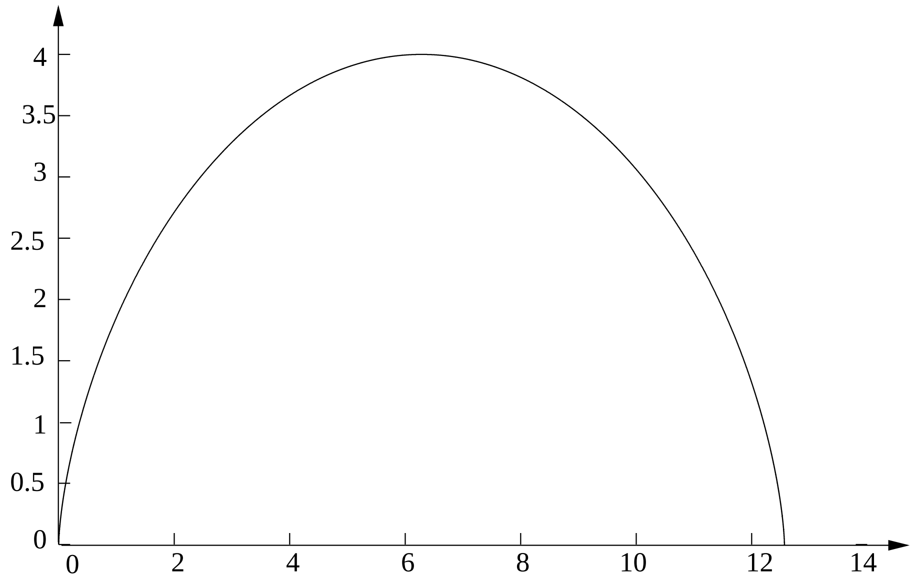
Techniques Mathématiques pour l'Ingénieur
ISTIL 1ère année
Corrigé de la feuille 2[1]

Exercice 1

On cherche à calculer le centre de gravité de la courbe homogène d'équations

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{R}(t - \sin t) \\ y(t) = \mathrm{R}(1 - \cos t) \end{cases} \qquad t \in [\,0\,;2\pi\,]$$



Notons s l'abscisse curviligne de la courbe d'origine 0, et λ la masse linéique de la courbe. Notons s_0 la longueur de la courbe. Soit ds une portion élémentaire de la courbe. Alors celle-ci est de masse λds, et de position M(s). Le centre de gravité G de la courbe est tel que

$$\int_0^{s_0} \overrightarrow{\mathrm{GM}}(s)\,\lambda\,\mathrm{d}s = 0$$

Comme la courbe est homogène, λ est constant, donc

$$\int_0^{s_0} \overrightarrow{\mathrm{GM}}(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

D'après la relation de Chasles

$$\int_0^{s_0} \left(\overrightarrow{\mathrm{GO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}(s)\right)\,\mathrm{d}s = 0$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

On en déduit que
$$s_0\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \int_0^{s_0} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(s)\,\mathrm{d}s$$

soit
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{s_0}\int_0^{s_0} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(s)\,\mathrm{d}s$$

On effectue le changement de variable $s = s(t)$ où t est le paramètre de l'énoncé. On a alors
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{s_0}\int_0^{2\pi} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

Pour calculer l'intégrale précédente, nous avons besoin de la dérivée de l'abscisse curviligne, ainsi que de la longueur de la courbe. Commençons par calculer le vecteur vitesse :
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{R}(1-\cos t) \\ \mathrm{R}\sin t \end{pmatrix}$$

On en déduit que
$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 &= \mathrm{R}^2(1-\cos t) + \mathrm{R}^2\sin^2 t \\
&= \mathrm{R}^2\left(1+\cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t\right) \\
&= \mathrm{R}^2(2-2\cos t) \\
&= 2\mathrm{R}^2\left(2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
\left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 &= 4\mathrm{R}^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

d'où
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\| = 2\mathrm{R}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

En particulier, on peut calculer la longueur de la courbe
$$\begin{aligned}
s_0 &= \int_0^{2\pi} \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t}\right\|\,\mathrm{d}t \\
&= 2\mathrm{R}\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\mathrm{R}\left[-\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{1/2}\right]_0^{2\pi} \\
s_0 &= 8\mathrm{R}
\end{aligned}$$

Pour trouver la position du centre de gravité, il reste à calculer les intégrales qui définissent ses coordonnées x_G et y_G
$$\begin{aligned}
x_\mathrm{G} &= \frac{1}{8\mathrm{R}}\int_0^{2\pi} \mathrm{R}(t-\sin t)2\mathrm{R}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{R}}{4}\int_0^{2\pi} (t-\sin t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
x_\mathrm{G} &= \frac{\mathrm{R}}{4}\left(\int_0^{2\pi} t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \sin t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Intégrons par parties la première intégrale. Posons

$$u(t) = t \qquad \text{d'où} \qquad u'(t) = 1$$
$$v'(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \text{on choisit} \qquad v(t) = -2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

d'où
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} t\cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= \left[-2t\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= 4\pi + \left[4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}\\ \int_0^{2\pi} t\cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= 4\pi\end{aligned}$$

Calculons à présent la seconde intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{4\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3}\right]_0^{2\pi}\\ \int_0^{2\pi}\sin t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= 0\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{x_{\mathrm{G}} = \pi\mathrm{R}}$$

Calculons maintenant la deuxième coordonnée du centre de gravité

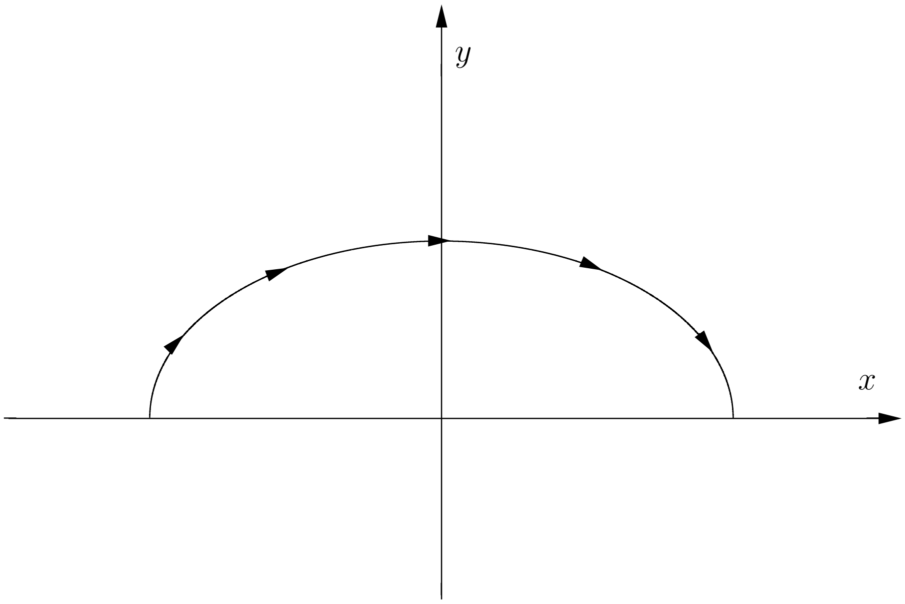
$$\begin{aligned}y_{\mathrm{G}} &= \frac{1}{8\mathrm{R}}\int_0^{2\pi}\mathrm{R}(1-\cos t)2\mathrm{R}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\mathrm{R}}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\mathrm{R}}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\mathrm{R}}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\mathrm{R}}{2}\left(\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{\mathrm{R}}{2}\left(\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{2\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3}\right]_0^{2\pi}\right)\\ y_{\mathrm{G}} &= \frac{\mathrm{R}}{2}\left(4-\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{y_{\mathrm{G}} = \frac{4\mathrm{R}}{3}}$$

On a finalement trouvé que

$$\boxed{\text{La courbe admet le point } \left(\pi\mathrm{R}, \frac{4\mathrm{R}}{3}\right) \text{ pour centre de gravité.}}$$

Exercice 2



La courbe le long de laquelle on cherche à intégrer la forme différentielle est une demi-ellipse, de centre O, de demi axe 2 sur Ox, et de demi axe 1 sur Oy. On en connaît une paramétrisation qui est

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in [\,0\,;\pi\,]$$

On en déduit que
$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= -2\sin t \\ \mathrm{d}y &= \cos t \end{aligned}$$

d'où
$$\mathrm{I} = \int_\pi^0 \left(4\cos^3 t - 2\sin^3 t\right)\,\mathrm{d}t$$

Il reste à calculer ces deux intégrales

$$\begin{aligned} \int_\pi^0 \cos^3 t\,\mathrm{d}t &= \int_\pi^0 (1-\sin^2 t)\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\pi^0 \cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi \cos t \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= [\sin t]_\pi^0 - \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_\pi^0 \\ \int_\pi^0 \cos^3 t\,\mathrm{d}t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{0} \sin^3 t \,\mathrm{d}t &= \int_{\pi}^{0} (1-\cos^2 t)\sin t \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\pi}^{0} \sin t \,\mathrm{d}t - \int_{\pi}^{0} \sin t \cos^2 t \,\mathrm{d}t \\
&= [-\cos t]_{\pi}^{0} + \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{\pi}^{0} \\
&= -2 + \frac{2}{3} \\
\int_{\pi}^{0} \sin^3 t \,\mathrm{d}t &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{I} = \frac{8}{3}}$$

Exercice 3

3.a On cherche à calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathrm{C}_1} x^2 y \,\mathrm{d}x + xy^2 \,\mathrm{d}y$$

le long de l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4x$, entre le point $\mathrm{A}(1,2)$ et le point $\mathrm{B}(4,4)$. Paramétrons cette portion de courbe par y. Le paramètre y va de 2 à 4 ; on a $x = y^2/4$, et $\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y/2$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{C}_1} x^2 y \,\mathrm{d}x + xy^2 \,\mathrm{d}y &= \int_2^4 \left(\frac{y^6}{32} + \frac{y^4}{4}\right) \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^7}{224} + \frac{y^5}{20}\right]_2^4 \\
&= \frac{2^7(2^7-1)}{224} + \frac{2^5(2^5-1)}{120} \\
&= \frac{128 \times 127}{32 \times 7} + \frac{32 \times 31}{} \\
&= \frac{508}{7} + \frac{248}{5} \\
&= \frac{5 \times 508 + 7 \times 248}{35} \\
&= \frac{2540 + 1736}{35} \\
\int_{\mathrm{C}_1} x^2 y \,\mathrm{d}x + xy^2 \,\mathrm{d}y &= \frac{4276}{35}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\int_{\mathrm{C}_1} x^2 y \,\mathrm{d}x + xy^2 \,\mathrm{d}y = \frac{4276}{35}}$$

3.b On cherche à calculer l'intégrale

$$\oint_{\mathrm{C}_2} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$$

le long de la courbe définie par

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

Comme il s'agit d'une intégrale sur une courbe fermée, on propose deux méthodes

Méthode directe par paramétrisation
On paramètre le cylindre $x^2+y^2=1$ par

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in [\,0\,;2\pi\,]$$

L'intersection avec le plan $x+z=1$ donne

$$z(t) = 1 - \cos t$$

Avec cette paramétrisation, on a

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = \cos t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z = \sin t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \oint_{\mathrm{C}_2} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = & \int_0^{2\pi} \Big((\sin t - 1 + \cos t)(-\sin t) \\ & \quad +(1-\cos t - \cos t)\cos t \\ & \quad + (\cos t - \sin t)\sin t\Big)\,\mathrm{d}t \\ = & \int_0^{2\pi} \Big(-2 + \sin t + \cos t\Big)\,\mathrm{d}t \\ = & -4\pi + [-\cos t + \sin t]_0^{2\pi} \\ \oint_{\mathrm{C}_2} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = & -4\pi \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\oint_{\mathrm{C}_2} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = -4\pi}$$

Méthode avec la formule de Green

> **Rappel : formule de Green**
> Si Γ est une courbe de l'espace, alors
>
> $$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{S}}$$
>
> où Σ est n'importe quelle surface s'appuyant sur Γ. L'orientation de Γ et de Σ doivent être cohérentes (selon la règle de la main droite).

Afin d'appliquer la formule de Green, on commence par calculer le rotationnel du champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}}\,(y-z, z-x, x-y)$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soit Σ la surface s'appuyant sur C_1, incluse dans le plan $x+z=1$. Alors

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathrm{C}_1} \overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} &= \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} \\
&= \iint_{\Sigma} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mathrm{dS} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Surface}(\Sigma)
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer l'aire de la surface Σ. Pour cela, on va exprimer une équation de C_2 dans le plan $x+z=1$. On choisit comme origine de ce plan $\mathrm{O}'(0,0,1)$. Ce plan admet $\overrightarrow{e}_{z'} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ comme vecteur normal unitaire. On choisit comme vecteur du plan $\overrightarrow{e}_{y'} = (0,1,0)$. Afin de trouver un autre vecteur unitaire formant avec $\overrightarrow{e}_{y'}$ une base orthonormale de $x+z=1$, on choisit le produit vectoriel de $\overrightarrow{e}_{z'}$ par $\overrightarrow{e}_{y'}$

$$\overrightarrow{e}_{z'} \wedge \overrightarrow{e}_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi, pour tout vecteur du plan $x+z=1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OO}'} + \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \\ y = \lambda_1 \\ z = 1 + \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

on en déduit l'équation de C_2 dans le plan $x+z=1$

$$x^2 + z^2 = \frac{\lambda_2^2}{2} + \lambda_1^2 = 1$$

Il s'agit de l'équation d'une ellipse de demi grand axe 1 et de demi petit axe $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Son aire est

$$\pi\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

> **Rappel : Aire d'une ellipse**
> Une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b a pour aire πab.

On trouve finalement

$$\boxed{\oint_{\mathrm{C}_2} (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z = -4\pi}$$

$\boxed{\textbf{3.c}}$ On cherche à calculer l'intégrale

$$\oint_{C_3} (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z$$

le long de la courbe définie par

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Comme il s'agit d'une intégrale sur une courbe fermée, on propose deux méthodes
Méthode directe
Commençons par paramétrer la courbe sur laquelle on va intégrer. On a

$$z=-(x+y)$$

donc, en injectant dans l'équation de la sphère

$$x^2+y^2+(x+y)^2=a^2$$

On arrange le membre de gauche de l'expression :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+(x+y)^2 &= 2x^2+2y^2+2xy \\ &= 2(x^2+xy)+2y^2 \\ &= 2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{2}+2y^2 \\ x^2+y^2+(x+y)^2 &= 2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{2} \end{aligned}$$

On trouve ainsi $$\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\left(x+\frac{y}{2}\right)\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{y}{a}\right)^2=1$$

On en déduit qu'on peut poser

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{a}\left(x+\dfrac{y}{2}\right)=\cos t \\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\dfrac{y}{a}=\sin t \end{cases}$$

On trouve finalement, comme paramétrisation

$$\begin{cases} x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos t-\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\sin t \\ y=a\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sin t \\ z=-\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos t-\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\sin t \end{cases}$$

On calcule l'intégrale Comme le long de la courbe on a $x+y+z=0$, on a

$$\begin{aligned} \oint_{C_3} (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z &= -\oint_{C_3} (x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z) \\ &= \left[\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

soit
$$\boxed{\oint_{C_3} (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z = 0}$$

Méthode avec la formule de Green
Afin d'appliquer la formule de Green, on commence par calculer le rotationnel du champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{A}}\,(y+z, z+x, x+y)$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc immédiatement
$$\boxed{\oint_{C_3} (y+z)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{S}} = 0}$$

> Comme le champ est à rotationnel nul, on sait qu'il dérive d'un potentiel. On peut vérifier que ce champ dérive du potentiel
> $$\mathrm{V} \,:\, (x,y,z) \mapsto xy + yz + zx + \mathrm{K}$$
> où K est une constante.

Exercice 4

On cherche à calculer la circulation du champ
$$\overrightarrow{a} \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$
le long de la courbe
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \mathrm{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

Méthode directe par paramétrisation
La courbe de long de laquelle on intègre, que l'on va noter Γ, est un cercle. On peut le paramétrer par
$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{R}\cos t \\ y(t) = \mathrm{R}\sin t \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [\,0\,;2\pi\,]$$

Avec une telle paramétrisation, on a
$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -\mathrm{R}\sin t \\ \mathrm{d}y = \mathrm{R}\cos t \\ \mathrm{d}z = 0 \end{cases} \qquad t \in [\,0\,;2\pi\,]$$

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \overrightarrow{a}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} &= \int_0^{2\pi} \left(-\mathrm{R}^6\cos^2 t\sin^4 t + \mathrm{R}\cos t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \mathrm{R}^6\cos^2 t\sin^4 t\,\mathrm{d}t + \mathrm{R}\left[\sin t\right]_0^{2\pi} \\
&= -\int_0^{2\pi} \mathrm{R}^6\cos^2 t\sin^4 t\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \mathrm{R}^6(1-\sin^2 t)\sin^4 t\,\mathrm{d}t \\
\oint_\Gamma \overrightarrow{a}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} &= \mathrm{R}^6\left(\int_0^{2\pi}\sin^6 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin^4 t\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Linéarisons les sinus :

$$\begin{aligned}
\sin^4 t &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^4 \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t}\right)^4}{16} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\,4\mathrm{i}t}-4\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}t}+6-4\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{\,-4\mathrm{i}t}}{16} \\
&= \frac{2\cos(4t)-8\cos(2t)+6}{16} \\
\sin^4 t &= \frac{\cos(4t)}{8}-\frac{\cos(2t)}{2}+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^6 t &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^6 \\
&= -\frac{\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t}\right)^6}{64} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{\,6\mathrm{i}t}-6\mathrm{e}^{\,4\mathrm{i}t}+15\mathrm{e}^{\,2\mathrm{i}t}-20+15\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{i}t}-6\mathrm{e}^{\,-4\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{\,-6\mathrm{i}t}}{64} \\
&= -\frac{2\cos(6t)-12\cos(4t)+30\cos(2t)-20}{64} \\
\sin^6 t &= -\frac{\cos(6t)}{32}+\frac{3\cos(4t)}{16}-\frac{15\cos(2t)}{32}+\frac{5}{16}
\end{aligned}$$

On en déduit que $$\int_0^{2\pi}\sin^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4}$$

et $$\int_0^{2\pi}\sin^6 t\,\mathrm{d}t = \frac{5\pi}{8}$$

on trouve ainsi

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{a}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{R}^6\left(\int_0^{2\pi}\sin^6 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin^4 t\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{R}^6\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{8}\right)$$

Finalement $$\boxed{\oint_\Gamma \overrightarrow{a}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \frac{\mathrm{R}^6\pi}{8}}$$

Méthode avec la formule de Green

Commençons par calculer le rotationnel du champ de vecteurs $\overrightarrow{a}$.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3x^2y^2 \end{pmatrix}$$

On choisit comme surface s'appuyant sur Γ le disque Σ du plan $z = 0$, de centre 0 et de rayon R. Le vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$ est alors dirigé par le vecteur $(0, 0, 1)$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{a} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{a} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = -3\iint_\Sigma x^2y^2\,\mathrm{dS}$$

On paramètre ce disque par ses coordonnées polaires

$$\begin{cases} x(r,t) = r\cos t \\ y(r,t) = r\sin t \\ \mathrm{dS} = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma x^2y^2\,\mathrm{dS} &= \int_0^{\mathrm{R}}\int_0^{2\pi} r^5\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\mathrm{R}} \int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{R}^6}{6}\left(\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin^4 t\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

Ces intégrales se calculent en linéarisant les expressions trigonométriques

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \pi$$

Et comme on l'a vu lors de la mise en œuvre de la première méthode,

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{4}$$

On trouve ainsi $$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

En rassemblant les morceaux, on obtient

$$\int_\Gamma \overrightarrow{a} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -3\iint_\Sigma x^2y^2\,\mathrm{dS} = -\frac{\mathrm{R}^6}{2}\left(\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin^4 t\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{8}$$

Finalement $$\boxed{\int_\Gamma \overrightarrow{a} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \frac{\mathrm{R}^6\pi}{8}}$$