Optimisation Continue
ISTIL 2ème année
Corrigé de la feuille 2[1]

Exercice 1

> **Rappel**
> On dit qu'une fonctionnelle J de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est *α-elliptique* si J est $\mathscr{C}^1$, et si
> $$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v), u - v) \geqslant \alpha \|u - v\|^2$$
> On dit que J est *elliptique* s'il existe $\alpha > 0$ tel que J est α-elliptique.

$\boxed{\textbf{1.a}}$ Soient u et v dans V. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\varphi(t) = \mathrm{J}(u + t(v - u))$, entre $t = 0$ et $t = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(v) = \varphi(1) &= \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{J}(u) + \int_0^1 (\mathrm{J}'(u + t(v-u)), (v-u))\ \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u) - (\mathrm{J}'(u), v-u) \\
&\qquad + \int_0^1 (\mathrm{J}'(u + t(v-u)), (v-u))\ \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u) - \int_0^1 (\mathrm{J}'(u), v-u)\ \mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_0^1 (\mathrm{J}'(u + t(v-u)), (v-u))\ \mathrm{d}t \\
\mathrm{J}(v) &= \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u) + \int_0^1 (\mathrm{J}'(u + t(v-u)) - \mathrm{J}'(u), (v-u))\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Minorons le reste intégral à l'aide de la propriété d'ellipticité de J. La propriété d'ellipticité permet de minorer l'intégrande de la manière suivante

$$\begin{aligned}
(\mathrm{J}'(u + t(v-u)) - \mathrm{J}'(u), (v-u)) &= \frac{1}{t}\ (\mathrm{J}'(u + t(v-u)) - \mathrm{J}'(u), t(v-u)) \\
&\geqslant \frac{1}{t}\ \alpha \|t(v-u)\|^2 \\
&\geqslant \alpha t \|v-u\|^2
\end{aligned}$$

On en déduit la suite d'inégalités suivantes pour le reste intégral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\mathrm{J}'(u + t(v-u)) - \mathrm{J}'(u), (v-u))\ \mathrm{d}t &\geqslant \alpha \|v-u\|^2 \int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \alpha \|v-u\|^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
\int_0^1 (\mathrm{J}'(u + t(v-u)) - \mathrm{J}'(u), (v-u))\ \mathrm{d}t &\geqslant \frac{\alpha}{2}\ \|v-u\|^2
\end{aligned}$$

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

d'où $$\boxed{\mathrm{J}(v) \geqslant \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u) + \frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2}$$

1.b À la question précédente, nous avons montré que

$$\mathrm{J}(v) \geqslant \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u) + \frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2$$

On en déduit que si $u \neq v$

$$\mathrm{J}(v) > \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u)$$

Ceci prouve que J est strictement convexe

> **Rappel** Soit J une fonctionnelle $\mathscr{C}^1$ alors
>
> 1. J est convexe
> $$\iff \quad \forall u, v \qquad \mathrm{J}(v) \geqslant \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u)$$
> 2. J est strictement convexe
> $$\iff \quad \forall u \neq v \qquad \mathrm{J}(v) > \mathrm{J}(u) + (\mathrm{J}'(u), v-u)$$

1.c Montrons que J est coercive

> **Rappel**
> On dit que J est *coercive* si $\mathrm{J}(v)$ admet une limite lorsque $\|v\|$ tend vers $+\infty$, et si cette limite est $+\infty$.

Appliquons l'inégalité trouvée à la question 1.a, entre un point v et un autre point fixé, par exemple 0. On obtient ainsi

$$\mathrm{J}(v) \geqslant \mathrm{J}(0) + (\mathrm{J}'(0), v) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2$$

Comme $\mathrm{J}'(0)$ est continue, on a

$$|(\mathrm{J}'(0), v)| \leqslant \mathrm{K}\|v\|$$

ce qui donne $$-\mathrm{K}\|v\| \leqslant (\mathrm{J}'(0), v) \leqslant \mathrm{K}\|v\|$$

Ainsi $$\mathrm{J}(v) \geqslant \mathrm{J}(0) - \mathrm{K}\|v\| + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 = \mathrm{J}(0) + \|v\|\left(\frac{\alpha}{2}\|v\| - \mathrm{K}\right)$$

et le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers $+\infty$. D'après le théorème d'encadrement

$$\boxed{\lim_{\|v\|\to\infty} \mathrm{J}(v) = +\infty}$$

1.d.i Comme F est un ensemble fermé, non vide, et que J est coercive, J admet un minimum sur F, qui est atteint.

> **Rappel : Théorème d'existence d'un minimum**
> Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, et $\mathrm{J} : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue, et

coercive si l'ensemble F est non vide.
Alors il existe au moins un élément u tel que

$$u \in \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}(u) = \inf_{v \in \mathrm{F}} \mathrm{J}(v)$$

Montrons maintenant l'unicité. Supposons que le minimum de J est atteint en au moins deux points distincts u_1 et u_2. Alors pour tout $\lambda \in]\,0\,;1\,[$, $\lambda u_1 + (1 - \lambda u_2)$ est dans F, car F est convexe. Comme J est strictement convexe, on a l'inégalité

$$\mathrm{J}(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) < \lambda \mathrm{J}(u_1) + (1-\lambda)\mathrm{J}(u_2) = \min_{u \in \mathrm{F}} \mathrm{J}(u)$$

Ceci contredit la définition du minimum de J. On en déduit que le minimum de J est atteint en au plus un point.

Remarque
On retrouve ainsi le résultat du cours qui dit que si J est une fonctionnelle strictement convexe, sur un ensemble convexe, alors son minimum est atteint en au plus un point.

1.d.ii La fonctionnelle J admet un minimum sur la partie U, qui est convexe, fermée et non vide. On en déduit que

$$\boxed{\forall v \in \mathrm{F} \qquad (\mathrm{J}'(u), v - u) \geqslant 0}$$

Rappel (Théorème 3.2 du cours)
Soit $\mathrm{J} : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert de V, et soit K une partie convexe de Ω. Si J est (Gâteaux) différentiable en un point $u \in \mathrm{K}$, et si elle admet un minimum relatif en u par rapport à K, alors

$$\forall v \in \mathrm{K} \qquad (\mathrm{J}'(u), v-u) \geqslant 0 \qquad \text{(Inéquation d'Euler)}$$

Soit v un vecteur de V. Alors on peut écrire l'inégalité trouvée pour

$$\begin{array}{lll} v' = u + v & \text{donne} & 0 \geqslant (\mathrm{J}'(u), v) \\ v' = u - v & \text{donne} & 0 \geqslant -(\mathrm{J}'(u), v) \end{array}$$

ce qui veut dire que $(\mathrm{J}'(u), v) = 0$. Ceci étant vrai pour n'importe quel v, on a en fait

$$\boxed{\mathrm{J}'(u) = 0}$$

Remarque
On retrouve ainsi le théorème suivant du cours
Théorème 3.1
Soit Ω un ouvert de V, espace vectoriel normé, et $\mathrm{J} : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle ; Si J admet un extremum relatif en un point $u \in \Omega$, et si J est (Gâteaux)-différentiable en ce point, alors

$$\mathrm{J}'(u) = 0 \qquad \text{(Équation d'Euler)}$$

Exercice 2

2.a Le vecteur $\mathrm{J}'(u)$ admet pour coordonnées $\dfrac{\partial \mathrm{J}}{\partial v_i}$. Le calcul donne

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial v_i} = \varphi'\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{h}\right) - \varphi'\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right)}$$

La matrice Hessienne de J a pour coefficients $\dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial v_i \partial v_j}$. Si $j \neq i$, $j \neq i-1$ et $j \neq i+1$, alors le coefficient (i,j) de la matrice Hessienne est nul. Dans les autres cas, on obtient

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial v_i \partial v_j} = \dfrac{1}{h}\left(\varphi''\left(\dfrac{v_i - v_{i-1}}{h}\right) + \varphi''\left(\dfrac{v_{i+1} - v_{i-1}}{h}\right)\right) & \text{si} \quad i = j \\
\dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial v_i \partial v_j} = -\dfrac{1}{h}\,\varphi''\left(\dfrac{v_{i+1} - v_i}{h}\right) & \text{si} \quad j = i+1 \\
\dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial v_i \partial v_j} = -\dfrac{1}{h}\,\varphi''\left(\dfrac{v_i - v_{i-1}}{h}\right) & \text{si} \quad j = i-1
\end{array}}$$

2.b Notons

$$\alpha_i = \frac{1}{h}\,\varphi''\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right)$$

Formellement, la matrice Hessienne de J peut se récrire de la manière suivante

$$\begin{pmatrix}
\alpha_0 + \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
-\alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & & & \vdots \\
0 & -\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_3 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & -\alpha_{n-2} & \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} & -\alpha_{n-1} \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} + \alpha_n
\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\mathrm{J}''(u)w = \begin{pmatrix}
(\alpha_0 + \alpha_1)w_1 - \alpha_1 w_2 \\
-\alpha_1 w_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)w_2 - \alpha_2 w_3 \\
\vdots \\
-\alpha_{i-1}w_{i-1} + (\alpha_i + \alpha_{i+1})w_i - \alpha_i w_{i+1} \\
\vdots \\
-\alpha_{n-2}w_{n-2} + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)w_{n-1} - \alpha_n w_n \\
-\alpha_{n-1}w_{n-1} + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)w_n
\end{pmatrix}$$

soit
$$\begin{aligned}
(\mathrm{J}''(u)w, w) = &\Big((\alpha_0 + \alpha_1)w_1 - \alpha_1 w_2\Big)w_1 \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1}\Big(-\alpha_{i-1}w_{i-1} + (\alpha_i + \alpha_{i+1})w_i - \alpha_i w_{i+1}\Big)w_i \\
&+ \Big(-\alpha_{n-1}w_{n-1} + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)w_n\Big)w_n
\end{aligned}$$

Commençons par transformer la somme :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n-1}\Big(-\alpha_{i-1}w_{i-1}+(\alpha_i+\alpha_{i+1})w_i-\alpha_i w_{i+1}\Big)w_i\\
&\quad=\sum_{i=2}^{n-1}\Big(\alpha_{i-1}(w_i-w_{i-1})-\alpha_i(w_{i+1}-w_i)\Big)w_i\\
&\quad=\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_{i-1}(w_i-w_{i-1})w_i-\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i(w_{i+1}-w_i)w_i\\
&\quad=\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_i(w_{i+1}-w_i)w_{i+1}-\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i(w_{i+1}-w_i)w_i\\
&\quad=\sum_{i=2}^{n-2}\alpha_i(w_{i+1}-w_i)^2+\alpha_1(w_2-w_1)w_2\\
&\qquad-\alpha_{n-1}(w_n-w_{n-1})w_{n-1}
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{J}''(u)w,w\big)&=\alpha_0 w_1^2+\alpha_1(w_1-w_2)w_2+\alpha_{n-1}(w_n-w_nn-1)w_n+\alpha_n w_n^2\\
&\quad+\sum_{i=2}^{n-2}\alpha_i(w_{i+1}-w_i)^2+\alpha_1(w_2-w_1)w_2-\alpha_{n-1}(w_n-w_{n-1})w_{n-1}\\
&=\sum_{i=2}^{n-2}\alpha_i(w_{i+1}-w_i)^2+\alpha_0 w_1^2+\alpha_n w_n^2
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement positive, si $w\neq 0$. On en déduit que $\mathrm{J}''(u)$ est définie positive, donc

$$\boxed{\text{J est strictement convexe.}}$$

2.c Montrons d'abord que $v\in\mathbb{R}^n\longmapsto\sum_{i=0}^{n}|v_{i+1}-v_i|$ est une norme.

- Si $\sum_{i=0}^{n}|v_{i+1}-v_i|=0$, alors $v_1=v_n=0$, et pour tout i dans $[\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$, $v_i=v_{i+1}$, donc $v=0$.
- Pour tout $v\in\mathbb{R}^n$, et tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda v\|&=\sum_{i=0}^{n}|\lambda v_{i+1}-\lambda v_i|\\
&=|\lambda|\sum_{i=0}^{n}|v_{i+1}-v_i|\\
\|\lambda v\|&=|\lambda|\,\|v\|
\end{aligned}$$

- Pour tout $u,v\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\|u+v\|&=\sum_{i=0}^{n}|v_{i+1}+u_{i+1}-v_i-u_i|\\
&\leqslant\sum_{i=0}^{n}|v_{i+1}-v_i|+\sum_{i=0}^{n}|u_{i+1}-u_i|\\
&\leqslant\|v\|+\|u\|
\end{aligned}$$

On en déduit que

On en déduit que $\boxed{v\in\mathbb{R}^n\longmapsto\sum_{i=0}^{n}|v_{i+1}-v_i|\text{ est une norme}}$

Montrons à présent que J_1 est coercive. D'une part, on a

$$\left|{}^t b\, v\right| \leqslant \|b\|_2 \|v\|_2$$

d'où
$$-{}^t b\, v \geqslant -\|b\|_2 \|v\|_2$$

Par ailleurs, d'après la propriété de φ

$$h\sum_{i=0}^{n} \varphi\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\right) \geqslant hc\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\right|$$
$$c\|v\|$$

Comme la norme $\|\cdot\|$ et la norme $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, il existe α tel que

$$h\sum_{i=0}^{n} \varphi\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\right) \geqslant \alpha c\|v\|_2$$

Il vient alors
$$\mathrm{J}_1(v) \geqslant (\alpha c - h)\|v\|_2$$

On en déduit que si $h < \alpha c$, alors la fonctionnelle J_1 est coercive. La fonctionnelle J_1 admet donc un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Les fonctionnelles J_1 et J diffèrent d'une partie linéaire. On en déduit que $\mathrm{J}_1'' = \mathrm{J}''$, donc J_1 est strictement convexe. On en déduit que le minimum de J_1 est unique.

Exercice 3

$\boxed{\textbf{3.a}}$ La matrice e est de rang 1. D'après le théorème du rang

$$n = \dim \mathrm{Ker}\ e + \dim \mathrm{Im}\ e = \dim \mathrm{Ker}\ e + 1$$

On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}\ e = n-1$, c'est à dire que 0 est valeur propre d'ordre $n-1$. La trace de e est égale à n, donc n est l'autre valeur propre de e. Un vecteur propre associé à cette valeur propre est $(1,1,\dots,1)$. Finalement,

$$\boxed{\text{0 est valeur propre d'ordre } n-1\text{. Son espace propre associé est } (1,1,\dots,1)^{\perp}.\ n \text{ est valeur propre d'ordre 1, et son espace propre est dirigé par } (1,1,\dots,1).}$$

$\boxed{\textbf{3.b}}$ Calculons chacune des composantes du gradient

$$\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\prod_{i=1}^{n} {u_i}^{1/n}\right) = \prod_{i\neq j} {u_i}^{1/n}\frac{\partial u_j^{1/n}}{\partial u_j} = \frac{1}{n}\prod_{i\neq j} {u_i}^{1/n} u_j^{1/n-1} = \frac{\mathrm{J}(u)}{nu_j}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{J}'(u)v = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{J}(u)v_i}{nu_i}}$$

Calculons à présent les coefficients diagonaux de la Hessienne

$$\frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial {u_j}^2} = \frac{1}{nu_j}\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial u_j} - \mathrm{J}(u)\,\frac{1}{nu_j^2} = \frac{\mathrm{J}(u)}{(nu_j)^2} - \mathrm{J}(u)\,\frac{1}{nu_j^2} = \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)\frac{\mathrm{J}(u)}{u_i^2}$$

Calculons enfin les coefficients extra-diagonaux de la Hessienne

$$\frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial u_j \, \partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\mathrm{J}(u)}{n u_j}\right) = \frac{1}{n u_j}\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial u_k} = \frac{1}{n u_j}\,\frac{1}{n u_k}\,\mathrm{J}(u) = \frac{\mathrm{J}(u)}{n^2 u_j u_k}$$

On en déduit l'expression suivante

$$\boxed{(\mathrm{J}''(u)v, w) = \sum_{k\neq j} \frac{\mathrm{J}(u) v_j w_k}{n^2 u_j u_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(1-n)\mathrm{J}(u)}{n^2}\,\frac{v_j w_j}{u_j^2}}$$

3.c Montrons que la Hessienne de J est positive

$$\begin{aligned}(\mathrm{J}''(u)w, w) &= \sum_{k\neq j} \frac{\mathrm{J}(u) w_j w_k}{n^2 u_j u_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(1-n)\mathrm{J}(u)}{n^2}\,\frac{w_j w_j}{u_j^2} \\ &= \sum_{k\neq j} \frac{\mathrm{J}(u)}{n^2} v_j v_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{(1-n)\mathrm{J}(u)}{n^2}\, v_j^2 \\ &= \frac{\mathrm{J}(u)}{n^2}\, {}^t v\,(e - n\,\mathrm{id}\,)\,v\end{aligned}$$

où v est le vecteur dont la composante i est w_i/u_i. D'après la question 3.a, la matrice e peut se réduire sous la forme

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que, dans cette même base, $e - n\,\mathrm{id}$ se réduit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Cette matrice est positive, mais pas définie positive. Cela veut dire que

$\boxed{\text{J est convexe, mais pas strictement convexe.}}$

3.d Pour montrer que j est strictement convexe sur U, il suffit de montrer que si deux éléments w_1 et w_2 de U sont tels que

$$(\mathrm{J}''(u)(w_1 - w_2), w) = 0$$

alors $w_1 = w_2$. Soit w le vecteur $w_1 - w_2$. Ce vecteur admet la décomposition orthogonale suivante :

$$w = \lambda(1, 1\dots, 1) + w'$$

Où $w' \in \mathrm{Ker}\, e$. De plus, comme $w_1, w_2 \in \mathrm{U}$, en sommant les composantes des vecteurs, on a la relation suivante

$$0 = \lambda n + \sum_{i=1}^{n} w'_i$$

d'où
$$\lambda = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w'_i$$

Il reste à calculer $(\mathrm{J}''(u)w, w)$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{J}''(u)w, w) &= {}^t w\,(e - n\,\mathrm{id}\,)\,w \\ &= {}^t w\,(-nw') \\ &= \lambda\,{}^t(1,\ldots,1)\,w' + {}^t w'\,w' \\ &= \|w'\|^2\end{aligned}$$

On en déduit que $w' = 0$, d'où $\lambda = 0$. Ainsi, $w_1 = w_2$, donc

$$\boxed{j \text{ est strictement convexe.}}$$

3.e D'après le calcul effectué à la question 3.b, on a

$$\mathrm{J}'(\varepsilon)v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{J}(\varepsilon)v_i}{n\varepsilon_i} = \frac{\mathrm{J}(\varepsilon)}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i = \mathrm{J}(\varepsilon)$$

d'où
$$\boxed{(\mathrm{J}'(\varepsilon), v - \varepsilon) = 0}$$

La fonctionnelle J est strictement convexe sur le convexe U. On en déduit que

$$\forall v \neq \varepsilon \qquad \mathrm{J}(v) > \mathrm{J}(\varepsilon) + \mathrm{J}'(\varepsilon)(v - \varepsilon) = \mathrm{J}(\varepsilon)$$

Donc ε est un minimum global de J sur U. De plus, J étant strictement convexe sur cet ensemble,

$$\boxed{\text{le point en lequel est atteint le minimum est unique.}}$$

3.f Soient $v_1, \ldots, v_n$ des réels positifs. Notons $\bar{v}$ le réel suivant

$$\bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$$

Alors le vecteur $u = v/\bar{v}$ appartient à U. On en déduit qu'il vérifie

$$\mathrm{J}(u) \geqslant \mathrm{J}(\varepsilon) = 1$$

avec égalité si et seulement si v est égal à ε. On en déduit que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^1 /n \geqslant 1$$

d'où
$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{v_i}{\bar{v}}\right)^1 /n = \left(\frac{1}{(\bar{u})^n}\prod_{i=1}^{n} v_i\right)^1 /n \geqslant 1$$

soit
$$\boxed{\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i}$$

Le cas d'égalité se déduit immédiatement de la condition d'optimalité de J sur U

$$\boxed{\text{Il y a égalité dans l'inégalité, si et seulement si tous les } u_i \text{ sont égaux}}$$