1\mathrm{X}\end{aligned}$$

On choisit α_1 tel que $\mathscr{L}_1$ soit normalisé (i.e. $\langle\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_1\rangle = 1$).

$$\int_{-1}^{1}(\alpha_1 x)^2\,\mathrm{d}x = \alpha_1^2\int_{-1}^{1}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\alpha_1^2}{3}$$

et on en déduit que

$$\mathscr{L}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{X}$$

- Le troisième polynôme de Legendre $\mathscr{L}_2$ est de la forme

$$\mathscr{L}_2 = \alpha_2 \left(\mathrm{X}^2 - \langle \mathrm{X}^2, \mathscr{L}_1 \rangle - \langle \mathrm{X}^2, \mathscr{L}_0 \rangle\right)$$

  et on a

$$\langle \mathrm{X}^2, \mathscr{L}_0 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \,\mathrm{d}x = 0$$
$$\langle \mathrm{X}^2, \mathscr{L}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

L'unique racine de $\mathscr{L}_1$ est 0. La formule de quadrature que l'on trouve en utilisant ce point est la formule du point milieu. Les racines de $\mathscr{L}_2$ sont $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, ce qui donne une formule de degré 3.

$\boxed{\textbf{5.d}}$ Le contre exemple donné à la première question montre qu'une formule de quadrature à n points ne peut être exacte, au mieux que sur $\mathcal{P}_{2n-1}$. On cherche donc une formule de degré 3, en faisant un changement de variable pour se ramener sur $[\,-1\,;1\,]$:

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f \circ \varphi(u)\, \varphi'(u)\mathrm{d}u$$

On cherche φ linéaire telle que $\varphi(-1) = a$ et $\varphi(1) = b$. On cherche donc α et β tels que $\varphi\,:\, x \mapsto \alpha x + \beta$ et

$$\begin{cases} \varphi(-1) = -\alpha + \beta = a \\ \varphi(1) = \alpha + \beta = b \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{b-a}{2} \\ \beta = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

et on en déduit $\varphi'(x) = \dfrac{b-a}{2}$, d'où

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}x$$

Et en appliquant la formule de quadrature approchée sur $[\,-1\,;1\,]$, on trouve

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left(f\left(\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(-\frac{b-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right)\right)$$

$\boxed{\textbf{5.f}}$ Afin de déterminer une formule de quadrature approchée à n points qui soit exacte sur $\mathcal{P}_{2n-1}$, il suffit de calculer le $n$ième polynôme de Legendre, et de choisir pour points de quadrature les racines de ce polynôme.

6. Méthode de Gauss–Tchebycheff

Afin que la formule de quadrature approchée

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \alpha f(x_0) + \beta f(x_1)$$

soit de degré maximal, il suffit de choisir, pour x_0 et x_1, les racines du troisième polynôme orthogonal pour le produit scalaire

$$(f, g) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \longmapsto \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}t$$

Calculons les premiers polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire (On note ces polynômes $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n, \ldots$)

- Le polynôme T_0 est constant, de la forme $\mathrm{T}_0(x) = \mathrm{K}$, et on cherche K tel que ce polynôme soit normalisé.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{K}^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{K}^2\left[\mathrm{Arcsin}\,(x)\right]_{-1}^{1} = \pi\mathrm{K}^2$$

d'où l'on déduit $\mathrm{K} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

- Le polynôme T_1 est de la forme

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{K}_1\left(\mathrm{X} - \langle \mathrm{X}, \mathrm{T}_0\rangle \mathrm{T}_0\right)$$

où l'on a

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{T}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

Le polynôme T_1 est donc de la forme $\mathrm{K}_1\mathrm{X}$. De plus, on veut $\|\mathrm{T}_1\| = 1$ soit

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{K}_1^2 x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 1$$

Dans cette intégrale, on pose $x = \sin u$, ce qui amène au calcul de

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$$

et on trouve ainsi $\mathrm{K}_1 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, c'est à dire que

$$\mathrm{T}_1(\mathrm{X}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{X}$$

- D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt, le polynôme T_2 est de la forme

$$\mathrm{T}_2(\mathrm{X}) = \mathrm{K}_2\left(\mathrm{X}^2 - \langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_1\rangle \mathrm{T}_1 - \langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_0\rangle \mathrm{T}_0\right)$$

et on a

$$\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\langle \mathrm{X}^2, \mathrm{T}_1 \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = 0$$

> D'une manière générale, les polynômes orthogonaux de Tchebycheff sont les polynômes T_n tels que
> $$\mathrm{T}_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

On en déduit que T_2 est de la forme

$$\mathrm{T}_2 = \mathrm{K}_2 \left(\mathrm{X}^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) = \mathrm{K}_2 \left(\mathrm{X}^2 - \frac{1}{2} \right)$$

Les racines de T_2 sont donc $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, la meilleure formule de quadrature approchée est de la forme

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x = \alpha f \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \beta f \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Cherchons maintenant les coefficients α et β de la formule de quadrature approchée, en écrivant que la formule est exacte sur $\mathcal{P}_0$ et sur $\mathcal{P}_1$.

- Si la formule de quadrature approchée est exacte sur $\mathcal{P}_0$, donc pour $x \mapsto 1$, alors l'intégration approchée donne la valeur $\alpha + \beta$, alors que l'intégration exacte donne
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = [\mathrm{Arcsin}\,(x)]_{-1}^{1} = \pi$$
On en déduit que
$$\alpha + \beta = \pi$$
- Si la formule de quadrature approchée est exacte sur $\mathcal{P}_1$, donc pour $x \mapsto x$, alors l'intégration approchée donne la valeur $-\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{2}}$, alors que l'intégration exacte donne la valeur 0. On en déduit que
$$\alpha - \beta = 0$$

Finalement, on obtient

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$$

Comme il s'agit d'une méthode de Gauss à deux points, elle est de degré 3.

Afin de majorer l'erreur d'intégration, on utilise le polynôme d'interpolation d'Hermite en les racines de T_2. Pour cette interpolation, on dispose de la formule d'erreur suivante

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \quad \exists \xi \in [\,-1\,;1\,] \qquad f(x) - \mathrm{P}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)$$

On en déduit la majoration de l'erreur de quadrature suivante

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \leqslant \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

Il reste à calculer cette intégrale

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{4}\,[x]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\
\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x &= \frac{7}{30}
\end{aligned}$$

soit

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \leqslant \frac{7\|f^{(4)}\|_\infty}{4! \times 30}$$

On applique cette formule de quadrature approchée à la fonction $x \mapsto \mathrm{Arccos}\,(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{Arccos}\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&\approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) \\
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{Arccos}\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

En réalité, le calcul approché est exact. En effet, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{Arccos}\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{Arccos}^2(x)}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi^2}{2}$$

7. Intégration 2D – Méthode 1

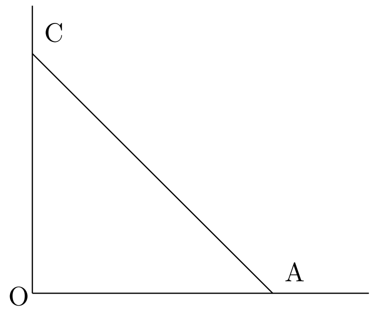

Fig. 2 – Le triangle élémentaire, beau, simple, majestueux, innocent. Il ne se doute absolument pas quelles atrocités il va devoir subir.

$\boxed{\textbf{7.a}}$ On cherche une formule de quadrature approchée sur le triangle élémentaire (voir Figure 2) sous la forme

$$\int_{\widehat{\mathrm{K}}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha g(\mathrm{O}) + \beta g(\mathrm{A}) + \gamma g(\mathrm{C})$$

Afin de déterminer les coefficients α, β, γ, on écrit que la formule approchée est exacte sur les polynômes à deux variables de degré 1.

- Si la formule est exacte pour la fonction $(x,y) \mapsto 1$, alors, d'une part, la formule approchée donne
$$\alpha + \beta + \gamma$$
d'autre part, l'intégrale exacte est égale à l'aire du triangle élémentaire, c'est à dire $\frac{1}{2}$. On en déduit l'équation
$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}$$
- Si la formule est exacte pour la fonction $(x,y) \mapsto x$, alors, d'une part l'intégration exacte donne
$$\int_{\widehat{\mathrm{K}}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-y} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{(1-y)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$
et la formule approchée donne la valeur β. On en déduit que $\beta = \frac{1}{6}$.
- Si la formule est exacte pour la fonction $(x,y) \mapsto y$, alors, la symétrie entre x et y donne $\gamma = \frac{1}{6}$.

On trouve finalement
$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{6}$$

7.b

> Les formules d'erreur d'interpolation que l'on avait en dimension 1 ne peuvent pas être étendues facilement en dimension 2. En effet, en dimension 1, les formules d'erreur d'interpolation reposent sur le théorème de Rolle, qui est spécifique à la dimension 1, mais faux en dimension 2.

On va utiliser l'interpolation P^1 en dimension 2. Comme en dimension 1, les fonctions P^1 sont linéaires par morceaux (en dimension 1, ce sont des fonctions linéaires sur un intervalle, en dimension 2, ce sont des fonctions linéaires sur le triangle). Pour cette question, et pour cette question seulement, on va noter x_1 et x_2 les composantes du vecteur x (Contrairement aux questions précédentes, x n'est donc plus un scalaire, mais un vecteur). On vérifie que les fonctions suivantes forment une base des fonctions P^1 sur le triangle :

$$\begin{cases} \varphi_0(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2 \\ \varphi_\mathrm{A}(x_1, x_2) = x_1 \\ \varphi_\mathrm{C}(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}$$

Ainsi, toute fonction f qui est P^1 sur le triangle vérifie

$$f = f(\mathrm{O})\varphi_0 + f(\mathrm{A})\varphi_\mathrm{A} + f(\mathrm{C})\varphi_\mathrm{C}$$

de plus, ces fonctions de base vérifient

$$\forall (x_1, x_2) \in \widehat{\mathrm{K}} \qquad \varphi_0(x_1, x_2) + \varphi_\mathrm{A}(x_1, x_2) + \varphi_\mathrm{C}(x_1, x_2) = 1$$

On note a_i, $i = 1, 2, 3$ les sommets du triangle. Soit x un point quelconque du triangle $\widehat{\mathrm{K}}$. On commence par écrire la formule de Taylor avec reste intégral sur le segment $[a_i\, x]$ pour la fonction f :

$$f(a_i) = f(x) + \nabla f(x) \cdot (a_i - x) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(x + t(a_i - x)) \cdot (a_i - x) \cdot (a_i - x)\, \mathrm{d}t$$

On multiplie chacune des égalités trouvées par les fonctions de base φ_i correspondantes, et on somme sur i pour trouver

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 f(a_i)\varphi_i(x) = {} & \left(\sum_{i=1}^3 \varphi_i(x)\right) f(x) + \sum_{i=1}^3 \nabla f(x) \cdot (a_i - x)\varphi_i(x) \\ & + \sum_{i=1}^3 \int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(x + t(a_i - x)) \cdot (a_i - x) \cdot (a_i - x)\varphi_i(x)\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^2$. La fonction $y \mapsto \mathrm{V} \cdot (y - x)$ étant linéaire sur le triangle, on a

$$\mathrm{V} \cdot (y - x) = \sum_{i=1}^3 \mathrm{V} \cdot (a_i - x)\varphi_i(y)$$

en évaluant cette dernière expression en $y = x$, on trouve

$$\sum_{i=1}^3 \mathrm{V} \cdot (a_i - x)\varphi_i(x) = 0$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^3 f(a_i)\varphi_i(x) = f(x) + \sum_{i=1}^3 \int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(x + t(a_i - x)) \cdot (a_i - x) \cdot (a_i - x)\varphi_i(x)\, \mathrm{d}t$$

En intégrant une fois cette égalité sur $\widehat{\mathrm{K}}$, et tenant compte du fait que

$$\int_{\widehat{\mathrm{K}}} \varphi_i(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{6}$$

on trouve

$$\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} f(a_i) = \int_{\widehat{\mathrm{K}}} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{3}\int_{\widehat{\mathrm{K}}}\int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(x+t(a_i-x))\cdot(a_i-x)\cdot(a_i-x)\varphi_i(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

On trouve alors une erreur de quadrature numérique inférieure à

$$\sum_{i=1}^{3}\int_0^1\int_{\widehat{\mathrm{K}}}(1-t)\|\mathrm{D}^2 f\|_\infty \|a_i - x\|^2\,|\varphi_i(x)|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Enfin, on utilise la majoration

$$\|a_i - x\| \leqslant \sqrt{2}$$

ainsi que l'égalité

$$\sum_{i=1}^{3}\int_{\widehat{\mathrm{K}}}\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

pour trouver que l'erreur est majorée par $\dfrac{1}{2}\,\|\mathrm{D}^2 f\|_\infty$.

7.c En découpant le rectangle $[\,0\,;1\,]\times[\,0\,;1\,]$ en deux triangles $\widehat{\mathrm{K}}$ et $\widetilde{\mathrm{K}}$, on a

$$\begin{aligned}\int_{[\,0\,;1\,]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\widehat{\mathrm{K}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\widetilde{\mathrm{K}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\approx \frac{1}{6}\,(f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})) + \frac{1}{6}\,(f(\mathrm{O})+f(\mathrm{A})+f(\mathrm{C}))\\ &\approx \frac{1}{3}\,f(\mathrm{A}) + \frac{1}{3}\,f(\mathrm{C}) + \frac{1}{6}\,f(\mathrm{O}) + \frac{1}{6}\,f(\mathrm{B})\end{aligned}$$

L'erreur de quadrature numérique est égale à deux fois l'erreur sur un triangle, soit $\|\mathrm{D}^2 f\|_\infty$.

7.d On note x_i et y_i les abscisses et les ordonnées du maillage. Sur un carré élémentaire $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]\times[\,y_i\,;y_{i+1}\,]$, on effectue le changement de variable

$$\varphi\,:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}$$

Et on a ainsi

$$\int_{[\,x_i\,;x_{i+1}\,]\times[\,y_i\,;y_{i+1}\,]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = h^2\int_{[\,0\,;1\,]^2} f\circ\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On utilise donc l'approximation

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx h^2\sum_{i,j=0}^{\mathrm{N}-1,\mathrm{M}-1}\Big(\frac{1}{3}\,f(x_i,y_{i+1}) + \frac{1}{3}\,f(x_{i+1},y_i) + \frac{1}{6}\,f(x_i,y_i) + \frac{1}{6}\,f(x_{i+1},y_{i+1})\Big)$$

De plus, comme φ est une homothétie–translation, on a

$$\mathrm{D}(f \circ \varphi) = h\mathrm{D}(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}^2(f \circ \varphi) = h^2\mathrm{D}^2(f)$$

En utilisant la majoration trouvée sur le carré $[\,x_i\,;x_{i+1}\,] \times [\,y_i\,;y_{i+1}\,]$, on aboutit à

$$\left| \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - h^2 \sum_{i,j=0}^{\mathrm{N}-1,\mathrm{M}-1} \left(\frac{1}{3} f(x_i, y_{i+1}) + \frac{1}{3} f(x_{i+1}, y_i) + \frac{1}{6} f(x_i, y_i) + \frac{1}{6} f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right) \right| \leqslant \sum_{i,j=0}^{\mathrm{N}-1,\mathrm{M}-1} h^4 \,\|\mathrm{D}^2 f\|_\infty$$

d'où, en utilisant $\sum_{i,j=0}^{\mathrm{N}-1,\mathrm{M}-1} h^2 = \mathrm{aire}(\Omega)$:

$$\left| \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - h^2 \sum_{i,j=0}^{\mathrm{N}-1,\mathrm{M}-1} \left(\frac{1}{3} f(x_i, y_{i+1}) + \frac{1}{3} f(x_{i+1}, y_i) + \frac{1}{6} f(x_i, y_i) + \frac{1}{6} f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right) \right| \leqslant h^2 \,\|\mathrm{D}^2 f\|_\infty \,\mathrm{aire}(\Omega)$$

7.e On cherche à approcher l'intégrale

$$\int_0^2 \int_0^3 \mathrm{e}^{-x^2y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

notons

$$f \;:\; (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2y^3}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy^3\mathrm{e}^{-x^2y^3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2y^2\mathrm{e}^{-x^2y^3}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3(-1 + 2x^2y^3)\mathrm{e}^{-x^2y^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2(-1 + x^2y^3)\mathrm{e}^{-x^2y^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3x^2y(-2 + 3x^2y^3)\mathrm{e}^{-x^2y^3}$$

En majorant comme un sauvage, on trouve

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|_\infty \leqslant 11718$$
$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\|_\infty \leqslant 11736$$
$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right\|_\infty \leqslant 11772$$

Soit $\|\mathrm{D}^2 f\|_\infty \leqslant 11772$. De plus, dans notre cas, on a $\mathrm{aire}(\Omega) = 6$. Pour avoir une erreur majorée par ε, il suffit donc de choisir

$$h \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{70632}}$$

8. Intégration 2D – méthode 2

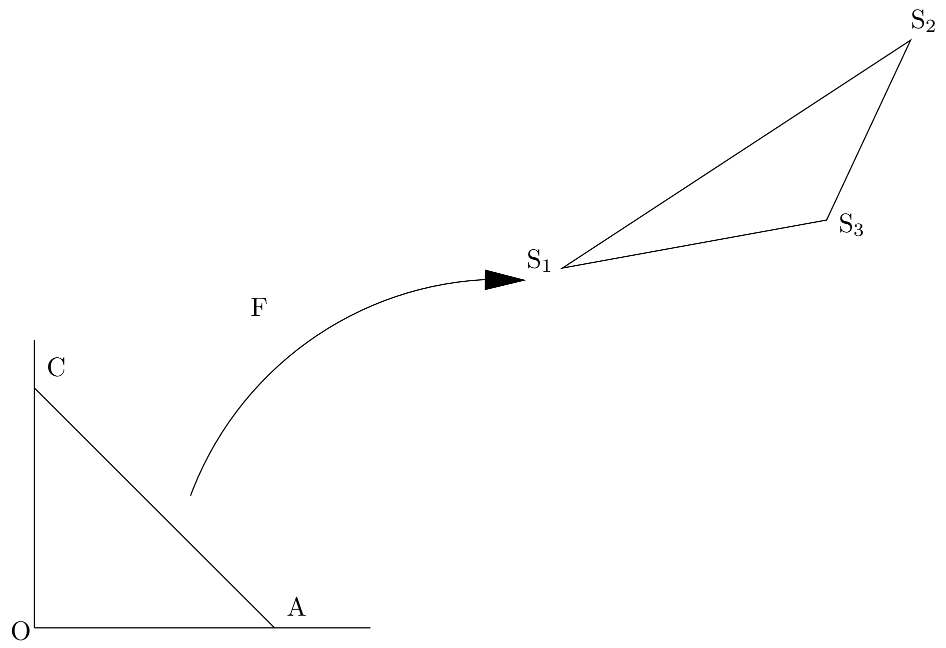

Fig. 3 – On cherche une transformation affine F envoyant le triangle de référence OAC vers un triangle quelconque $S_1S_2S_3$

8.a

On cherche une transformation affine F de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$F(O) = S_1 \qquad F(A) = S_2 \qquad F(C) = S_3$$

(la transformation affine est schématiquement représentée Figure 3). On note S_i^x et S_i^y les abscisses et ordonnées du point S_i. Comme F est une transformation affine de $\mathbb{R}^2$, elle peut s'écrire sous la forme

$$F\,:\,X \in \mathbb{R}^2 \longmapsto AX + B$$

où A est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ et B est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On note $a_{i,j}$ les coefficients de A, et b_1, b_2 les coefficients de B. Le fait qu'on ait

$$F(O) = S_1 \qquad F(A) = S_2 \qquad F(C) = S_3$$

donne les équations

$$\begin{aligned} b_1 &= S_1^x \\ b_2 &= S_1^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 + a_{1,1} &= S_2^x \\ b_2 + a_{2,1} &= S_2^y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 + a_{1,2} &= \mathrm{S}_3^x \\ b_2 + a_{2,2} &= \mathrm{S}_3^y \end{aligned}$$

On trouve ainsi que

$$\mathrm{F} \,:\, \mathrm{X} \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{S}_2^x - \mathrm{S}_1^x & \mathrm{S}_3^x - \mathrm{S}_1^x \\ \mathrm{S}_2^y - \mathrm{S}_1^y & \mathrm{S}_3^y - \mathrm{S}_1^y \end{pmatrix} \mathrm{X} + \begin{pmatrix} \mathrm{S}_1^x \\ \mathrm{S}_1^y \end{pmatrix}$$

Il reste à vérifier que la transformation F est inversible. Comme il s'agit d'une transformation affine, il suffit que la partie linéaire soit inversible.

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{S}_2^x - \mathrm{S}_1^x & \mathrm{S}_3^x - \mathrm{S}_1^x \\ \mathrm{S}_2^y - \mathrm{S}_1^y & \mathrm{S}_3^y - \mathrm{S}_1^y \end{pmatrix} = (\mathrm{S}_2^x - \mathrm{S}_1^x)(\mathrm{S}_3^y - \mathrm{S}_1^y) - (\mathrm{S}_2^y - \mathrm{S}_1^y)(\mathrm{S}_3^x - \mathrm{S}_1^x) = \overrightarrow{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2} \wedge \overrightarrow{\mathrm{S}_1\mathrm{S}_3} \cdot \overrightarrow{e}_3$$

et ce dernier produit mixte est nul, si et seulement si $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$ et $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_3$ sont colinéaires, c'est à dire si le triangle est dégénéré.

> En pratique, dans un programme, on prend garde à conserver également l'orientation : si les sommets du triangle de référence sont, dans le sens trigonométrique, $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{C}$, et que les sommets du triangle quelconque sont, dans le sens trigonométrique $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$, alors on évitera d'envoyer par exemple O sur S_1, A sur S_3 et C sur S_2. Ceci est équivalent au fait que le déterminant de la partie linéaire est positif.

8.b On remarque que si g est un polynôme multivarié, alors pour toute transformation affine φ, $g \circ \varphi$ est également un polynôme multivarié, qui est de degré inférieur ou égal à celui de g. On peut donc utiliser la question précédente afin de déterminer une formule de quadrature approchée qui soit exacte sur les polynômes de degré inférieur ou égal à 1. D'après la formule de changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{F}(\Omega)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\Omega} g \circ \mathrm{F}(x,y)\,|\mathrm{Jac}_\varphi|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\approx \frac{|\mathrm{Jac}_\varphi|}{6}\,(g \circ \mathrm{F}(\mathrm{A}) + g \circ \mathrm{F}(\mathrm{O}) + g \circ \mathrm{F}(\mathrm{C})) \\ &\approx \frac{\mathrm{Aire(K)}}{3}\,(g(\mathrm{S}_1) + g(\mathrm{S}_2) + g(\mathrm{S}_3)) \end{aligned}$$

8.c.i Afin de déterminer les coefficients de la formule de quadrature approchée, on va écrire que celle–ci est exacte sur une base des polynômes à deux indéterminées, de degré 2 ; comme base de cet espace, on utilise $1, x, y, x^2, xy, y^2$.

- pour $(x,y) \mapsto 1$, la formule de quadrature approchée donne la valeur

  $$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$$

  tandis que l'intégration exacte donne la valeur de l'aire du triangle de référence, c'est à dire $\frac{1}{2}$. On en déduit l'équation

  $$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \frac{1}{2}$$

- pour $(x,y) \mapsto x$, la formule de quadrature approchée donne la valeur

$$\alpha_2 + \frac{1}{2}\,\alpha_4 + \frac{1}{2}\,\alpha_5$$

tandis qu'on a vu à l'exercice 7, question (a), que l'intégration exacte donne la valeur $\frac{1}{6}$. On en déduit l'équation

$$\alpha_2 + \frac{1}{2}\,\alpha_4 + \frac{1}{2}\,\alpha_5 = \frac{1}{6}$$

- pour $(x,y) \mapsto y$, la formule de quadrature approchée donne la valeur

$$\alpha_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_3 + \frac{1}{2}\,\alpha_5$$

tandis qu'on a vu à l'exercice 7, question (a), que l'intégration exacte donne la valeur $\frac{1}{6}$. On en déduit l'équation

$$\alpha_1 + \frac{1}{2}\,\alpha_3 + \frac{1}{2}\,\alpha_5 = \frac{1}{6}$$

- pour $(x,y) \mapsto x^2$, la formule de quadrature approchée donne la valeur

$$\alpha_2 + \frac{1}{4}\,\alpha_4 + \frac{1}{4}\,\alpha_5$$

L'intégration exacte donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1-y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{(1-y)^3}{3}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[-\frac{(1-y)^4}{12}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

On en déduit l'équation

$$\alpha_2 + \frac{1}{4}\,\alpha_4 + \frac{1}{4}\,\alpha_5 = \frac{1}{12}$$

- De même, pour la fonction $(x,y) \mapsto y^2$, on trouve

$$\alpha_1 + \frac{1}{4}\,\alpha_3 + \frac{1}{4}\,\alpha_5 = \frac{1}{12}$$

- pour $(x,y) \mapsto xy$, la formule de quadrature approchée donne la valeur $\frac{1}{4}\,\alpha_5$

L'intégration exacte donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-y} xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_0^1 y \left(\int_0^{1-y} x \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{y(1-y)^2}{2} \, \mathrm{d}y \\
&= -\int_0^1 \frac{(1-y)^3}{2} \, \mathrm{d}y + \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} \, \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{(1-y)^4}{8} \right]_0^1 - \left[\frac{(1-y)^3}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

On en déduit l'équation

$$\frac{1}{4}\,\alpha_5 = \frac{1}{24}$$

Il reste donc à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_0 & + & \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & + & \alpha_5 & = & \frac{1}{2} \\
 & & & & \alpha_2 & & & + & \frac{1}{2}\,\alpha_4 & + & \frac{1}{2}\,\alpha_5 & = & \frac{1}{6} \\
 & & \alpha_1 & + & & + & \frac{1}{2}\,\alpha_3 & & & + & \frac{1}{2}\,\alpha_5 & = & \frac{1}{6} \\
 & & & & \alpha_2 & & & + & \frac{1}{4}\,\alpha_4 & + & \frac{1}{4}\,\alpha_5 & = & \frac{1}{12} \\
 & & \alpha_1 & + & & + & \frac{1}{4}\,\alpha_3 & & & + & \frac{1}{4}\,\alpha_5 & = & \frac{1}{12} \\
 & & & & & & & & & & \frac{1}{4}\,\alpha_5 & = & \frac{1}{24}
\end{array} \right.$$

En résolvant ce système, on obtient

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \frac{1}{6}$$

et

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

8.c.ii Comme les transformations affines conservent les barycentres, on a intérêt à exprimer les différents points de quadrature en fonction de points dont on connait les images par F. On a ainsi, sur le triangle de référence

$$\begin{aligned}
\left(0, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\,(\mathrm{O} + \mathrm{C}) \\
\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= \frac{1}{2}\,(\mathrm{O} + \mathrm{A}) \\
\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\,(\mathrm{C} + \mathrm{A})
\end{aligned}$$

On en déduit que si F est la transformation affine de la question (a), alors

$$\mathrm{F}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ (\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_3)$$
$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}\ (\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2)$$
$$\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ (\mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3)$$

On en déduit la formule de quadrature approchée suivante sur un triangle quelconque K, de sommets $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$:

$$\int_{\mathrm{K}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{Aire(K)}}{3}\left(g\left(\frac{1}{2}\ (\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_3)\right) + g\left(\frac{1}{2}\ (\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2)\right)\right.$$
$$\left. + g\left(\frac{1}{2}\ (\mathrm{S}_2+\mathrm{S}_3)\right)\right)$$

9. Méthodes d'intégration sur un rectangle

9.a On cherche à approcher l'intégrale

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Notons $\varphi(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$. On peut approcher, par la formule des rectangles, l'intégrale de φ

$$\int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y \approx \frac{1}{2}\,(\varphi(0)+\varphi(1))$$

De plus, on peut également approcher les intégrales définissant $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$, par la même formule des trapèzes :

$$\varphi(0) = \int_0^1 f(x,0)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\,(f(0,0)+f(1,0))$$

$$\varphi(1) = \int_0^1 f(x,1)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\,(f(0,1)+f(1,1))$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,(f(0,0)+f(1,0)) + \frac{1}{2}\,(f(0,1)+f(1,1))\right)\\ &\approx \frac{1}{4}\,(f(0,0)+f(1,0)+f(0,1)+f(1,1))\end{aligned}$$

Les polynômes de Q_1 sont les polynômes permettant d'interpoler sur un carré. Comme le carré est le produit tensoriel de $[\,0\,;1\,]$ par lui–même, les fonctions d'interpolation sont le produit tensoriel des fonctions d'interpolation sur $[\,0\,;1\,]$. Sur $[\,0\,;1\,]$, les polynômes d'interpolation sont X et $1-\mathrm{X}$. On en déduit que sur $[\,0\,;1\,]^2$, les polynômes Q_1 sont

$$\begin{aligned}\varphi_{(0,0)}(x,y) &= (1-x)(1-y)\\ \varphi_{(0,1)}(x,y) &= (1-x)y\\ \varphi_{(1,0)}(x,y) &= x(1-y)\\ \varphi_{(1,1)}(x,y) &= xy\end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{(0,0)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left(\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 (1-y)\,\mathrm{d}y\right)\\ &= \left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 \left[-\frac{(1-y)^2}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{(0,1)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left(\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right)\\ &= \left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \varphi_{(1,0)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 (1-y)\,\mathrm{d}y\right)\\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[-\frac{(1-y)^2}{2}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \varphi_{(1,0)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right)\\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Et on en déduit que la formule est exacte pour les polynômes de Q_1.

9.b On a vu à l'exercice 3 que la formule de Simpson sur $[-1\,;1]$ est

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\,f(-1)+\frac{4}{3}\,f(0)+\frac{1}{3}\,f(1)$$

On en déduit que sur $[0\,;1]$ cette formule s'écrit

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\,f(0)+\frac{2}{3}\,f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\,f(1)$$

On note de même qu'à la question précédente $\varphi(y)=\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \varphi(y)\mathrm{d}y\\
&\approx \frac{1}{6}\,\varphi(0)+\frac{2}{3}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\,\varphi(1)\\
&\approx \frac{1}{6}\int_0^1 f(0,y)\,\mathrm{d}y+\frac{2}{3}\int_0^1 f(\frac{1}{2},y)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{6}\int_0^1 f(1,y)\,\mathrm{d}y\\
&\approx \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\,f(0,0)+\frac{2}{3}\,f\left(0,\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\,f(0,1)\right)\\
&\qquad +\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\,f\left(\frac{1}{2},0\right)+\frac{2}{3}\,f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\,f\left(\frac{1}{2},1\right)\right)\\
&\qquad\quad +\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\,f(1,0)+\frac{2}{3}\,f\left(1,\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\,f(1,1)\right)\\
&\approx \frac{1}{36}\left(f(0,0)+f(1,0)+f(0,1)+f(1,1)\right)\\
&\qquad +\frac{1}{9}\left(f\left(\frac{1}{2},0\right)+f\left(0,\frac{1}{2}\right)+f\left(1,\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2},1\right)\right)\\
&\qquad +\frac{4}{9}\,f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Si on utilise la première formule de Gauss, c'est à dire la formule du point milieu, on trouve :

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \int_0^1 f\left(x,\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x \approx f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

9.c On peut de même étendre les formules trouvées sur le carré de base $[\,0\,;1\,]^2$ sur un parallèlogramme quelconque, *via* la formule

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \int_{\Omega} f\circ\varphi(x,y)\,|\mathrm{Jac}_\varphi|\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ainsi, une formule de quadrature sur le carré de référence de la forme

$$\int_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \sum \lambda_i f(x_i,y_i)$$

deviendra, sur un parallèlogramme quelconque

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx |\mathrm{Jac}_\varphi| \sum \lambda_i f\circ\varphi(x_i,y_i)$$

L'inconvénient du quadrangle comparé au triangle est qu'il n'existe pas de transformation canonique affine entre un quadrangle quelconque et un quadrangle de référence.