ISTIL 2ème année, parcours MAM

Optimisation Continue Année 2007/2008

Feuille 2

1. Soit $\mathrm{J} : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie sur V, espace vectoriel normé. On suppose que J est elliptique
   (a) Montrer que
   $$\forall (u,v) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V} \qquad \mathrm{J}(v) - \mathrm{J}(u) \geqslant (\mathrm{J}'(u), v-u) + \frac{\alpha}{2} \|v-u\|^2$$
   (b) Montrer que J est strictement convexe.
   (c) Montrer que J est coercive.
   (d) Soit U une partie convexe fermée non vide de V.
      i. Montrer que
      $$\exists ! u \in \mathrm{U} \qquad \mathrm{J}(u) = \inf \{\mathrm{J}(v) \qquad v \in \mathrm{U}\}$$
      ii. Montrer que u vérifie
      $$\forall v \in \mathrm{U} \qquad (\mathrm{J}'(u), v-u) \geqslant 0$$
      Montrer enfin que $\mathrm{J}'(u) = 0$ si $\mathrm{U} = \mathrm{V}$.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^2$, strictement convexe, et soit $h > 0$. On définit $\mathrm{J} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par
   $$\mathrm{J}(v) = \mathrm{J}(v_1, \ldots, v_n) = h \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} \varphi \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)$$
   (où on a noté $v_{\mathrm{N}+1} = v_0 = 0$.
   (a) Calculer $\mathrm{J}'(u)$ et $\mathrm{J}''(u)$.
   (b) Montrer que J est strictement convexe. Montrer que J est coercive.
   (c) Montrer que J_1 admet un unique minimum, pour h assez petit.

3. On définit Ω de la manière suivante
   $$\Omega = \{v \in \mathbb{R}^n \qquad \forall i \in [\![1\,;\, n]\!] \quad v_i > 0\}$$
   Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité
   $$\forall v \in \Omega \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} v_i \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v_i$$
   (a) Soit $e = (e_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $e_{i,j} = 1$ pour tout i, j. Calculer les vecteurs propres de la matrice e, et déterminer les sous espaces propres correspondants.

(b) On définit la fonctionnelle

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{J} : & \Omega \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & v & \to & \mathrm{J}(v) = -\left(\prod_{i=1}^{n} v_i\right)^{1/n} \end{array}$$

Calculer $\mathrm{J}'(u)v$ et $\mathrm{J}''(u)(v,w)$ pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que la fonction J est convexe, mais pas strictement convexe.

(d) On note j la restriction de la fonctionnelle J au sous-ensemble convexe

$$\mathrm{U} = \left\{ v \in \Omega \qquad \sum_{i=1}^{n} v_i = n \right\}$$

Montrer que la fonctionnelle $j : \mathrm{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est strictement convexe.

(e) On note ε le vecteur de Ω dont toutes les composantes valent 1. Montrer que

$$\forall v \in \mathrm{U} \qquad \mathrm{J}'(\varepsilon)(v - \varepsilon) = 0$$

En déduire qu'il existe un unique élément u de U tel que

$$\mathrm{J}(u) = \inf \{\mathrm{J}(v) \qquad v \in \mathrm{U}\}$$

(f) Démontrer l'inégalité, et décrire le sous-ensemble de Ω pour lequel l'inégalité devient une égalité.