

Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur

ISTIL 1ère année

Corrigé de la feuille 1¹

EXERCICE 1

À partir d'une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , on peut construire une fonction \tilde{f} de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .

$$\begin{array}{ccc} (x, y) \in \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) \in \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \uparrow \\ z = x + iy \in \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & f(z) = f(x + iy) \in \mathbb{C} \end{array}$$

La continuité de f équivaut à la continuité de \tilde{f} .

La fonction f est continue sur \mathbb{C} , car elle est composée des fonctions Re , Im et de fonctions puissances, qui sont continues sur \mathbb{C} .

Rappel

Soit f une fonction de la variable complexe. On note

$$\tilde{f} : (x, y) \longmapsto (\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Alors f est holomorphe, si et seulement si

1. \tilde{f} est différentiable
2. et \tilde{f} vérifie les *Conditions de Cauchy*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

Notons P et Q la partie réelle et la partie imaginaire de f . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= 3y^2 & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que les relations de Cauchy ne sont vérifiées que le long de la parabole d'équation

$$2x = 3y^2$$

¹généré avec L^AT_EX 2_ε. Tous les commentaires, compléments, insultes et remarques désobligeantes sont les bienvenus à perrier@math.univ-lyon.fr

Soit z un point de cette parabole. Alors il existe y_0 tel que $z = \frac{3y_0^2}{2} + iy_0$, et si f est holomorphe, alors

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y_0^2$$

Étudions le reste entre $f(z+h)$, et $f(z) + f'(z)h$, en notant h_1 et h_2 la partie réelle et la partie imaginaire de h .

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) - f'(z)h &= \left(\frac{3y_0^2}{2} + h_1\right)^2 + i(y_0 + h_2)^3 - \frac{9y_0^4}{4} - iy_0^3 - 3y_0^2(h_1 + ih_2) \\ &= \frac{9y_0^4}{4} + 3y_0^2h_1 + h_1^2 + i(y_0^3 + 3y_0h_2^2 + 3y_0^2h_2 + h_2^3) \\ &\quad - \frac{9y_0^4}{4} - iy_0^3 - 3y_0^2(h_1 + ih_2) \\ &= h_1^2 + i(3y_0h_2^2 + h_2^3) \\ f(z+h) - f(z) - f'(z)h &= |h| \frac{h_1^2 + i(3y_0h_2^2 + h_2^3)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{aligned}$$

En écrivant h sous forme trigonométrique, on obtient

$$f(z+h) - f(z) - f'(z)h = |h| (r \cos^2 \theta + i(3y_0r \sin^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta))$$

et on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r \cos^2 \theta + i(3y_0r \sin^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta)) = 0$$

d'où

$$f(z+h) - f(z) - f'(z)h = O(|h|)$$

On en déduit que

La fonction f est holomorphe le long de la parabole d'équation $2x = 3y^2$.

Rappel

La dérivée de f , aux points où elle est holomorphe, est égale à

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}$$

On peut en trouver d'autres expressions, à l'aide des formules de Cauchy. Dans notre cas, on a, aux points où f est holomorphe

$$f'(z) = 3(\operatorname{Im}(z))^2$$

EXERCICE 2

Notons P et Q la partie réelle et la partie imaginaire de f . Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que si f est différentiable en 0, alors $f'(0) = 0$. Afin d'étudier la différentiabilité de f , on forme la différence $f(0+h) - f(0) = f(h)$

$$\frac{f(h)}{|h|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

En utilisant la forme exponentielle de $h = r e^{i\theta}$, on obtient

$$\frac{f(h)}{|h|} = \sqrt{|\sin \theta \cos \theta|}$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque r tend vers 0. On en déduit que f n'est pas différentiable en 0.

EXERCICE 3

Notons \tilde{f} la fonction

$$(x, y) \longmapsto (\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Comme la fonction f est holomorphe, elle vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Méthode de calcul du Jacobien d'un changement de variable

Soit ϕ le changement de variable $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$. Si on connaît les fonctions y_i , on peut calculer facilement les dérivées partielles $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, donc la matrice jacobienne du changement de variable. Pour calculer les dérivées partielles inverses, $\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$, ce qui revient à calculer la matrice jacobienne de ϕ^{-1} , il suffit d'utiliser la formule

$$\left(\operatorname{Jac}(\phi^{-1}) \right) = \left(\operatorname{Jac}(\phi) \right)^{-1}$$

Or on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

En coordonnées polaires, on a $x = r \cos \theta$, et $y = r \sin \theta$, donc

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta & \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta & \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \end{cases}$$

En inversant cette relation, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta & \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}$$

Les relations de Cauchy, exprimées en coordonnées polaires sont donc

$$\begin{cases} \cos \theta \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \\ \sin \theta \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\cos \theta \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \end{cases}$$

On multiplie la première équation par $\cos \theta$, et la seconde par $\sin \theta$, et en additionnant, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

On multiplie la première équation par $-\sin \theta$, et la seconde par $\cos \theta$, et en additionnant, on obtient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial r}$$

Les conditions de Cauchy peuvent donc aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial r} \end{cases}$$

Si $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$, alors Q ne dépend pas de r . La première relation devient alors

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dQ}{d\theta}$$

d'où $P(r, \theta) = \frac{dQ}{d\theta} \log r + K_P$

où K_P est une constante. Comme $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$, la fonction $\frac{dQ}{d\theta}$ ne dépend pas de θ .
 Finalement

$$P = K \ln r + K_P \quad \text{et} \quad Q = K, \text{ où } K \text{ et } K_P \text{ sont des constantes réelles.}$$

APARTÉ : CALCUL DES JACOBIENNES DU CHANGEMENT DE VARIABLES SPHÉRIQUES

En coordonnées sphériques, on a les relations suivantes

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

On a

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{array}$$

On en déduit que la jacobienne du changement de variable $\phi : (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ est égale à

$$\text{Jac}(\phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Afin de calculer les dérivées de (r, θ, φ) par rapport à (x, y, z) , il suffit d'inverser $\text{Jac}(\phi)$. Pour cela, on commence par calculer le déterminant de la matrice jacobienne, en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned} \det(\text{Jac}(\phi)) &= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Pour inverser $\text{Jac}(\phi)$, il reste à calculer la matrice de ses cofacteurs. On note $C_{i,j}$ les cofacteurs. Alors

$$C_{1,1} = \begin{vmatrix} r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi$$

$$C_{1,2} = - \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

$$C_{1,3} = \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = -r \sin \varphi$$

$$C_{2,1} = - \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi$$

$$C_{2,2} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$$

$$C_{2,3} = - \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = r \cos \varphi$$

$$C_{3,1} = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$C_{3,2} = - \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = -r \sin^2 \theta$$

$$C_{3,3} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \end{vmatrix} = 0$$

En transposant la matrice des cofacteurs, et en divisant par le déterminant, on obtient

$$\left(\text{Jac}(\phi)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit les dérivées partielles suivantes

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi & \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi & \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{array}$$

EXERCICE 4

On remarque que pour tout z , $f(z) = z^2$. On en déduit que f est indéfiniment dérivable, avec

$$\boxed{f'(z) = 2z \quad f''(z) = 2 \quad \forall n \geq 2 \quad f^{(n)}(z) = 0}$$

EXERCICE 5

On étudie la limite de f au point i de la limite

$$f(z) = \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$$

Commençons par évaluer le numérateur au point i

$$3i^4 - 2i^3 + 8i^2 - 2i + 5 = 3 + 2i - 8 - 2i + 5 = 0$$

Étudier la limite de f revient donc à étudier la dérivabilité de la fonction

$$g : z \mapsto 3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5$$

au point i . Cette fonction est une fonction polynôme, elle est donc dérivable en tout point de \mathbb{C} , avec

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad g'(z) = 12z^3 - 6z^2 + 16z - 2$$

En particulier, on a $g'(i) = 12i^3 - 6i^2 + 16i - 2 = 4 + 4i$

$$\boxed{f \text{ admet une limite en } i, \text{ qui est égale à } 4 + 4i.}$$

EXERCICE 6

Rappel : Intégrale le long d'un chemin

Soit γ un chemin défini sur un segment $[a; b]$, et une fonction de variable complexe continue sur $\gamma([a; b])$. L'intégrale de f le long du chemin γ est défini par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Afin de calculer l'intégrale de f le long du carré, nous allons calculer l'intégrale le long de chacun des segments

- **Intégrale le long de [OA]** Paramétrons le segment [OA] par $\varphi : t \in [0; 1] \mapsto t$. On a alors $\varphi'(t) = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{[OA]} |z|^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- **Intégrale le long de [AB]** Paramétrons le segment [AB] par $\varphi : t \in [0; 1] \mapsto 1 + it$. On a alors $\varphi'(t) = i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{[AB]} |z|^2 dz &= \int_0^1 (1 + t^2) idt \\ &= i \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ \int_{[AB]} |z|^2 dz &= \frac{4i}{3} \end{aligned}$$

- **Intégrale le long de [BC]** Paramétrons le segment [BC] par $\varphi : t \in [0; 1] \mapsto 1 - t + i$. On a alors $\varphi'(t) = -1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{[BC]} |z|^2 dz &= - \int_0^1 ((1-t)^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{(1-t)^3}{3} - t \right]_0^1 \\ &= -1 - \frac{1}{3} \\ \int_{[BC]} |z|^2 dz &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

- **Intégrale le long de [CO]** Paramétrons le segment [CO] par $\varphi : t \in [0; 1] \mapsto i - it$. On a alors $\varphi'(t) = -i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{[CO]} |z|^2 dz &= \int_0^1 (1-t)^2 (-i) dt \\ &= -i \left[\frac{(1-t)^3}{3} \right]_0^1 \\ \int_{[CO]} |z|^2 dz &= -\frac{i}{3} \end{aligned}$$

En additionnant les différentes intégrales, on obtient

$$\boxed{\int_C |z|^2 dz = i - 1}$$

EXERCICE 7

Paramétrons le segment $[AB]$, où A a pour affixe i , et B a pour affixe $2 - i$ par

$$\gamma : t \in [0; 1] \mapsto i + t(2 - 2i)$$

On a alors $\gamma'(t) = 2 - 2i$, et

$$\begin{aligned} \int_{[AB]} (3xy + iy^2) dz &= \int_0^1 (6t(1 - 2t) + i(1 - 2t)^2) (2 - 2i) dt \\ &= (2 - 2i) \int_0^1 (6t - 12t^2 + i(1 - 4t + 4t^2)) dt \\ &= (2 - 2i) \left[3t^2 - 4t^3 + i\left(t - 2t^2 + \frac{4t^3}{3}\right) \right]_0^1 \\ &= (2 - 2i) \left(-1 + \frac{i}{3} \right) \\ \int_{[AB]} (3xy + iy^2) dz &= -\frac{4}{3} + \frac{8i}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{[AB]} (3xy + iy^2) dz = -\frac{4}{3} + \frac{8i}{3}}$$