Optimisation Continue
ISTIL 2ème année
Corrigé de la feuille 4[1]

Exercice 1

> **Rappel : Méthode de la plus profonde descente (méthode du gradient à pas optimal)**
> La méthode de la plus profonde descente (ou méthode de gradient à pas optimal) est une méthode de gradient qui consiste à optimiser globalement la fonctionnelle dans la direction du gradient.

D'une manière générale, la méthode du gradient à pas optimal s'écrit

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ est donné} \\ f(x^{(k)} - \rho^{(k)}\nabla f(x^{(k)})) = \inf_{\rho\in\mathbb{R}}\left\{x^{(k)} - \rho\nabla f(x^{(k)})\right\} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \rho^{(k)}\nabla f(x^{(k)})) \end{cases}$$

Dans notre cas, on a

$$\nabla f(x_0, y_0) = {}^t(8x_0 - 4y_0, -4x_0 + 4y_0)$$

On part de $x^{(0)} = {}^t(2,3)$

- <u>Première itération</u>

  on a
  $$\nabla f(x^{(0)}) = {}^t(4,4)$$

  d'où
  $$\begin{aligned} x^{(0)} - \rho\nabla f(x^{(0)}) &= {}^t(2,3) - \rho\, {}^t(4,4) \\ &= {}^t(2-4\rho, 3-4\rho) \end{aligned}$$

  Ainsi
  $$\begin{aligned} f(x^{(0)} - \rho\nabla f(x^{(0)})) &= 4(2-4\rho)^2 - 4(2-4\rho)(3-4\rho) + 2(3-4\rho)^2 \\ &= 10 - 32\rho + 32\rho^2 \end{aligned}$$

  Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\rho = 1/2$. On trouve ainsi

  $$\boxed{x^{(1)} = {}^t(0,1)}$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

- Deuxième itération

on a $$\nabla f(x^{(0)}) = {}^t(-4,4)$$

d'où $$\begin{aligned} x^{(1)} - \rho\nabla f(x^{(1)}) &= {}^t(0,1) - \rho\,{}^t(-4,4) \\ &= {}^t(4\rho, 1-4\rho) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x^{(1)} - \rho\nabla f(x^{(1)})) &= 4(4\rho)^2 - 4(4\rho)(1-4\rho) + 2(1-4\rho)^2 \\ &= 2 - 32\rho + 160\rho^2 \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\rho = 1/10$. On trouve ainsi

$$\boxed{x^{(2)} = {}^t\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)}$$

- Troisième itération

on a $$\nabla f(x^{(2)}) = {}^t\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

d'où $$\begin{aligned} x^{(2)} - \rho\nabla f(x^{(2)}) &= {}^t\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) - \rho\,{}^t\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ &= {}^t\left(\frac{2}{5} - \frac{4\rho}{5}, \frac{3}{5} - \frac{4\rho}{5}\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x^{(2)} - \rho\nabla f(x^{(2)})) &= 4(\frac{2}{5} - \frac{4\rho}{5})^2 - 4(\frac{2}{5} - \frac{4\rho}{5})(\frac{3}{5} - \frac{4\rho}{5}) + 2(\frac{3}{5} - \frac{4\rho}{5})^2 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{32}{25}\rho + \frac{32}{25}\rho^2 \end{aligned}$$

Cette dernière fonction est un trinôme du second degré, qui est minimale en $\rho = 1/2$. On trouve ainsi

$$\boxed{x^{(3)} = {}^t\left(0, \frac{1}{5}\right)}$$

Valeurs de $f(x^{(k)})$
L'algorithme minimise bien la fonctionnelle f ; on a en effet

$$\begin{aligned} f(x^{(0)}) &= 10 \qquad & f(x^{(1)}) &= 2 \\ f(x^{(2)}) &= \frac{2}{5} \qquad & f(x^{(3)}) &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

Exercice 2

On cherche à obtenir le zéro de la fonction

$$\mathrm{F} : (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 3 \\ x^2 + y^2 - z - 1 \\ x + y + z - 3 \end{pmatrix}$$

La méthode de Newton s'écrit

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ est donné} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(\mathrm{DF}(x^{(k)})\right)^{-1} \mathrm{F}(x^{(k)}) \end{cases}$$

Dans notre cas on a

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Premier cas : on choisit $x^{(0)} = {}^t(1, 0, 1)$

- Première itération

  On a $$\mathrm{F}(x^{(0)}) = {}^t(-1, -1, -1)$$

  et $$\mathrm{DF}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  d'où $$\boxed{x^{(1)} = {}^t\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)}$$

- Deuxième itération

  On a $$\mathrm{F}(x^{(1)}) = {}^t\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$$

  et $$\mathrm{DF}(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  d'où $$\boxed{x^{(2)} = {}^t\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, 1\right)}$$

- Troisième itération

  On a $$\mathrm{F}(x^{(2)}) = {}^t\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\right)$$

  et $$\mathrm{DF}(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $$\boxed{x^{(3)} = {}^t\left(\frac{9}{8}, \frac{7}{8}, 1\right)}$$

On a ainsi $F(x^{(3)}) = {}^t\left(\frac{1}{32}, \frac{1}{32}, 0\right)$.

Deuxième cas : on choisit $x^{(0)} = {}^t(0,0,0)$

- Première itération

On a $$F(x^{(0)}) = {}^t(3,-1,-3)$$

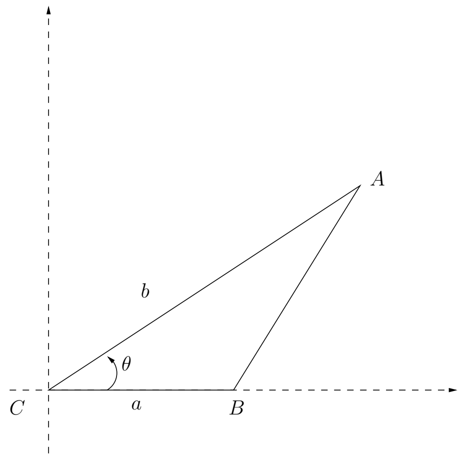
et $$DF(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On tombe ainsi sur l'un des cas pathologiques de la méthode de Newton, lorsque la matrice DF est singulière.

Exercice 3

1. **Mise en équation**

Soit ABC un triangle quelconque. On note a la longueur BC, b la longueur AC, et θ la valeur absolue de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Ces notations sont résumées sur le dessin suivant



Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(a, 0)$, et le vecteur $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(b\cos\theta, b\sin\theta)$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (b\cos\theta - a)\,\overrightarrow{\imath} + b\sin\theta\,\overrightarrow{\jmath}$$

On en déduit que sa longueur est égale à

$$\begin{aligned} AB^2 &= \|\,(b\cos\theta - a)\,\overrightarrow{\imath} + b\sin\theta\,\overrightarrow{\jmath}\,\|^2 \\ &= (b\cos\theta - a)^2 + (b\sin\theta)^2 \\ &= b^2\cos^2\theta + a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\sin^2\theta \\ AB^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'aire du triangle est égale à $\dfrac{1}{2}\, ab\sin\theta$. Le problème est donc d'optimiser la fonction

$$\mathrm{J}(a,b,\theta) = \frac{1}{2}\, ab\sin\theta$$

sous la contrainte

$$\mathscr{C}(a,b,\theta) = a + b + \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta} = cste$$

2. **Existence de la solution**

L'ensemble

$$\Big\{(a,b,\theta) \qquad \mathscr{C}(a,b,\theta) = cste\Big\}$$

est un ensemble fermé car $\mathscr{C}$ est continue. Il est borné, car $\theta \in [\,0\,;\pi\,]$, et car a et b sont bornés par le périmètre total du triangle. On en déduit que cet ensemble est compact. La fonction J est continue sur ce compact, donc elle y est bornée, et atteint ses bornes.

3. **Conditions de Lagrange**

La fonction J est dérivable. La fonction $\mathscr{C}$ l'est aussi. De plus, son gradient vérifie

$$\nabla_{(a,b,\theta)}\mathscr{C} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{2a-2b\cos\theta}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} \\ 1 + \dfrac{2b-2a\cos\theta}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} \\ \dfrac{2ab\sin\theta}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} \end{pmatrix}$$

Supposons que ce vecteur soit nul. Alors la troisième composante donne ou $a = 0$, ou $b = 1$, ou $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Si $\theta = \pi$, alors les deux premières composantes ne peuvent pas être nulles. Si $\theta = 0$, alors l'une des deux premières composantes est positive strictement. Si $a = 0$, alors la deuxième composante est non nulle. Si $b = 0$, alors la première composante est non nulle. On en déduit que $\nabla\mathscr{C}$ ne peut jamais être nul. D'après le cours, si J est optimale sous la contrainte $\mathscr{C} = cste$, alors

$$\nabla_{(a,b,\theta)}\mathrm{J} \in \mathrm{Vect}\Big(\nabla_{(a,b,\theta)}\mathscr{C}\Big)$$

4. **Résolution du système**

La condition d'optimalité signifie que les vecteurs $\nabla_{(a,b,\theta)}\mathrm{J}$ et $\nabla_{(a,b,\theta)}\mathscr{C}$ sont colinéaires, ou encore que leur produit vectoriel est nul. On a

$$\nabla_{(a,b,\theta)}\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\, b\sin\theta \\ \dfrac{1}{2}\, a\sin\theta \\ \dfrac{1}{2}\, ab\cos\theta \end{pmatrix}$$

On en déduit les trois coordonnées du produit vectoriel de ces deux vecteurs sont nulles.

- Première composante
  La première composante est égale, au signe près, à

$$\begin{aligned}
&a\sin\theta\,\frac{ab\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} - ab\cos\theta - \frac{ab^2\cos^2\theta + a^2b\cos^2\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}\\
&= \frac{a^2b - ab^2\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} - ab\cos\theta
\end{aligned}$$

- Deuxième composante
  La deuxième composante est égale, au signe près, à

$$\begin{aligned}
&\frac{ab^2\sin^2\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} - ab\cos\theta - \frac{a^2b\cos\theta + ab^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}\\
&= \frac{a^2b - ab^2\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} - ab\cos\theta
\end{aligned}$$

- Troisième composante
  La troisième composante est égale, au signe près, à

$$\begin{aligned}
&b\sin\theta + \frac{b^2\sin\theta - ab\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} - a\sin\theta - \frac{a^2\sin\theta - ab\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}\\
&= \sin\theta(b-a)\left(1 + \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}\right)
\end{aligned}$$

La nullité de la troisième composante impose que l'on ait soit $a = b$, soit $\sin\theta = 0$. La condition $\sin\theta = 0$ correspond à un triangle plat, donc à un triangle d'aire nulle. On a donc $a = b$. Les deux autres composantes sont les mêmes (au signe près). Si elles sont nulles, alors

$$\frac{a^2b - ab^2\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}} - ab\cos\theta = 0$$

Comme $a = b$, cette équation devient

$$\frac{a^3(1-\cos\theta)}{\sqrt{2a^2(1-\cos\theta)}} - a^2\cos\theta = 0$$

ou encore
$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \cos\theta$$

En élevant au carré, on obtient

$$4\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

En résolvant l'équation du second degré en $\cos\theta$, on obtient

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \cos\theta = -1$$

Ceci implique que l'on a soit $\theta = \pi$, ce qui correspond à un triangle plat, soit $\theta = \pi/3$. On a ainsi trouvé que $a = b$ et $\theta = \pi/3$.

5. **Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système**
   En éliminant les minima, qui correspondent à des triangles plats, on n'a trouvé qu'une seule solution : $a = b$, et $\theta = \pi/3$. Comme le maximum est atteint, il est atteint nécessairement en ce point là.

   $$\boxed{\text{Les triangles d'aire maximale à périmètre donné sont les triangles équilatéraux.}}$$

Exercice 4

1. **Mise en équation**
   Notons x, y, z les coordonnées des faces. Ainsi, les longueurs des arêtes de ce polyèdre sont égales à $2x$, $2y$ et $2z$. On en déduit que le volume de ce polyèdre est égal à $8xyz$. Par ailleurs, les sommets appartiennent à l'ellipsoïde d'équation

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   Nous sommes ainsi amenés à optimiser la fonctionnelle

   $$\mathrm{J} \,:\, (x, y, z) \longmapsto 8xyz$$

   sous la contrainte $\quad \mathscr{C} \,:\, (x, y, z) \longmapsto \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$

2. **Existence d'un minimum**

   l'ensemble $\qquad \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad \mathscr{C}(x, y, z) = cste\Big\}$

   est un ensemble fermé, borné car $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ et $|z| \leqslant c$. Donc cet ensemble est compact. On en déduit que la fonction J, qui est continue sur ce compact, y est bornée et y atteint ses bornes.

3. **Condition de Lagrange**
   La contrainte $\mathscr{C}$ est $\mathscr{C}^1$, et

   $$\nabla_{(x,y,z)}\mathscr{C} = 2 \begin{pmatrix} \dfrac{x}{a^2} \\ \dfrac{y}{b^2} \\ \dfrac{z}{c^2} \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $\nabla\mathscr{C}$ est non nul, sauf si $x = y = z = 0$. En dehors de ce point, une condition nécessaire d'existence du maximum est que

   $$\nabla_{(x,y,z)}\mathrm{J} \in \mathrm{Vect}\Big(\nabla_{(x,y,z)}\mathscr{C}\Big)$$

4. **Résolution du système de Lagrange**

De plus on a
$$\nabla_{(x,y,z)}\mathrm{J} = 8\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

d'où
$$\nabla \mathrm{J} \wedge \nabla \mathscr{C} = 8\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \wedge 2\begin{pmatrix} \dfrac{x}{a^2} \\ \dfrac{y}{b^2} \\ \dfrac{z}{c^2} \end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix} x\left(\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right) \\ y\left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2}\right) \\ z\left(\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}\right) \end{pmatrix}$$

On en déduit que si ce produit vectoriel est nul, et si aucune des coordonnées est nulle, alors
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Comme de plus on a
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

on en déduit que
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$

soit
$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \qquad x = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Si l'une des coordonnées est nulle, par exemple $x = 0$, alors la condition de Lagrange implique
$$-y\,\frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad z\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) = 0$$

La première équation donne $y = 0$ ou $z = 0$. Si $y = 0$, alors la deuxième équation est aussi satisfaite. De même, si $z = 0$ la deuxième équation est également satisfaite. Cela signifie que si une des coordonnées est nulle, alors une autre l'est aussi. Comme on a
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
la troisième coordonnée ne peut pas être également nulle. On trouve ainsi trois autres points vérifiant les conditions de Lagrange :
$$(a, 0, 0) \qquad (0, b, 0) \qquad (0, 0, c)$$

5. **Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système**

Les points $\qquad (a, 0, 0) \qquad (0, b, 0) \qquad (0, 0, c)$

correspondent à des volumes nuls, c'est à dire minimaux. Comme le maximum est atteint, il ne peut être atteint qu'en un seul points :
$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \qquad x = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

On en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le volume du parallélépipède est maximal, si et seulement}\\ \text{si } x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \qquad y = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \qquad x = \dfrac{c}{\sqrt{3}}\end{array}}$$

Exercice 5

1. **Mise en équation**
   Le problème posé se reformule de la manière suivante : on cherche à minimiser la fonctionnelle
   $$\mathrm{J} \,:\, (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$$
   sous la contrainte $\quad \mathscr{C} \,:\, (x,y) \longmapsto y^2 - (x-1)^3$
2. **Existence de l'extremum**
   La fonctionnelle J étant coercive, elle admet un minimum sur le fermé $\mathscr{C}^{-1}(\{0\})$, car il s'agit de l'image réciproque d'un fermé par $\mathscr{C}$, qui est continue.
3. **Condition de Lagrange**
   Le gradient de la contrainte $\mathscr{C}$ est égal à
   $$\nabla\mathscr{C} = {}^t\left(-3(x-1)^2, 2y\right)$$
   cette contrainte est dégénérée pour $x = 1$ et $y = 0$. En dehors de ce point, un point extrémal vérifie
   $$\exists\lambda \qquad \nabla\mathrm{J} = \lambda\nabla\mathscr{C}$$
4. **Résolution du système**
   On en déduit que le déterminant de $\nabla\mathrm{J}$ et de $\nabla\mathscr{C}$ est nul en un point extrémal. On a
   $$\nabla\mathrm{J}(x,y) = {}^t(2x, 2y)$$
   d'où
   $$\det\left(\nabla\mathrm{J}(x,y), \nabla\mathscr{C}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} 2x & -3(x-1)^2 \\ 2y & 2y \end{vmatrix} = 2y(3x^2 - 4x + 3)$$
   Ce déterminant est nul, si et seulement si $y = 0$ ou $3x^2 - 4x + 3 = 0$. Le trinôme $3x^2 - 4x + 3$ admet pour discriminant -20. On en déduit qu'il ne s'annule jamais. Donc le déterminant ne s'annule qu'en $y = 0$. Ce point est exclu, car il correspond à un point dégénéré pour la contrainte.
5. **Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système**
   Le problème d'optimisation admet une solution, alors que le système de Lagrange n'en admet aucune. On en déduit que le minimum est atteint au point où la contrainte est dégénérée.

$$\boxed{\text{J est minimale au point } (1,0)\text{. Sa valeur est } 1.}$$

> **Remarque**
> Juste après, on refait l'exercice avec la contrainte $y^2 = (x-1)^3$.

1. **Mise en équation**
   Le problème posé se reformule de la manière suivante : on cherche à minimiser la fonctionnelle
   $$\mathrm{J} \,:\, (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$$
   sous la contrainte $\quad \mathscr{C} \,:\, (x,y) \longmapsto y^2 - (x-1)^2$
2. **Existence de l'extremum**
   La fonctionnelle J étant coercive, elle admet un minimum sur le fermé $\mathscr{C}^{-1}(\{0\})$.
3. **Condition de Lagrange**
   Le gradient de la contrainte $\mathscr{C}$ est égal à
   $$\nabla\mathscr{C} = {}^t\left(-2(x-1), 2y\right)$$
   cette contrainte est dégénérée pour $x = 1$ et $y = 0$. En dehors de ce point, un point extrémal vérifie
   $$\exists\lambda \qquad \nabla\mathrm{J} = \lambda\nabla\mathscr{C}$$
4. **Résolution du système**
   On en déduit que le déterminant de $\nabla\mathrm{J}$ et de $\nabla\mathscr{C}$ est nul en un point extrémal. On a
   $$\nabla\mathrm{J}(x,y) = {}^t(2x, 2y)$$
   d'où $\qquad \det\left(\nabla\mathrm{J}(x,y), \nabla\mathscr{C}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} 2x & -(x-1) \\ 2y & 2y \end{vmatrix} = 4y(2x-1)$

   Ce déterminant est nul, si et seulement si $y = 0$ ou $x = 1/2$. En utilisant la contrainte, ceci implique que l'on est soit au point $(1,0)$, soit au point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, soit au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5. **Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système**
   On a
   $$\mathrm{J}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \mathrm{J}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$
   Au point $(1,0)$, la contrainte est dégénérée, et $\mathrm{J}(1,0) = 1 > \frac{1}{4}$, qui n'est donc pas un minimum.

$$\boxed{\text{J est minimale aux points } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\text{. Sa valeur est } \frac{1}{4}.}$$

Exercice 6

1. **Mise en équation**
   Le problème posé se reformule de la manière suivante : on cherche à minimiser la fonctionnelle
   $$\mathrm{J} : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$$
   sous la contrainte $\mathscr{C} : (x, y) \longmapsto x + y + z$
2. **Existence du minimum**
   La fonctionnelle J est coercive, donc elle admet un minimum sur le fermé $x + y + z = 1$, qui est atteint.
3. **Condition de Lagrange**
   Le gradient de la contrainte est égal à
   $$\nabla\mathscr{C} = {}^t(1, 1, 1)$$
   et cette contrainte n'est jamais dégénérée. On en déduit qu'au minimum de J sous la contrainte $\mathscr{C}$, on a
   $$\exists\lambda \qquad \nabla\mathrm{J}(x, y, z) = \lambda\nabla\mathscr{C}(x, y, z)$$
4. **Résolution du système**
   On a $$\nabla\mathrm{J}(x, y, z) = 2(x, y, z)$$
   On en déduit que $$\exists\lambda \qquad 2(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$$
   Il vient alors que $x = y = z$. En prenant en plus en compte la contrainte $x + y + z = 1$, on obtient $x = y = z = 1/3$.
5. **Recherche des solutions du problème d'optimisation parmi les solutions du système**
   Le système de Lagrange est toujours vérifié en un extremum, car la contrainte n'est jamais dégénérée. Ce système admet une seule solution, qui est donc nécessairement le minimum.

   $$\boxed{\text{La sphère tangente au plan } x + y + z = 1 \text{ a pour rayon } \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$