ISTIL 2ème année, parcours MAM

Optimisation Continue — Année 2007/2008

Feuille 1

1. Soit $\mathrm{J} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$\mathrm{J}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Montrer que J admet une dérivée directionnelle au point $(0,0)$, mais que J n'est pas continue au point $(0,0)$.

2. Soit $\mathrm{J} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{J}(v) = \|v\| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

   (a) Montrer que J n'est pas Frechet dérivable en l'origine.

   (b) Montrer que J n'a pas de dérivée directionnelle en l'origine

3. Soit A une matrice symétrique définie positive de taille n, et soit $b \in \mathbb{R}^n$ fixé ; on définit $\mathrm{J} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \qquad \mathrm{J}(v) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{A}v, v\rangle - \langle b, v\rangle$$

   (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien).

   (a) Montrer que J est Frechet dérivable, et calculer $\mathrm{J}'(u)v$, pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

   (b) Calculer $\mathrm{J}''(u)(v,w)$ pour tout triplet $(u,v,w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

4. Soit la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{J} : & \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ & u & \mapsto & u^{-1} \end{array}$$

   où J a pour domaine $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que J est Frechet dérivable, et calculer $\mathrm{J}'(u)$, où $u \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que J est $\mathscr{C}^1$.

5. Soit $\mathrm{J} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que J est elliptique si

$$\begin{cases} \text{J est } \mathscr{C}^1 \\ \exists \alpha > 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (\mathrm{J}'(u) - \mathrm{J}'(v), u - v) \geqslant \alpha \|u - v\|^2 \end{cases}$$

   On suppose que J est deux fois dérivable. Montrer que

$$\text{J est elliptique} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \quad (\mathrm{J}''(u)w, w) \geqslant \alpha \|w\|^2$$

6. Montrer que J est convexe, si et seulement si son épigraphe est convexe.