Optimisation Continue
ISTIL 2ème année
Corrigé de la feuille 1[1]

Exercice 1

> **Rappel** On dit qu'une fonctionnelle J admet une *dérivée directionnelle* en $\mathbf{u}$, dans la direction $\mathbf{v}$ si
> $$\frac{\mathrm{J}(\mathbf{u}+t\mathbf{v})-\mathrm{J}(\mathbf{u})}{t}$$
> où t est un réel, admet une limite finie lorsque t tend vers 0.

Soit (x,y) une direction de $\mathbb{R}^2$. Supposons que $x \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{J}(0+t(x,y))-\mathrm{J}(0)}{t} &= \frac{1}{t}\,\frac{t^2y^2}{tx}\\ &= \frac{y^2}{x}\end{aligned}$$

Si $x = 0$, alors

$$\frac{\mathrm{J}(0+t(x,y))-\mathrm{J}(0)}{t} = 0$$

On en déduit que J admet une dérivée directionnelle au point $(0,0)$.

Montrons à présent que J n'est pas continue en $(0,0)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \frac{1}{n}$$

alors
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{J}(x_n, y_n) = 1$$

donc $\mathrm{J}(x_n, y_n)$ ne tend pas vers $(0,0)$, et la fonction J n'est pas continue en $(0,0)$.

> Comme on a l'implication
> $$\text{J Frechet dérivable} \quad\Longrightarrow\quad \text{J continue}$$
> on en déduit que J n'est pas Fréchet dérivable.

[1] généré avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à `perrier@math.u-bordeaux1.fr`

Exercice 2

$\boxed{\textbf{2.a}}$ Supposons que J soit Fréchet dérivable. Alors il existe $\mathrm{J}'(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall v \qquad \mathrm{J}(v) = \mathrm{J}(0) + \mathrm{J}'(0)v + \|v\|\varepsilon(v)$$

où ε est telle que

$$\lim_{\|v\| \to 0} |\varepsilon(v)| = 0$$

On écrit l'égalité trouvée pour v et pour $-v$:

$$\begin{aligned} \|v\| &= \mathrm{J}'(0)v + \|v\|\varepsilon(v) \\ \|-v\| &= -\mathrm{J}'(0)v + \|-v\|\varepsilon(-v) \end{aligned}$$

On trouve alors, en additionnant ces deux lignes :

$$2\|v\| = \|v\| \left(\varepsilon(-v) + \varepsilon(v)\right)$$

soit, pour tout $v \neq 0$ $\qquad \varepsilon(-v) + \varepsilon(v) = 2$

ce qui contredit le fait que ε admet une limite nulle en 0.

$\boxed{\textbf{2.b}}$ Afin de chercher une dérivée directionnelle de J en l'origine, étudions le quotient

$$\frac{\mathrm{J}(0 + tv) - \mathrm{J}(0)}{t} = \frac{|t|}{t} \|v\|$$

Or cette dernière quantité admet 1 pour limite à gauche, et -1 pour limite à droite. Ces deux limites n'étant pas égales, on en déduit que le quotient d'accroissement n'admet pas de limite quand $t \to 0$.

Exercice 3

$\boxed{\textbf{3.a}}$ Cherchons un développement limité de J au voisinage d'un point u quelconque de $\mathbb{R}^n$. Soit h un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(u+v) &= \frac{1}{2} \langle \mathrm{A}(u+v), u+v \rangle - \langle b, u+v \rangle \\ \mathrm{J}(u+v) &= \frac{1}{2} \left(\langle \mathrm{A}u, u \rangle + \langle \mathrm{A}u, v \rangle + \langle \mathrm{A}v, u \rangle + \langle \mathrm{A}v, v \rangle \right) - \langle b, u \rangle - \langle b, v \rangle \\ \mathrm{J}(u+v) &= \mathrm{J}(u) + \frac{1}{2} \left(\langle \mathrm{A}u, v \rangle + \langle \mathrm{A}v, u \rangle \right) - \langle b, v \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathrm{A}v, v \rangle \end{aligned}$$

Or on a $\qquad |\langle \mathrm{A}v, v \rangle| \leqslant \|\mathrm{A}v\| \, \|v\| \leqslant \|\mathrm{A}\| \|v\|^2$

et $\qquad \langle \mathrm{A}v, u \rangle = \langle v, \mathrm{A}u \rangle = \langle \mathrm{A}u, v \rangle$

car A est symétrique, donc autoadjointe. On en déduit que

$$\mathrm{J}(u+v) = \mathrm{J}(u) + \langle \mathrm{A}u - b, v \rangle + \|v\|\varepsilon(v)$$

Il vient alors que J est Fréchet dérivable, avec

$$\mathrm{J}'(u)v = \langle \mathrm{A}u - b, v \rangle$$

3.b Afin de déterminer l'éventuelle dérivée seconde de J, on forme le quotient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{J}'(u+tv)w-\mathrm{J}'(u)w}{t} &= \frac{\langle \mathrm{A}(u+tv)-b,w\rangle-\langle \mathrm{A}u-b,w\rangle}{t}\\ &= \frac{\langle \mathrm{A}u-b,w\rangle+t\langle \mathrm{A}v,w\rangle-\langle \mathrm{A}u-b,w\rangle}{t}\\ \frac{\mathrm{J}'(u+tv)w-\mathrm{J}'(u)w}{t} &= \langle \mathrm{A}v,w\rangle\end{aligned}$$

cette dernière quantité admet une limite quand $t \to 0$, indépendant de u. On en déduit que J est deux fois différentiable, et admet A comme dérivée seconde. En particulier, J est convexe, car sa dérivée seconde est symétrique, définie, positive.

Exercice 4

4.a Soit u un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Nous cherchons à montrer que tout élément suffisamment proche de u est inversible.

- **Démonstration non constructive** Notons det la fonction qui à $u \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ associe son déterminant. Cette fonction est continue, donc l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert. De plus,

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cup \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$$

  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ apparaît donc comme l'union de deux ouverts, on en déduit que c'est un ouvert.

- **Démonstration constructive** On cherche à montrer que pour v suffisamment proche de u, v est inversible. Notons $h = v - u$, si bien que $v = u + h$. On a alors

$$v = u(\mathrm{id} + u^{-1}h)$$

  Il suffit de montrer que pour h suffisamment petit, $(\mathrm{id} + u^{-1}h)$ est inversible. Pour cela, il suffit de montrer que cette matrice est injective. Soit x tel que

$$(\mathrm{id} + u^{-1}h)x = x + u^{-1}hx = 0$$

  d'où
$$x = -u^{-1}hx$$

  soit
$$\|x\| \leqslant \|u^{-1}\|\|h\|\|x\|$$

  Si de plus $\|h\| < \dfrac{1}{\|u^{-1}\|}$, alors la dernière inégalité implique que $x = 0$, c'est à dire que v est inversible

  Conclusion $\boxed{\text{Si } \|v-u\| < \dfrac{1}{\|u^{-1}\|}, \text{ alors } v \text{ est inversible}}$

4.b Afin de montrer que J est Fréchet dérivable, on forme la différence

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(u+h)-\mathrm{J}(u) &= (u+h)^{-1}-u^{-1}\\ &= (u(\mathrm{id}+u^{-1}h))^{-1}-u^{-1}\\ &= (\mathrm{id}+u^{-1}h)^{-1}u^{-1}-u^{-1}\\ &= \left[(\mathrm{id}+u^{-1}h)^{-1}-\mathrm{id}\right]u^{-1}\end{aligned}$$

Si $\|u^{-1}h\| < 1$, alors on a le développement suivant

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} + u^{-1}h)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(u^{-1}h\right)^n \\ &= \mathrm{id} - u^{-1}h + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(u^{-1}h\right)^n\end{aligned}$$

d'où
$$\begin{aligned}\mathrm{J}(u+h) - \mathrm{J}(u) &= \Big(- u^{-1}h + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(u^{-1}h\right)^n \Big) u^{-1} \\ &= -u^{-1}hu^{-1} + \left(\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(u^{-1}h\right)^n \right) u^{-1}\end{aligned}$$

Il reste à majorer le reste :

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(u^{-1}h\right)^n \right) u^{-1} \right\| &\leqslant \Big(\sum_{n=2}^{+\infty} \|(-1)^n \left(u^{-1}h\right)^n \| \Big) \|u^{-1}\| \\ &\leqslant \Big(\sum_{n=2}^{+\infty} \|u^{-1}h\|^n \Big) \|u^{-1}\| \\ &\leqslant \frac{\|u^{-1}h\|^2}{1 - \|u^{-1}h\|} \|u^{-1}\| \\ &\leqslant \|h\| \frac{\|u^{-1}\|^3 \|h\|}{1 - \|u^{-1}h\|}\end{aligned}$$

On en déduit que cette dernière quantité est bien de la forme $\|h\|\varepsilon(h)$, où ε admet une limite nulle quand $\|h\| \to 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{J est Fréchet dérivable, avec } \mathrm{J}'(u) \,:\, h \mapsto u^{-1}hu^{-1}}$$

$\boxed{\textbf{4.c}}$ Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{J}'(u)h - \mathrm{J}'(v)h &= u^{-1}hu^{-1} - v^{-1}hv^{-1} \\ &= u^{-1}h(u^{-1} - v^{-1}) + u^{-1}hv^{-1} - v^{-1}hv^{-1} \\ &= u^{-1}h(u^{-1} - v^{-1}) + (u^{-1} - v^{-1})hv^{-1}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\|\mathrm{J}'(u)h - \mathrm{J}'(v)h\| &\leqslant \|u^{-1}h(u^{-1} - v^{-1})\| + \|(u^{-1} - v^{-1})hv^{-1}\| \\ &\leqslant \|u^{-1}\|\|h\|\|u^{-1} - v^{-1}\| + \|u^{-1} - v^{-1}\|\|h\|\|v^{-1}\| \\ &\leqslant \big(\|u^{-1}\| + \|v^{-1}\|\big)\|u^{-1} - v^{-1}\|\|h\|\end{aligned}$$

En prenant le sup pour $\|h\| \leqslant 1$, on obtient

$$\|\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v)\| \leqslant \big(\|u^{-1}\| + \|v^{-1}\|\big)\|\mathrm{J}(u) - \mathrm{J}(v)\|$$

Comme J est Fréchet dérivable, elle est continue. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $v \in \mathrm{B}(u, r)$

$$\|\mathrm{J}(u) - \mathrm{J}(v)\| \leqslant \varepsilon$$

Soit M le max de J sur $\mathrm{B}(u, 1)$. Alors

$$\|\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v)\| \leqslant 2\mathrm{M}\varepsilon$$

d'où la continuité de J'. Ainsi

$$\boxed{\text{J est } \mathscr{C}^1}$$

Exercice 5

Montrons d'abord que si J est elliptique, et deux fois dérivable, alors

$$\forall w \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{J}''(u)w, w) \geqslant \alpha \|w\|^2$$

J est elliptique, donc

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v), u - v) \geqslant \alpha \|u - v\|^2$$

Pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, on pose $v = u + tw$. Alors

$$\forall (u,w) \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(u+tw), -tw) \geqslant \alpha \| - tw\|^2$$

soit $$\forall (u,w) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \left(\frac{\mathrm{J}'(u+tw) - \mathrm{J}'(u)}{t}, w \right) \geqslant \alpha \|w\|^2$$

En passant à la limite lorsque $t \to 0$, on obtient

$$\forall (u,w) \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{J}''(u)w, w) \geqslant \alpha \|w\|^2$$

Réciproquement, supposons que J vérifie

$$\forall (u,w) \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{J}''(u)w, w) \geqslant \alpha \|w\|^2$$

et montrons que J est elliptique. La formule de Taylor Maclaurin appliquée à J' entre u et v donne

$$\exists \theta \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v) = \mathrm{J}''(v + \theta(u-v))(u-v)$$

d'où $$(\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v), u - v) = (\mathrm{J}''(v + \theta(u-v))(u-v), u-v) \geqslant \alpha \|u - v\|^2$$

Donc J est α-elliptique

Exercice 6

> **Rappel**
> *l'épigraphe* d'une fonction $\mathrm{J} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, noté epi(J) est défini par
>
> $$\mathrm{epi}(\mathrm{J}) = \{(u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \qquad t \geqslant \mathrm{J}(u)\}$$

Montrons d'abord que si J est convexe, alors son épigraphe est convexe. Soient a et b deux points de l'épigraphe de J. Alors $a = (u_a, t_a)$, et $b = (u_b, t_b)$, avec

$$t_a \geqslant \mathrm{J}(u_a) \qquad \text{et} \qquad t_b \geqslant \mathrm{J}(u_b) \qquad (\star)$$

Soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Montrons que

$$\lambda a + (1-\lambda) b = \begin{pmatrix} \lambda t_a + (1-\lambda) t_b \\ \lambda u_a + (1-\lambda) u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

est dans l'épigraphe de J. Alors on peut multiplier les inégalités ($\star$) respectivement par λ et $(1-\lambda)$ car ces nombres sont positifs, puis on peut ajouter les inégalités pour obtenir

$$t = \lambda t_a + (1-\lambda)t_b \geqslant \lambda \mathrm{J}(u_a) + (1-\lambda)\mathrm{J}(u_b)$$

De plus, comme J est convexe, on a

$$\mathrm{J}(\lambda u_a + (1-\lambda)u_b) \leqslant \lambda \mathrm{J}(u_a) + (1-\lambda)\mathrm{J}(u_b)$$

On en déduit que $$t \geqslant \mathrm{J}(\lambda u_a + (1-\lambda)u_b) = \mathrm{J}(u)$$

donc le point (t, u) est dans l'épigraphe de J. On en déduit que epi(J) est convexe.

Montrons, réciproquement, que si l'épigraphe de J est convexe, alors la fonction J est convexe. Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^n$. Alors $(x, \mathrm{J}(x))$ et $(y, \mathrm{J}(y))$ appartiennent à l'épigraphe de J. Soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Alors

$$\lambda(x, \mathrm{J}(x)) + (1-\lambda)(y, \mathrm{J}(y)) = \begin{pmatrix} \lambda x + (1-\lambda)y \\ \lambda \mathrm{J}(x) + (1-\lambda)\mathrm{J}(y) \end{pmatrix}$$

appartient également à l'épigraphe, car celui-ci est convexe. On en déduit que

$$\mathrm{J}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda \mathrm{J}(x) + (1-\lambda)\mathrm{J}(y)$$

donc J est convexe.