Optimisation Continue
ISTIL 2ème année
Corrigé de la feuille 5[1]

Exercice 1

1. **Mise en équation du problème**
   On cherche à optimiser la fonction
   $$\mathrm{J} : (x_1, \dots x_n) \longmapsto -\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
   sous la contrainte $\varphi : (x_1, \dots x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 1 \leqslant 0$
2. **Existence (et unicité ?) de la solution du problème**
   La fonction φ est continue. On en déduit que $\varphi^{-1}(\{[0;1]\})$ est un fermé. De plus, si $\varphi(x) \leqslant 1$, alors pour tout i, $x_i \leqslant 1$. On en déduit que $\varphi^{-1}(\{[0;1]\})$ est borné. Comme il est fermé, et borné, il est compact. La fonction J est continue, sur le compact $\varphi^{-1}(\{[0;1]\})$, donc elle y est bornée et y atteint ses bornes.
3. **Équations de Karush-Kuhn et Tucker**

   > **Rappel : qualification dans le cas convexe**
   > Des contraintes $\varphi_i \leqslant 0$, convexes sont dites *qualifiées* si
   > - ou bien toutes les fonctions φ_i sont affines, et l'ensemble
   > $$\mathrm{U} = \Big\{ v \in \Omega \qquad \forall i \quad \varphi_i(v) \leqslant 0 \Big\}$$
   > est non vide.
   > - ou bien il existe un point $\widetilde{v}$ tel que
   > $$\forall i \qquad \begin{cases} \varphi_i(\widetilde{v}) \leqslant 0 \\ \varphi_i(\widetilde{v}) < 0 \text{ si } \varphi_i \text{ n'est pas affine} \end{cases}$$

   La contrainte φ est convexe. Vérifions qu'elle est qualifiée. La fonction φ n'est pas affine. Le vecteur $\widetilde{v}(0, \dots, 0)$ est tel que $\varphi(\widetilde{v}) < 0$. On en déduit que la contrainte φ est qualifiée.
   D'après le cours, J admet un minimum sous la contrainte $\varphi \leqslant 0$, si et seulement si les relations de Karush-Kuhn et Tucker sont vérifiées, c'est à dire si
   $$\exists \lambda(u) \geqslant 0 \qquad \begin{cases} \nabla \mathrm{J}(u) + \lambda(u) \nabla \varphi(u) = 0 \\ \lambda(u)\varphi(u) = 0 \end{cases}$$

[1] généré avec $\LaTeX 2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

4. **Résolution du système**
   Distinguons plusieurs cas
   - **La contrainte φ n'est pas saturée** ($\varphi(u) \neq 0$)
     Dans ce cas, on a $\lambda = 0$, c'est à dire que $\nabla \mathrm{J}(x) = 0$. On en déduit que $x = 0$.
   - **La contrainte φ est saturée** ($\varphi(u) = 0$)
     Dans ce cas, on a $\sum_{i=0}^{n} x_i^4 = 1$. De plus, la relation de Karush-Kuhn et Tucker devient
     $$-2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 4\lambda(x_1^3, x_2^3, \ldots, x_n^3) = 0$$
     d'où $$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad -4\lambda x_i \left(\frac{1}{2\lambda} - x_i^2\right) = 0$$
     soit $$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!] \qquad \begin{cases} x_i = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} \\ \text{ou} \\ x_i = 0 \end{cases}$$
     Notons n_0 le nombre de x_i non nuls. La saturation de la contrainte impose
     $$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 1$$
     d'où $$\frac{n_0}{4\lambda^2} = 1$$
     soit $$\lambda = \sqrt{n_0}2$$
5. **Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions de Karush-Kuhn et Tucker**
   On a ainsi caractérisé tous les minima de J sous la contrainte $\varphi \leqslant 0$. Il reste à déterminer, parmi ceux-ci, le minimum absolu de J. On a
   $$\mathrm{J}(0, \ldots, 0) = 0$$
   et si n_0 est le nombre de coordonnées non nulles d'un vecteur $\widetilde{x}(n_0)$ vérifiant les conditions de Karush-Kuhn et Tucker, alors
   $$\mathrm{J}(\widetilde{x}(n_0)) = -\sqrt{n_0}$$
   Cette valeur est minimale pour $n = n_0$. Finalement

   > J admet un minimum, qui est atteint en 2^n points. Ces points sont de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{n}}}(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$. La valeur de ce minimum est $-\sqrt{n}$.

Exercice 2

On recherche la solution du problème

$$\operatorname{Inf}\left\{\frac{1}{2}x^2 + bx \qquad x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant 1 \quad x \geqslant 1\right\}$$

où $b \geqslant 0$ est donné.

$\boxed{\textbf{2.a}}$ La fonction f est dérivable, donc si elle atteint son minimum sur l'ouvert $]-1\,;1\,[$, alors $f'(x) = 0$. Mais elle peut également atteindre son maximum en $x = 1$ ou en $x = -1$. On a

$$f'(x) = x + b$$

qui s'annule pour $x = -b$. On distingue deux cas

- **Premier cas :** $b > 1$
  Dans ce cas, f' est positive sur $[-1\,;1\,]$, donc f est croissante sur cet intervalle. On en déduit qu'elle atteint son minimum en $x = -1$.
- **Second cas :** $b \leqslant 1$
  Dans ce cas, la fonction f admet un point critique dans $[-1\,;1\,]$, $x = -b$. La fonction f est décroissante avant ce point, et croissante après. Le minimum est donc atteint en $x = -b$.

$\boxed{\textbf{2.b}}$ 1. **Formulation du problème d'optimisation**

Le problème peut se reformuler de la manière suivante : on cherche à minimiser la fonctionnelle f sous les contraintes

$$\begin{cases} \varphi_1 \,:\, x \longmapsto x - 1 \leqslant 0 \\ \varphi_2 \,:\, x \longmapsto -1 - x \leqslant 0 \end{cases}$$

2. **Existence et unicité du problème**
   L'ensemble $-1 \leqslant x \leqslant 1$ est fermé et borné, donc il est compact. On en déduit que f est bornée sur cet ensemble, et qu'elle y atteint ses bornes.
3. **Équations de Karush-Kuhn et Tucker**
   Les contraintes sont affines, donc elles sont qualifiées. La fonction f est continue sur un ensemble fermé, borné, donc elle admet un minimum. En ce minimum, elle vérifie les conditions de Karush-Kuhn et Tucker :

$$\begin{cases} \exists \lambda_1(x), \lambda_2(x) \geqslant 0 \qquad f'(x) + \lambda_1(x)\varphi_1'(x) + \lambda_2(x)\varphi_2'(x) = 0 \\ \forall i \qquad \lambda_i(x)\varphi_i(x) = 0 \end{cases}$$

   Cette condition est une condition suffisante, car la fonction f est convexe, sur un ensemble convexe.
4. **Résolution du système de Karush-Kuhn et Tucker**
   Dans le cas plus général, on a quatre cas à étudier :
   (a) la contrainte φ_1 est saturée, et φ_2 ne l'est pas,
   (b) la contrainte φ_2 est saturée, et φ_1 ne l'est pas,
   (c) Aucune des contraintes n'est saturée.

(d) la contrainte φ_1 et la contrainte φ_2 sont saturées,

Le quatrième cas est impossible, car on aurait alors $x = 1 = -1$. On a donc trois cas à étudier.

$\boxed{\textbf{2.c}}$ Résolvons le système trouvé à la question précédente

- **Cas 1 : φ_1 est saturée, φ_2 ne l'est pas**

  La contrainte φ_1 est saturée, donc $x = 1$, et $\lambda_1 \geqslant 0$. Comme φ_2 n'est pas saturée, on a $\lambda_2 = 0$. La condition de Karush-Kuhn et Tucker s'écrit donc

  $$\exists \lambda_1 \geqslant 0 \qquad f'(1) + \lambda_1 = 0$$

  soit
  $$\exists \lambda_1 \geqslant 0 \qquad b + 1 + \lambda_1 = 0$$

  d'où
  $$\exists \lambda_1 \geqslant 0 \qquad b + 1 < 0$$

  ce qui veut dire que $b \leqslant -1$. Ce cas est exclu par l'énoncé.

- **Cas 2 : φ_2 est saturée, φ_1 ne l'est pas** La contrainte φ_2 est saturée, donc $x = -1$, et $\lambda_2 \geqslant 0$. Comme φ_1 n'est pas saturée, on a $\lambda_1 = 0$. La condition de Karush-Kuhn et Tucker s'écrit donc

  $$\exists \lambda_2 \geqslant 0 \qquad f'(-1) - \lambda_2 = 0$$

  soit
  $$\exists \lambda_2 \geqslant 0 \qquad b - 1 - \lambda_2 = 0$$

  d'où
  $$\exists \lambda_2 \geqslant 0 \qquad b - 1 > 0$$

  On en déduit que $b \geqslant 1$.

- **Aucune des deux contraintes n'est saturée**

  Comme aucune des deux contraintes n'est saturée, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, et $-1 < x < 1$. La condition de Karush-Kuhn et Tucker s'écrit donc

  $$f'(x) = 0$$

  soit
  $$x + b = 0$$

  Le minimum est donc atteint en $x = -b$, et on a ainsi $b \in \,]\,0\,;1\,[$.

5. **Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système Karush-Kuhn et Tucker**

Finalement, deux cas sont possibles : soit le minimum est atteint en $x = -1$, lorsque $b > 1$, soit le minimum est atteint en $-b$ si $b < 1$.

Exercice 3

$\boxed{\textbf{3.a}}$ 1. **Formulation du problème d'optimisation**

On cherche à minimiser la fonctionnelle

$$\mathrm{J} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + bx$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \varphi_1 : (x, y) \longmapsto x - 1 & \leqslant 0 \\ \varphi_2 : (x, y) \longmapsto -x - 1 & \leqslant 0 \\ \varphi_3 : (x, y) \longmapsto y - 1 & \leqslant 0 \\ \varphi_4 : (x, y) \longmapsto -y - 1 & \leqslant 0 \end{cases}$$

2. **Existence du minimum**

La fonction J est continue, sur le compact $[0;1] \times [0;1]$, donc elle y est bornée et y atteint ses bornes.

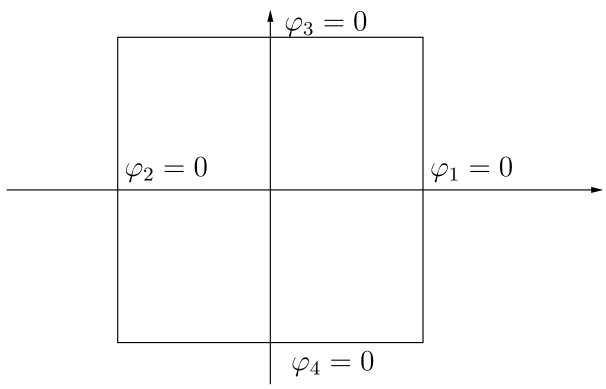
3. **Écriture du système de Karush-Kuhn et Tucker**

Les contraintes sont qualifiées, car elles sont toutes linéaires. Une condition nécessaire pour que le point (x, y) soit un minimum est l'existence d'une relation de Karush-Kuhn et Tucker entre le gradient de J et le gradient des contraintes $\nabla\varphi_1$, $\nabla\varphi_2$, $\nabla\varphi_3$ et $\nabla\varphi_4$:

$$\exists \lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \lambda_3(x, y), \lambda_4(x, y) \geqslant 0 \begin{cases} \nabla \mathrm{J}(x, y) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i(x, y) \nabla\varphi_i(x, y) = 0 \\ \forall i \in [\![1 \,;\, 4]\!] \quad \lambda_i(x, y)\varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

4. **Résolution du système de Karush-Kuhn et Tucker**

Selon que chacune des contraintes est saturée ou non, il y a *a priori* 16 cas à étudier. Graphiquement, les contraintes peuvent se représenter de la manière suivante



Sur ce dessin, l'une des contrainte est saturée si on se trouve sur un des côtés des carrés. On voit qu'on ne peut avoir au plus que deux contraintes saturées simultanément (lorsque (x, y) est sur l'un des coins du carré). Il y a donc en fait neuf cas

(a) Aucune des contraintes n'est saturée.
(b) La contrainte φ_1 est saturée, et c'est la seule.
(c) La contrainte φ_2 est saturée, et c'est la seule.
(d) La contrainte φ_3 est saturée, et c'est la seule.
(e) La contrainte φ_4 est saturée, et c'est la seule.
(f) Les contraintes φ_1 et φ_3 sont saturées et ce sont les seules.
(g) Les contraintes φ_2 et φ_3 sont saturées et ce sont les seules.
(h) Les contraintes φ_2 et φ_4 sont saturées et ce sont les seules.
(i) Les contraintes φ_4 et φ_1 sont saturées et ce sont les seules.

3.b On reprend un à un les cas énumérés à la question précédente

- **Aucune des contraintes n'est saturée.**
Si aucune des contraintes n'est saturée, alors un minimum vérifie l'équation
$$\nabla \mathrm{J}(x,y) = 0$$
d'où
$$\begin{cases} x+b=0 \\ y=0 \end{cases}$$
On en déduit que $x=-b$, et $y=0$. Comme les contraintes φ_1 et φ_2 ne sont pas saturées, on a $-1<x<1$. Donc on ne peut avoir un minimum sans qu'aucune des contraintes ne soit saturée que si $-1<b<1$.
- **Seule la contrainte φ_1 est saturée.**
Si seule la contrainte φ_1 est saturée, alors on a $x=1$ et $-1<y<1$, et la relation de Karush-Kuhn et Tucker devient
$$\exists \lambda_1 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(1,y) + \lambda_1 \nabla \varphi_1(1,y) = 0$$
d'où
$$\exists \lambda_1 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} 1+b=-\lambda_1 \\ y=0 \end{cases}$$
On en déduit que $b \leqslant -1$.
- **Seule la contrainte φ_2 est saturée.**
Si seule la contrainte φ_2 est saturée, alors on a $x=-1$ et $-1<y<1$, et la relation de Karush-Kuhn et Tucker devient
$$\exists \lambda_1 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(-1,y) + \lambda_2 \nabla \varphi_1(1,y) = 0$$
d'où
$$\exists \lambda_2 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} b-1=\lambda_2 \\ y=0 \end{cases}$$
On en déduit que $b \geqslant 1$.
- **Seule la contrainte φ_3 est saturée.**
Si seule la contrainte φ_3 est saturée, alors on a $y=1$ et $-1<x<1$, et la relation de Karush-Kuhn et Tucker devient
$$\exists \lambda_3 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(x,1) + \lambda_3 \nabla \varphi_3(x,1) = 0$$
d'où
$$\exists \lambda_3 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} x+b=0 \\ 1+\lambda_3=0 \end{cases}$$
La seconde équation est impossible à satisfaite, car $\lambda_3 \geqslant 0$.

- **Seule la contrainte φ_4 est saturée.**
  Si seule la contrainte φ_4 est saturée, alors on a $y = -1$ et $-1 < x < 1$, et la relation de Karush-Kuhn et Tucker devient

$$\exists \lambda_4 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(x,1) + \lambda_4 \nabla \varphi_4(x,-1) = 0$$

d'où $$\exists \lambda_4 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} x + b = 0 \\ -1 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation est impossible à satisfaite, car $\lambda_4 \geqslant 0$.

- **Seules les contraintes φ_1 et φ_3 sont saturées.**
  Si les contraintes φ_1 et φ_3 sont saturées, alors $x = 1$ et $y = 1$. La relation de Karush-Kuhn et Tucker devient

$$\exists \lambda_1, \lambda_3 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(1,1) + \lambda_1 \nabla \varphi_1(1,1) \lambda_4 \nabla \varphi_3(1,1) = 0$$

d'où $$\exists \lambda_1, \lambda_3 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} 1 + b + \lambda_1 = 0 \\ 1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation ne peut être satisfaite, car $\lambda_3 \geqslant 0$.

- **Seules les contraintes φ_2 et φ_3 sont saturées.**
  Si les contraintes φ_2 et φ_3 sont saturées, alors $x = -1$ et $y = 1$. La relation de Karush-Kuhn et Tucker devient

$$\exists \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(-1,1) + \lambda_2 \nabla \varphi_2(-1,1) \lambda_3 \nabla \varphi_3(-1,1) = 0$$

d'où $$\exists \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} -1 + b - \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation ne peut être satisfaite, car $\lambda_3 \geqslant 0$.

- **Seules les contraintes φ_2 et φ_4 sont saturées.**
  Si les contraintes φ_2 et φ_4 sont saturées, alors $x = -1$ et $y = -1$. La relation de Karush-Kuhn et Tucker devient

$$\exists \lambda_2, \lambda_4 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(-1,-1) + \lambda_2 \nabla \varphi_2(-1,-1) \lambda_4 \nabla \varphi_4(-1,-1) = 0$$

d'où $$\exists \lambda_2, \lambda_4 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} -1 + b - \lambda_2 = 0 \\ -1 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation ne peut être satisfaite, car $\lambda_4 \geqslant 0$.

- **Seules les contraintes φ_4 et φ_1 sont saturées.**
  Si les contraintes φ_1 et φ_4 sont saturées, alors $x = 1$ et $y = -1$. La relation de Karush-Kuhn et Tucker devient

$$\exists \lambda_1, \lambda_4 \geqslant 0 \qquad \nabla \mathrm{J}(1,-1) + \lambda_1 \nabla \varphi_1(1,-1) \lambda_4 \nabla \varphi_4(1,-1) = 0$$

d'où $$\exists \lambda_1, \lambda_4 \geqslant 0 \qquad \begin{cases} 1 + b + \lambda_1 = 0 \\ -1 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation ne peut être satisfaite, car $\lambda_4 \geqslant 0$.

Finalement, on obtient que

Si $\|b\| < 1$, alors le minimum est atteint lorsqu'aucune des contraintes n'est saturée, au point $(-b, 0)$. Si $b \geqslant 1$, alors le minimum est atteint lorsque seule la contrainte φ_2 est saturée, au point $(-1, 0)$. Si $b \leqslant -1$, le minimum est atteint lorsque seule la contrainte φ_1 est saturée, au point $(1, 0)$.