

Table des Matières

Introduction	3
1 Optimisation de la maintenance corrective d'un système	9
1.1 Introduction	9
1.2 Processus monotones	11
1.2.1 Processus stochastiquement monotones	11
1.2.2 Processus <i>rh</i> -monotones	14
1.3 Etude de la loi de redémarrage optimale après réparation	24
1.3.1 Description du système - Notations	24
1.3.2 Calcul de la disponibilité asymptotique	26
1.3.3 Restriction aux lois de redémarrage du type δ_i	29
1.3.4 Comparaison de différentes lois de redémarrage	36
1.3.5 Deux exemples "classiques"	44
1.4 Conclusion	48
2 Un modèle de maintenance préventive conditionnelle	51
2.1 Introduction	51
2.2 Description du système et de la maintenance - Notations	52
2.3 Loi asymptotique (résultats préliminaires)	55
2.4 Disponibilité asymptotique	64
2.4.1 Calcul de la disponibilité asymptotique	65
2.4.2 Une condition suffisante pour que la maintenance améliore la disponibilité asymptotique	68
2.4.3 Optimisation de la politique de maintenance	73
2.4.4 Exemples	78
2.5 Coût moyen asymptotique	85
2.5.1 Calcul du coût moyen asymptotique	85
2.5.2 Une condition suffisante pour que la maintenance améliore le coût moyen asymptotique	90
2.5.3 Optimisation de la politique de maintenance	94
2.5.4 Exemples	96
2.6 Conclusion	101
3 Un modèle de maintenance préventive pour un système semi-markovien	103
3.1 Introduction	103
3.2 Le système initial et la politique de maintenance préventive	105
3.3 Techniques semi-markoviennes dans un cas particulier	107
3.3.1 Etude du processus (Z_t)	107
3.3.2 Calcul de la disponibilité asymptotique	114

3.3.3	Calcul de la disponibilité instantanée	116
3.3.4	Exemples	119
3.4	Cas général	126
3.4.1	Hypothèses - Notations supplémentaires	126
3.4.2	Résultats préliminaires	128
3.4.3	Calcul de la disponibilité asymptotique	131
3.4.4	Optimisation de la politique de maintenance, cas général	137
3.4.5	Optimisation de la politique de maintenance, cas où $D_M = D_R$. . .	146
3.5	Conclusion	161
	Conclusion	165
	Bibliographie	167

Introduction

Tout au long du vingtième siècle, les industriels ont été amenés à contrôler la qualité de leur production de plus en plus soigneusement et à essayer de l'améliorer. De nombreux facteurs sont en effet intervenus dans ce sens. On peut bien sûr penser à des facteurs économiques, en liaison avec le développement croissant de la concurrence, mais aussi à l'influence de nombreux autres domaines, comme l'écologie, dont on ne se souciait guère au dix-neuvième siècle, comme la médecine, avec la mise en place de nouveaux types de prothèses ou autres stimulateurs cardiaques, comme la stratégie militaire, qui requiert des armes de plus en plus sophistiquées en vue de cibles beaucoup plus précises qu'auparavant, ... Les facteurs humains ne sont sans doute pas non plus à négliger dans ce sens, du fait par exemple de la pression croissante des médias, des syndicats ou simplement des individus, exigeant eux aussi des produits de plus en plus "fiables" ...

Ce contrôle obligatoire et croissant de la qualité de production a alors conduit au développement de ce que l'on appelle désormais la *fiabilité industrielle*, ou aussi la *sûreté de fonctionnement*, la seconde guerre mondiale ayant largement stimulé son développement.

Si les experts et les retours de plans d'expériences ont joués et jouent encore un rôle tout à fait fondamental dans ce domaine, il n'en demeure pas moins que, devant la complexité grandissante des objets produits, les méthodes empiriques montrent parfois leurs limites. Grâce au développement des probabilités, les mathématiciens ont alors pu venir à la rescousse des industriels, d'une part pour leur fournir des outils pour mesurer la qualité de leur production, d'autre part pour les aider à l'améliorer. On a ainsi pu assister à la création d'un nouveau domaine d'applications des probabilités, consacré à la "*théorie mathématique de la fiabilité*" (vers les années 50), c'est-à-dire à l'étude du fonctionnement de ce que l'on appelle des *systèmes*, un système pouvant représenter à peu près n'importe quel machine ou appareil susceptible d'être en marche ou en panne à un instant donné.

Depuis les ouvrages fondateurs de Barlow et Proschan ([6] en 1965 et [7] en 1975) et de Gnedenko, Beliaev et Solovyev ([26] en 1969), ce domaine n'a cessé de se développer. Ainsi, d'après [3], un pour cent des articles recensés par Zentralblatt-MATH y font maintenant référence. Il ne saurait donc être question d'en faire ici un quelconque panorama. Nous laissons ainsi de côté tout aspect "statistique" de la fiabilité pour nous consacrer à une approche probabiliste. L'étude d'un système peut alors être envisagée de deux façons différentes, que l'on peut qualifier respectivement de "statique" et de "dynamique". On peut ainsi s'intéresser aux propriétés du système à un instant t donné avec, par exemple, l'étude des fonctions de structure, des facteurs d'importance, des réseaux bayésiens, des arbres de défaillance, ... ou, au contraire, envisager son évolution au cours du temps, la théorie moderne des processus stochastiques étant alors d'un grand secours (cf par exemple [3], [8], [19], [37] ou [44]). C'est ce dernier aspect que nous privilégions ici : plus précisément, nous nous consacrons dans cette thèse à l'étude d'un système *réparable* dont l'évolution au cours du temps est modélisée par un *processus stochastique* à valeurs dans un espace d'états fini.

Pour un tel système, deux problèmes se présentent classiquement aux industriels : d'une part, comment contrôler sa qualité, ou encore, quel *critère* utiliser pour mesurer ses performances ? D'autre part, ce critère étant choisi, comment peut-on l'améliorer ?

En ce qui concerne le contrôle de la qualité, de nombreux critères divers et variés sont utilisés pour la mesurer, selon le système étudié. Ainsi, si la panne du système est très pénalisante (comme par exemple pour un stimulateur cardiaque ou une centrale nucléaire), on utilise fréquemment la *fiabilité* du système, c'est-à-dire la probabilité qu'il fonctionne depuis l'origine jusqu'à un certain instant t . Si le système est une voiture (ou un ordinateur pour écrire sa thèse !), le problème principal est sans doute qu'il soit le moins souvent possible en panne. Dans ce cas, on préfère généralement utiliser la *disponibilité instantanée*, qui est la probabilité que le système fonctionne à un certain instant t , ou sa version moyennée sur l'intervalle de temps $[0, t]$: la *disponibilité moyenne instantanée*. Si le système est un outil de production, un critère très classique est alors le *coût moyen* d'exploitation du système sur l'intervalle de temps $[0, t]$, pour des raisons économiques évidentes.

Les quelques critères que nous venons de définir sont tous dépendants du temps. Lorsque l'on s'intéresse à un système sur une "longue" période de temps, on utilise fréquemment des versions *asymptotiques* de ces critères, c'est-à-dire leurs limites lorsque t tend vers l'infini (du moins pour les critères autres que la fiabilité). On définit ainsi la *disponibilité asymptotique* d'un système et son *coût moyen asymptotique*.

Notre critère principal d'étude dans cette thèse est la *disponibilité asymptotique*, même si nous la complétons de loin en loin par d'autres critères.

Ce critère d'étude étant défini, nous en arrivons maintenant au problème que nous évoquions précédemment, à savoir : comment l'améliorer, c'est-à-dire, *comment améliorer la disponibilité asymptotique d'un système réparable ?*

Une réponse classique à une telle question est de le soumettre à une *politique de maintenance préventive*. Cela signifie que, au lieu d'attendre que le système tombe en panne pour le réparer, on le "révisé" ou on l'"entretient" de temps en temps pour le remettre dans un bon état de marche et éviter ainsi certaines pannes. De nombreuses modélisations de politiques de maintenance préventive ont été étudiées dans la littérature, les plus classiques d'entre elles ayant été proposées par Barlow et Proschan (cf [6] et [7] par exemple). A titre indicatif, on peut aussi consulter [3], [11], [13], [16], [25], [40], [43], le chapitre 14 de [46], [53], ... pour avoir un petit aperçu de la littérature récente sur le sujet.

Nous proposons ici deux modèles de politiques de maintenance préventive, présentés respectivement dans les deuxième et troisième chapitres.

Le premier chapitre présente, quant à lui, une autre méthode pour améliorer la disponibilité asymptotique d'un système.

Plus précisément, le premier chapitre est consacré à l'étude d'un système pouvant être réparé plus ou moins complètement lorsqu'il tombe en panne. Cela signifie par exemple que le système comporte un certain nombre de composants indispensables à son bon fonctionnement, qu'il faut donc réparer lorsqu'il tombe en panne, mais comporte aussi d'autres composants, dont la réparation est facultative. Ainsi, pour un système de type k sur n , il est indispensable qu'au moins k composants soient en marche pour que le système fonctionne. Lors d'une réparation (encore appelée *maintenance corrective*), on peut alors choisir le nombre de composants à réparer de telle sorte que le système redémarre avec un nombre de composants en marche compris entre k et n ($0 \leq k \leq n$).

Cette hypothèse concernant les différents degrés de réparation possibles est modélisée à l'aide d'une probabilité D_R , contrôlant les redémarrages après réparation. Plus

précisément, nous supposons que le système redémarre de la même façon après n'importe quel type de panne et que la réparation remet le système dans l'état de marche i avec la probabilité $D_R(i)$. Cette modélisation est donc un peu plus générale que celle que nous décrivions précédemment, puisqu'elle admet la possibilité que les redémarrages après réparation soient *aléatoires* et ne se fassent pas nécessairement dans un état de marche i fixé.

Pour un tel système, c'est-à-dire pour un système possédant différents degrés de réparation possibles, un problème classique pour un ingénieur est alors de déterminer celui qui rend le système le plus performant. Ainsi, vaut-il mieux réparer complètement le système lorsqu'il tombe en panne ou bien le faire de façon minimale, pour le redémarrer le plus rapidement possible? Pour un système de type k sur n , combien faut-il réparer de composants lorsque le système tombe en panne si l'on souhaite que le système soit le plus disponible possible? Avec la modélisation précédente et le critère choisi, *ce problème revient alors à rechercher la loi D_R qui rende la disponibilité asymptotique optimale.*

Nous précisons maintenant le modèle utilisé pour représenter *l'évolution* de notre système. Rappelons tout d'abord que l'une des hypothèses les plus classiques et les plus étudiées en fiabilité consiste à supposer que le système évolue dans le temps selon un *processus markovien* homogène, à valeurs dans un espace d'états fini. En d'autres termes, cela revient à supposer que les taux de transition entre les différents états du système sont constants. Les motivations et les limites d'une telle modélisation ont été très largement discutées dans la littérature (cf [6] ou [37] par exemple). En particulier, on sait que, pour de nombreux systèmes formés de composants, on peut effectivement supposer les taux de panne de ces composants à peu près constants sans que cela ne pose de problèmes. Les taux de "dégradation" du système peuvent donc être supposés constants. En revanche, on sait aussi que cette hypothèse est tout à fait illusoire lorsqu'il s'agit des taux de réparation. Ceci nous a alors amené à ne supposer l'évolution de notre système markovienne que lorsqu'il est en marche. En d'autres termes, les taux de transition entre états de marche sont supposés constants, ainsi que les taux de panne. En revanche, *les durées de réparation suivent des lois générales.* Un cadre typique d'utilisation d'une telle modélisation correspond à un système formé de composants non réparables pendant que le système fonctionne, mais réparables (avec des taux de réparation non constants) lorsque le système est tombé en panne.

Cette modélisation étant précisée, nous nous intéressons alors au problème de la recherche de la loi optimale de redémarrage après réparation. Pour cela, nous remarquons tout d'abord que, d'un point de vue intuitif, si le système se dégrade en fonctionnant, ou encore si le système "vieillit", selon le vocabulaire fiabiliste, et si les durées de réparation ne dépendent pas de leur degré d'achèvement, la disponibilité asymptotique devrait être d'autant plus élevée que la réparation est complète. Une étude plus approfondie du problème nous a conduit à traduire cette propriété de vieillissement du système à l'aide d'un *processus markovien monotone relativement à l'ordre rh* , c'est-à-dire relativement à l'ordre pour le taux de hasard inversé (Reversed Hazard Rate en anglais). Ceci nous a alors amené à développer quelques résultats complémentaires à ceux de Kijima (cf [36]) concernant de tels processus. Parallèlement, nous nous intéressons aussi aux processus monotones relativement à l'ordre stochastique usuel et nous donnons quelques compléments aux résultats existants (cf [1], [33], [36] ou [51] par exemple).

Ces travaux préliminaires étant effectués, nous abordons ensuite notre problème de fiabilité en commençant par calculer la disponibilité asymptotique. Pour cela, on remarque simplement qu'après un redémarrage suivant une réparation, l'évolution ultérieure du système ne dépend que de l'état de marche dans lequel le système redémarre (contrôlé par

D_R). En d'autres termes, le processus décrivant l'évolution du système est un processus *semi-régénératif*. La *théorie du renouvellement markovien* nous fournit alors aisément la valeur de la disponibilité asymptotique.

En ce qui concerne la loi optimale de redémarrage après réparation, une question naturelle est de se demander si elle correspond ou non au redémarrage dans un état de marche fixé. La réponse est négative et nous montrons qu'elle est en général *aléatoire*. *Ceci justifie notre modélisation des redémarrages à l'aide d'une loi de probabilité D_R sur les états de marche*. Cependant, la recherche de la loi optimale étant grandement facilitée lorsque l'on peut se restreindre aux redémarrages dans un état de marche fixé (en nombre fini), nous donnons tout de même des conditions pour qu'il en soit ainsi.

Nous montrons ensuite que, si les états de marche sont classés par ordre de dégradation croissante, et si le processus markovien décrivant l'évolution du système en marche est monotone relativement à l'ordre rh et a une matrice génératrice triangulaire supérieure, la disponibilité asymptotique du système est alors d'autant plus élevée que la réparation est complète, le degré d'achèvement de la réparation étant lui aussi mesuré avec l'ordre rh . En particulier, des réparations complètes sont alors optimales. En revanche, nous montrons aussi que l'ordre stochastique usuel n'est suffisant, ni pour décrire le caractère vieillissant du système, ni pour mesurer le degré d'achèvement de la réparation, si l'on souhaite obtenir la même propriété. *Ceci justifie l'utilisation de l'ordre rh , plus fort que l'ordre stochastique usuel*.

Enfin, nous terminons ce premier chapitre en étudiant précisément deux systèmes classiques en fiabilité, à savoir les systèmes de type k sur n dont nous avons déjà parlé plus haut et les systèmes formés par n composants identiques en redondance passive. Pour ces deux types de systèmes, nous montrons qu'il existe un nombre optimal de composants à réparer pour optimiser la disponibilité asymptotique et nous le calculons explicitement.

Le deuxième chapitre est ensuite consacré à l'étude d'une politique de maintenance préventive, que l'on fait subir *au même système que celui que nous avons étudié dans le premier chapitre*. Plus précisément, nous supposons que l'état courant du système en marche ne peut être connu que par des inspections. Dans ce cas, si l'on souhaite prévenir une panne du système, il est naturel d'aller l'inspecter de temps en temps. Tant qu'on le trouve dans un état de marche que l'on juge satisfaisant, on le laisse fonctionner normalement. Dès que le système a atteint un seuil alarmant de dégradation, on l'arrête pour lui faire subir une opération de maintenance préventive. Remarquons que, tant que le système est dans un bon état de marche, il n'est sans doute pas nécessaire de l'inspecter souvent. En revanche, lorsqu'il commence à se dégrader, il vaut mieux accélérer le rythme des inspections. Ceci nous amène à supposer qu'après une inspection, par exemple à l'instant S_n , le temps d'attente de la prochaine inspection (si elle a lieu, c'est-à-dire si l'on n'a pas décidé d'arrêter le système à l'instant S_n) dépend de l'état de dégradation du système à l'instant S_n . De la même façon, on suppose aussi que les durées des opérations de maintenance dépendent de l'état de dégradation du système au moment où on les commence.

Si on la compare aux différentes politiques de maintenance précédemment étudiées dans la littérature (inspections périodiques, indépendantes de l'évolution du système, durées de maintenance négligeables ou indépendantes de l'état de dégradation du système, ...), *cette modélisation est nettement plus proche de la démarche utilisée ou tout au moins souhaitée par les industriels*. En effet, l'un des problèmes actuels des industriels est de maintenir leurs systèmes à bon escient, et d'éviter ainsi les gaspillages dus aux coûts de maintenance inutile car intempestive. En adaptant le rythme des inspections à l'évolution *réelle* du système, notre modélisation permet a priori de les diminuer.

Notons que cette modélisation a déjà été étudiée par C. Coccozza-Thivent dans [20], avec des méthodes complètement différentes.

Précisons maintenant les différents points que nous étudions pour une telle politique de maintenance préventive : nous calculons tout d'abord la disponibilité asymptotique du système soumis à cette politique de maintenance. Là encore, ce calcul est fait à l'aide de la *théorie du renouvellement markovien*. Nous étudions ensuite l'*apport de la politique de maintenance* en comparant les disponibilités asymptotiques du système initial et du système maintenu. Nous montrons en particulier que, sous des conditions naturelles portant sur la maintenance, la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique du système si et seulement si les opérations de maintenance ne sont pas trop longues en moyenne. Après avoir remarqué que la disponibilité asymptotique dépend des *lois* des variables inter-inspections et pas seulement de leurs moyennes, nous nous intéressons ensuite à son *optimisation* relativement à ces lois. Nous constatons sur quelques exemples qu'il semblerait que l'on puisse toujours restreindre cette optimisation aux seules variables inter-inspections de type déterministe. Nous démontrons cette propriété sous une hypothèse supplémentaire. La recherche des lois inter-inspections optimales en est alors grandement facilitée.

Un autre critère très utilisé par les industriels étant le *coût moyen asymptotique*, nous consacrons la dernière partie de ce deuxième chapitre à l'étude de ce nouveau critère. Le plan d'étude est le même que pour la disponibilité asymptotique.

Le troisième et dernier chapitre de cette thèse est consacrée à l'étude d'une autre politique de maintenance préventive. L'intérêt de cette dernière étude réside non pas dans la modélisation de la politique de maintenance préventive, qui est beaucoup moins évoluée que la précédente, mais dans la *modélisation du système initial* (c'est-à-dire sans maintenance) qui est, quant à elle, beaucoup plus riche que celle que nous avons étudiée précédemment et que celles qui sont habituellement considérées dans ce type d'étude.

Nous supposons en effet dans ce dernier chapitre que le système initial évolue selon un *processus semi-markovien*. Cette modélisation n'est pour l'instant pas encore très utilisée par les industriels et l'on ne trouve que peu d'exemples de systèmes semi-markoviens dans la littérature. Cette modélisation semble pourtant riche d'applications potentielles. En effet, le simple cas où l'on ne considère qu'un seul état de marche permet déjà de modéliser n'importe quel système dont la loi de durée de vie est connue, par exemple parce qu'on l'a déterminée préalablement à l'aide de méthodes statistiques. Lorsque l'on passe à une modélisation comportant plusieurs états de marche, on peut alors imaginer pouvoir modéliser en plus divers changements de régimes dans l'évolution du système, qu'ils soient dus à des défaillances de composants dans le système ou diverses influences extérieures.

Ce système semi-markovien est soumis à la politique de maintenance préventive suivante : supposons par exemple que le système soit au départ dans un état de marche et que, là encore, son état courant, tant qu'il est en marche, ne soit connu que par des inspections. On considère alors une variable aléatoire S de loi ρ quelconque et indépendante de l'évolution du système. Si le système est déjà en panne à l'instant S , on termine normalement la réparation en cours. Si le système est encore en marche à l'instant S , on l'arrête pour lui faire subir une opération de maintenance préventive. Cette opération a une durée aléatoire dépendant de l'état de dégradation du système au moment où on la commence. On procède de la même façon après n'importe quelle période d'arrêt.

Le plan d'étude du système soumis à cette politique de maintenance est le suivant : nous envisageons tout d'abord le cas où la loi ρ du temps d'attente S de la maintenance suit une

loi exponentielle. L'étude repose alors sur le fait que le processus décrivant l'évolution du système maintenu est lui aussi *semi-markovien*. Ceci nous permet, d'une part, de calculer la disponibilité asymptotique du système maintenu sous des hypothèses plus faibles que dans le cas général où ρ est quelconque (voir ce chapitre pour plus de détails), d'autre part, de calculer aussi la disponibilité *instantanée* du système maintenu, ce que l'on ne sait pas faire dans le cas général. Nous donnons alors quelques exemples pour lesquels nous optimisons la politique de maintenance relativement à la disponibilité asymptotique, et pour lesquels nous comparons les disponibilités instantanées du système initial et du système maintenu, le système étant soumis à cette politique de maintenance optimale.

Lorsque la loi ρ du temps d'attente de la maintenance est quelconque, nous commençons par calculer la disponibilité asymptotique, à nouveau à l'aide de la *théorie du renouvellement markovien*. Nous nous intéressons ensuite à l'optimisation de cette disponibilité asymptotique relativement à la loi ρ . Nous observons là encore sur quelques exemples que, comme au chapitre 2, la politique optimale (lorsqu'elle existe) semble toujours correspondre à un temps d'attente de la maintenance déterministe. Malgré tout, nous observons aussi graphiquement que, lorsque l'on ne maintient pas exactement à l'instant optimal (par exemple parce que cet instant est mal déterminé ou pour des raisons techniques), un temps d'attente plus dispersé de même moyenne peut donner de meilleurs résultats. *Ceci justifie l'introduction de temps d'attente aléatoires dans notre modèle* (ainsi que pour les variables inter-inspections du chapitre 2, le même phénomène étant vrai dans ce chapitre, même si nous ne l'avons pas mis en évidence graphiquement).

Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, nous montrons ensuite que l'on peut effectivement se restreindre aux seules lois ρ déterministes pour optimiser la maintenance. Nous étudions alors les politiques de maintenance associées à de telles lois. Nous donnons en particulier différentes conditions pour que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique, selon le comportement du taux de panne après un redémarrage (croissant, décroissant, décroissant puis croissant, ...). Nous envisageons aussi différentes lois classiques utilisées par les industriels pour modéliser la durée de vie d'un système (Weibull, Gamma, loi des valeurs extrêmes modifiée et log-normale).

Chapitre 1

Optimisation de la maintenance corrective d'un système

1.1 Introduction

Faut-il réparer complètement un système lorsqu'il tombe en panne, ou est-il préférable de le remettre en route le plus rapidement possible (ou à moindre coût), en réparant uniquement les composants nécessaires à son bon fonctionnement? Comment choisir le degré optimal de réparation ou encore, de maintenance *corrective*? Ce type de problème est tout à fait classique dans l'industrie, ainsi que nous l'ont indiqué quelques ingénieurs.

Le système étudié ici a un espace d'états fini. Son évolution est markovienne tant qu'il est en marche, c'est-à-dire que les taux de panne et les taux de transition entre les différents états de marche sont supposés constants. Le système peut éventuellement comporter des composants réparables pendant que le système fonctionne, avec des taux de réparation constants, mais le cadre d'application typique de notre étude correspond plus à un système qui ne peut que se dégrader en fonctionnant. Ce système peut être l'objet de différents types de panne. A chacune de ces pannes est associée une durée aléatoire de réparation, de loi quelconque. Les durées de réparation peuvent éventuellement dépendre de l'état de marche dans lequel le système redémarre (a priori, plus la réparation est complète, plus elle est longue). Après une réparation, le système redémarre dans un état de marche i supposé indépendant de l'évolution antérieure du système (et donc indépendant du type de panne), et ceci avec la probabilité $D_R(i)$. On appelle alors "loi de redémarrage" la probabilité D_R qui contrôle les redémarrages après une réparation. Avec ce vocabulaire, notre problème est donc de déterminer la "meilleure" loi de redémarrage D_R . Pour mesurer les performances du système, le critère utilisé ici est la disponibilité asymptotique, c'est-à-dire la probabilité que le système fonctionne, ayant atteint son régime stationnaire. Notre problème est donc de trouver la loi D_R qui rende la disponibilité asymptotique maximale.

Plaçons-nous un instant dans le cas particulier où les durées de réparation sont indépendantes de leur degré d'achèvement. En d'autres termes, supposons qu'une réparation minimale soit aussi longue qu'une réparation complète. Supposons d'autre part que le système se "détériore" en fonctionnant. D'un point de vue intuitif, le système devrait alors être d'autant plus disponible que la réparation est complète. D'un point de vue théorique, comment traduire cette notion de "détérioration" du système (encore appelée "vieillesse" en fiabilité) et comment mesurer le degré d'achèvement de la réparation pour que cette propriété soit effectivement vérifiée?

Si les états sont rangés par ordre de dégradation croissante, une façon naturelle de traduire le fait que le système se détériore (ou "vieillit") en fonctionnant est d'écrire que, pour $0 \leq s \leq t$, le système est à l'instant t dans un état "plus grand" qu'à l'instant s . En d'autres termes, ce vieillissement du système peut être traduit par une sorte de monotonie du processus de Markov sous-jacent. Cette remarque nous conduit alors vers les nombreux travaux qui ont été consacrés ces dernières années à l'étude de différents types de monotonie pour ces processus, les ordres stochastiques associés étant fort divers. On peut ainsi penser aux travaux de Brown, Chaganty, Karasu, Kijima, Li, Shaked, Shanthikumar, ... ([15], [29], [35], [36], [38], [39], [45], [46], [49], ...). Parmi toutes les monotonies étudiées dans ces différents articles (dont la liste n'est pas exhaustive), notre problème est alors de choisir celle qui est adaptée à notre problème, c'est-à-dire celle pour laquelle un système vieillissant est d'autant plus disponible que la réparation est complète.

La notion d'ordre la plus utilisée en fiabilité est, et a toujours été, l'ordre stochastique usuel. On peut bien sûr penser aux travaux des pionniers Barlow et Proschan [7], mais même dans le cas d'ouvrages plus récents consacrés aux ordres stochastiques, comme ceux de Shaked et Shanthikumar [46], de Stoyan [51] ou de Szekli [52], l'ordre stochastique usuel reste le plus utilisé dans les applications à la fiabilité. Nous nous sommes alors demandé si cet ordre pouvait convenir ici. La réponse est négative et nous donnons un exemple de système tel que le processus de Markov sous-jacent est stochastiquement monotone (pour l'ordre stochastique usuel) mais tel que la réparation complète n'est pas optimale. Nous avons donc besoin d'un ordre plus fort.

En regardant plus précisément l'expression de la disponibilité asymptotique, nous nous sommes alors aperçu qu'il nous fallait supposer que le processus de Markov sous-jacent était monotone par rapport à l'ordre rh . Rappelons que la notation rh fait référence au nom anglais "reversed hazard rate" et que cette appellation a été donnée par Shanthikumar, Yamsaki et Sakasegawa dans [50] (1991). Parmi les auteurs ayant contribué de près ou de loin à l'émergence de cet ordre (éventuellement sous d'autres formes), on peut aussi citer Keilson, Kester, Kijima, Shaked, Shanthikumar, Sumita... (cf [31], [32], [35], [46], [50], ...). Rappelons aussi que les processus de Markov monotones par rapport à l'ordre rh ont été récemment étudiés par Kijima dans [36]. Le travail que nous présentons ici s'appuie d'ailleurs largement sur cet article. Pour des raisons techniques développées ultérieurement, nous nous restreignons ici à des processus monotones relativement à l'ordre rh dont la matrice génératrice est triangulaire supérieure. Cette restriction est aussi motivée par le fait que, pour de tels processus, l'état du système à l'instant t est plus grand qu'à l'instant s ($0 \leq s \leq t$) au sens de l'ordre rh (ce qui est faux lorsque la matrice génératrice n'est pas triangulaire supérieure). Cette propriété est la traduction du caractère vieillissant de notre système que nous recherchions.

Le plan d'étude de ce chapitre est le suivant.

Nous nous intéressons tout d'abord (§ 1.2) aux processus markoviens monotones relativement à l'ordre stochastique usuel et relativement à l'ordre rh . Nous rappelons quelques propriétés usuelles et nous donnons des compléments (ainsi que sur l'ordre rh).

Nous abordons ensuite l'étude de notre problème d'optimisation de la disponibilité asymptotique d'un système selon sa loi de redémarrage (§ 1.3). Nous commençons par donner une condition suffisante pour que la recherche de la loi optimale puisse être restreinte aux masses de Dirac δ_i , correspondant aux redémarrages dans l'un des états de marche i (en nombre fini). Dans le cas général, cette propriété est fautive (cf exemples 1.23 et 1.24) et il nous faut considérer des lois de redémarrage quelconques sur l'ensemble des états de marche. Pour un système "vieillissant" (voir au-dessus), nous montrons alors que le système est d'autant plus disponible que la réparation est complète. Le degré d'achè-

vement de la réparation est mesuré avec l'ordre rh . Nous terminons par deux exemples, le cas d'un système k sur n et le cas d'un système ayant n composants identiques en redondance passive, pour lesquels nous calculons explicitement le nombre de composants à installer afin d'optimiser la disponibilité asymptotique. Notons que ce type de problème avait déjà été étudié auparavant par Barlow, Hunter et Proschan pour des composants en redondance passive ou en parallèle ([5] et [6]), les critères à optimiser étant alors la fiabilité ou la première durée moyenne de bon fonctionnement du système.

1.2 Processus monotones

Ce paragraphe est consacré à l'étude des processus markoviens monotones relativement, d'une part, à l'ordre stochastique usuel, d'autre part, à l'ordre rh . Nous commençons par l'ordre stochastique usuel.

Dans tout le paragraphe, (X_t) désigne un processus markovien sur $\{1, \dots, m+1\}$. Sa matrice génératrice est notée $A = (a_{i,j})$, son noyau $(P_t(i, j))$.

On note par ailleurs g la matrice carrée d'ordre m définie par $g_{i,j} = \int_0^\infty P_t(i, j) dt$ pour tous $1 \leq i, j \leq m$.

$g_{i,j}$ représente la durée moyenne passée dans l'état j sachant que $X_0 = i$ ($g_{i,j}$ est éventuellement infini).

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on note aussi $g_{i,\bullet}$ la mesure positive définie sur $\{1, \dots, m\}$ par $g_{i,\bullet}(j) = g_{i,j}$.

On définit de même la probabilité $P_t(i, \bullet)$ sur $\{1, \dots, m+1\}$ pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$ et $t \geq 0$.

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, \mathbb{E}_i désigne l'espérance par rapport à la loi conditionnelle $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot / X_0 = i)$.

1.2.1 Processus stochastiquement monotones

Nous commençons par quelques rappels concernant l'ordre stochastique.

Ces rappels sont donnés pour des probabilités sur $\{1, \dots, m\}$, mais on les utilisera aussi pour des probabilités sur $\{1, \dots, m+1\}$ sans notification particulière.

On considère ainsi deux probabilités ν_1 et ν_2 sur $\{1, \dots, m\}$.

Rappelons tout d'abord que ν_1 est *stochastiquement inférieure* à ν_2 ($\nu_1 \prec_{sto} \nu_2$) si et seulement si $\sum_{k=1}^j \nu_1(k) \geq \sum_{k=1}^j \nu_2(k)$, pour tout $1 \leq j \leq m$.

A la suite de Keilson et Kester dans [31], nous utilisons aussi une interprétation matricielle de l'ordre stochastique. Soit u la matrice triangulaire supérieure d'ordre m (ou $m+1$ selon le cas) telle que $u_{i,j} = 1$, pour $1 \leq i \leq j \leq m$. La matrice u est inversible et les seuls coefficients non nuls de u^{-1} sont $u_{i,i}^{-1} = 1$, pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $u_{i,i+1}^{-1} = -1$, pour $i \in \{1, \dots, m-1\}$:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}; u^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors traduire l'ordre stochastique à l'aide de u et on a $\nu_1 \prec_{sto} \nu_2$ si et seulement si $\nu_1 u \geq \nu_2 u$.

De la même façon, si b est une matrice stochastique d'ordre m , $b_{i,\bullet} \prec_{sto} b_{i+1,\bullet}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$ est équivalent à $u^{-1}bu \geq 0$. On en déduit immédiatement le résultat classique suivant.

Proposition 1.1 *Soient ν_1 et ν_2 deux probabilités sur $\{1, \dots, m\}$ telles que $\nu_1 \prec_{sto} \nu_2$ et b une matrice stochastique d'ordre m telle que $b_{i,\bullet} \prec_{sto} b_{i+1,\bullet}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$. On a alors $\nu_1 b \prec_{sto} \nu_2 b$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire $\nu_1 b u$ sous la forme $\nu_1 b u = (\nu_1 u) (u^{-1} b u)$. Comme $u^{-1} b u \geq 0$ et $\nu_1 u \geq \nu_2 u$ par hypothèse, on en déduit immédiatement $\nu_1 b u = (\nu_1 u) (u^{-1} b u) \geq (\nu_2 u) (u^{-1} b u) = \nu_2 b u$. ■

Nous rappelons ci-dessous la définition des processus stochastiquement monotones et leur caractérisation à l'aide de leur matrice génératrice (cf par exemple [35]).

Définition 1.2 *(X_t) est un processus stochastiquement monotone si et seulement si $P_t(i, \bullet) \prec_{sto} P_t(i+1, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m\}$, $t \geq 0$.*

Proposition 1.3 *(cf Kijima, [35])*

$$\begin{aligned} & ((X_t) \text{ est un processus stochastiquement monotone}) \\ \Leftrightarrow & \left(\sum_{j=k}^{m+1} a_{i,j} \leq \sum_{j=k}^{m+1} a_{i+1,j}, \text{ pour tous } i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, m+1\}, k \neq i+1 \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\sum_{j=1}^k a_{i,j} \geq \sum_{j=1}^k a_{i+1,j}, \text{ pour tous } i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, m+1\}, k \neq i \right) \end{aligned}$$

Notons que pour un processus stochastiquement monotone, on a aussi le résultat élémentaire suivant, qui signifie que la durée moyenne passée dans un état inférieur ou égal à k sachant que $X_0 = i+1$ est inférieure ou égale à la même durée moyenne sachant que $X_0 = i$.

Proposition 1.4 *Si (X_t) est un processus stochastiquement monotone, alors :*

$$\sum_{j=1}^k g(i+1, j) \leq \sum_{j=1}^k g(i, j) \leq +\infty, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, m-1\},$$

ce qui peut encore s'écrire $u^{-1}gu \geq 0$, lorsque les coefficients de la matrice g sont finis.

Démonstration. Clair car

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k g(i, j) &= \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^k P_t(i, j) dt \\ &\geq \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^k P_t(i+1, j) dt = \sum_{j=1}^k g(i+1, j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous terminons ce paragraphe par un résultat complémentaire concernant les processus stochastiquement monotones dont la matrice génératrice est triangulaire supérieure.

Proposition 1.5 *Si (X_t) est un processus stochastiquement monotone :*

$$\begin{aligned} & (P_t(i, \bullet) \prec_{sto} P_s(i, \bullet) \text{ pour tous } 1 \leq i \leq m+1, 0 \leq t \leq s) \\ \Leftrightarrow & \text{ (} A \text{ est triangulaire supérieure)} \end{aligned}$$

Remarque 1.6 *Si (X_t) représente l'évolution d'un système dont les états sont rangés par ordre de dégradation croissante, la **proposition 1.5** montre en particulier que, si A est triangulaire supérieure, le système est dans un état (stochastiquement) plus dégradé à l'instant s qu'à l'instant t pour $0 \leq t \leq s$. De tels processus sont donc bien adaptés pour décrire certains phénomènes de vieillissement d'un système.*

Démonstration. *Supposons tout d'abord $P_t(i, \bullet) \prec_{sto} P_s(i, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $0 \leq t \leq s$.*

En particulier, on a alors $P_0(i, \bullet) \prec_{sto} P_s(i, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $0 \leq s$.

Ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{k=j}^{m+1} P_0(i, k) = \mathbb{I}_{\{i \geq j\}} \leq \sum_{k=j}^{m+1} P_s(i, k), \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, m+1\}. \quad (1.1)$$

En prenant $j = i$, on en déduit

$$1 \leq \sum_{k=i}^{m+1} P_s(i, k),$$

puis

$$\sum_{k=i}^{m+1} P_s(i, k) = 1.$$

Pour $i \geq 2$, on a donc

$$\sum_{k=1}^{i-1} P_s(i, k) = 0.$$

Ceci entraîne $P_s(i, k) = 0$ pour $k \leq i-1$ et $i \geq 2$.

Par ailleurs, on sait que $P_s(i, k) = (\exp(sA))(i, k)$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, on obtient

$$(I + sA)(i, k) + o(s) = 0$$

pour s au voisinage de 0, $k \leq i-1$ et $i \geq 2$.

Ceci entraîne $a_{i,k} = 0$, pour $k \leq i-1$ et $i \geq 2$.

En d'autres termes, A est triangulaire supérieure.

Réciproquement, supposons maintenant que A soit triangulaire supérieure.

Montrons tout d'abord que $P_0(i, \bullet) \prec_{sto} P_s(i, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $0 \leq s$.

Il s'agit donc de vérifier que (1.1) est vraie pour tous $i, j \in \{1, \dots, m+1\}$.

Pour $j > i$, c'est évident.

Pour $i \geq j$, comme A est triangulaire supérieure, il en est de même pour P_t de sorte

que

$$\sum_{k=j}^{m+1} P_s(i, k) \geq \sum_{k=i}^{m+1} P_s(i, k) = \sum_{k=1}^{m+1} P_s(i, k) = 1$$

et (1.1) est vraie pour $i \geq j$.

(1.1) est donc vraie pour tous $i, j \in \{1, \dots, m+1\}$.

On en déduit que $P_0(i, \bullet) \prec_{sto} P_s(i, \bullet)$ pour tous $1 \leq i \leq m+1, s \geq 0$.

Soient maintenant s et t tels que $0 \leq t \leq s$ et $1 \leq i \leq m+1$.

$P_s(i, \bullet)$ se met alors sous la forme

$$P_s(i, \bullet) = \sum_{k=1}^{m+1} P_{s-t}(i, k) P_t(k, \bullet).$$

De plus, on sait déjà que $P_0(i, \bullet) \prec_{sto} P_{s-t}(i, \bullet)$.

Par ailleurs, comme (X_t) est un processus stochastiquement monotone, on a aussi $P_t(k, \bullet) \prec_{sto} P_t(k+1, \bullet)$ pour tous $k \in \{1, \dots, m+1\}, t \geq 0$.

Grâce à la **proposition 1.1** (où l'on remplace m par $m+1$), on en déduit

$$\sum_{k=1}^{m+1} P_0(i, k) P_t(k, \bullet) \prec_{sto} \sum_{k=1}^{m+1} P_{s-t}(i, k) P_t(k, \bullet).$$

En d'autres termes, $P_t(i, \bullet) \prec_{sto} P_s(i, \bullet)$ pour tous $1 \leq i \leq m+1, 0 \leq t \leq s$.

On a donc bien montré l'équivalence. ■

Nous passons maintenant à l'étude des processus *rh*-monotones.

1.2.2 Processus *rh*-monotones

Nous commençons par quelques rappels et compléments concernant l'ordre *rh*.

Comme pour l'ordre stochastique usuel, ces rappels sont donnés pour des probabilités sur $\{1, \dots, m\}$, mais on les utilisera aussi pour des probabilités sur $\{1, \dots, m+1\}$ sans notification particulière.

Pour un panorama plus complet des propriétés de l'ordre *rh*, on peut consulter par exemple l'ouvrage de Kijima [35] ou celui de Shaked et Shanthikumar [46] (qui contient aussi deux chapitres consacrés à l'utilisation de différents ordres stochastiques en fiabilité).

1.2.2.1 L'ordre *rh*

Rappelons tout d'abord la définition de cet ordre.

Définition 1.7 Soient ν_1 et ν_2 deux probabilités sur $\{1, \dots, m\}$. On dit que ν_1 est *rh*-inférieure à ν_2 et on note $\nu_1 \prec_{rh} \nu_2$ (*rh* pour "reversed hazard rate") si et seulement si

$$\frac{\sum_{k=1}^j \nu_1(k)}{\sum_{k=1}^i \nu_1(k)} \leq \frac{\sum_{k=1}^j \nu_2(k)}{\sum_{k=1}^i \nu_2(k)}, \text{ pour tous } 1 \leq i \leq j \leq m, \quad (1.2)$$

cette inégalité s'entendant comme le produit en croix lorsque l'un des dénominateurs s'annule.

Afin de comprendre la signification de l'ordre rh , rappelons que, si X est une variable aléatoire discrète sur $\{1, \dots, m\}$, on appelle taux de hasard inversé de X la fonction h_X définie sur $\{1, \dots, m\}$ par $h_X(i) = \mathbb{P}(X = i/X \leq i)$ lorsque $\mathbb{P}(X \leq i) > 0$ et $h_X(i) = +\infty$ sinon (alors que le taux de hasard correspond quant à lui à $\mathbb{P}(X = i/X \geq i)$). Si Y est une autre variable aléatoire discrète sur $\{1, \dots, m\}$ et h_Y son taux de hasard inversé, il est alors facile de vérifier que la loi de X est inférieure à la loi de Y pour l'ordre rh si et seulement si $h_X(i) \leq h_Y(i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$, ce qui justifie le nom de cet ordre.

Ces rappels étant faits, remarquons que pour avoir $\nu_1 \prec_{rh} \nu_2$, il est en fait suffisant d'avoir (1.2) seulement pour $i \in \{1, \dots, m-1\}$ et $j = i+1$ (Keilson et Kester, [31]).

Remarquons aussi que la matrice u définie au §1.2.1 permet d'interpréter l'ordre rh et que l'on a $\nu_1 \prec_{rh} \nu_2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} u \in TP2$ (totalement positive d'ordre 2), c'est-à-dire si et seulement si tous les mineurs d'ordre 2 de $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} u$ sont positifs (Keilson et Sumita, [32]).

De plus, si b est une matrice stochastique d'ordre m , $b_{i,\bullet} \prec_{rh} b_{i+1,\bullet}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$ est équivalent à $bu \in TP2$.

Rappelons d'autre part que l'ordre rh entraîne l'ordre stochastique, la réciproque étant fautive (il suffit par exemple de prendre $\nu_1 = (1/2, 0, 1/2, 0)$ et $\nu_2 = (0, 1/2, 0, 1/2)$).

On en déduit que, si $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} u \in TP2$, on a nécessairement $\nu_1 u \geq \nu_2 u$.

Remarquons que cette propriété est fautive lorsque V_1 et V_2 ne sont plus des probabilités mais des mesures positives : si V_1 et V_2 sont telles que $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} u \in TP2$ (c'est-à-dire telles que V_1 et V_2 vérifient (1.2)), on n'a pas nécessairement $V_1 u \geq V_2 u$ (il suffit de prendre $V_1 = (1, 0)$ et $V_2 = (0, 2)$ par exemple).

Enfin, rappelons que l'un des outils de base pour étudier les processus rh -monotones est le **lemme 1.8** donné par Kijima dans [35], la démonstration étant similaire à celle de Shanthikumar dans [49] pour l'étude d'un autre ordre.

Lemme 1.8 (cf Kijima, [35]) *Soient a et b deux matrices positives, a ayant au moins deux lignes et ayant m colonnes, b carrée d'ordre m telles au $TP2$ et $bu \in TP2$. Alors, si $u^{-1}bu \geq 0$, on a $abu \in TP2$.*

Ce résultat appelle quelques remarques. En effet, comme l'ordre rh entraîne l'ordre stochastique, si b est une matrice stochastique, $bu \in TP2$ entraîne $u^{-1}bu \geq 0$. Ainsi, si b est une matrice stochastique, $au \in TP2$ et $bu \in TP2$ entraîne $abu \in TP2$ et la condition $u^{-1}bu \geq 0$ est superflue. Qu'en est-il lorsque b n'est plus une matrice stochastique ?

Pour $m = 2$, il est facile de voir que $au \in TP2$ si et seulement si $a \in TP2$, de sorte que $au \in TP2$ et $bu \in TP2$ entraîne $abu \in TP2$ sans condition supplémentaire. (Rappelons que le produit de deux matrices $TP2$ est $TP2$, Karlin [30]).

En revanche, pour $m \geq 3$, $au \in TP2$ et $bu \in TP2$ n'entraîne pas $abu \in TP2$. En effet, si l'on prend $a = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $au \in TP2$ et $bu \in TP2$ mais $abu \notin TP2$. (Dans cet exemple, $u^{-1}bu$ n'est pas positive mais $u^{-1}au \geq 0$).

$bu \in TP2$ est donc insuffisant dans le cas général pour savoir que $au \in TP2$ entraîne $abu \in TP2$. Nous utilisons donc la condition suffisante donnée par Shanthikumar ($u^{-1}bu \geq 0$), qui est, à notre connaissance, la plus faible condition obtenue jusqu'à présent.

Nous réécrivons ci-dessous les résultats du **lemme 1.8** de façon à les rendre plus lisibles pour notre étude.

Corollaire 1.9 Soient ν_1 et ν_2 deux probabilités sur $\{1, \dots, m\}$ telle que $\nu_1 \prec_{rh} \nu_2$. Soit b une matrice stochastique d'ordre m telle $b_{i,\bullet} \prec_{rh} b_{i+1,\bullet}$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$. Alors $\nu_1 b \prec_{rh} \nu_2 b$.

Corollaire 1.10 Soit G une matrice carrée d'ordre m positive telle que $Gu \in TP2$ et telle que $u^{-1}Gu \geq 0$. Soient V^1 et V^2 deux mesures positives sur $\{1, \dots, m\}$ telles que $\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} u \in TP2$. On a alors $\begin{pmatrix} V^1 G \\ V^2 G \end{pmatrix} u \in TP2$.

Dans le même ordre d'idée, nous terminons cette partie concernant l'ordre rh en donnant un résultat complémentaire similaire.

Proposition 1.11 Soient V^1 et V^2 deux mesures positives non nulles sur $\{1, \dots, m\}$ telles que $\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} u \in TP2$. Soient U et W deux vecteurs colonnes d'ordre m tels que $W_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $\frac{U_i}{W_i} \leq \frac{U_{i+1}}{W_{i+1}}$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$. Si, de plus, $W_i \geq W_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$ ou $U_i \geq U_{i+1} > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$, alors

$$\frac{V^1 U}{V^1 W} \leq \frac{V^2 U}{V^2 W}. \quad (1.3)$$

Démonstration. On se place tout d'abord sous l'hypothèse $W_i \geq W_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$.

Transformons l'expression de $\frac{V^1 U}{V^1 W}$.

$$\frac{V^1 U}{V^1 W} = \frac{\sum_{i=1}^m V_i^1 U_i}{\sum_{i=1}^m V_i^1 W_i} = \frac{\sum_{i=1}^m V_i^1 \frac{U_i}{W_i} W_i}{\sum_{i=1}^m V_i^1 W_i}.$$

$\left(\frac{U_i}{W_i}\right)$ étant croissante par rapport à i , $\frac{U_i}{W_i}$ se met sous la forme :

$\frac{U_i}{W_i} = \sum_{j=1}^i x_j$, avec $x_j \geq 0$ pour tous $1 \leq j \leq i \leq m$.

On en déduit :

$$\frac{V^1 U}{V^1 W} = \frac{\sum_{i=1}^m V_i^1 \sum_{j=1}^i x_j W_i}{\sum_{i=1}^m V_i^1 W_i} = \sum_{j=1}^m x_j \frac{\sum_{i=j}^m V_i^1 W_i}{\sum_{i=1}^m V_i^1 W_i}.$$

On est donc ramené à montrer que :

$$\frac{\sum_{i=j}^m V_i^1 W_i}{\sum_{i=1}^m V_i^1 W_i} \leq \frac{\sum_{i=j}^m V_i^2 W_i}{\sum_{i=1}^m V_i^2 W_i}, \text{ pour } 2 \leq j \leq m, \quad (1.4)$$

(c'est évident pour $j = 1$).

En écrivant $\sum_{i=1}^m V_i^1 W_i = \sum_{i=1}^{j-1} V_i^1 W_i + \sum_{i=j}^m V_i^1 W_i$ (de même pour V^2), (1.4) est alors équivalente à

$$\frac{\sum_{i=j}^m V_i^1 W_i}{\sum_{i=1}^{j-1} V_i^1 W_i} \leq \frac{\sum_{i=j}^m V_i^2 W_i}{\sum_{i=1}^{j-1} V_i^2 W_i}, \text{ pour } 2 \leq j \leq m. \quad (1.5)$$

La méthode utilisée pour ce qui suit est similaire à celle du **lemme 1.8** (Kijima [35] ou Shanthikumar [49]).

Remarquons tout d'abord que, si $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m$ sont des réels, on a

$$\sum_{k=j}^m a_k b_k = \sum_{k=j}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{l=1}^k b_l + a_m \sum_{l=1}^m b_l - a_j \sum_{l=1}^{j-1} b_l, \text{ pour } 2 \leq j \leq m \quad (1.6)$$

et

$$\sum_{k=1}^j a_k b_k = \sum_{k=1}^{j-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{n=1}^k b_n + a_j \sum_{n=1}^j b_n, \text{ pour } j \geq 2. \quad (1.7)$$

En utilisant (1.6) pour le dénominateur et (1.7) pour le numérateur avec $a_k = W_k$ et $b_k = V_k^1$, on obtient, pour $j \geq 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=j}^m V_i^1 W_i}{\sum_{i=1}^{j-1} V_i^1 W_i} &= \frac{\sum_{k=j}^{m-1} (W_k - W_{k+1}) \sum_{l=1}^k V_l^1 + W_m \sum_{l=1}^m V_l^1 - W_j \sum_{l=1}^{j-1} V_l^1}{\sum_{k=1}^{j-2} (W_k - W_{k+1}) \sum_{n=1}^k V_n^1 + W_{j-1} \sum_{n=1}^{j-1} V_n^1} \\ &= \frac{\sum_{k=j}^{m-1} (W_k - W_{k+1}) \frac{\sum_{l=1}^k V_l^1}{\sum_{n=1}^{j-1} V_n^1} + W_m \frac{\sum_{l=1}^m V_l^1}{\sum_{n=1}^{j-1} V_n^1} - W_j}{\sum_{k=1}^{j-2} (W_k - W_{k+1}) \frac{\sum_{n=1}^k V_n^1}{\sum_{n=1}^{j-1} V_n^1} + W_{j-1}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

en divisant haut et bas par $\sum_{n=1}^{j-1} V_n^1$.

Par hypothèse, $W_k - W_{k+1} \geq 0$.

De plus, comme $\begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} u \in TP2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{l=1}^k V_l^1}{\sum_{n=1}^{j-1} V_n^1} &\leq \frac{\sum_{l=1}^k V_l^2}{\sum_{n=1}^{j-1} V_n^2} \text{ si } k \geq j \\ \text{et } \frac{\sum_{l=1}^k V_l^1}{\sum_{n=1}^{j-1} V_n^1} &\geq \frac{\sum_{l=1}^k V_l^2}{\sum_{n=1}^{j-1} V_n^2} \text{ si } k \leq j - 2. \end{aligned}$$

De (1.8), on déduit alors que (1.5) est vraie pour $j \geq 3$.

Par ailleurs, il est facile de vérifier que (1.5) est encore vraie pour $j = 2$ (le dénominateur est alors remplacé par W_1). (1.5) est donc vraie pour tout $j \geq 2$ et (1.3) est vraie sous la première hypothèse.

Le principe de démonstration est le même sous la deuxième hypothèse, à savoir $U_i \geq U_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq m - 1$.

On commence par écrire

$$\frac{V^1 U}{V^1 W} = \frac{\sum_{i=1}^m V_i^1 U_i}{\sum_{i=1}^m V_i^1 \frac{W_i}{U_i} U_i}.$$

Puis, $\left(\frac{W_i}{U_i}\right)$ étant décroissante par rapport à i , on peut mettre $\frac{W_i}{U_i}$ sous la forme

$$\frac{W_i}{U_i} = \sum_{j=i}^m x_j,$$

avec $x_j \geq 0$ pour tous $1 \leq j \leq i \leq m$.

On en déduit

$$\frac{V^1 U}{V^1 W} = \frac{\sum_{i=1}^m V_i^1 U_i}{\sum_{j=1}^m x_j \sum_{i=1}^j V_i^1 U_i}.$$

Pour montrer (1.3), il est alors suffisant de montrer que

$$\frac{\sum_{i=1}^j V_i^1 U_i}{\sum_{i=1}^m V_i^1 U_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^j V_i^2 U_i}{\sum_{i=1}^m V_i^2 U_i}, \text{ pour } 1 \leq j \leq m.$$

On est donc ramené au même problème que précédemment (cf (1.5)), en remplaçant W_i par U_i .

(1.3) est donc vraie sous les deux hypothèses. ■

Nous passons maintenant à l'étude des processus rh -monotones.

1.2.2.2 Processus rh -monotones

Nous rappelons tout d'abord leur définition et leur caractérisation à l'aide de leur matrice génératrice, donnée par Kijima [36].

Définition 1.12 (X_t) est un processus rh -monotone si et seulement si $P_t(i, \bullet) \prec_{rh} P_t(i+1, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m\}$, $t \geq 0$, ou, de façon équivalente si et seulement si $P_t \times u \in TP2$

Proposition 1.13 (cf Kijima, [36]) (X_t) est un processus rh -monotone si et seulement si :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= 0 \text{ pour tous } 1 \leq j \leq i-2 \leq m+1 \\ \text{et } a_{i,j} &\leq a_{i+1,j} \text{ pour tous } 3 \leq i+2 \leq j \leq m+1 \end{aligned}$$

En d'autres termes, (X_t) est un processus rh -monotone si et seulement si sa matrice génératrice A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \downarrow & \downarrow & \cdot & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \downarrow & \cdot & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdot & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & \bullet & \cdot & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \bullet & \bullet & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

les flèches représentant la croissance de $a_{i,j}$ avec i .

Nous terminons cette partie concernant les processus rh -monotones par un résultat similaire à la **proposition 1.5**, l'ordre stochastique étant maintenant remplacé par l'ordre rh . Là encore, ce résultat montre que les processus rh -monotones dont la matrice génératrice est triangulaire supérieure sont bien adaptés pour décrire certains phénomènes de vieillissement d'un système (cf **remarque 1.6**).

Proposition 1.14 Si (X_t) est un processus rh -monotone :

$$\begin{aligned} &(P_t(i, \bullet) \prec_{rh} P_s(i, \bullet) \text{ pour tous } i \in \{1, \dots, m+1\}, 0 \leq t \leq s) \\ \Leftrightarrow &(A \text{ est triangulaire supérieure}) \end{aligned}$$

Remarque 1.15 Remarquons que Kijima avait déjà démontré dans [36] (dans un contexte plus général que le nôtre) que, dans le cas d'un processus rh -monotone, $P_t(1, \bullet) \prec_{rh} P_s(1, \bullet)$ pour tous $0 \leq t \leq s$. Lorsque la matrice génératrice du processus est en plus triangulaire supérieure, n'importe quel état de $\{1, \dots, m+1\}$ joue alors le même rôle que l'état 1 de Kijima. Ceci explique l'une des implications de la **proposition 1.14**. Nous démontrons aussi la réciproque.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle de la **proposition 1.5**.

Supposons tout d'abord $P_t(i, \bullet) \prec_{rh} P_s(i, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $0 \leq t \leq s$.

On a alors $P_0(i, \bullet) \prec_{rh} P_s(i, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $0 \leq s$.

On en déduit

$$\left(\sum_{k=1}^{j+1} P_0(i, k) \right) \left(\sum_{k=1}^j P_s(i, k) \right) \leq \left(\sum_{k=1}^j P_0(i, k) \right) \left(\sum_{k=1}^{j+1} P_s(i, k) \right)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\mathbb{I}_{\{i \leq j+1\}} \left(\sum_{k=1}^j P_s(i, k) \right) \leq \mathbb{I}_{\{i \leq j\}} \left(\sum_{k=1}^{j+1} P_s(i, k) \right) \quad (1.9)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.

Pour $i \geq 2$, prenons $j = i - 1$.

(1.9) s'écrit alors $\sum_{k=1}^{i-1} P_s(i, k) \leq 0$.

On en déduit $P_s(i, k) = 0$ pour $k \leq i - 1$.

Ceci entraîne que A est triangulaire supérieure, de la même façon que dans la démonstration de la **proposition 1.5**.

Réciproquement, supposons maintenant que A est triangulaire supérieure.

Montrons tout d'abord que $P_0(i, \bullet) \prec_{rh} P_s(i, \bullet)$ pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $0 \leq s$.

Il s'agit donc de vérifier que (1.9) est vraie pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$.

Pour $j + 1 < i$, c'est évident.

Pour $j = i - 1$ (et $i \geq 2$), comme P_t est triangulaire supérieure, $\sum_{k=1}^{i-1} P_s(i, k) = 0$ et (1.9) est vraie.

Pour $j \geq i$, (1.9) est évident.

Ainsi (1.9) est vraie dans tous les cas.

$P_0(i, \bullet) \prec_{rh} P_s(i, \bullet)$ est donc vraie pour tous $i \in \{1, \dots, m+1\}$, $0 \leq s$.

On conclut comme dans le cas stochastiquement monotone, en utilisant le **corollaire 1.9** et on a bien montré l'équivalence. ■

Les processus rh -monotones dont la matrice génératrice est triangulaire supérieure intervenant à plusieurs reprises par la suite, nous leur donnons maintenant un nom (processus de type (T)) et nous leur consacrons un paragraphe.

1.2.2.3 Processus de type (T)

Définition 1.16 On appelle processus de type (T) tout processus rh -monotone tel que A est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous non nuls (sauf le dernier qui est nul).

Remarquons que si A est triangulaire supérieure, sa dernière ligne est nécessairement nulle, de sorte que la nullité du dernier coefficient (noté $a_{m+1, m+1}$) n'est pas une hypothèse supplémentaire.

Nous supposons que les autres coefficients diagonaux sont non nuls de sorte que l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ est non absorbant et les $g_{i,j}$ finis. Ce cadre d'étude est tout à fait suffisant pour l'application à la fiabilité que nous donnons au paragraphe **1.3**.

Rappelons enfin que, d'après les résultats de Kijima, (X_t) est un processus de type (T) si et seulement si sa matrice génératrice A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \downarrow & \downarrow & \cdot & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \bullet & \downarrow & \cdot & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & \bullet & \cdot & \downarrow & \downarrow \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \bullet & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les \bullet représentent ici des coefficients non nuls.

Pour $l \in \{1, \dots, m+1\}$, on note T^l le temps d'atteinte de l'ensemble $\{l, \dots, m+1\}$: $T^l = \inf(t \geq 0 / X_t \geq l)$.

De plus, on note τ_i^l la fonction de taux associée à T^l sachant que $X_0 = i$ (pour $i \in \{1, \dots, m\}$).

La proposition suivante nous donne des résultats similaires à ceux de Kijima (théorème 4.2 [36], voir aussi [49]), du moins en ce qui concerne le premier point. Kijima a en effet démontré que, si (X_t) est un processus *rh* monotone, la loi de T^l sachant que $X_0 = 1$ est IHR (Increasing Hazard Rate). Ici, comme dans la **remarque 1.15**, le fait de se restreindre aux processus *rh*-monotones dont la matrice génératrice est triangulaire supérieure nous permet d'obtenir le même résultat à partir de n'importe quel état i de $\{1, \dots, l\}$. Nous y ajoutons deux inégalités entre différents taux, selon l'état duquel part le processus, et selon l'ensemble à atteindre (de la forme $\{l, \dots, m+1\}$).

Proposition 1.17 *Si (X_t) est un processus de type (T) , alors :*

- τ_i^l est une fonction croissante, ou encore la loi de T^l sachant que $X_0 = i$ est IHR (pour $2 \leq i+1 \leq l \leq m+1$).
- $\tau_{i+1}^l \geq \tau_i^l$ (pour $3 \leq i+2 \leq l \leq m+1$).
- $\tau_i^l \geq \tau_i^{l+1}$ (pour $2 \leq i+1 \leq l \leq m$).

Démonstration. Le principe de démonstration du premier point est semblable à celui du théorème 4.2 de Kijima [36].

Soient i et l tels que $2 \leq i+1 \leq l \leq m+1$ et soit \bar{F}_i^l la fonction de survie de T^l sachant que $X_0 = i$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \tau_i^l(t) &= \frac{-(\bar{F}_i^l)'(t)}{\bar{F}_i^l(t)} = -\frac{\sum_{k=1}^{l-1} P_t A(i, k)}{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j)} \quad (\text{Kolmogorov}) \\ &= -\frac{\sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m+1} P_t(i, j) a_{j,k}}{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j)} \\ &= -\frac{\sum_{j=1}^{m+1} P_t(i, j) \sum_{k=1}^{l-1} a_{j,k}}{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j)} \quad (\text{en échangeant les } \sum \text{ au numérateur}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme A est triangulaire supérieure, on a $P_t(i, j) = 0$ pour $i > j$ et $a_{j,k} = 0$ pour $j > k$.

Les seuls termes non nuls correspondent donc à $1 \leq i \leq j \leq k \leq l - 1$. La première somme se réduit alors à $\sum_{j=1}^{l-1}$.

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \tau_i^l(t) &= -\frac{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j) \sum_{k=1}^{l-1} a_{j,k}}{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j) \sum_{k=l}^{m+1} a_{j,k}}{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j)} \text{ car } \sum_{k=1}^{m+1} a_{j,k} = 0. \end{aligned}$$

En utilisant (1.7) avec $a_j = \sum_{k=l}^{m+1} a_{j,k}$ et $b_n = \frac{P_t(i, n)}{\sum_{n=1}^{l-1} P_t(i, n)}$, on a maintenant :

$$\tau_i^l(t) = \sum_{j=1}^{l-2} \left(\sum_{k=l}^{m+1} a_{j,k} - \sum_{k=l}^{m+1} a_{j+1,k} \right) \frac{\sum_{n=1}^j P_t(i, n)}{\sum_{n=1}^{l-1} P_t(i, n)} + \sum_{k=l}^{m+1} a_{l,k} \times \underbrace{\frac{\sum_{n=1}^{l-1} P_t(i, n)}{\sum_{n=1}^{l-1} P_t(i, n)}}_{=1} \quad (1.10)$$

pour tout $l \geq 3$.

Par ailleurs, comme (X_t) est un processus de type (T) , on sait que $\sum_{k=l}^{m+1} a_{j,k} - \sum_{k=l}^{m+1} a_{j+1,k} \leq 0$ pour tout $j \leq l - 2$.

De plus, d'après la **proposition 1.14**, $\frac{\sum_{n=1}^j P_t(i, n)}{\sum_{n=1}^{l-1} P_t(i, n)}$ décroît avec t .

On en déduit que $\tau_i^l(t)$ croît avec t pour $l \geq 3$.

Par ailleurs, pour $l = 2$ et $i = 1$, on a $\tau_1^2(t) = \sum_{k=2}^{m+1} a_{1,k} = cte$ et τ_1^2 est encore une fonction croissante.

τ_i^l est donc toujours une fonction croissante, pour tous $2 \leq i + 1 \leq l \leq m + 1$ et le premier point est démontré.

Pour le second point, on peut tout d'abord remarquer que, comme (X_t) est un processus rh -monotone, on a

$$\frac{\sum_{n=1}^j P_t(i, n)}{\sum_{n=1}^{l-1} P_t(i, n)} \geq \frac{\sum_{n=1}^j P_t(i+1, n)}{\sum_{n=1}^{l-1} P_t(i+1, n)}$$

pour tous $3 \leq i + 2 \leq l \leq m + 1$ et $j \leq l - 2$.

On déduit alors de (1.10) que $\tau_i^l(t) \leq \tau_{i+1}^l(t)$ (car $\sum_{k=l}^{m+1} a_{j,k} - \sum_{k=l}^{m+1} a_{j+1,k} \leq 0$) et le second point est démontré.

Pour le troisième point, on peut remarquer que, d'après la **proposition 1.14**, on a

$$\frac{\bar{F}_i^{l+1}(t)}{\bar{F}_i^l(t)} = \frac{\sum_{j=1}^l P_t(i, j)}{\sum_{j=1}^{l-1} P_t(i, j)} \leq \frac{\sum_{j=1}^l P_s(i, j)}{\sum_{j=1}^{l-1} P_s(i, j)} = \frac{\bar{F}_i^{l+1}(s)}{\bar{F}_i^l(s)},$$

pour tous $0 \leq t \leq s$ et $2 \leq i + 1 \leq l \leq m$.

On en déduit que $\frac{\bar{F}_i^{l+1}}{\bar{F}_i^l}$ est croissante, pour tous $2 \leq i + 1 \leq l \leq m$.

En écrivant que la dérivée de $\frac{\bar{F}_i^{l+1}}{\bar{F}_i^l}$ est positive, on obtient alors $\tau_i^l \geq \tau_i^{l+1}$ et le troisième point est démontré. ■

Nous terminons maintenant avec un résultat qui est la clé de notre application à la fiabilité.

Proposition 1.18 *Si (X_t) est un processus de type (T) , alors $u^{-1}gu \geq 0$ et $gu \in TP2$.*

Remarque 1.19 La première partie ($u^{-1}gu \geq 0$) est immédiate. La seconde partie signifie que, lorsque la matrice génératrice A de (X_t) est triangulaire supérieure, si $P_t \times u \in TP2$ pour tout $t \geq 0$ (c'est-à-dire si (X_t) est rh-monotone), alors $gu = \int_0^{+\infty} P_t \times u \cdot dt \in TP2$. Nous ne savons pas si cette propriété est encore vraie sans hypothèse supplémentaire sur A .

Démonstration. $u^{-1}gu \geq 0$ est clair car (X_t) est un processus stochastiquement monotone (cf **proposition 1.4**). Il s'agit donc de montrer que $gu \in TP2$.

Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, m\}$, on a :

$$\sum_{j=1}^l g(i, j) = \sum_{j=1}^l \int_0^{+\infty} P_t(i, j) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(X_t \leq l) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(T^{l+1} > t) dt,$$

car, comme A est triangulaire supérieure, lorsque le processus (X_t) a "dépassé" l , il ne peut plus y revenir.

On en déduit que $\sum_{j=1}^l g(i, j) = \mathbb{E}_i(T^{l+1})$.

Notre problème est alors de montrer que, pour $i \in \{1, \dots, m-1\}$,

$$\frac{\mathbb{E}_i(T^{l+1})}{\mathbb{E}_i(T^l)} \leq \frac{\mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1})}{\mathbb{E}_{i+1}(T^l)}, \text{ pour tout } l \in \{1, \dots, m\}, \quad (1.11)$$

(avec toujours la même convention si l'un des dénominateurs s'annule).

Notons (P_i) cette propriété et démontrons (P_i) par récurrence descendante, pour $1 \leq i \leq m-1$.

(P_{m-1}) s'écrit

$$\mathbb{E}_{m-1}(T^{l+1}) \times \mathbb{E}_m(T^l) \leq \mathbb{E}_m(T^{l+1}) \times \mathbb{E}_{m-1}(T^l), \text{ pour tout } l \in \{1, \dots, m\}.$$

Ceci est trivialement vrai car $\mathbb{E}_m(T^l) = 0$.

Soit maintenant $1 \leq i \leq m-2$.

Supposons (P_j) vraie pour tout j tel que $i+1 \leq j \leq m-1$.

Montrons que (P_i) est vraie.

Nous avons clairement $\mathbb{E}_{i+1}(T^l) = 0$ si $i+1 \geq l$ et l'inégalité (1.11) est vraie.

Soit maintenant $l \geq i+2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(T^{l+1}) &= (\text{durée moyenne passée dans l'état } i) + \sum_{j=i+1}^l \frac{a_{i,j}}{|a_{i,i}|} \mathbb{E}_j(T^{l+1}) \\ &= \frac{1}{|a_{i,i}|} \left(1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^{l+1}) \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

De la même façon,

$$\mathbb{E}_i(T^l) = \frac{1}{|a_{i,i}|} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{l-1} a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^l) \right) \text{ pour } l \geq i+2. \quad (1.13)$$

On en déduit

$$\frac{\mathbb{E}_i(T^{l+1})}{\mathbb{E}_i(T^l)} = \frac{1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^{l+1})}{1 + \sum_{j=i+1}^{l-1} a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^l)} = \frac{1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^{l+1})}{1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^l)},$$

car $\mathbb{E}_l(T^l) = 0$.

Notre problème est alors de montrer que, pour tout $l \geq i + 2$:

$$\frac{1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^{l+1})}{1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^l)} \leq \frac{\mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1})}{\mathbb{E}_{i+1}(T^l)} \quad (\text{cf (1.11)}).$$

Cela peut encore s'écrire

$$\left[1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^{l+1}) \right] \mathbb{E}_{i+1}(T^l) \leq \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) \left[1 + \sum_{j=i+1}^l a_{i,j} \mathbb{E}_j(T^l) \right]$$

ou aussi

$$0 \leq \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) - \mathbb{E}_{i+1}(T^l) + \sum_{j=i+2}^l a_{i,j} \left[\mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) \mathbb{E}_j(T^l) - \mathbb{E}_j(T^{l+1}) \mathbb{E}_{i+1}(T^l) \right], \quad (1.14)$$

le terme pour $j = i + 1$ étant nul.

Notons A le second membre de (1.14).

Nous devons montrer que $A \geq 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) \mathbb{E}_j(T^l) - \mathbb{E}_j(T^{l+1}) \mathbb{E}_{i+1}(T^l) \leq 0$ pour tout $j \geq i + 2$.

De plus, $a_{i,j} \leq a_{i+1,j}$, pour $j \geq i + 2$.

On en déduit

$$\begin{aligned} A &\geq \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) - \mathbb{E}_{i+1}(T^l) + \sum_{j=i+2}^l a_{i+1,j} \left[\mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) \mathbb{E}_j(T^l) - \mathbb{E}_j(T^{l+1}) \mathbb{E}_{i+1}(T^l) \right] \\ &= \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) - \mathbb{E}_{i+1}(T^l) + \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) \sum_{j=i+2}^l a_{i+1,j} \mathbb{E}_j(T^l) \\ &\quad - \mathbb{E}_{i+1}(T^l) \sum_{j=i+2}^l a_{i+1,j} \mathbb{E}_j(T^{l+1}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

en développant.

Par ailleurs, d'après (1.13)

$$\sum_{j=i+2}^l a_{i+1,j} \mathbb{E}_j(T^{l+1}) = |a_{i+1,i+1}| \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) - 1 \quad \text{pour } l \geq i + 2.$$

De la même façon, comme $\mathbb{E}_l(T_l) = 0$, on a

$$\sum_{j=i+2}^l a_{i+1,j} \mathbb{E}_j(T^l) = \sum_{j=i+2}^{l-1} a_{i+1,j} \mathbb{E}_j(T^l) = |a_{i+1,i+1}| \mathbb{E}_{i+1}(T^l) - 1 \text{ pour } l \geq i+3.$$

De plus, si $l = i+2$, on a $\sum_{j=i+2}^l a_{i+1,j} \mathbb{E}_j(T^l) = a_{i+1,i+2} \mathbb{E}_{i+2}(T^{i+2}) = 0$.
 En remplaçant dans (1.15), on a maintenant, pour $l \geq i+3$:

$$\begin{aligned} A \geq & \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) - \mathbb{E}_{i+1}(T^l) + \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) \left(|a_{i+1,i+1}| \mathbb{E}_{i+1}(T^l) - 1 \right) \\ & - \mathbb{E}_{i+1}(T^l) \left(|a_{i+1,i+1}| \mathbb{E}_{i+1}(T^{l+1}) - 1 \right). \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient $A \geq 0$.

De la même façon, pour $l = i+2$, on a

$$\begin{aligned} A \geq & \mathbb{E}_{i+1}(T^{i+3}) - \mathbb{E}_{i+1}(T^{i+2}) - \mathbb{E}_{i+1}(T^{i+2}) \left(|a_{i+1,i+1}| \mathbb{E}_{i+1}(T^{i+3}) - 1 \right) \\ = & \mathbb{E}_{i+1}(T^{i+3}) \left(1 - \mathbb{E}_{i+1}(T^{i+2}) |a_{i+1,i+1}| \right) = 0 \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}_{i+1}(T^{i+2}) = \frac{1}{|a_{i+1,i+1}|}$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $A \geq 0$.

On en déduit que (P_i) est vraie et (1.11) est vraie pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

On a donc bien montré que $gu \in TP2$. ■

Nous allons maintenant utiliser ces différents résultats pour l'étude de notre problème initial, à savoir l'optimisation de la disponibilité asymptotique d'un système réparable relativement à sa loi de redémarrage après réparation.

1.3 Etude de la loi de redémarrage optimale après réparation

Nous commençons par décrire le système étudié et par préciser nos notations.

1.3.1 Description du système - Notations

Le système étudié a un nombre fini d'états possibles. Les états de marche sont notés 1 à m , les états de panne $m+1$ à $m+p$. Au départ, le système est dans l'un des états de marche. On suppose que le système évolue de façon *markovienne tant qu'il est en état de marche*, c'est-à-dire que les taux de panne et les taux de transition entre états de marche sont supposés constants. Par ailleurs, le système tombe en panne au bout d'un temps presque sûrement fini : si T désigne la première durée de fonctionnement du système, on a $\mathbb{P}_i(T < +\infty) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq m$. La réparation commence dès que le système tombe en panne. Si ce n'est pas le cas, le temps d'attente avant que la réparation proprement dite ne commence est alors pris en compte dans la durée de la réparation (c'est d'ailleurs le cas dans toute la thèse). La réparation a une durée aléatoire supposée indépendante de l'évolution du système antérieure à la panne. Lorsque le système est dans l'état de panne $m+k$ ($1 \leq k \leq p$) et que la réparation remet le système dans l'état de marche i ($1 \leq i \leq m$), sa durée a la même loi (quelconque) qu'une certaine variable aléatoire $R_{m+k,i}$ de moyenne finie $\mathbb{E}(R_{m+k,i})$. On convient de poser $\mathbb{E}(R_{m+k,i}) = 0$ lorsque les redémarrages

dans l'état de marche i sont impossibles à partir de l'état de panne $m + k$. (Cette valeur est arbitraire et n'intervient pas dans les calculs). On note alors $\mathbb{E}(R_{\bullet, \bullet})$ la matrice de type (p, m) formée par les $\mathbb{E}(R_{m+k, i})$.

L'état de marche dans lequel le système redémarre après une réparation est supposé indépendant de l'évolution antérieure du système. En particulier, il est indépendant de l'état de panne dans lequel le système se trouve au moment de la réparation. Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on note alors $D_R(i)$ la probabilité que le système soit dans l'état i après une réparation et on appelle "loi de redémarrage" (après réparation) le vecteur de probabilité $D_R = (D_R(1), D_R(2), \dots, D_R(m))$ sur $\{1, \dots, m\}$.

Remarquons que cette hypothèse selon laquelle le *même* vecteur D_R contrôle les redémarrages après *n'importe quelle* réparation, entraîne l'existence d'au moins un état de marche qui puisse être atteint par réparation depuis n'importe quel état de panne. La loi de redémarrage D_R est en effet clairement portée par l'ensemble formé de ces états. Par ailleurs, quitte à renuméroter les états de marche, on peut supposer que ces états sont numérotés de 1 à m_0 ($1 \leq m_0 \leq m$). Une loi de redémarrage possible pour le système (du moins d'un point de vue théorique) est alors une probabilité sur $\{1, \dots, m\}$, portée par $\{1, \dots, m_0\}$.

Remarquons que, si le système est formé de composants tous réparables, il existe au moins un état atteignable par réparation depuis n'importe quel état de panne : l'état de marche parfaite. En revanche, il est clair que cela peut tout à fait être le seul et qu'il n'y a, dans ce cas, guère de choix pour D_R . On pourra par exemple penser au cas d'un système 2 sur 3 formé de trois composants réparables A , B et C . Ce système possède quatre états de marche (ABC , $A\bar{B}C$, $\bar{A}BC$ et $AB\bar{C}$, avec des notations évidentes) et trois états de panne ($\bar{A}\bar{B}C$, $A\bar{B}\bar{C}$ et $\bar{A}B\bar{C}$). Pourtant, l'état de marche parfaite ABC est ici le seul qui soit atteignable depuis n'importe quel état de panne.

Nous donnons maintenant quelques notations.

On note ainsi $(X'_t)_{t \geq 0}$ le processus décrivant l'évolution de ce système jusqu'à la première panne, les états de panne étant rendu absorbants :

$$X'_t = \begin{cases} \text{état du système} & \text{si } t < T, \\ m + i & \text{si } t \geq T. \end{cases}$$

(X'_t) est un processus de Markov. Sa matrice génératrice est notée A' .

La matrice A' est découpée de la façon suivante :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \bar{0}^{p,m} & \bar{0}^{p,p} \end{array} \right)$$

où A_1 représente la matrice A' tronquée à l'ordre m ($A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$) et A_2 est la sous-matrice de A' formée par les taux de panne ($A_2 = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, m+1 \leq j \leq m+p}$).

Afin d'utiliser les résultats du paragraphe 1.2, on introduit aussi le processus (X''_t) où l'on a agrégé les p états de panne : les états $m + 1$ à $m + p$ étant absorbants, on pose $a'_{i,m+1} = \sum_{k=1}^p a_{i,m+k}$ et $a'_{i,j} = a_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq m$. On obtient alors un nouveau processus (X''_t) , à valeurs dans $\{1, \dots, m + 1\}$.

De la même façon que dans le paragraphe 1.2, on définit aussi la matrice g telle que $g_{i,j} = \int_0^{+\infty} P_t(i, j) dt$, où $P_t(i, j) = \mathbb{P}_i(X'_t = j) = \mathbb{P}_i(X''_t = j)$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Rappelons que, d'après le **théorème 4.25** de [35] par exemple, on sait que $g = -A_1^{-1}$.

Si nous nous intéressons maintenant à la succession des instants de redémarrages du

système après réparation, le processus décrivant l'évolution du système (non tronqué à l'instant T) apparaît comme un processus semi-régénératif. En effet, à chaque redémarrage après réparation, le système "oublie son passé" et son évolution ultérieure ne dépend que de l'état de marche dans lequel le système redémarre. Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on note alors $\mathbb{E}_i(T)$ la durée moyenne de bon fonctionnement sur un cycle commençant dans l'état i et $\mathbb{E}_i(\text{Rép})$ la durée moyenne de la réparation qui a lieu à la fin de ce même cycle. On note

$$\text{aussi } \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1(T) \\ \mathbb{E}_2(T) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_m(T) \end{pmatrix} \text{ et } \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1(\text{Rép}) \\ \mathbb{E}_2(\text{Rép}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_m(\text{Rép}) \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{1}^n$ et $\bar{0}^n$ désignent respectivement les vecteurs colonnes d'ordre n ne comportant que des 1 et des 0.

1.3.2 Calcul de la disponibilité asymptotique

Nous commençons ici par calculer la disponibilité asymptotique (*asymptotic availability* en anglais), tout d'abord dans le cas général, puis dans quelques cas particuliers.

1.3.2.1 Cas général

Proposition 1.20 *La disponibilité asymptotique du système existe et se met sous la forme $A_\infty(D_R) = \frac{1}{1+a_\infty(D_R)}$ avec*

$$a_\infty(D_R) = \frac{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}}{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}} = \frac{D_R g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet, \bullet})} ({}^t D_R)}{D_R g \bar{1}^m}, \quad (1.16)$$

où ${}^t D_R$ désigne le vecteur colonne transposé de D_R .

Démonstration. L'existence et le calcul de la disponibilité asymptotique reposent sur le caractère semi-régénératif du processus décrivant l'évolution du système (cf la fin du §1.3.1). Ce processus est noté (Z_t) . Remarquons tout d'abord que, quitte à restreindre l'espace d'états à $C = \{i \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } D_R(i) > 0\}$, on peut supposer la chaîne de Markov associée à (Z_t) irréductible. De plus, il est clair que les longueurs des cycles de (Z_t) ne sont pas arithmétiques. Notons maintenant ν la loi stationnaire de la chaîne de Markov associée à (Z_t) et T_1 le premier instant de "semi-renouvellement" du système ($T_0 = 0$). Les théorèmes généraux sur les processus semi-régénératifs (cf [18] ou [2] par exemple) nous permettent alors d'affirmer que si $\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(T_1) < +\infty$, la disponibilité asymptotique du système maintenu existe et vaut :

$$\begin{aligned} A_\infty(D_R) &= \frac{\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{X_s \in \{1, \dots, m\}\}} ds \right)}{\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(T_1)} \\ &= \frac{\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(T)}{\sum_{k \in C} \nu_k (\mathbb{E}_k(T) + \mathbb{E}_k(\text{Rép}))} = \frac{1}{1 + a_\infty(D_R)} \end{aligned}$$

avec

$$a_\infty(D_R) = \frac{\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(\text{Rép})}{\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(T)}.$$

Par ailleurs, les redémarrages se faisant suivant la loi D_R , on a clairement $\nu = D_R$. Comme C est le support de D_R , on obtient :

$$a_\infty(D_R) = \frac{\sum_{k=1}^m D_R(k) \mathbb{E}_k(\text{Rép})}{\sum_{k=1}^m D_R(k) \mathbb{E}_k(T)} = \frac{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}}{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}}.$$

Exprimons maintenant $\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}$ et $\overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}$ en fonction de g .

On a clairement $\mathbb{E}_i(T) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(T > t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^m P_t(i, j) dt = \sum_{j=1}^m g_{i,j}$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. On en déduit que $\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} = g \mathbf{1}^m$.

De plus,

$$\mathbb{E}_i(\text{Rép}) = \sum_{k=1}^p \mathbb{P}_i(X_{T_1^-} = m+k) \mathbb{E}_i(\text{Rép} / X_{T_1^-} = m+k). \quad (1.17)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(X_{T_1^-} = m+k) &= \sum_{j=1}^m \int_0^{+\infty} P_t(i, j) a_{j, m+k} dt = \sum_{j=1}^m g_{i,j} a_{j, m+k} \\ &= (gA_2)(i, m+k) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(\text{Rép} / X_{T_1^-} = m+k) &= \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_i(\text{Rép} / X_{T_1^-} = m+k \cap X_{T_1} = j) \mathbb{P}_i(X_{T_1} = j) \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbb{E}(R_{m+k,j}) D_R(j) = \left(\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} ({}^t D_R) \right) (m+k). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1.17), on obtient alors $\overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} = gA_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} ({}^t D_R)$.

On en déduit immédiatement la formule annoncée. ■

Nous donnons maintenant l'expression de la disponibilité asymptotique dans quelques cas particuliers.

1.3.2.2 Cas où les durées de réparation ne dépendent pas de l'état de redémarrage

En général, la réparation est bien sûr d'autant plus longue que la réparation est complète. Malgré tout, on peut, dans certains cas, considérer que les durées de réparation ne dépendent pas de l'état de marche dans lequel le système redémarre après réparation.

On peut par exemple penser au cas où la durée de la réparation proprement dite est négligeable devant le temps d'attente des réparateurs après qu'on les ait appelés ou négligeable devant le temps nécessaire au redémarrage du système après la panne. Ce sera aussi le cas lorsque les durées de réparation de certains composants indispensables au bon fonctionnement du système sont grandes par rapport aux durées de réparation des autres composants.

Supposons donc que *les durées de réparation soient indépendantes de l'état du système après réparation*. La durée moyenne de la réparation associée à l'état de panne $m+k$ est

alors notée $\mathbb{E}(R_{m+k})$. $\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet})}$ désigne le vecteur colonne d'ordre p formé par les $\mathbb{E}(R_{m+k})$ pour $1 \leq k \leq p$.

Avec ces notations, $a_{\infty}(D_R)$ se met alors sous la forme

$$a_{\infty}(D_R) = \frac{D_R g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet})}}{D_R g \bar{1}^m}.$$

Démonstration. Nous partons de la formule générale (1.16) en observant qu'ici $\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet, \bullet})} = \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet})} \cdot \bar{1}^{1,m}$, où $\bar{1}^{1,m}$ désigne le vecteur ligne d'ordre m où il n'y a que des 1. On obtient alors :

$$\begin{aligned} a_{\infty}(D_R) &= \frac{D_R g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet})} \cdot \bar{1}^{1,m} ({}^t D_R)}{D_R g \bar{1}^m} \\ &= \frac{D_R g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet})}}{D_R g \bar{1}^m} \text{ car } \bar{1}^{1,m} ({}^t D_R) = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.2.3 Cas où la durée de la réparation ne dépend pas de l'état de panne

Contrairement au cas précédent, la durée de la réparation peut ne dépendre que de l'état dans lequel le système redémarre après réparation et être indépendant de l'état de panne. (C'est par exemple le cas lorsque les durées de réparation des composants indispensables au bon fonctionnement du système sont négligeables devant les durées de réparation des autres composants). Dans ce cas, on peut remarquer que $\mathbb{E}(R_{m+k, \bullet}) = \mathbb{E}(R_{m+1, \bullet})$, pour tout $1 \leq k \leq p$, où $\mathbb{E}(R_{m+k, \bullet})$ désigne la k -ième ligne de $\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet, \bullet})}$.

$a_{\infty}(D_R)$ se met alors sous la forme

$$a_{\infty}(D_R) = \frac{\overline{\mathbb{E}(R_{m+1, \bullet})} ({}^t D_R)}{D_R g \bar{1}^m}.$$

Remarquons que cette formule peut aussi être appliquée lorsqu'il n'y a qu'un seul état de panne.

Démonstration. En remarquant que $\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet, \bullet})} = \bar{1}^p \times \mathbb{E}(R_{m+1, \bullet})$ et en remplaçant dans (1.16), on obtient ici

$$a_{\infty}(D_R) = \frac{D_R g A_2 \bar{1}^p \times \mathbb{E}(R_{m+1, \bullet}) ({}^t D_R)}{D_R g \bar{1}^m} \tag{1.18}$$

Par ailleurs, comme A' est une matrice génératrice, on a nécessairement $A_1 \bar{1}^m + A_2 \bar{1}^p = \bar{0}^m$.

On en déduit $g A_1 \bar{1}^m + g A_2 \bar{1}^p = \bar{0}^m$.

Comme $g = -A_1^{-1}$, on obtient alors

$$g A_2 \bar{1}^p = \bar{1}^m. \tag{1.19}$$

En remplaçant dans (1.18), on a maintenant

$$\begin{aligned} a_{\infty}(D_R) &= \frac{D_R \bar{1}^m \times \mathbb{E}(R_{m+1, \bullet}) ({}^t D_R)}{D_R g \bar{1}^m} \\ &= \frac{\overline{\mathbb{E}(R_{m+1, \bullet})} ({}^t D_R)}{D_R g \bar{1}^m}. \blacksquare \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la disponibilité asymptotique de notre système. Cela nous permet d'aborder notre problème principal dans le paragraphe suivant, à savoir l'existence et la recherche d'une loi de redémarrage optimale, c'est-à-dire telle que la disponibilité asymptotique soit maximale.

1.3.3 Restriction aux lois de redémarrage du type δ_i

Grâce à des arguments de type continuité sur un compact, il est tout d'abord facile de voir qu'il existe au moins une loi de redémarrage optimale parmi les probabilités D_R sur $\{1, \dots, m\}$ portées par $\{1, \dots, m_0\}$.

Une question naturelle est alors de se demander si la loi optimale de redémarrage (ou du moins l'une des lois optimales) correspond ou non au redémarrage dans un état i_0 fixé.

Plus précisément, notons δ_i la masse de Dirac en i pour $1 \leq i \leq m_0$. Avec cette notation, $D_R = \delta_i$ signifie alors que le système redémarre dans l'état i après une réparation. L'ensemble $\{A_\infty(\delta_i) / 1 \leq i \leq m_0\}$ étant fini, il admet clairement un plus grand élément. Notons i_0 l'un de ses arguments. Le redémarrage dans l'état i_0 est donc le meilleur parmi tous les redémarrages dans un état i (non aléatoire). En d'autres termes, δ_{i_0} est la loi de redémarrage optimale parmi les δ_i pour $1 \leq i \leq m_0$. Notre problème est alors de voir si δ_{i_0} est encore optimale parmi toutes les lois D_R .

Les **exemples 1.23** et **1.24** ci-dessous (après le **théorème 1.21**) montrent qu'en général il n'en est rien.

Le **théorème 1.21** nous donne alors des conditions pour qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire pour que δ_{i_0} soit optimale parmi toutes les lois de redémarrages D_R possibles. Les conditions données par ce théorème sont ensuite testées sur les **exemples 1.23** et **1.24**.

Théorème 1.21 Soient (H_1) , (H_2) , (H_3) les hypothèses suivantes :

- (H_1) La durée de la réparation ne dépend pas de l'état de panne (cas du §1.3.2.3).
- (H_2) $(\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i}))_{1 \leq i \leq m_0}$ est indépendante de i pour $2 \leq k \leq p$ fixé (ce qui est vrai en particulier si $\mathbb{E}(R_{m+k,i})$ ne dépend pas de i , cas du §1.3.2.2).
- (H_3) $(\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i}))_{1 \leq i \leq m_0}$ et $(\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$ sont monotones par rapport à i (pour tout $2 \leq k \leq p$ fixé) de sens contraire de monotonie.

Si l'une des hypothèses (H_1) , (H_2) ou (H_3) est réalisée, il existe une loi optimale de redémarrage après réparation du type masse de Dirac.

Plus précisément, soit $1 \leq i_0 \leq m_0$ tel que $A_\infty(\delta_{i_0}) = \max_{1 \leq i \leq m_0} A_\infty(\delta_i)$.

On a alors : $A_\infty(D_R) \leq A_\infty(\delta_{i_0})$ pour toute loi D_R sur $\{1, \dots, m\}$ portée par $\{1, \dots, m_0\}$.

Remarque 1.22 (H_1) et (H_2) ne requièrent aucune propriété de monotonie de A_1 ou de A_2 . En ce qui concerne (H_3) , rappelons que $X_{T_1^-}$ représente l'état de première panne du système. Pour $1 \leq k \leq p$, $\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l)$ représente alors $\mathbb{P}_i(X_{T_1^-} \geq m+k)$. La croissance (par exemple) de $(\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$ signifie donc que, si le système part de $X_0 = i$, l'état de première panne est stochastiquement inférieur à celui obtenu lorsque le système part de $X_0 = i+1$. Si les états sont classés par ordre de dégradation croissante, cela signifie que le système est dans un état de panne "stochastiquement" plus dégradé lorsqu'il part de i que lorsqu'il part de $i+1$.

Démonstration.

– Sous l'hypothèse (H_1) :

$$a_\infty(D_R) = \frac{\sum_{i=1}^{m_0} \mathbb{E}(R_{m+1,i}) D_R(i)}{\sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) \mathbb{E}_i(T)} = \frac{\sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) \mathbb{E}_i(T) a_\infty(\delta_i)}{\sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) \mathbb{E}_i(T)} \geq a_\infty(\delta_{i_0})$$

car $a_\infty(\delta_i) \geq a_\infty(\delta_{i_0})$ pour tout $1 \leq i \leq i_0$.

– Dans le cas général :

Posons $M = gA_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet, \bullet})}$.

$a_\infty(D_R)$ s'écrit alors :

$$a_\infty(D_R) = \frac{D_R M ({}^t D_R)}{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & D_R M ({}^t D_R) \\ &= \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} D_R(i) M_{i,j} D_R(j) \\ &= \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) \mathbb{E}(R_{m+k,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) \mathbb{E}(R_{m+k,i}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) \end{aligned}$$

en écrivant $\mathbb{E}(R_{m+k,j}) = \mathbb{E}(R_{m+k,i}) + (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i}))$.

Posons

$$C = \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})).$$

$D_R M ({}^t D_R)$ se met alors sous la forme

$$\begin{aligned} D_R M ({}^t D_R) &= \sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) \sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) \mathbb{E}(R_{m+k,i}) + C \quad (\text{car } \sum_{j=1}^{m_0} D_R(j) = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) M_{i,i} + C. \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que, si $C \geq 0$, on conclut facilement, de la même façon que dans le cas (H_1) . En effet, si $C \geq 0$, on alors

$$a_\infty(D_R) \geq \frac{\sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) M_{i,i}}{\sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) \mathbb{E}_i(T)} = \frac{\sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) a_\infty(\delta_i) \mathbb{E}_i(T)}{\sum_{i=1}^{m_0} D_R(i) \mathbb{E}_i(T)} \geq a_\infty(\delta_{i_0}).$$

Notre problème est donc de donner des conditions suffisantes sous lesquelles C est positive.

Transformons pour cela l'écriture de C .

En distinguant suivant que $i < j$ ou que $i > j$, on obtient :

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{1 \leq i < j \leq m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) \\
&+ \sum_{1 \leq j < i \leq m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) \\
&= \sum_{1 \leq j < i \leq m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=1}^p \left[\begin{array}{c} ((gA_2)(i, m+k) - (gA_2)(j, m+k)) \times \\ (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) \end{array} \right] \\
&\text{en échangeant } i \text{ et } j \text{ dans la première double somme.}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ sont des réels, on a

$$\sum_{k=1}^p a_k b_k = \sum_{k=2}^p (a_k - a_{k-1}) \sum_{l=k}^p b_l + a_1 \sum_{l=1}^p b_l. \quad (1.20)$$

En posant $a_k = \mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})$ et $b_k = (gA_2)(i, m+k) - (gA_2)(j, m+k)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^p ((gA_2)(i, m+k) - (gA_2)(j, m+k)) (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) \\
&= \sum_{k=2}^p \left(\begin{array}{c} [(\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) - (\mathbb{E}(R_{m+k-1,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i}))] \times \\ [\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l) - \sum_{l=k}^p (gA_2)(j, m+l)] \end{array} \right) \\
&\quad + (\mathbb{E}(R_{m+1,j}) - \mathbb{E}(R_{m+1,i})) \sum_{l=1}^p ((gA_2)(i, m+l) - (gA_2)(j, m+l))
\end{aligned}$$

De plus, d'après (1.19), $\sum_{k=1}^p (gA_2)(i, m+k) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq m_0$.

On en déduit $\sum_{l=1}^p ((gA_2)(i, m+l) - (gA_2)(j, m+l)) = 0$

et

$$C = \sum_{1 \leq j < i \leq m_0} D_R(i) D_R(j) \sum_{k=2}^p \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) \\ - (\mathbb{E}(R_{m+k-1,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i})) \end{array} \right] \times \\ [\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l) - \sum_{l=k}^p (gA_2)(j, m+l)] \end{array} \right).$$

Supposons maintenant que (H_2) est vérifiée.

On a alors

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i})) - (\mathbb{E}(R_{m+k-1,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i})) \\
&= (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,j})) - (\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i})) \\
&= 0 \text{ pour tous } 1 \leq j < i \leq m_0.
\end{aligned}$$

C est donc nulle et on a bien la propriété désirée.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général.

Dans ce cas, C est clairement positive dès que

$$\sum_{k=2}^p \left(\frac{[(\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,j})) - (\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i}))] \times}{\left[\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l) - \sum_{l=k}^p (gA_2)(j, m+l) \right]} \right) \geq 0$$

pour tous $1 \leq j < i \leq m_0$.

En particulier, C est positive dès que

$$[(\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i})) - (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,j}))]$$

et

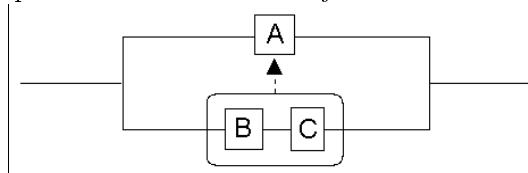
$$\left[\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l) - \sum_{l=k}^p (gA_2)(j, m+l) \right]$$

ont des signes contraires pour tous $2 \leq k \leq p$ et $1 \leq j < i \leq m_0$.

En d'autres termes, C est positive dès que $(\mathbb{E}(R_{m+k,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,i}))_{1 \leq i \leq m_0}$ et $(\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$ sont monotones, de sens contraire de monotonie, c'est-à-dire dès que (H_3) est vérifiée. ■

Nous testons maintenant les conditions données par le **théorème 1.21** sur deux exemples.

Exemple 1.23 On considère un système formé de trois composants A , B et C , de taux de panne constants notés respectivement λ_A , λ_B et λ_C . Le composant A a un taux de réparation constant noté μ_A . Le composant A et le sous-système formé des composants B et C en série sont en redondance passive (cf schéma) : le composant A est normalement en fonctionnement, le sous-système en attente. Lorsque le composant A tombe en panne, le sous-système prend le relais. La probabilité que le composant B "démarré" est γ_B . Le composant C "démarré" toujours.



On note 1 l'état de marche parfaite (A fonctionne, B et C sont en attente, $1 = A(BC)_a$), 2 l'état de marche où A est en panne, B et C fonctionnent ($2 = \bar{A}BC$).

Il y a deux états de panne : 3 = $\bar{A}\bar{B}C$ et 4 = $\bar{A}B\bar{C}$, qui conduisent tous deux aux deux états de marche, par réparation ($m_0 = 2$).

On a alors :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_A & \gamma_B \lambda_A \\ \mu_A & -(\mu_A + \lambda_B + \lambda_C) \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} (1 - \gamma_B) \lambda_A & 0 \\ \lambda_B & \lambda_C \end{pmatrix}.$$

Numériquement, on prend $\lambda_A = 3$, $\lambda_B = 1$, $\lambda_C = 15$, $\gamma_B = 0.7$, $\mu_A = 20$.

On obtient ainsi $gA_2 = \begin{pmatrix} 0.5227 & 0.4773 \\ 0.3182 & 0.6818 \end{pmatrix}$ et nous sommes dans le cas où

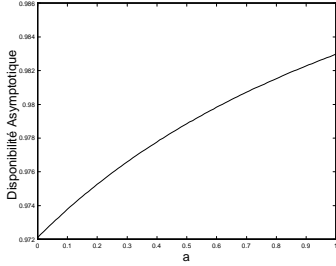
$(\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$ est croissante par rapport à i .

Nous prenons D_R de la forme $D_R = [a, 1 - a]$ avec $a \in [0, 1]$ et on trace la disponibilité asymptotique en fonction de a pour différentes valeurs des durées moyennes de réparation.

Remarquons que $\mathbb{E}(R_{3,1})$ correspond aux réparations des composants A et B, $\mathbb{E}(R_{3,2})$ à celle de B, $\mathbb{E}(R_{4,1})$ à celle de A et C, $\mathbb{E}(R_{4,2})$ à celle de C. La réparation de A est supposée plus rapide lorsque le système est arrêté que lorsqu'il est en marche.

1. Dans le premier cas, la réparation de chacun des composants dure en moyenne 0.01 lorsque le système est arrêté, les réparations étant faites simultanément. On a alors

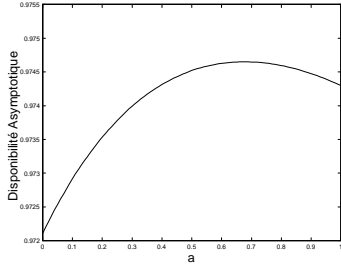
$$\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \text{ et on obtient :}$$



Nous sommes dans le cas où $(\mathbb{E}(R_{m+k+1,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i}))_{1 \leq i \leq m}$ est indépendante de i pour tout k et le cas (H_2) du **théorème 1.21** s'applique. $A_\infty(D_R)$ est optimale pour $D_R = \delta_1$ ($A_\infty(\delta_1) \simeq 0.9830$).

2. Nous prenons maintenant les mêmes hypothèses mis à part le fait que l'on ne peut plus réparer A et B simultanément.

$$\text{On a alors } \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \text{ et on obtient :}$$

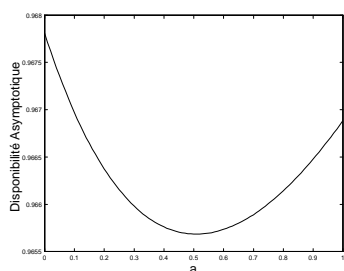


Nous sommes dans le cas où $(\mathbb{E}(R_{m+k+1,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i}))_{1 \leq i \leq m}$ croît en fonction de i pour tout k (et (H_3) n'est pas vérifiée). La disponibilité asymptotique maximale n'est atteinte ni en δ_1 , ni en δ_2 .

$$\begin{aligned} A_\infty(\delta_1) &\simeq 0.9721, \quad A_\infty(\delta_2) \simeq 0.9743, \\ D_{R_{opt}} &\simeq [0.73, 0.27], \quad A_\infty(D_{R_{opt}}) \simeq 0.9746. \end{aligned}$$

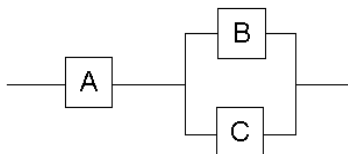
3. Dans le dernier cas, A et B sont réparés simultanément, mais pas A et C. On a changé un tout petit peu les valeurs numériques pour "creuser" un peu plus la courbe.

$$\text{Pour } \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.015 & 0.015 \\ 0.025 & 0.01 \end{pmatrix}, \text{ on obtient :}$$



Nous sommes dans le cas où $(\mathbb{E}(R_{m+k+1,i}) - \mathbb{E}(R_{m+k,i}))_{1 \leq i \leq m}$ décroît en fonction de i pour tout k et le cas (H_3) du **théorème 1.21** s'applique. $A_\infty(D_R)$ est optimale pour $D_R = \delta_2$ ($A_\infty(\delta_2) \simeq 0.9678$).

Exemple 1.24 On considère un système formé de trois composants A , B et C , de taux de panne constants notés respectivement λ_A , λ_B et λ_C , non réparables pendant que le système fonctionne. Le composant A est en série avec le sous-système formé par les composants B et C en parallèle (cf schéma). La panne de A entraîne la panne de B et de C .



On note $1 = ABC$, $2 = ABC\bar{C}$, $3 = A\bar{B}C$ les états de marche et $4 = A\bar{B}\bar{C}$, $5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ les états de panne. Notons que les deux états de panne conduisent, par réparation, aux trois états de marche ($m_0 = 3$).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C) & \lambda_C & \lambda_B \\ 0 & -(\lambda_A + \lambda_B) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_A + \lambda_C) \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_A \\ \lambda_B & \lambda_A \\ \lambda_C & \lambda_A \end{pmatrix}$$

1. On peut réparer en même temps les composants B et C , ainsi que les composants A et C , mais pas les composants A et B . Les durées moyennes de réparation des composants A , B et C valent respectivement 0.009 , 0.005 , 0.006 . On obtient ainsi :

$$\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.006 & 0.005 & 0.006 \\ 0.015 & 0.014 & 0.009 \end{pmatrix}$$

et nous sommes dans le cas où $(\mathbb{E}(R_{5,i}) - \mathbb{E}(R_{4,i}))_{1 \leq i \leq m_0}$ décroît avec i .

On prend par ailleurs

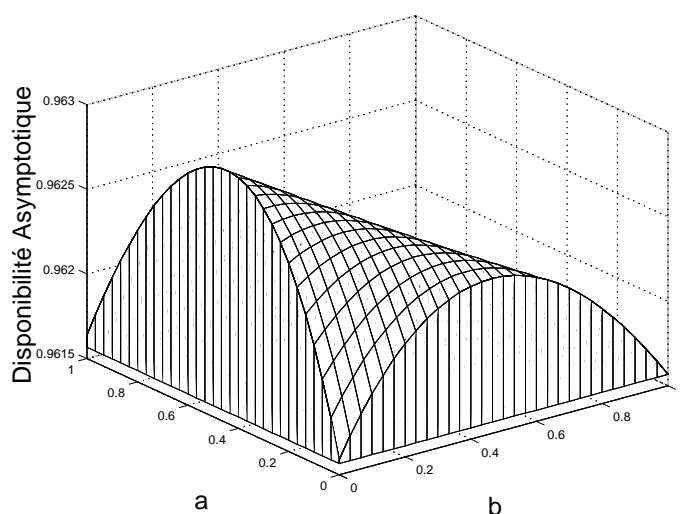
$$\lambda_A = 2.105; \lambda_B = 2.1; \lambda_C = 3.5.$$

On obtient $((gA_2)(i, 5))_{1 \leq i \leq 3} = \begin{pmatrix} 0.6030 \\ 0.5006 \\ 0.3756 \end{pmatrix}$ et nous sommes dans le cas où

$(\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$ décroît avec i .

(H_3) n'est donc pas vérifiée.

Pour $D_R = [a, b, 1 - a - b]$, on obtient :



La disponibilité est optimale pour

$$D_R^{opt} = [0.445, 0, 0.555]$$

$$\text{et } A_\infty^{opt} = 0.9630.$$

De plus, $A_\infty(\delta_1) = A_\infty(\delta_2) = A_\infty(\delta_3) = 0.9616$.

Ici, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ correspondent à des minima de A_∞ .

2. On peut réparer en même temps les composants A et B, mais pas les composants B et C, ni les composants A et C. Les durées moyennes de réparation des composants A, B et C valent respectivement 0.02, 0.02, 0.001.

On obtient ainsi

$$\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.021 & 0.02 & 0.001 \\ 0.021 & 0.02 & 0.021 \end{pmatrix}$$

et nous sommes dans le cas où $(\mathbb{E}(R_{5,i}) - \mathbb{E}(R_{4,i}))_{1 \leq i \leq m_0}$ croît avec i .

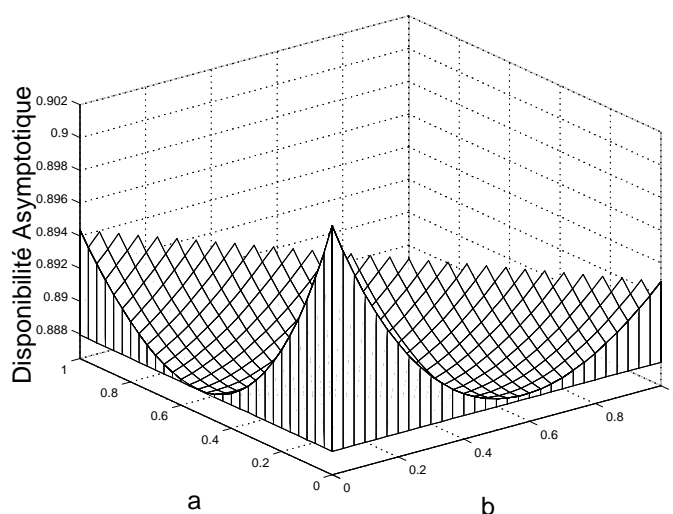
On prend par ailleurs $\lambda_A = 5; \lambda_B = 1; \lambda_C = 4$.

On obtient $((gA_2)(i, 5))_{1 \leq i \leq 3} = \begin{pmatrix} 0.8889 \\ 0.8333 \\ 0.5556 \end{pmatrix}$ et nous sommes dans le cas où

$(\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$ décroît avec i .

(H_3) est donc vérifiée.

Pour $D_R = [a, b, 1 - a - b]$, on obtient :



La disponibilité est optimale pour $D_R = \delta_3$ et

$$A_\infty(\delta_1) \simeq 0.8944, A_\infty(\delta_2) \simeq 0.8929, A_\infty(\delta_3) \simeq 0.9017.$$

1.3.4 Comparaison de différentes lois de redémarrage

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la loi optimale de redémarrage ne peut pas toujours être recherchée parmi les δ_i . Ainsi, lorsqu'aucune des trois hypothèses du **théorème 1.21** n'est vérifiée, nous sommes obligés d'effectuer une recherche sur toutes les lois de redémarrages D_R possibles. Ceci nous amène alors à rechercher des conditions sous lesquelles on peut affirmer que $A_\infty(D_{R_1}) \geq A_\infty(D_{R_2})$. Nous regardons tout d'abord les mêmes cas particuliers qu'au paragraphe **1.3.2** (§**1.3.2.2** et §**1.3.2.3**). En effet, bien que nous sachions déjà, dans ces deux cas, que la loi de redémarrage optimale est l'une des δ_i ($1 \leq i \leq m_0$) (cf **théorème 1.21**), il peut arriver, en pratique, que toutes les lois de redémarrage ne soient pas possibles (par exemple parce qu'il n'y a plus assez de composants en stock ou qu'il manque un réparateur). Dans ce cas, il peut être intéressant de savoir comparer $A_\infty(D_{R_1})$ et $A_\infty(D_{R_2})$. Par ailleurs, cela permet de comprendre un peu mieux le problème avant d'aborder le cas général.

1.3.4.1 Cas où les durées de réparation ne dépendent pas de l'état de redémarrage

Nous supposons ici que les durées de réparation $\mathbb{E}(R_{m+k,i})$ ne dépendent pas de l'état de redémarrage i (cas du §**1.3.2.2**). Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous montrons ici que, si les états sont rangés par ordre de "dégradation croissante" et si le système se "détériore" en fonctionnant, la disponibilité asymptotique est d'autant plus grande que la réparation est complète, c'est-à-dire que $A_\infty(D_{R_1}) \geq A_\infty(D_{R_2})$ lorsque D_{R_1} est plus petit que D_{R_2} .

Pour traduire le fait que les états de marche sont classés par ordre de dégradation croissante, nous supposons que le taux de panne "global" associé à l'état i , $\sum_{j=1}^p a_{i,m+j}$, croît avec i pour $i \in \{1, \dots, m\}$. Nous supposons aussi que la durée moyenne de la réparation qui suit une panne dans l'état i croît avec i . Si l'on convient qu'un vecteur réel est croissant (respectivement décroissant) si et seulement si ses coordonnées sont rangées par ordre

croissant (respectivement décroissant), ces deux hypothèses se traduisent respectivement par la croissance des vecteurs $A_2 \bar{I}^p$ et $A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$.

Pour traduire le fait que le système se "détérioré" en fonctionnant, nous supposons que le processus décrivant l'évolution du système en marche (X_t'') est *rh*-monotone, de matrice génératrice triangulaire supérieure. En d'autres termes, nous supposons que (X_t'') est un processus de type (T) .

Enfin, pour traduire le fait que D_{R_1} est plus petit que D_{R_2} , nous utilisons l'ordre *rh* et nous supposons que $D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2}$.

Enonçons maintenant notre résultat.

Théorème 1.25 *Supposons que :*

(H₄) $A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ est croissant,

(H₅) (X_t'') est un processus de type (T) (c'est-à-dire, $A_2 \bar{I}^p$ est un vecteur croissant et A_1 est triangulaire supérieure telle que $a_{i,j} \leq a_{i+1,j}$, pour $1 \leq i \leq m-1$ et $i+2 \leq j \leq m$).

Alors, pour toutes lois D_{R_1} et D_{R_2} sur $\{1, \dots, m\}$, portées par $\{1, \dots, m_0\}$:

$$D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2} \implies A_\infty(D_{R_1}) \geq A_\infty(D_{R_2}).$$

En particulier, la suite $(A_\infty(\delta_i))_{1 \leq i \leq m_0}$ est décroissante et la disponibilité asymptotique est optimale lorsque l'on répare complètement le système, c'est-à-dire :

$$A_\infty(D_R) \leq A_\infty(\delta_1), \text{ pour toute loi } D_R \text{ sur } \{1, \dots, m\}, \text{ portée par } \{1, \dots, m_0\}.$$

Démonstration. $a_\infty(D_{R_1})$ se met ici sous la forme :

$$a_\infty(D_{R_1}) = \frac{\sum_{i=1}^{m_0} (D_{R_1}g)(i) \left(A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right)(i)}{\sum_{i=1}^{m_0} (D_{R_1}g)(i)} \text{ (cf §1.3.2.2)}.$$

(X_t'') étant un processus de type (T) , la **proposition 1.18** entraîne que $gu \in TP2$ et $u^{-1}gu \geq 0$. On utilise alors le **corollaire 1.10** avec D_{R_1} et D_{R_2} (tels que $D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2}$) et on en déduit que $\begin{pmatrix} D_{R_1}g \\ D_{R_2}g \end{pmatrix} u \in TP2$.

On peut ensuite appliquer la **proposition 1.11** avec $V_1 = D_{R_1}g$, $V_2 = D_{R_2}g$, $U = A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ et $W = \bar{I}^m$ (grâce à (H_4)).

On en déduit que

$$\frac{D_{R_1}g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}}{D_{R_1}g \bar{I}^m} \leq \frac{D_{R_2}g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}}{D_{R_2}g \bar{I}^m},$$

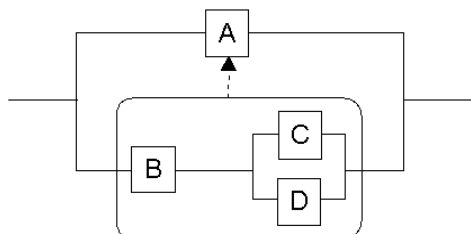
ou encore

$$a_\infty(D_{R_1}) \leq a_\infty(D_{R_2}).$$

La dernière remarque en découle immédiatement car $\delta_i \prec_{rh} \delta_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq m_0$ et $\delta_1 \prec_{rh} D_R$, pour tout D_R . ■

Nous donnons maintenant deux exemples qui montrent que l'ordre stochastique usuel ne convient ni pour décrire le phénomène de vieillissement de notre système, ni pour mesurer le degré d'achèvement de la réparation (du moins pour avoir la propriété souhaitée, à savoir qu'un système vieillissant est d'autant plus disponible que la réparation est complète).

Exemple 1.26 On considère un système formé de quatre composants A , B , C et D , de taux de panne constants notés respectivement λ_A , λ_B , λ_C et λ_D . Les composants ne sont pas réparables pendant que le système fonctionne. Le composant A et le sous-système formé des composants B , C et D (cf schéma) sont en redondance passive : le composant A est normalement en fonctionnement, le sous-système en attente. Lorsque le composant A tombe en panne, le sous-système prend le relais. La probabilité que le composant C "démarré" est γ_C . Les composants B et D "démarré" toujours.



Les états de marche sont : $1 = A(BCD)_a$, $2 = \bar{A}BCD$, $3 = \bar{A}BC\bar{D}$, $4 = \bar{A}B\bar{C}D$, les états de panne : $5 = \bar{A}\bar{B}CD$, $6 = \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$, $7 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$, $8 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Les quatre états de panne conduisent tous aux deux premiers états de marche par réparation ($m_0 = 2$).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_A & \lambda_A\gamma_C & 0 & \lambda_A(1-\gamma_C) \\ 0 & -(\lambda_B + \lambda_C + \lambda_D) & \lambda_D & \lambda_C \\ 0 & 0 & -(\lambda_B + \lambda_C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda_B + \lambda_D) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_B & \lambda_C & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_D & \lambda_B \end{pmatrix}.$$

On prend $\lambda_C \leq \lambda_D$ et $A_2\bar{I}^p$ est alors croissant.

De plus, on prend $\lambda_A(1-\gamma_C) \leq \lambda_C + \lambda_B$ et le processus agrégé (X_t'') est alors stochastiquement monotone. (On est même dans le cas où A_1 est triangulaire supérieure).

Il n'y a qu'un seul réparateur et la durée de réparation de A est négligeable devant les autres. La durée moyenne de réparation ne dépend alors pas de l'état dans lequel le système redémarre après une réparation (état 1 ou 2).

Numériquement, on prend :

$$\lambda_A = 1, \lambda_B = 0.8, \lambda_C = 0.1, \lambda_D = 0.1 \text{ et } \gamma_C = 0.1.$$

La durée moyenne de réparation de B (respectivement C , D) est 0.001 (respectivement 0.1, 0.01). On obtient ainsi $\mathbb{E}(R_5) = 0.001$, $\mathbb{E}(R_6) = 0.011$, $\mathbb{E}(R_7) = 0.11$ et $\mathbb{E}(R_8) = 0.101$.

De plus,

$$A_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0008 \\ 0.0198 \\ 0.0918 \end{pmatrix}$$

et $A_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ est un vecteur croissant (H_4).

On obtient

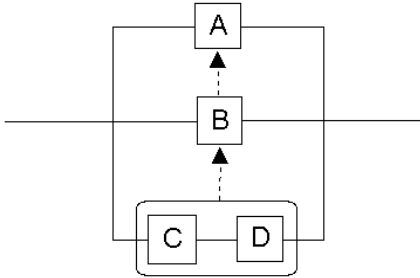
$$A_\infty(\delta_1) = 0.9580 < A_\infty(\delta_2) = 0.9893.$$

Le mieux est ici de ne pas réparer le composant A (et donc de ne pas l'installer).

On déduit de cet exemple que, sous l'hypothèse $A_2\bar{I}^P$ est un vecteur croissant et (H_4) , l'hypothèse " (X_t'') est stochastiquement monotone" est insuffisante pour conclure que $A_\infty(\delta_1) \geq A_\infty(\delta_2)$ (même si A_1 est triangulaire supérieure).

Par ailleurs, si lr représente le rapport de vraisemblance (*likelihood ratio* en anglais) et hr le taux de hasard (*hazard rate* en anglais), rappelons que l'ordre selon lr est le plus fort parmi les ordres selon lr , hr , rh , sto (et bon nombre d'autres, voir [46] ou [48] par exemple). Pourtant, dans l'exemple précédent, même $D_{R_1} \prec_{lr} D_{R_2}$ n'entraîne pas $A_\infty(D_{R_1}) \geq A_\infty(D_{R_2})$ (car $\delta_1 \prec_{lr} \delta_2$). On en déduit que, comme annoncé dans l'introduction, le vieillissement du système doit être traduit à l'aide d'un ordre plus fort que l'ordre stochastique usuel.

Exemple 1.27 On considère un système formé de quatre composants A, B, C et D, de taux de panne constants notés respectivement λ_A , λ_B , λ_C et λ_D . Les composants ne sont pas réparables pendant que le système fonctionne. Le composant A, le composant B et le sous-système formé des composants C et D en série (cf schéma) sont en redondance passive : le composant A est normalement en fonctionnement. Lorsque le composant A tombe en panne, le composant B prend le relai avec une probabilité de démarrage égale à γ_B . Lorsque le composant B tombe en panne (ou qu'il n'a pas réussi à démarrer), le sous-système formé des composants C et D prend le relai. La probabilité que le composant C (respectivement D) "démarré" est γ_C (respectivement γ_D).



Les états de marche sont : $1 = AB_a(CD)_a$, $2 = \bar{A}B(CD)_a$, $3 = \bar{A}\bar{B}CD$, les états de panne : $4 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$, $5 = \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$, $6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$. Les trois états de panne conduisent tous aux trois états de marche par réparation ($m_0 = m = 3$).

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_A & \lambda_A\gamma_B & \lambda_A(1-\gamma_B)\gamma_C\gamma_D \\ 0 & -\lambda_B & \lambda_B\gamma_C\gamma_D \\ 0 & 0 & -(\lambda_C+\lambda_D) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \lambda_A(1-\gamma_B) \times \\ (1-\gamma_C)\gamma_D \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \lambda_A(1-\gamma_B) \times \\ \gamma_C(1-\gamma_D) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \lambda_A(1-\gamma_B) \times \\ (1-\gamma_C)(1-\gamma_D) \end{array} \right) \\ \lambda_B(1-\gamma_C)\gamma_D & \lambda_B\gamma_C(1-\gamma_D) & \lambda_B(1-\gamma_C)(1-\gamma_D) \\ \lambda_C & \lambda_D & 0 \end{pmatrix}.$$

Là encore, il n'y a qu'un seul réparateur et les durées de réparation de A et de B sont négligeables devant celles de C et de D. La durée moyenne de réparation ne dépend alors que de l'état de panne dans lequel se trouve le système.

Numériquement, on prend :

$$\lambda_A = 4, \lambda_B = 5.6, \lambda_C = 3.9, \lambda_D = 3.9, \gamma_B = 0.3, \gamma_C = 0.2 \text{ et } \gamma_D = 0.4.$$

On obtient :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1.2 & 0.224 \\ 0 & -5.6 & 0.448 \\ 0 & 0 & -7.80 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0.896 & 0.336 & 1.344 \\ 1.792 & 0.672 & 2.688 \\ 3.900 & 3.900 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A_2 \bar{1}^p = \begin{pmatrix} 2.576 \\ 5.152 \\ 7.800 \end{pmatrix}.$$

La durée moyenne de réparation de C (respectivement D) est 0.01 (respectivement 0.015). On obtient ainsi $\mathbb{E}(R_4) = 0.01$, $\mathbb{E}(R_5) = 0.015$ et $\mathbb{E}(R_6) = 0.025$ et

$$A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} = \begin{pmatrix} 0.0476 \\ 0.0952 \\ 0.0975 \end{pmatrix}.$$

Les hypothèses (H_4) et (H_5) sont vérifiées.

On obtient :

$$A_\infty(\delta_1) = 0.9458, A_\infty(\delta_2) = 0.9130 \text{ et } A_\infty(\delta_3) = 0.9112$$

et on a bien $A_\infty(\delta_1) \geq A_\infty(\delta_2) \geq A_\infty(\delta_3)$.

Prenons maintenant $D_{R_1} = [0.5, 0.5, 0]$ et $D_{R_2} = [0.5, 0, 0.5]$.

Il est facile de vérifier que $D_{R_1} \prec_{sto} D_{R_2}$, mais que l'on n'a **pas** $D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2}$.
(En effet,

$$\frac{\sum_{k=1}^2 D_{R_1}(k)}{\sum_{k=1}^1 D_{R_1}(k)} = 2 > \frac{\sum_{k=1}^2 D_{R_2}(k)}{\sum_{k=1}^1 D_{R_2}(k)} = 1).$$

Par ailleurs, on obtient

$$A_\infty(D_{R_1}) = A_\infty(0.5, 0.5, 0) = 0.9332 < A_\infty(D_{R_2}) = A_\infty(0.5, 0, 0.5) = 0.9355.$$

On déduit de cet exemple que, même sous (H_4) et (H_5) , " $D_{R_1} \prec_{sto} D_{R_2}$ " est insuffisant pour conclure que $A_\infty(D_{R_1}) \geq A_\infty(D_{R_2})$.

En conclusion de ce paragraphe, l'ordre stochastique usuel est donc insuffisant pour notre problème, aussi bien pour décrire le vieillissement du système que pour mesurer le degré d'achèvement de la réparation. L'ordre rh est, en revanche, tout à fait adapté.

1.3.4.2 Cas où la durée de la réparation ne dépend pas de l'état de panne (cf §1.3.2.3)

On se place ici dans le cas où la durée de la réparation ne dépend que de l'état dans lequel le système redémarre après réparation et est indépendant de l'état de panne. Nous donnons, là encore, des conditions sous lesquelles le système est d'autant plus disponible que la réparation est complète.

Proposition 1.28 *Sous l'hypothèse :*

$$(H_6) \quad (a_\infty(\delta_i))_{1 \leq i \leq m_0} = \left(\frac{\mathbb{E}(R_{m+1,i})}{(g\bar{1}^m)(i)} \right)_{1 \leq i \leq m_0} \text{ croissante,}$$

la disponibilité asymptotique est optimale lorsque l'on répare complètement le système (c'est-à-dire, $A_\infty(D_R) \leq A_\infty(\delta_1)$, pour toute loi D_R sur $\{1, \dots, m\}$, portée par $\{1, \dots, m_0\}$).

Si, de plus,

$$(H_7) \quad (\mathbb{E}(R_{m+1,i}))_{1 \leq i \leq m_0} \text{ est décroissante ou } ((g\bar{1}^m)(i))_{1 \leq i \leq m_0} \text{ est décroissante (vrai dès que } (X_t'') \text{ est stochastiquement monotone),}$$

alors, pour toutes lois D_{R_1} et D_{R_2} sur $\{1, \dots, m\}$, portées par $\{1, \dots, m_0\}$:

$$D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2} \implies A_\infty(D_{R_1}) \geq A_\infty(D_{R_2}).$$

Remarque 1.29 Remarquons que (H_7) est naturellement vérifiée lorsque les états de marche sont classés par ordre de dégradation croissante.

Démonstration. Le premier point est évident car, d'après le **théorème 1.21**, la loi de redémarrage optimale est l'une des δ_i et (H_6) signifie que $(A_\infty(\delta_i))_{1 \leq i \leq m_0}$ est décroissante.

En ce qui concerne le deuxième point, rappelons que

$$a_\infty(D_{R_1}) = \frac{\overline{\mathbb{E}(R_{m+1,\bullet})}({}^t D_{R_1})}{D_{R_1} g \bar{1}^m} = \frac{\sum_{i=1}^{m_0} D_{R_1}(i) \mathbb{E}(R_{m+1,i})}{\sum_{i=1}^{m_0} D_{R_1}(i) (g\bar{1}^m)(i)} \text{ (cf §1.3.2.3).}$$

On utilise alors la **proposition 1.11** avec $V_i^1 = D_{R_1}(i)$, $V_i^2 = D_{R_2}(i)$, $U_i = \mathbb{E}(R_{m+1,i})$ et $W_i = (g\bar{1}^m)(i)$ pour $1 \leq i \leq m_0$, ce qui nous permet de conclure. ■

1.3.4.3 Cas général

Nous étudions maintenant le cas général.

Théorème 1.30 Sous les hypothèses :

(H_8) $(\sum_{l=k}^p (gA_2)(i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$ et $(\mathbb{E}(R_{m+k,i}))_{1 \leq k \leq p}$ sont monotones, la première par rapport à i , la seconde par rapport à k (pour tout $1 \leq i \leq m_0$ fixé), de même sens de monotonie,

(H_9) $\left(\frac{\mathbb{E}(R_{m+k,i})}{(g\bar{1}^m)(i)} \right)_{1 \leq i \leq m_0}$ croissante par rapport à i , pour tout $1 \leq k \leq p$, fixé,

(H_{10}) $((g\bar{1}^m)(i))_{1 \leq i \leq m_0}$ ou $(\mathbb{E}(R_{m+k,i}))_{1 \leq i \leq m_0}$ est décroissante par rapport à i , (la seconde pour tout $1 \leq k \leq p$ fixé).

Alors, pour toutes lois D_{R_1} et D_{R_2} sur $\{1, \dots, m\}$, portées par $\{1, \dots, m_0\}$:

$$D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2} \implies A_\infty(D_{R_1}) \geq A_\infty(D_{R_2}). \quad (1.21)$$

En particulier, la suite $(A_\infty(\delta_i))_{1 \leq i \leq m_0}$ est décroissante et la disponibilité asymptotique est optimale lorsque l'on répare complètement le système, c'est-à-dire :

$$A_\infty(D_R) \leq A_\infty(\delta_1), \text{ pour toute loi } D_R \text{ sur } \{1, \dots, m\}, \text{ portée par } \{1, \dots, m_0\}.$$

Démonstration. Soient D_{R_1} et D_{R_2} telles que $D_{R_1} \prec_{rh} D_{R_2}$.

Rappelons que $M = gA_2 \mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})$ et que

$$a_\infty(D_{R_1}) = \frac{D_{R_1} M ({}^t D_{R_1})}{D_{R_1} g \bar{1}^m} = \frac{\sum_{i=1}^{m_0} \left(D_{R_1} g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} \right) (i) D_{R_1}(i)}{D_{R_1} g \bar{1}^m}.$$

Posons $U_i = \left(D_{R_1} g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet, \bullet})} \right) (i)$ et $W_i = (g \bar{1}^m) (i)$ pour $1 \leq i \leq m_0$.

$a_\infty(D_{R_1})$ s'écrit alors $a_\infty(D_{R_1}) = \frac{D_{R_1} U}{D_{R_1} W}$.

Par ailleurs,

$$\frac{U_i}{W_i} = \sum_{k=1}^p (D_{R_1} g A_2) (m+k) \frac{\mathbb{E}(R_{m+k,i})}{(g \bar{1}^m) (i)}$$

et, d'après (H_9) , $\left(\frac{U_i}{W_i} \right)$ croît par rapport à i . De plus, U ou W est décroissant (H_{10}) .

En utilisant la **proposition 1.11**, on obtient :

$$a_\infty(D_{R_1}) = \frac{D_{R_1} U}{D_{R_1} W} \leq \frac{D_{R_2} U}{D_{R_2} W}$$

c'est-à-dire

$$a_\infty(D_{R_1}) = \frac{D_{R_1} M ({}^t D_{R_1})}{D_{R_1} g \bar{1}^m} \leq \frac{D_{R_1} M ({}^t D_{R_2})}{D_{R_2} g \bar{1}^m}. \quad (1.22)$$

Par ailleurs, en utilisant (1.20) avec $a_k = \mathbb{E}(R_{m+k,i})$ et $b_k = (g A_2) (i, m+k)$, on obtient :

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \sum_{k=1}^p (g A_2) (i, m+k) \mathbb{E}(R_{m+k,j}) \\ &= \sum_{k=2}^p (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,j})) \sum_{l=k}^p (g A_2) (i, m+l) \\ &\quad + \mathbb{E}(R_{m+1,j}) \sum_{l=1}^p (g A_2) (i, m+l) \\ &= \sum_{k=2}^p (\mathbb{E}(R_{m+k,j}) - \mathbb{E}(R_{m+k-1,j})) \sum_{l=k}^p (g A_2) (i, m+l) + \mathbb{E}(R_{m+1,j}) \end{aligned}$$

car $\sum_{l=1}^p (g A_2) (i, m+l) = 1$ (cf (1.19)).

D'après (H_8) , $M_{i,j}$ est alors croissant par rapport à i .

Comme l'ordre *rh* entraîne l'ordre stochastique, on a, de plus, $D_{R_1} \prec_{sto} D_{R_2}$.

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{m_0} D_{R_1} (i) M_{i,j} \leq \sum_{i=1}^{m_0} D_{R_2} (i) M_{i,j}.$$

Puis, à l'aide de (1.22), on obtient

$$a_\infty(D_{R_1}) = \frac{D_{R_1} M ({}^t D_{R_1})}{D_{R_1} g \bar{1}^m} \leq \frac{D_{R_2} M ({}^t D_{R_2})}{D_{R_2} g \bar{1}^m} = a_\infty(D_{R_2}). \quad \blacksquare$$

Remarque 1.31 (H_9) et (H_{10}) sont de simples généralisations de (H_6) et (H_7) . De plus, en classant les états de panne par ordre de dégradation, $(\mathbb{E}(R_{m+k,i}))_{1 \leq k \leq p}$ est en général monotone. L'hypothèse la plus restrictive est en fait (H_8) , c'est-à-dire la monotonie de $(\sum_{l=k}^p (g A_2) (i, m+l))_{1 \leq i \leq m_0}$. Rappelons qu'elle signifie que le système est dans un état

de panne "stochastiquement" plus (ou moins) dégradé lorsqu'il part de i que lorsqu'il part de $i + 1$. Cette propriété n'est en fait pas nécessaire pour avoir (1.21), et elle n'est pas toujours vérifiée, même lorsque le processus est de type (T) et les états rangés par ordre de dégradation croissante. Remarquons que, dans la démonstration précédente, nous avons choisi de montrer $\frac{D_{R_1}M({}^tD_{R_1})}{D_{R_1}(g1^m)} \leq \frac{D_{R_1}M({}^tD_{R_2})}{D_{R_2}(g1^m)}$, puis $D_{R_1}M({}^tD_{R_2}) \leq D_{R_2}M({}^tD_{R_2})$. Cette dernière inégalité nécessite la croissance de $M_{i,j}$ par rapport à i , ce qui nous conduit à (H_8) . On peut aussi procéder dans "l'autre sens" et montrer tout d'abord que $\frac{D_{R_1}M({}^tD_{R_1})}{D_{R_1}(g1^m)} \leq \frac{D_{R_2}M({}^tD_{R_1})}{D_{R_2}(g1^m)}$, puis $D_{R_2}M({}^tD_{R_1}) \leq D_{R_2}M({}^tD_{R_2})$. Le problème est alors que cette dernière inégalité nécessite la croissance de $M_{i,j}$ par rapport à j , ou encore de $\mathbb{E}(R_{m+k,j})$ avec j , ce qui ne paraît guère raisonnable (sauf dans le cas où $\mathbb{E}(R_{m+k,j})$ ne dépend pas de j , cas du § 1.3.4.1).

Nous testons ici les résultats du théorème 1.30 sur un exemple.

Exemple 1.32 On considère un système de type 2 sur 4 formé par quatre composants identiques et indépendants. Les composants ne sont pas réparables pendant que le système fonctionne. Le système est soumis à un "mode commun" de taux d'apparition Λ constant. La probabilité qu'un composant tombe en panne lors de l'apparition du mode commun est p' ($0 < p' < 1$). On suppose ici que les défaillances des composants se produisent uniquement lors de l'apparition de ce mode commun. On a alors :

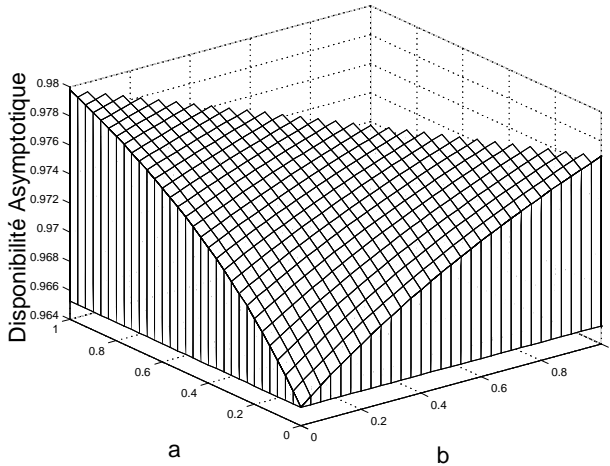
$$A_1 = \Lambda \begin{pmatrix} -p'(2-p')(p'^2-2p'+2) & 4p'(1-p')^3 & 6p'^2(1-p')^2 \\ 0 & -p'(p'^2-3p'+3) & 3p'(1-p')^2 \\ 0 & 0 & -p'(2-p') \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \Lambda \begin{pmatrix} 4p'^3(1-p') & p'^4 \\ 3p'^2(1-p') & p'^3 \\ 2p'(1-p') & p'^2 \end{pmatrix}.$$

On prend $\Lambda = 1$, $p = 0.2$ et $\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet,\bullet})} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$.

(On peut par exemple imaginer qu'il y a trois réparateurs qui mettent en moyenne 0.1 unité de temps pour réparer un composant).

Il est facile de vérifier que toutes les hypothèses (H_8) , (H_9) et (H_{10}) sont vraies et on obtient, pour $D_R = [a, b, 1 - a - b]$:



La disponibilité asymptotique est optimale en δ_1 .

$$A_\infty(\delta_1) \simeq 0.9798 > A_\infty(\delta_2) \simeq 0.9769 > A_\infty(\delta_3) \simeq 0.9653.$$

1.3.5 Deux exemples "classiques"

Nous terminons maintenant notre étude en considérant deux types de systèmes classiques en fiabilité : les systèmes k sur n (§ 1.3.5.1) et les systèmes formés de n composants identiques en redondance passive (§ 1.3.5.2). Pour de tels systèmes, nous recherchons, d'une part, la loi optimale de redémarrage (c'est-à-dire ici le nombre de composants à réparer lors d'une panne), d'autre part, le nombre de composants optimal à installer dans le système (voir ci-dessous pour plus de détails). Notons que Barlow et Proschan ont déjà étudié ce type de problème, à savoir l'optimisation du nombre de composants à installer dans un système comportant des composants en parallèle ou en redondance passive, dans le chapitre 6 de [6] (où ils donnent par ailleurs de nombreuses références sur le sujet). Leur approche est en fait quelque peu différente. En effet, le premier problème qu'ils considèrent est l'optimisation de la fiabilité (qui ne fait pas intervenir de réparations) sous une contrainte (du type coût, poids, ...). Ils proposent dans ce cas un algorithme pour trouver le nombre optimal de composants à installer. Le second problème qu'ils considèrent est le cas d'un système pouvant subir deux types de panne : un premier type, qui est moins probable lorsque l'on augmente le nombre de composants dans le système, un second type, qui est plus probable. Dans ce cas, ils donnent (comme nous) le nombre optimal de composants à installer, les critères utilisés étant la fiabilité et la première durée moyenne de bon fonctionnement du système (qui ne fait pas non plus intervenir de réparations).

1.3.5.1 Cas d'un système k sur n

Nous considérons ici un système de type " k sur n " ($k \geq 1$). Il est composé de n composants identiques et indépendants, non réparables tant que le système fonctionne, de taux de défaillance constant λ (non nul). Le système fonctionne si et seulement si au moins k composants fonctionnent. Nous supposons qu'il n'y a qu'un seul réparateur, qu'il met en moyenne une durée c pour arriver lorsqu'on l'appelle (à l'instant où le système tombe en panne) et qu'il met en moyenne une durée r pour réparer un composant ($r, c \in \mathbb{R}^+$). Nous nous posons alors les deux questions suivantes : pour un tel système (avec k et n fixés), quel est le meilleur état de redémarrage après réparation, c'est-à-dire combien faut-il réparer de composants ? Sachant que le système fonctionne lorsque au moins k composants fonctionnent (k fixé), combien faut-il prévoir de composants dans le système, c'est-à-dire quelle est la valeur de n pour laquelle la disponibilité asymptotique est maximale lorsque l'on effectue des réparations complètes ?

On note i l'état où $i - 1$ composants sont en panne, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. On a ici $m = n - k + 1$ états de marche. Le système ne peut tomber en panne qu'à partir de l'état m et l'état de panne (unique) correspond à $n - k + 1$ composants en panne.

D'après la proposition 1.21 (cas (C_1)), nous savons alors que nous pouvons rechercher la loi optimale de redémarrage parmi les δ_i pour $1 \leq i \leq n - k + 1$.

Remarquons enfin que les hypothèses concernant les durées de réparation nous permettent d'écrire $\mathbb{E}(R_{m+1,i})$ sous la forme $\mathbb{E}(R_{m+1,i}) = c + (n - i - k + 2)r$, car il faut réparer $n - i - k + 2$ composants pour faire passer le système de l'état de panne $n - k + 2$ à l'état de marche i ($1 \leq i \leq m = n - k + 1$).

On obtient alors les résultats suivants.

Proposition 1.33 *Si $r = 0$ ou $n = k$, il faut réparer tous les composants.*

Si $r \neq 0$ et $n > k$,

- *Si $\frac{c}{r} \leq \frac{1}{k}$, il ne faut réparer qu'un seul composant.*
- *Si $\frac{c}{r} \geq \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1\right)$, il faut réparer tous les composants.*
- *Si $\frac{1}{k} < \frac{c}{r} < \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1\right)$, le meilleur redémarrage est celui en i_0 ($2 \leq i_0 \leq m-1$), c'est-à-dire qu'il faut réparer $n - i_0 - k + 2$ composants, où i_0 est donné par*

$$\sum_{j=k}^{n-i_0} \left(\frac{n-i_0+1}{j} - 1\right) \leq \frac{c}{r} \leq \sum_{j=k}^{n-i_0+1} \left(\frac{n-i_0+2}{j} - 1\right).$$

Remarque 1.34 *Les conditions obtenues ainsi que la valeur de i_0 dans le dernier cas sont indépendantes de λ .*

Démonstration. Notons tout d'abord que si $k = n$, il n'y a qu'un seul état de marche et donc un seul redémarrage possible, correspondant à la réparation de tous les composants.

Supposons maintenant $n > k$.

Soit $1 \leq i \leq n - k + 1$. D'après § 1.3.2.3, on a alors $a_\infty(\delta_i) = \frac{\mathbb{E}(R_{m+1,i})}{\sum_{j=1}^m g_{i,j}}$.

La matrice A_1 associée à ce système est de la forme :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -n\lambda & n\lambda & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -(n-1)\lambda & (n-1)\lambda & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(k+1)\lambda & (k+1)\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k\lambda \end{bmatrix},$$

ce qui nous permet de calculer facilement son inverse.

On obtient ainsi :

$$g = -A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n\lambda} & \frac{1}{(n-1)\lambda} & \frac{1}{(n-2)\lambda} & \cdot & \frac{1}{(k+1)\lambda} & \frac{1}{k\lambda} \\ 0 & \frac{1}{(n-1)\lambda} & \frac{1}{(n-2)\lambda} & \cdot & \frac{1}{(k+1)\lambda} & \frac{1}{k\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(n-2)\lambda} & \cdot & \frac{1}{(k+1)\lambda} & \frac{1}{k\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(k+1)\lambda} & \frac{1}{k\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k\lambda} \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$a_\infty(\delta_i) = \frac{c + (n - i - k + 2)r}{\sum_{j=i}^{n-k+1} \frac{1}{(n-j+1)\lambda}} = \lambda \frac{c + (n - i - k + 2)r}{\sum_{j'=k}^{n-i+1} \frac{1}{j'}}$$

avec $j' = n - j + 1$.

Si $r = 0$, $a_\infty(\delta_i) = \lambda \frac{c}{\sum_{j'=k}^{n-i+1} \frac{1}{j'}}$ et $i \mapsto a_\infty(\delta_i)$ est croissante. Le meilleur i est donc $i = 1$. (On retrouve ici le résultat du **théorème 1.25** dans un cas particulier).

Si $r \neq 0$:

$$\begin{aligned}
(a_\infty(\delta_i) \leq a_\infty(\delta_{i+1})) &\Leftrightarrow \left(\frac{c + (n - i - k + 2)r}{c + (n - i - k + 1)r} \leq \frac{\sum_{j=k}^{n-i+1} \frac{1}{j}}{\sum_{j=k}^{n-i} \frac{1}{j}} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{c + (n - i - k + 1)r} \leq 1 + \frac{\frac{1}{n-i+1}}{\sum_{j=k}^{n-i} \frac{1}{j}} \right) \\
&\Leftrightarrow \left((n - i + 1) \sum_{j=k}^{n-i} \frac{1}{j} \leq \frac{c + (n - i - k + 1)r}{r} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{j=k}^{n-i} \frac{n - i + 1}{j} - (n - i - k + 1) \leq \frac{c}{r} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{j=k}^{n-i} \underbrace{\left(\frac{n - i + 1}{j} - 1 \right)}_{\geq 0} \leq \frac{c}{r} \right)
\end{aligned}$$

La suite définie par $u(i) = \sum_{j=k}^{n-i} \left(\frac{n-i+1}{j} - 1 \right)$ pour $1 \leq i \leq n - k$ est clairement décroissante.

D'où la discussion :

- Si $u(1) \leq \frac{c}{r}$, $i \mapsto a_\infty(\delta_i)$ est croissante. Le meilleur i est $i = 1$.
(Notons que $u(1) = \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1 \right)$).
- Si $u(n - k) \geq \frac{c}{r}$, $i \mapsto a_\infty(\delta_i)$ est décroissante. Le meilleur i est $i = n - k + 1 = m$.
(Notons que $u(n - k) = \sum_{j=k}^k \left(\frac{k+1}{j} - 1 \right) = \frac{k+1}{k} - 1 = \frac{1}{k}$).
- Si $u(n - k) < \frac{c}{r} < u(1)$, comme $(u(i))$ est décroissante, il existe i tel que

$$u(i) \leq \frac{c}{r} \leq u(i - 1).$$

Par ailleurs, on a alors

$$a_\infty(\delta_1) > a_\infty(\delta_2) \geq \dots \geq a_\infty(\delta_i)$$

et

$$a_\infty(\delta_{n-k+1}) > a_\infty(\delta_{n-k}) \geq \dots \geq a_\infty(\delta_{i+1}) \geq a_\infty(\delta_i).$$

On en déduit que $a_\infty(\delta_i)$ est minimal (avec $2 \leq i \leq n - k$).

$A_\infty(\delta_i)$ est donc maximale. ■

Corollaire 1.35 *Si $r = 0$, il faut installer le plus grand nombre possible de composants.*

Si $r \neq 0$,

- *Si $c = 0$, il faut installer exactement k composants.*
- *Si $c \neq 0$, il faut installer n_0 composants ($n_0 \geq k$, indépendant de λ), où n_0 est*

l'unique entier tel que :

$$\sum_{j=k}^{n_0-1} \left(\frac{n_0}{j} - 1 \right) \leq \frac{c}{r} < \sum_{j=k}^{n_0} \left(\frac{n_0+1}{j} - 1 \right).$$

Démonstration. Supposons r non nul. Dire qu'il faut installer n_0 composants dans le système signifie que, si $n \geq n_0 + 1$, il est inutile de réparer tous les composants, et si $n \leq n_0$, il faut tous les réparer. Notre problème est donc de déterminer n_0 tel que

$$\frac{c}{r} < \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1 \right), \text{ si } n \geq n_0 + 1 \quad (1.23)$$

$$\text{et } \frac{c}{r} \geq \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1 \right), \text{ si } k+1 \leq n \leq n_0 \text{ (et donc } k+1 \leq n_0). \quad (1.24)$$

Si $c = 0$, la première inégalité est vérifiée pour tout $n \geq k+1$ et $n_0 = k$.

Supposons maintenant $c \neq 0$.

La suite définie par $v(n) = \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{n}{j} - 1 \right)$ pour $n \geq k+1$ est clairement strictement croissante et $v(k+1) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v(n) = +\infty$. Il existe donc un unique n_0 tel que $v(n_0) \leq \frac{c}{r} < v(n_0+1)$ et les propriétés (1.23) et (1.24) sont alors clairement vérifiées. ■

Nous donnons maintenant un exemple d'utilisation de ces résultats.

Exemple 1.36 *Considérons un système 5 sur n . Pour $c = 1$, $r = 0.1$:*

$$\sum_{j=5}^{15} \left(\frac{16}{j} - 1 \right) \simeq 8.7583 \leq \frac{c}{r} = 10 < \sum_{j=5}^{16} \left(\frac{17}{j} - 1 \right) \simeq 10.056.$$

La disponibilité asymptotique est donc optimale lorsque l'on installe 16 composants (et que l'on effectue des réparations complètes).

On obtient alors $A_\infty(\delta_1) \simeq \frac{1}{1+1.7005\lambda} \simeq 0.85466$ pour $\lambda = 0.1$.

Pour $c = 0.5$ (le reste étant inchangé), le nombre optimal de composants est alors 12. Pour $c = 0.2$, il vaut 9.

1.3.5.2 Cas de n composants en redondance passive

Nous considérons ici un système formé par n composants identiques en redondance passive, que l'on suppose numérotés de 1 à n . Au départ, le premier composant fonctionne, les $n-1$ autres étant en attente. (Cet état est noté "1"). Lorsque le composant 1 tombe en panne, on essaye le deuxième. Celui-ci démarre (instantanément) avec une probabilité γ ($0 < \gamma < 1$). S'il a démarré, il remplace alors le composant 1 jusqu'à ce qu'il tombe lui-même en panne. S'il n'a pas démarré, on essaye alors le composant 3, qui démarre lui-même avec une probabilité γ et ainsi de suite. On suppose que les composants ont pour taux de panne (constant) λ (non nul) et qu'ils ne sont pas réparables tant que le système fonctionne.

On note i l'état où $i-1$ composants sont en panne, pour $i \in \{1, \dots, n\}$. On a ici $m = n$ états de marche. L'état de panne (unique) correspond au cas où les n composants sont en panne. On commence par réparer le composant n , puis le composant $n-1$, etc. On suppose là encore que les durées moyennes de réparation se mettent sous la forme

$\mathbb{E}(R_{m+1,i}) = c + (n + 1 - i)r$, où $n + 1 - i$ représente le nombre de composants à réparer pour faire passer le système de l'état de panne $n + 1$ à l'état de marche i ($1 \leq i \leq n$).

Nous nous posons alors les mêmes questions que dans le cas d'un système k sur n , à savoir, pour n fixé, quel est le meilleur état de redémarrage après réparation (là encore, il suffit de considérer les δ_i), et pour c, r, λ, γ fixés, quel est le nombre optimal de composants à installer.

On obtient les résultats suivants.

Proposition 1.37 *Pour n fixé :*

- Si $r < \frac{\gamma}{1-\gamma}c$ (condition indépendante de λ et de n), il faut réparer tous les composants.
- Si $r \geq \frac{\gamma}{1-\gamma}c$, il ne faut réparer qu'un seul composant.

On en déduit :

- Si $r < \frac{\gamma}{1-\gamma}c$, il faut installer le plus grand nombre possible de composants.
- Si $r \geq \frac{\gamma}{1-\gamma}c$, il est inutile d'installer des composants en redondance passive, le mieux est de n'utiliser qu'un seul composant.

Démonstration. La matrice A_1 associée à ce système est de la forme :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda\gamma & \lambda(1-\gamma)\gamma & \lambda(1-\gamma)^2\gamma & \cdot & \lambda(1-\gamma)^{n-2}\gamma \\ 0 & -\lambda & \lambda\gamma & \lambda(1-\gamma)\gamma & \cdot & \lambda(1-\gamma)^{n-3}\gamma \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda\gamma & \cdot & \lambda(1-\gamma)^{n-4}\gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix},$$

et on obtient :

$$g = -A_1^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma & \cdot & \gamma & \gamma \\ 0 & 1 & \gamma & \cdot & \gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \gamma & \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit :

$$a_\infty(\delta_i) = \frac{\mathbb{E}(R_{m+1,i})}{\sum_{j=1}^m g_{i,j}} = \lambda \frac{c + (n + 1 - i)r}{(n - i)\gamma + 1}$$

et

$$\begin{aligned} (a_\infty(\delta_i) < a_\infty(\delta_{i+1})) &\Leftrightarrow \frac{c + (n + 1 - i)r}{(n - i)\gamma + 1} < \frac{c + (n - i)r}{(n - i - 1)\gamma + 1} \\ &\Leftrightarrow r < \frac{\gamma}{1 - \gamma}c, \text{ après simplifications. } \blacksquare \end{aligned}$$

1.4 Conclusion

Nous avons recherché, dans ce chapitre, la loi optimale de redémarrage d'un système après réparation, le critère utilisé étant la disponibilité asymptotique. Nous avons vu, en

particulier, que la meilleure loi n'était pas nécessairement une masse de Dirac, c'est-à-dire qu'elle ne correspondait pas forcément au redémarrage dans un état donné. Il faut donc, dans le cas général, considérer toutes les lois de redémarrages possibles.

Nous avons vu, d'autre part, que, pour que la réparation complète soit optimale, il n'était pas suffisant que le système se dégrade selon un processus stochastiquement monotone. Nous avons ainsi été amenés à utiliser une notion d'ordre plus forte que l'ordre stochastique usuel, à savoir l'ordre rh , et à développer quelques résultats complémentaires aux travaux de Kijima concernant les processus markoviens rh -monotones (qui se place dans un cadre plus général que le nôtre).

En ce qui concerne l'ordre rh , remarquons que son utilisation n'est pas encore très développée en fiabilité, surtout si l'on compare avec des notions similaires (mais un peu plus anciennes) comme l'ordre hr ou l'ordre lr . Malgré tout, cet ordre a fait l'objet de quelques publications ces toutes dernières années ([12], [42], [47], [48],...), principalement de la part de Shaked et al. Ces articles comportent déjà quelques applications à la fiabilité, mais ils contiennent aussi de nombreux résultats théoriques. On peut alors penser que, à la lumière de ceux-ci, il serait sans doute intéressant de réfléchir sur de nouvelles applications potentielles de l'ordre rh dans ce domaine.

De la même façon, l'usage des processus de Markov monotones n'est pas encore très répandu en fiabilité. Ils semblent pourtant tout à fait adaptés pour décrire l'évolution de systèmes markoviens ayant des propriétés de vieillissement (voir [39]). Rappelons que ces systèmes vieillissants sont tout à fait fondamentaux en fiabilité (une grosse partie de la littérature leur a d'ailleurs été consacrée). Comme pour l'ordre rh , il est alors naturel d'imaginer que les récents développements concernant les processus de Markov monotones (voir l'introduction pour des références) pourraient peut-être mener à de nouvelles applications en fiabilité.

Chapitre 2

Un modèle de maintenance préventive conditionnelle

2.1 Introduction

On considère ici un système pouvant se dégrader petit à petit pendant qu'il fonctionne, jusqu'à ce qu'il tombe en panne. Si cette panne est très pénalisante, il peut être judicieux de la prévenir en arrêtant prématurément le système, afin de le remettre en bon état de marche. Ainsi, il est sans doute préférable de rajouter un peu d'huile dans le moteur d'une voiture plutôt que d'attendre de le "griller"... Cela signifie que, de temps en temps, on va regarder le niveau donné par la jauge et remettre de l'huile lorsqu'il a atteint un seuil que l'on juge alarmant. Remarquons que, tant que ce niveau est proche du niveau maximal, il n'y a pas lieu de le regarder très souvent. En revanche, lorsqu'il diminue, il vaut mieux le faire plus fréquemment.

On s'intéresse ici à un système du même type que celui étudié dans le premier chapitre : il a une évolution markovienne tant qu'il fonctionne, un nombre fini d'états, et des lois générales pour les réparations. La seule différence est que nous nous restreignons maintenant au cas où les durées des réparations ne dépendent pas de l'état dans lequel le système redémarre après réparation. Comme dans l'exemple du niveau d'huile, l'état de ce système lorsqu'il fonctionne n'est supposé connu que par des inspections. En revanche, une panne est aussitôt détectée. Ce système est soumis au programme d'entretien suivant, aussi appelé *politique de maintenance préventive* dans le langage fiabiliste : nous inspectons le système (à des instants aléatoires), jusqu'à ce que l'on trouve le système dans un état de marche jugé dégradé. Dans ce cas, on arrête le système et on commence une opération de maintenance préventive. Cette opération a une durée aléatoire et dépend de l'état de dégradation du système. Les intervalles inter-inspections (aléatoires) dépendent de l'évolution du système. (Comme pour la jauge d'huile, plus le système se dégrade, plus il faut l'inspecter souvent). Enfin, si le système est tombé en panne avant que l'on ait commencé une opération de maintenance, on le répare, de la même façon que pour le système sans maintenance. Cette politique de maintenance préventive est dite *conditionnelle* (ou dynamique) car liée à l'évolution du système entre deux opérations de maintenance.

Si l'on compare aux travaux publiés précédemment, on peut remarquer qu'en général, les différentes politiques de maintenance étudiées sont liées à l'évolution du système de façon bien moins complexe que la nôtre (elles sont même assez fréquemment indépendantes). Ainsi, les opérations de maintenance sont souvent considérées comme instantanées (cf [9], [24], [27], [28], [34], ...) ou de durée indépendante de l'état de dégradation du système

(cf [54]). De la même façon, les inspections du système sont fréquemment supposées périodiques, et donc déterministes et indépendantes de l'évolution du système (cf [4], [41], [54], ...). A ce propos, on peut d'ailleurs remarquer que si les inspections pratiquées dans l'industrie sont généralement périodiques, c'est souvent pour des raisons de facilité : d'une part, parce que les inspections sont ainsi plus facile à planifier, d'autre part, parce que l'"échancier" optimal pour les instants d'inspections est souvent très difficile à déterminer.

Une modélisation très proche de la nôtre peut malgré tout être trouvée dans un article de C. Coccozza-Thivent ([20]), aussi bien pour la politique de maintenance préventive que pour le système initial. Les méthodes utilisées sont en revanche radicalement différentes.

Les critères utilisés pour mesurer les performances du système (avec ou sans maintenance) sont ici la disponibilité et le coût moyen asymptotiques.

Ce chapitre se présente de la façon suivante : nous commençons par décrire le système initial et la politique de maintenance préventive dans le paragraphe **2.2**. Nous montrons ensuite, dans le paragraphe **2.3**, que la loi du processus qui décrit l'évolution du système soumis à la politique de maintenance converge vers une certaine loi π , que nous déterminons. Le paragraphe suivant (§**2.4**) est consacré à l'étude de la politique de maintenance avec, comme critère d'étude, la disponibilité asymptotique. Nous montrons tout d'abord qu'elle existe et nous la calculons. Nous donnons ensuite des conditions pour que la politique de maintenance préventive améliore cette disponibilité asymptotique. Puis nous nous intéressons à l'optimisation de la politique de maintenance relativement aux lois inter-inspections. Nous terminons ce paragraphe par l'étude de quelques exemples. Le plan d'étude du paragraphe suivant (§**2.5**) est similaire, mais le critère d'étude est maintenant le coût moyen symptotique. Enfin, nous concluons dans le paragraphe **2.6**.

2.2 Description du système et de la maintenance - Notations

Le système étudié ici correspond au cas particulier 1.3.2.2 étudié dans le premier chapitre (la description générale est située au § **1.3.1**). Rappelons brièvement le modèle et les notations : les états de marche sont notés 1 à m , les états de panne $m + 1$ à $m + p$. Au départ, le système est dans l'un des états de marche et il évolue de façon markovienne tant qu'il est en état de marche. Il tombe en panne au bout d'un temps presque sûrement fini : si T désigne la première durée de fonctionnement du système, on a $\mathbb{P}_i(T < +\infty) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq m$. La réparation a une durée aléatoire indépendante de l'évolution du système antérieure à la panne. Lorsque le système est dans l'état de panne $m + k$ ($1 \leq k \leq p$), la durée de la réparation a la même loi (quelconque) qu'une certaine variable aléatoire R_{m+k} de moyenne finie $\mathbb{E}(R_{m+k})$. A l'issue d'une réparation, le système est dans un état de marche supposé indépendant de l'évolution du système antérieure à la panne. Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $D_R(i)$ est alors la probabilité que le système soit dans l'état i après une réparation.

On note $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus décrivant l'évolution de ce système jusqu'à la première panne, les états de panne étant rendu absorbants :

$$X_t = \begin{cases} \text{état du système} & \text{si } t < T, \\ m + k & \text{si } t \geq T. \end{cases}$$

(X_t) est un processus de Markov. On note A sa matrice génératrice et $(P_t(i, j))_{1 \leq i, j \leq m+p}$ son noyau.

La matrice A est découpée de la façon suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \overline{0}^{p,m} & \overline{0}^{p,p} \end{array} \right)$$

où A_1 représente la matrice A tronquée à l'ordre m ($A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$) et A_2 est la sous-matrice de A formée par les taux de panne ($A_2 = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq m+p}$).

On note aussi g la matrice carrée d'ordre m définie par

$$g_{i,j} = \int_0^{+\infty} P_t(i,j) dt \text{ pour tous } i, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Rappelons que $g_{i,j}$ représente la durée moyenne passée dans l'état j sachant que $X_0 = i$ et que $g = -A_1^{-1}$ (cf **théorème 4.25** de [35]).

Ce système est appelé *système initial* par opposition au système soumis à la politique de maintenance préventive décrite ci-dessous appelé *système maintenu*.

La politique de maintenance préventive est la suivante : le système est inspecté *instantanément* aux instants $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ jusqu'à ce que, lors d'une inspection, on trouve le système dans un état "suffisamment" dégradé pour commencer une opération de maintenance, ou bien déjà en panne, en train d'être réparé.

Plus précisément (voir aussi la figure 2.1 page suivante), on considère m lois de probabilité $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ sur \mathbb{R}_+ représentant les lois des durées inter-inspections, q un entier fixé appartenant à $\{1, \dots, m-1\}$ et $m-q$ variables aléatoires positives $M_{q+1}, M_{q+2}, \dots, M_m$ indépendantes, de lois de probabilité quelconques, représentant les durées des opérations de maintenance. On suppose que $0 < \int_0^{+\infty} t \cdot \rho_i(dt) < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et que $M_{q+1}, M_{q+2}, \dots, M_m$ ont des moyennes finies.

On pose alors $S_0 = 0$ et on note S_1 une variable aléatoire de loi ρ_{X_0} (on rappelle que $X_0 \in \{1, \dots, m\}$). Le système est inspecté aux instants $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ définis de manière récursive de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

- Si $X_{S_n} \in \{1, \dots, q\}$, le système est en "bon" état. On le laisse évoluer et on l'inspecte à nouveau à l'instant $S_{n+1} = S_n + U^{(n)}$, où $U^{(n)}$ est une variable aléatoire de loi $\rho_{X_{S_n}}$ indépendante de l'évolution du système avant S_n . ($U^{(n)}$ ne dépend que de X_{S_n}).
- Si $X_{S_n} \in \{q+1, \dots, m\}$, le système est "dégradé". On arrête le système et on commence une opération de maintenance dont la durée (aléatoire) est indépendante de l'évolution du système avant l'instant S_n , de même loi que $M_{X_{S_n}}$. (Là encore, $M_{X_{S_n}}$ ne dépend que de X_{S_n}). On note $\mu_{X_{S_n}}$ l'état de maintenance associé. A l'issue d'une opération de maintenance, le système est dans un état de marche indépendant de l'évolution antérieure du système. On note $D_M(i)$ la probabilité que le système soit dans l'état i après une opération de maintenance, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.
- Si le système tombe en panne avant l'instant S_n , une réparation est aussitôt commencée. Cette réparation s'effectue de la même façon que pour le système initial.

Après une période d'arrêt (une réparation ou une opération de maintenance), on ré-initialise la succession des inspections, c'est-à-dire que l'on recommence une nouvelle série d'inspections, définie par récurrence de la même façon que précédemment. La seule différence est que l'instant d'initialisation de la série d'inspections est maintenant la fin de la période d'arrêt, et non plus l'instant 0.

Le processus décrivant l'état du système soumis à la politique de maintenance, à valeurs dans $\{1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_{q+1}, \dots, \mu_m\}$, est noté $(Z_t)_{t \geq 0}$.

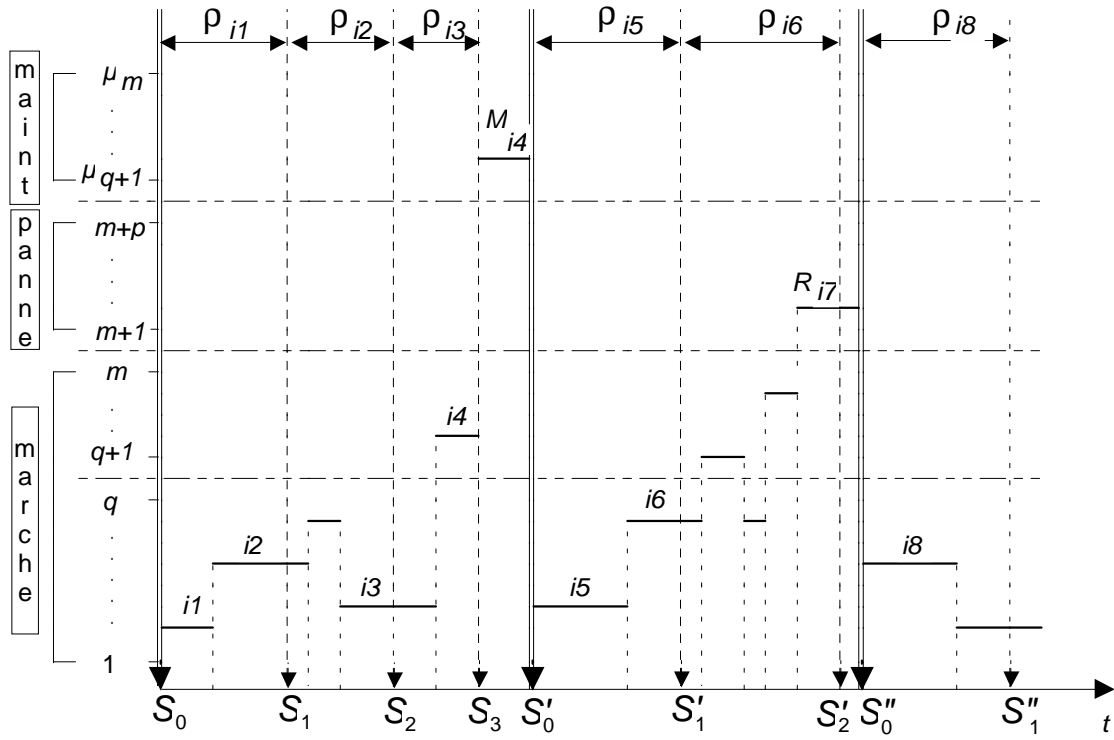


FIGURE 2.1: la politique de maintenance préventive

Notations matricielles : – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{1}^n$ et $\bar{0}^n$ désignent respectivement les vecteurs colonnes d'ordre n ne comportant que des 1 et des 0.

– $D_R = (D_R(1), \dots, D_R(m))$ et $D_M = (D_M(1), \dots, D_M(m))$.

$$- \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} = \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \mathbb{E}(M_{q+1}) \\ \mathbb{E}(M_{q+2}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(M_m) \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(R_{m+1}) \\ \mathbb{E}(R_{m+2}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(R_{m+p}) \end{pmatrix}.$$

– b est la matrice carrée d'ordre m définie par :

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \mathbb{P}_i(Z_{S_1} = j \cap T > S_1) \\ &= \mathbb{P}_i(X_{S_1} = j), \text{ pour tous } i, j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

– $\bar{b}^{q,q}$, $\bar{b}^{q,m-q}$, $\bar{b}^{m-q,q}$ et $\bar{b}^{m-q,m-q}$ sont des matrices extraites de b définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{b}^{q,q} &= (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq q}, \quad \bar{b}^{q,m-q} = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq q, q+1 \leq j \leq m}, \\ \bar{b}^{m-q,q} &= (b_{i,j})_{q+1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq q} \text{ et } \bar{b}^{m-q,m-q} = (b_{i,j})_{q+1 \leq i, j \leq m}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$b = \begin{pmatrix} \bar{b}^{q,q} & \bar{b}^{q,m-q} \\ \bar{b}^{m-q,q} & \bar{b}^{m-q,m-q} \end{pmatrix}.$$

Ces notations étant prises, nous commençons par montrer que la loi du processus (Z_t) décrivant l'état du système maintenu converge quand $t \rightarrow +\infty$ vers une certaine loi π que nous déterminons.

2.3 Loi asymptotique (résultats préliminaires)

Avant d'étudier la convergence de (Z_t) à proprement parler, nous donnons tout d'abord deux résultats "techniques", qui nous seront utiles tout au long de notre étude.

Lemme 2.1 $I_q - \bar{b}^{q,q}$ est inversible.

Démonstration. D'après le théorème 1.5-1 de [17], il est suffisant de montrer que la suite $((\bar{b}^{q,q})^n)$ converge vers $\bar{0}^q$. Pour cela, on commence par calculer $(\bar{b}^{q,q})^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on note (A_n) la suite d'événements définie par

$$\begin{aligned} A_0 &= \Omega, \text{ univers sur lequel est défini } (Z_t) \\ \text{et } A_n &= \bigcap_{k=1}^n \{X_{S_k} \in \{1, \dots, q\}\}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la propriété définie par :

$$(\bar{b}^{q,q})^n(i, j) = \mathbb{P}_i(A_{n-1} \cap X_{S_n} = j), \text{ pour tous } i, j \in \{1, \dots, q\}.$$

Montrons P_n par récurrence.

P_1 est vraie par définition de A_0 et de b .

Supposons P_n vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, q\}$, on a alors :

$$\begin{aligned} (\bar{b}^{q,q})^{n+1}(i, j) &= \sum_{k=1}^q (\bar{b}^{q,q})^n(i, k) \times (\bar{b}^{q,q})(k, j) = \sum_{k=1}^q \mathbb{P}_i(A_{n-1} \cap X_{S_n} = k) \mathbb{P}_k(X_{S_1} = j) \\ &= \sum_{k=1}^q \mathbb{P}_i(A_{n-1} \cap X_{S_n} = k) \mathbb{P}_i(X_{S_{n+1}} = j / X_{S_n} = k \cap A_{n-1}) \text{ (P}^{t\acute{e}} \text{ de Markov)} \\ &= \sum_{k=1}^q \mathbb{P}_i(A_{n-1} \cap X_{S_n} = k \cap X_{S_{n+1}} = j) \\ &= \mathbb{P}_i(A_{n-1} \cap X_{S_n} \in \{1, \dots, q\} \cap X_{S_{n+1}} = j) \\ &= \mathbb{P}_i(A_n \cap X_{S_{n+1}} = j) \end{aligned}$$

et P_{n+1} est vraie. P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que, pour vérifier que la suite $((\bar{b}^{q,q})^n)$ converge vers $\bar{0}^q$, il est en fait suffisant de vérifier que la suite $(\mathbb{P}_i(A_n))$ converge vers 0 pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$.

Or, pour $i \in \{1, \dots, q\}$, on a $\mathbb{P}_i(A_n) \leq \mathbb{P}_i(S_n < T)$. De plus, comme $\int_0^{+\infty} t \cdot \rho_i(dt) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$, la suite $(\mathbb{E}(S_n))$ tend vers $+\infty$ (car $\mathbb{E}(S_n) \geq n \times \min_{1 \leq i \leq m} \int_0^{+\infty} t \cdot \rho_i(dt)$). On peut donc extraire de (S_n) une sous-suite qui tend presque sûrement vers $+\infty$. Comme (S_n) est croissante, la suite (S_n) tend presque sûrement vers $+\infty$.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_i(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \mathbb{P}_i(S_n < T) = \mathbb{P}_i(T = +\infty) = 0$$

car $\{1, \dots, m\}$ est non absorbant. $I_q - \bar{b}^{q,q}$ est donc inversible. ■

Lemme 2.2 Soit x et y deux vecteurs colonnes d'ordre m , quelconques.

Les égalités

$$x(i) = \sum_{j=1}^q x(j) b_{i,j} + y(i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m \quad (2.1)$$

se traduisent matriciellement par

$$x = By$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & \bar{0}^{q,m-q} \\ \bar{b}^{m-q,q} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & I_{m-q} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Notons \bar{x}^q (resp. \bar{y}^q) le vecteur colonne d'ordre q formé par les q premières coordonnées de x (resp. y). De même pour \bar{x}^{m-q} (resp. \bar{y}^{m-q}) avec les $m - q$ dernières.

Avec ces notations, (2.1) pour $1 \leq i \leq q$ s'écrit $\bar{x}^q = \bar{b}^{q,q} \bar{x}^q + \bar{y}^q$, ou encore

$$\bar{x}^q = (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \bar{y}^q \quad (2.2)$$

car $I_q - \bar{b}^{q,q}$ est inversible (cf **lemme 2.1**).

De plus, (2.1) pour $q + 1 \leq i \leq m$ s'écrit $\bar{x}^{m-q} = \bar{b}^{m-q,q} \bar{x}^q + \bar{y}^{m-q}$.

En remplaçant \bar{x}^q par sa valeur, on obtient :

$$\bar{x}^{m-q} = \bar{b}^{m-q,q} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \bar{y}^q + \bar{y}^{m-q}. \quad (2.3)$$

Il est alors facile de voir que (2.2) et (2.3) se résument à $x = By$. ■

Donnons maintenant le résultat principal de ce paragraphe. Pour cela, on note $g(\bullet, j)$ (respectivement $A_2(\bullet, k)$, $b(\bullet, j)$) la j -ième (respectivement k -ième, j -ième) colonne de g (respectivement A_2 , b).

Théorème 2.3 Quand $t \rightarrow +\infty$, la loi de Z_t converge vers la loi π définie par :

$$\begin{aligned} \pi(j) &= \kappa D_{MR} B (I_m - b) \times g(\bullet, j) \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m, \\ \pi(m+k) &= \kappa \mathbb{E}(R_{m+k}) D_{MR} B (I_m - b) g \times A_2(\bullet, k) \text{ pour tout } 1 \leq k \leq p, \\ \pi(\mu_j) &= \kappa \mathbb{E}(M_j) D_{MR} B \times b(\bullet, j) \text{ pour tout } q+1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

où

$$D_{MR} = (D_M B (I_m - b) \bar{1}^m) D_R + \left(D_R B b \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} \right) D_M$$

et κ est la constante réelle de normalisation définie par

$$\kappa = \left[D_{MR} B \left((I_m - b) g \bar{1}^m + (I_m - b) g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right) \right]^{-1}.$$

Démonstration.

1. Utilisation de la théorie du renouvellement markovien.

Soient T_n le $n^{\text{ième}}$ redémarrage du système après une réparation ou une opération de maintenance et Y_n l'état du système à l'instant T_n . On suppose que $T_0 = 0$ et on note C l'ensemble des états de marche atteignables avec une probabilité non nulle à l'issue d'une réparation ou d'une opération de maintenance : $C = \{i \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } D_R(i) + D_M(i) > 0\}$.

(Y_n, T_n) est alors un processus de renouvellement markovien à valeurs dans $C \times \mathbb{R}^+$ car la loi de $T_{n+1} - T_n$ conditionnellement à $(T_1, \dots, T_n, Y_0, \dots, Y_n)$ est égale à la loi de $T_{n+1} - T_n$ conditionnellement à Y_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, (Z_t) est un processus semi-régénératif, associé au processus de renouvellement markovien immergé (Y, T) car la loi du processus $(Z_{t+T_n})_{t \geq 0}$ conditionnellement à $(T_1, \dots, T_n, Y_0, \dots, Y_n)$ est égale sur l'ensemble $\{Y_n = i\}$ à la loi du processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ sachant $\{Y_0 = i\}$, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $i \in C$.

(Y_n) est clairement une chaîne de Markov récurrente irréductible sur C . On note ν sa loi stationnaire. Par ailleurs, il est facile de vérifier que (Y, T) est un processus non arithmétique.

On peut alors appliquer les théorèmes généraux de la théorie du renouvellement markovien (cf [2] ou [18] par exemple). On en déduit que, si $\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(T_1) < +\infty$, la loi de Z_t converge vers la loi π donnée par :

$$\pi(\eta) = \frac{\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s = \eta\}} ds \right)}{\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(T_1)} \text{ pour tout } \eta \in \{1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_{q+1}, \dots, \mu_m\}. \quad (2.4)$$

Avant de calculer les différents termes intervenant dans π , nous calculons tout d'abord la probabilité que, partant de l'état i , la première période d'arrêt corresponde à l'état de panne $m+k$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}_i(Z_{T_1}^- = m+k)$) ou à l'état de maintenance μ_k (c'est-à-dire $\mathbb{P}_i(Z_{T_1}^- = \mu_k)$).

2. Calcul des $\mathbb{P}_i(Z_{T_1}^- = m+k)$ pour $1 \leq k \leq p$.

Rappelons que T représente la première durée de fonctionnement du système initial. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(Z_{T_1}^- = m+k) &= \mathbb{P}_i(Z_{T_1}^- = m+k \cap T > S_1) + \mathbb{P}_i(Z_{T_1}^- = m+k \cap T \leq S_1) \\ &= \sum_{l=1}^q \mathbb{P}_i(Z_{T_1}^- = m+k / Z_{S_1} = l \cap T > S_1) \mathbb{P}_i(Z_{S_1} = l \cap T > S_1) \\ &\quad + \mathbb{P}_i(X_T = m+k \cap T \leq S_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

(En effet, si $Z_{S_1} \in \{q+1, \dots, m\}$, on commence alors une opération de maintenance et le cycle ne peut pas se terminer dans l'état de panne $m+k$).

Remarquons que, dans les différentes expressions intervenant dans (2.5), on peut écrire indifféremment $T \leq S_1$ ou $T < S_1$, $T \geq S_1$ ou $T > S_1$. En effet, le système initial évoluant de façon markovienne tant qu'il est en marche, la variable aléatoire T admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Les hypothèses d'indépendance entraînent alors que $\mathbb{P}_i(T = S_1) = 0$. Cette remarque est valable dans toute la suite.

Regardons maintenant les différents termes de l'expression (2.5).

L'évolution du système initial étant markovienne tant qu'il est en fonctionnement, on a clairement

$$\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k / Z_{S_1} = l \cap T > S_1 \right) = \mathbb{P}_l \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) \text{ pour tout } 1 \leq k \leq p. \quad (2.6)$$

Par ailleurs, $\mathbb{P}_i (Z_{S_1} = l \cap T > S_1) = \mathbb{P}_i (X_{S_1} = l) = b_{i,l}$.

De plus, le dernier terme de (2.5) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i (X_T = m + k \cap T \leq S_1) &= \int_0^\infty \mathbb{P}_i (X_T = m + k \cap T \leq s) \rho_i (ds) \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^m \mathbb{P}_i (X_T = m + k \cap X_{T^-} = j \cap T \leq s) \rho_i (ds) \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^m \left(\int_0^s P_t (i, j) a_{j,m+k} dt \right) \rho_i (ds). \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $1 \leq i, j \leq m$, on a $\frac{d}{dt} P_t (i, j) = (P_t A) (i, j) = (P_t A_1) (i, j)$.

Comme A_1 est inversible et que $g = -A_1^{-1}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i (X_T = m + k \cap T \leq S_1) &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^m ((P_s - I_m) A_1^{-1}) (i, j) a_{j,m+k} \times \rho_i (ds) \\ &= - \sum_{j=1}^m \left[\left(\int_0^\infty P_s \rho_i (ds) - I_m \right) g \right] (i, j) a_{j,m+k}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\int_0^\infty P_s (i, \bullet) \rho_i (ds) = b (i, \bullet)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i (X_T = m + k \cap T \leq S_1) &= - \sum_{j=1}^m [(b - I_m) g] (i, j) a_{j,m+k} \\ &= [(I_m - b) g A_2] (i, k). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.5) et en utilisant (2.6), on a maintenant

$$\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) = \sum_{l=1}^q \mathbb{P}_l \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) b_{i,l} + [(I_m - b) g A_2] (i, k).$$

On en déduit, à l'aide du **lemme 2.2**, que le vecteur colonne $\left[\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) \right]_{1 \leq i \leq m}$ s'écrit sous la forme

$$\left[\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) \right]_{1 \leq i \leq m} = B (I_m - b) g A_2 (\bullet, k). \quad (2.7)$$

3. Calcul des $\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right)$ pour $q + 1 \leq k \leq m$

Ce calcul se fait de la même façon que précédemment.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right) &= \sum_{l=1}^q \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k / X_{S_1} = l \right) \mathbb{P}_i \left(X_{S_1} = l \right) \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k / X_{S_1} = k \right) \mathbb{P}_i \left(X_{S_1} = k \right)}_{=1} \\ &= \sum_{l=1}^q \mathbb{P}_l \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right) b_{i,l} + b_{i,k} \end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide du **lemme 2.2** que le vecteur colonne $\left[\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right) \right]_{1 \leq i \leq m}$ s'écrit sous la forme

$$\left[\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right) \right]_{1 \leq i \leq m} = B \times b(\bullet, k). \quad (2.8)$$

4. *Calcul de la matrice de transition $(P_{i,j})$ de la chaîne de Markov Y .*

Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \mathbb{P}_i(Y_1 = j) \\ &= \sum_{k=1}^p \mathbb{P}_i \left(Y_1 = j / Z_{T_1}^- = m + k \right) \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) \\ &\quad + \sum_{k=q+1}^m \mathbb{P}_i \left(Y_1 = j / Z_{T_1}^- = \mu_k \right) \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right) \\ &= D_R(j) \sum_{k=1}^p \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) + D_M(j) \sum_{k=q+1}^m \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right), \quad (2.9) \end{aligned}$$

car D_R (respectivement D_M) contrôle les redémarrages après une réparation (respectivement une opération de maintenance).

En remplaçant $\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right)$ et $\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right)$ par les valeurs obtenues aux points précédents (cf (2.7) et (2.8)), on obtient

$$P_{i,j} = D_R(j) (B(I_m - b)gA_2\bar{1}^p)(i) + D_M(j) \left(Bb \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} \right)(i),$$

pour tous $1 \leq i, j \leq m$.

Rappelons par ailleurs que $gA_2\bar{1}^p = \bar{1}^m$ (cf (1.19)).

On en déduit

$$P = B(I_m - b)\bar{1}^m D_R + Bb \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} D_M.$$

5. *Calcul de la loi stationnaire ν .*

On sait que la loi ν est caractérisée par $\nu = \nu P$ (en prenant $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$). En

remplaçant P par sa valeur, on obtient :

$$\nu = \underbrace{(\nu B (I_m - b) \bar{1}^m)}_{\in \mathbb{R}} D_R + \underbrace{\left(\nu B b \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} \right)}_{\in \mathbb{R}} D_M.$$

Notons x le réel $x = \nu B (I_m - b) \bar{1}^m$.

Remarquons que d'après le point 2,

$$\begin{aligned} B b \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} &= \left[\sum_{k=q+1}^m \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_k \right) \right]_{1 \leq i \leq m} = \bar{1}^m - \left[\sum_{k=1}^p \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) \right]_{1 \leq i \leq m} \\ &= \bar{1}^m - B (I_m - b) \bar{1}^m \end{aligned} \quad (2.10)$$

en utilisant à nouveau $gA_2 \bar{1}^p = \bar{1}^m$.

On en déduit que $\nu B b \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} = \nu \bar{1}^m - \nu B (I_m - b) \bar{1}^m = 1 - x$.

ν se met donc sous la forme

$$\nu = x D_R + (1 - x) D_M. \quad (2.11)$$

En remplaçant ν par sa valeur dans x , on obtient

$$x = \nu B (I_m - b) \bar{1}^m = x \underbrace{D_R B (I_m - b) \bar{1}^m}_{\in \mathbb{R}} + (1 - x) \underbrace{D_M B (I_m - b) \bar{1}^m}_{\in \mathbb{R}}$$

puis

$$x = \frac{D_M B (I_m - b) \bar{1}^m}{1 - D_R B (I_m - b) \bar{1}^m + D_M B (I_m - b) \bar{1}^m}, \quad (2.12)$$

du moins si $1 - D_R B (I_m - b) \bar{1}^m + D_M B (I_m - b) \bar{1}^m \neq 0$.

Or, d'après le point 2, on sait que $B (I_m - b) \bar{1}^m = \left[\sum_{k=1}^p \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m + k \right) \right]_{1 \leq i \leq m}$

et $B (I_m - b) \bar{1}^m$ est un vecteur à coordonnées positives majorées par 1. On en déduit que $1 - D_R B (I_m - b) \bar{1}^m + D_M B (I_m - b) \bar{1}^m > 0$.

On obtient alors, à l'aide de (2.11) et de (2.12),

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{D_M B (I_m - b) \bar{1}^m}{1 - D_R B (I_m - b) \bar{1}^m + D_M B (I_m - b) \bar{1}^m} D_R \\ &\quad + \left(1 - \frac{D_M B (I_m - b) \bar{1}^m}{1 - D_R B (I_m - b) \bar{1}^m + D_M B (I_m - b) \bar{1}^m} \right) D_M \\ &= cte \times [(D_M B (I_m - b) \bar{1}^m) D_R + (1 - D_R B (I_m - b) \bar{1}^m) D_M] \\ &= cte \times [(D_M B (I_m - b) \bar{1}^m) D_R + D_R (\bar{1}^m - B (I_m - b) \bar{1}^m) D_M] \quad (\text{car } 1 = D_R \bar{1}^m) \\ &= cte \times \left[(D_M B (I_m - b) \bar{1}^m) D_R + \left(D_R B b \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} \right) D_M \right] \quad (\text{cf (2.10)}) \\ &= cte \times D_{MR}, \end{aligned}$$

où D_{MR} a été défini dans l'énoncé du **théorème 2.3**

et $cte = [1 - D_R B (I_m - b) \bar{1}^m + D_M B (I_m - b) \bar{1}^m]^{-1}$.

6. Calcul de $\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=\eta\}} ds \right)$ pour $\eta \in \{1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_{q+1}, \dots, \mu_m\}$.

Remarquons tout d'abord que, pour $\eta = m+k$ avec $1 \leq k \leq p$, on a immédiatement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=m+k\}} ds \right) &= \mathbb{E}(R_{m+k}) \times \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m+k \right) \\ &= \mathbb{E}(R_{m+k}) \times (B(I_m - b)gA_2)(i, m+k) \text{ (cf point 2)}. \end{aligned}$$

De même, pour $\eta = \mu_k$ avec $q+1 \leq k \leq m$, on a

$$\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=\mu_k\}} ds \right) = \mathbb{E}(M_k) \times (Bb)(i, k) \text{ (cf point 3)}.$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right)$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$. (η est ici noté j).

Découpons tout d'abord $\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right)$ selon ce qui se passe à l'instant S_1 .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) &= \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{Z_{S_1}=k \cap S_1 < T\}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=q+1}^m \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{Z_{S_1}=k \cap S_1 < T\}} \right) \\ &\quad + \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{S_1 \geq T\}} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Etudions maintenant la première somme de (2.13). On commence par découper $\int_0^{T_1}$ sous la forme $\int_0^{S_1} + \int_{S_1}^{T_1}$, puis on se ramène au processus (X_t) lorsque c'est possible et on utilise la propriété de Markov. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{Z_{S_1}=k \cap S_1 < T\}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{Z_{S_1}=k \cap S_1 < T\}} \right) + \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_{S_1}^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{Z_{S_1}=k \cap S_1 < T\}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=k\}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_{S_1}^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds / Z_{S_1} = k \cap S_1 < T \right) \mathbb{P}_i(Z_{S_1} = k \cap S_1 < T) \\ &= \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=k\}} \right) + \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_k \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) b_{i,k}(\text{Markov}). \end{aligned}$$

Dans la deuxième somme de (2.13), on remplace $\int_0^{T_1}$ par $\int_0^{S_1}$. Dans le dernier terme, on remplace $\int_0^{T_1}$ par \int_0^T . Par ailleurs, dans ces deux termes, on se ramène au processus (X_t) .

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) &= \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=k\}} \right) + \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_k \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) b_{i,k} \\
&+ \sum_{k=q+1}^m \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=k\}} \right) \\
&+ \mathbb{E}_i \left(\int_0^T \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{S_1 \geq T\}} \right) \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Calculons la somme des première et troisième sommes.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^q \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=k\}} \right) + \sum_{k=q+1}^m \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=k\}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=k\}} \right) \\
&= \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1} \in \{1, \dots, m\}\}} \right) \\
&= \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{S_1 < T\}} \right).
\end{aligned}$$

En reportant dans (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) &= \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_k \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) b_{i,k} \\
&+ \mathbb{E}_i \left(\int_0^{S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{S_1 < T\}} \right) + \mathbb{E}_i \left(\int_0^T \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \times \mathbb{I}_{\{S_1 \geq T\}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_k \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) b_{i,k} + \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T \wedge S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \right), \tag{2.15}
\end{aligned}$$

en regroupant les deux derniers termes.

De plus

$$\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T \wedge S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \right) = \mathbb{E}_i \left(\int_0^T \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \right) - \mathbb{E}_i \left(\int_{S_1}^T \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \cdot \mathbb{I}_{\{S_1 < T\}} \right)$$

(Il suffit de distinguer suivant que $T \leq S_1$ ou $S_1 < T$ pour s'en convaincre).

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T \wedge S_1} \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \right) &= g_{i,j} - \sum_{k=1}^m \mathbb{E}_i \left(\int_{S_1}^T \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \cdot \mathbb{I}_{\{S_1 < T\}} / X_{S_1} = k \right) \mathbb{P}_i (X_{S_1} = k) \\
&= g_{i,j} - \sum_{k=1}^m \mathbb{E}_k \left(\int_0^T \mathbb{I}_{\{X_s=j\}} ds \right) b_{i,k} \text{ (Markov)} \\
&= g_{i,j} - \sum_{k=1}^m g_{k,j} b_{i,k} \\
&= ((I_m - b) g) (i, j).
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.15), on obtient

$$\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) = \sum_{k=1}^q \mathbb{E}_k \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) b_{i,k} + ((I_m - b) g) (i, j).$$

Le **lemme 2.2** nous permet d'en déduire

$$\left[\mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) \right]_{1 \leq i \leq m} = (B(I_m - b) g) (\bullet, j).$$

7. Calcul de $\mathbb{E}_i(T_1)$.

Il suffit de sommer les différents termes que nous venons de calculer.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(T_1) &= \sum_{\eta \in \{1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_{q+1}, \dots, \mu_m\}} \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=\eta\}} ds \right) \\
&= \sum_{j=1}^m \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=j\}} ds \right) + \sum_{k=1}^p \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=m+k\}} ds \right) + \sum_{k=q+1}^m \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=\mu_k\}} ds \right) \\
&= \sum_{j=1}^m (B(I_m - b) g) (i, j) + \sum_{k=1}^p \mathbb{E}(R_{m+k}) (B(I_m - b) g A_2) (i, k) \\
&\quad + \sum_{k=q+1}^m \mathbb{E}(M_k) (Bb) (i, k) \\
&= \left[B \left((I_m - b) g \bar{1}^m + (I_m - b) g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right) \right] (i).
\end{aligned}$$

8. Conclusion.

Remarquons tout d'abord que, d'après les résultats précédents et les différentes hypothèses, on a clairement $\sum_{k \in C} \nu_k \mathbb{E}_k(T_1) < +\infty$, de sorte que la loi de Z_t converge bien vers la loi π donnée par la formule (2.4).

De plus, pour $1 \leq k \leq m$ tel que $k \notin C$ (cf point 1), on a $D_R(k) = D_M(k) = 0$ et donc $D_{MR}(k) = 0$. On en déduit que $\nu(k) = 0$ si $k \notin C$ car $\nu = cte \times D_{MR}$ (point 5).

On obtient alors

$$\pi(\eta) = \frac{\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=\eta\}} ds \right)}{\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i(T_1)} = \frac{\sum_{i=1}^m D_{MR}(i) \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=\eta\}} ds \right)}{\sum_{i=1}^m D_{MR}(i) \mathbb{E}_i(T_1)}.$$

Il suffit maintenant de remplacer les différents termes par leur valeur que nous venons de calculer (points 6 et 7).

Ainsi, pour $\eta = j \in \{1, \dots, m\}$, on obtient

$$\begin{aligned} \pi(j) &= \frac{\sum_{i=1}^m D_{MR}(i) (B(I_m - b)g)(i, j)}{\sum_{i=1}^m D_{MR}(i) \left[B \times \left((I_m - b)g\bar{1}^m + (I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right) \right] (i)} \\ &= \frac{D_{MR}B(I_m - b)g(\bullet, j)}{D_{MR} \left[B \times \left((I_m - b)g\bar{1}^m + (I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right) \right]} \\ &= \kappa D_{MR}B(I_m - b)g(\bullet, j), \end{aligned}$$

où κ a été définie dans l'énoncé du **théorème 2.3**.

De même, pour $\eta = m + k$ avec $k \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$\begin{aligned} \pi(m+k) &= \kappa \sum_{i=1}^m D_{MR}(i) \mathbb{E}(R_{m+k}) (B(I_m - b)gA_2)(i, m+k) \\ &= \kappa \mathbb{E}(R_{m+k}) D_{MR}B(I_m - b)gA_2(\bullet, m+k). \end{aligned}$$

Enfin, pour $\eta = \mu_j$ avec $j \in \{q+1, \dots, m\}$, on a

$$\begin{aligned} \pi(\mu_j) &= \kappa \sum_{i=1}^m D_{MR}(i) \mathbb{E}(M_j) \times (Bb)(i, j) \\ &= \kappa \mathbb{E}(M_j) D_{MR}Bb(\bullet, j). \blacksquare \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser ces résultats afin de calculer la disponibilité asymptotique, puis le coût moyen asymptotique du système maintenu.

2.4 Disponibilité asymptotique

Dans tout ce paragraphe, on note A_∞ la disponibilité asymptotique du système maintenu et A_∞^{ini} la disponibilité asymptotique du système initial.

On rappelle que, par définition, on a

$$A_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(Z_t = k).$$

Remarquons que l'existence de cette limite est ici clairement assurée par le **théorème 2.3**.

Nous commençons par calculer la disponibilité asymptotique du système maintenu. Nous donnons ensuite une condition suffisante pour que la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique du système, puis nous nous intéressons à l'optimisation de la politique de maintenance préventive. Nous terminons par l'étude de quelques exemples.

2.4.1 Calcul de la disponibilité asymptotique

2.4.1.1 Formule générale

Théorème 2.4 *La disponibilité asymptotique du système maintenu existe et vaut*

$$A_\infty = \frac{1}{1 + a_\infty}$$

avec

$$a_\infty = \frac{D_{MR}B \left((I_m - b) g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right)}{D_{MR}B (I_m - b) g \bar{1}^m} \quad (2.16)$$

où D_{MR} a été définie dans le **théorème 2.3**.

Remarque 2.5 *D'après le théorème 2.3 et sa démonstration, le vecteur D_{MR} est proportionnel à la loi stationnaire de la chaîne de Markov associée au processus semi-régénératif (Z_t) . De plus, si l'on s'intéresse à un cycle du processus (Z_t) commençant par un redémarrage dans l'état i (avec $1 \leq i \leq m$), $\left(B \left((I_m - b) g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right) \right) (i)$ représente la durée moyenne de la période d'arrêt à la fin du cycle. De la même façon, $(B (I_m - b) g \bar{1}^m) (i)$ représente la durée moyenne de la période de fonctionnement au début de ce même cycle. La formule (2.16) signifie donc que a_∞ est le quotient du MDT (Mean Down Time) par le MUT (Mean Up Time) ou encore que la disponibilité asymptotique s'exprime de façon classique sous la forme $A_\infty = \frac{MUT}{MUT + MDT}$.*

Par ailleurs, on peut aussi remarquer que la disponibilité asymptotique ne dépend que des **moyennes des durées des opérations de maintenance**. En revanche, elle dépend des **lois des variables aléatoires inter-inspection** $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ (qui interviennent dans b et B).

Démonstration. En utilisant les résultats du **théorème 2.3**, on a clairement

$$\begin{aligned} A_\infty &= \sum_{k=1}^m \pi(k) = \frac{D_{MR}B (I_m - b) g \bar{1}^m}{D_{MR}B \left((I_m - b) g \bar{1}^m + (I_m - b) g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right)} \\ &= \frac{1}{1 + a_\infty}, \end{aligned}$$

où a_∞ a la forme annoncée. ■

2.4.1.2 Quelques cas particuliers

Nous venons de donner, dans le paragraphe précédent, une formule générale pour la disponibilité asymptotique. Nous nous intéressons ici à quelques cas particuliers où l'on peut simplifier quelque peu l'expression obtenue. Ces cas particuliers ne s'excluent nullement, et on peut tout à fait utiliser simultanément plusieurs de ces simplifications.

Cas où $D_M = D_R$ Dans de nombreux exemples étudiés en fiabilité, les réparations du système et les opérations de maintenance remettent le système dans l'état de marche parfaite (cf [54] par exemple). Si cet état est celui que l'on note 1, cela signifie avec nos notations que $D_M = D_R = (1, 0, \dots, 0)$.

On se place ici sous l'hypothèse un peu plus générale $D_M = D_R =_{noté} D$ (quelconque).

Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} D_{MR} &= (DB(I_m - b)\bar{1}^m)D + \left(DBb \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} \right) D \\ &= D \left(B(I_m - b)\bar{1}^m + Bb \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix} \right) D \\ &= D(\bar{1}^m)D \text{ (cf (2.10))} = 1 \times D = D. \end{aligned}$$

Ainsi, si $D_M = D_R =_{\text{noté}} D$, le vecteur D_{MR} se réduit alors à $D_{MR} = D$.

(On pouvait aussi remarquer que, puisque la loi stationnaire qui contrôlent les redémarrages après une période d'arrêt est proportionnelle à D_{MR} – cf point 5 de la démonstration du **théorème 2.3** – et que les redémarrages sont ici contrôlés par la même probabilité D après n'importe quel type d'arrêt, on a nécessairement $D_{MR} = \text{cte} \times D$).

Cas où $\mathbb{E}(R_{m+k})$ est indépendant de k ($1 \leq k \leq p$) Pour certains systèmes, la durée moyenne de la réparation est toujours la même, quels que soient les composants en panne. Ce sera par exemple le cas lorsque la durée de réparation des composants indispensables au bon fonctionnement du système est très grande en comparaison des autres composants, ou bien lorsque la durée de la réparation proprement dite est en fait négligeable par rapport à l'opération de remise en route ou par rapport au temps d'attente du (ou des) réparateur(s).

Dans ce cas, on pose $\mathbb{E}(R) = \overline{\mathbb{E}(R_{m+k})}$, pour tout $1 \leq k \leq p$.

Le terme $D_{MR}B(I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ devient alors

$$\begin{aligned} D_{MR}B(I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} &= \mathbb{E}(R)D_{MR}B(I_m - b)gA_2\bar{1}^p \\ &= \mathbb{E}(R) \times D_{MR}B(I_m - b)\bar{1}^m \text{ (cf (1.19))}. \end{aligned}$$

(Remarquons que le cas où il n'y a qu'un seul état de panne rentre aussi dans ce cadre).

Cas où $\mathbb{E}(M_j)$ est indépendant de j ($q + 1 \leq j \leq m$) Comme pour les réparations, la durée moyenne d'une opération de maintenance peut aussi être indépendante de l'état de maintenance associé.

Posons alors $\mathbb{E}(M) = \overline{\mathbb{E}(M_j)}$, pour tout $q + 1 \leq j \leq m$.

Le terme $D_{MR}Bb\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}$ devient dans ce cas

$$D_{MR}Bb\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} = \mathbb{E}(M) \times D_{MR}Bb \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{pmatrix}.$$

(Remarquons que le cas où il n'y a qu'un seul état de maintenance, c'est-à-dire $q = m - 1$ rentre aussi dans ce cadre).

2.4.1.3 Calcul pratique de la diponibilité asymptotique

Nous avons donné dans le paragraphe précédent une formule théorique pour la disponibilité asymptotique du système maintenu (ainsi que des remarques simplicatrices, dans quelques cas particuliers). Nous précisons ici la méthode utilisée pour calculer numériquement cette disponibilité asymptotique.

Si l'on regarde la formule obtenue au **théorème 2.4**, il est facile de voir que les seuls éléments inconnus sont les matrices b et B . (On rappelle que $g = -A_1^{-1}$). On sait par

ailleurs que la matrice B est définie par

$$B = \begin{pmatrix} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & \bar{0}^{q,m-q} \\ \bar{b}^{m-q,q} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & I_{m-q} \end{pmatrix} \quad (\text{cf lemme 2.2})$$

Elle se déduit donc très facilement de la matrice b et le seul élément à calculer est en fait la matrice b .

Pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$, rappelons que $b_{i,j}$ est défini par

$$b_{i,j} = \mathbb{P}_i(X_{S_1} = j) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(X_t = j) d\rho_i(t) = \int_0^{+\infty} P_t(i, j) d\rho_i(t).$$

On est donc ramené au calcul du semi-groupe (P_t) . Pour cela, un certain nombre de méthodes ont été développées dans la littérature (cf [18], [19] ou [35] par exemple). On peut ainsi, en utilisant les équations de Chapman-Kolmogorov, se ramener à un système différentiel ou intégral linéaire d'ordre un. La résolution de ce système peut se faire directement ou en utilisant les transformées de Laplace. On peut aussi écrire le semi-groupe sous forme exponentielle : $P_t(i, j) = e^{tA}(i, j) = e^{tA_1}(i, j)$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Pour effectuer les calculs, on peut alors utiliser les exponentielles de matrices implémentées dans un logiciel comme MATLAB. On peut aussi utiliser la construction classique d'un processus de Markov de matrice génératrice A à l'aide des processus de Poisson et écrire le semi-groupe sous la forme $P_t = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} Q^k$, où Q est la matrice de transition associée (cf [18], p 236, par exemple).

Lorsque la matrice A_1 est diagonalisable, on peut aussi utiliser sa forme diagonalisée pour calculer e^{tA_1} . C'est la méthode que nous avons choisie ici. Plus précisément, nous utilisons le résultat suivant.

Lemme 2.6 *Si A_1 est diagonalisable et se met sous la forme $A_1 = \mathcal{P}\Delta\mathcal{P}^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_m)$ et \mathcal{P} est une matrice inversible, on a alors*

$$b = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot \mathcal{P} \cdot \text{diag}(\rho_i^*(-\delta_1), \dots, \rho_i^*(-\delta_m)) \mathcal{P}^{-1},$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

- ε_i est la matrice carrée d'ordre m ne comportant que des zéros, sauf le terme d'ordre (i, i) qui vaut 1,
- ρ_i^* est la transformée de Laplace de ρ_i ($\rho_i^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} d\rho_i(t)$, pour tout $s > 0$).

Démonstration. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \left[\int_0^{+\infty} e^{tA_1} d\rho_i(t) \right] (i, j) = \left[\mathcal{P} \int_0^{+\infty} e^{t\Delta} d\rho_i(t) \mathcal{P}^{-1} \right] (i, j) \\ &= \left[\mathcal{P} \int_0^{+\infty} \text{diag}(e^{t\delta_1}, \dots, e^{t\delta_m}) d\rho_i(t) \mathcal{P}^{-1} \right] (i, j) \\ &= \left[\mathcal{P} \cdot \text{diag}(\rho_i^*(-\delta_1), \dots, \rho_i^*(-\delta_m)) \mathcal{P}^{-1} \right] (i, j). \end{aligned}$$

La $i^{\text{ième}}$ ligne de b est donc la $i^{\text{ième}}$ ligne de $\mathcal{P} \cdot \text{diag}(\rho_i^*(-\delta_1), \dots, \rho_i^*(-\delta_m)) \mathcal{P}^{-1}$, ce qui peut s'écrire :

$$\varepsilon_i \cdot b = \varepsilon_i \cdot \mathcal{P} \cdot \text{diag}(\rho_i^*(-\delta_1), \dots, \rho_i^*(-\delta_m)) \mathcal{P}^{-1}.$$

Il n'y a plus qu'à sommer pour obtenir le résultat annoncé. ■

Nous sommes maintenant en mesure de calculer tous les termes intervenant dans la disponibilité asymptotique. En particulier, la méthode décrite dans le lemme 2.6 pour calculer b est utilisée dans tous les exemples numériques du paragraphe 2.4.4.

2.4.2 Une condition suffisante pour que la maintenance améliore la disponibilité asymptotique

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment calculer la disponibilité asymptotique du système maintenu, tant d'un point de vue théorique que pratique. Une question naturelle est maintenant de se demander si la politique de maintenance proposée améliore bien cette disponibilité asymptotique, comme nous le souhaitions. Ainsi, sous quelles conditions est-il judicieux de maintenir le système ?

Nous faisons ici deux hypothèses : la première est que les redémarrages après une opération de maintenance sont au moins "aussi bons" qu'après une réparation. La deuxième est que les états sur lesquels on effectue une opération de maintenance (à savoir $q + 1, \dots, m$) sont plus dégradés que l'état "moyen" de redémarrage après une réparation. En effet, le principe même de notre politique de maintenance consiste à arrêter le système lorsqu'il est dans l'un des états de $\{q + 1, \dots, m\}$ que nous avons qualifiés de "dégradés". Si l'on souhaite que la politique de maintenance améliore le système, il nous faut bien sûr traduire cette propriété.

Sous ces deux hypothèses, nous montrons que, si les opérations de maintenance ne sont pas "trop longues" en moyenne, alors la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique.

Avant de donner un énoncé précis de ce résultat, nous commençons par écrire la disponibilité asymptotique sous une nouvelle forme plus adaptée à notre étude et pour cela, nous avons besoin de nouvelles notations.

Rappelons tout d'abord que le processus décrivant l'évolution du système initial (non tronqué à l'instant T) est un processus semi-régénératif, les instants de semi-renouvellement associés correspondant aux redémarrages du système après réparation (cf §1.3.1 et §1.3.2). Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on note alors $\mathbb{E}_i(\text{Rép})$ la durée moyenne de la réparation qui a lieu à la fin d'un cycle commençant dans l'état i , $\mathbb{E}_i(T)$ la durée moyenne de fonctionnement au début du même cycle.

Par ailleurs, on note

$$\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1(T) \\ \mathbb{E}_2(T) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_m(T) \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1(\text{Rép}) \\ \mathbb{E}_2(\text{Rép}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_m(\text{Rép}) \end{pmatrix}.$$

(On rappelle que, d'après 1.3.2 et 1.3.2.2, on a $\overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} = gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ et $\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} = g\bar{1}^m$).

On utilise aussi les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^q &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1(\text{Rép}) \\ \mathbb{E}_2(\text{Rép}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_q(\text{Rép}) \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{q+1}(\text{Rép}) \\ \mathbb{E}_{q+2}(\text{Rép}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_m(\text{Rép}) \end{pmatrix}, \\ \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}^q &= \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1(T) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_q(T) \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}^{m-q} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{q+1}(T) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_m(T) \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(M_{q+1}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(M_m) \end{pmatrix}, \\ D_{MR}^q &= (D_{MR}(1), \dots, D_{MR}(q)), \quad D_{MR}^{m-q} = (D_{MR}(q+1), \dots, D_{MR}(m)), \\ K &= (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \bar{b}^{q,m-q}, \quad L = \bar{b}^{m-q,q} K + \bar{b}^{m-q,m-q}. \end{aligned}$$

Avec ces notations, on obtient le résultat suivant.

Lemme 2.7 a_∞ s'écrit

$$a_\infty = \frac{D_{MR} \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} + (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) (\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} - \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q})}{D_{MR} \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} - (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}^{m-q}}. \quad (2.17)$$

Remarque 2.8 Rappelons que, d'après §1.3.2.2, la disponibilité asymptotique du système initial (notée ici A_∞^{ini}) peut s'écrire sous la forme

$$A_\infty^{ini} = \frac{1}{1 + a_\infty^{ini}}$$

avec

$$a_\infty^{ini} = \frac{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}}{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}}.$$

Remarquons que l'on peut retrouver ce résultat en prenant la limite de a_∞ lorsque les lois inter-inspections $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ tendent vers la masse de Dirac en l'infini. En effet, dans ce cas, K converge vers $\bar{0}^{q,m-q}$, L vers $\bar{0}^{m-q,m-q}$ et a_∞ vers a_∞^{ini} .

Remarquons d'autre part que, par définition de b , nous avons

$$b_{i,j} = \mathbb{P}_i(X_{S_1} = j) = \int_0^{+\infty} P_t(i,j) \rho_i(dt) \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq m.$$

On en déduit que seule la $i^{\text{ième}}$ ligne de b dépend de la loi ρ_i . Ainsi, $\bar{b}^{q,q}$, $\bar{b}^{q,m-q}$ et $K = (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \bar{b}^{q,m-q}$ ne dépendent que des lois $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ tandis que $\bar{b}^{m-q,q}$ et $\bar{b}^{m-q,m-q}$ ne dépendent que des lois $\rho_{q+1}, \dots, \rho_m$. On déduit alors de (2.17) que, lorsque D_M et D_R sont portées par $\{1, \dots, q\}$, la disponibilité asymptotique ne dépend que des lois inter-inspections $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$. Ceci est bien sûr tout à fait naturel car, après la première inspection, si l'on trouve le système dans un état de $\{q+1, \dots, m\}$, on arrête le système et les lois $\rho_{q+1}, \rho_{q+2}, \dots, \rho_m$ ne peuvent représenter que la première loi inter-inspection (juste après un redémarrage).

Démonstration. On repart de la formule (2.16) en utilisant les nouvelles notations.

$$a_\infty = \frac{D_{MR}B \left((I_m - b) \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} + b \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right)}{D_{MR}B(I_m - b) \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}} \quad (2.18)$$

On commence par calculer $B(I_m - b)$ en fonction de K et de L .

$$\begin{aligned} B(I_m - b) &= \begin{pmatrix} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & \bar{0}^{q,m-q} \\ \bar{b}^{m-q,q} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & I_{m-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q - \bar{b}^{q,q} & -\bar{b}^{q,m-q} \\ -\bar{b}^{m-q,q} & I_{m-q} - \bar{b}^{m-q,m-q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_q & -(I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \bar{b}^{q,m-q} \\ \bar{0}^{m-q,q} & -\bar{b}^{m-q,q} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \bar{b}^{q,m-q} + I_{m-q} - \bar{b}^{m-q,m-q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_q & -K \\ \bar{0}^{m-q,q} & -\bar{b}^{m-q,q} K + I_{m-q} - \bar{b}^{m-q,m-q} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_q & -K \\ \bar{0}^{m-q,q} & I_{m-q} - L \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} D_{MR}B(I_m - b) \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} &= D_{MR} \begin{pmatrix} I_q & -K \\ \bar{0}^{m-q,q} & I_{m-q} - L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^q \\ \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \end{pmatrix} \\ &= D_{MR} \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^q - K \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \\ (I_{m-q} - L) \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \end{pmatrix} \\ &= D_{MR} \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^q \\ \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \end{pmatrix} - (D_{MR}^q, D_{MR}^{m-q}) \begin{pmatrix} K \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \\ L \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \end{pmatrix} \\ &= D_{MR} \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} - (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \end{aligned} \quad (2.20)$$

De la même façon, on a

$$D_{MR}B(I_m - b) \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} = D_{MR} \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} - (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}^{m-q} \quad (2.21)$$

$$\text{et } D_{MR}B(I_m - b) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} = D_{MR} \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} - (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} \quad (2.22)$$

De plus,

$$\begin{aligned} D_{MR}B \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} &= D_{MR}B \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} - D_{MR}B(I_m - b) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \\ &= D_{MR} \begin{pmatrix} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & \bar{0}^{q,m-q} \\ \bar{b}^{m-q,q} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & I_{m-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} \end{pmatrix} \\ &\quad - (D_{MR} \overline{\mathbb{E}(M)} - (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q}) \quad (\text{cf (2.22)}) \\ &= D_{MR} \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} \end{pmatrix} - (D_{MR} \overline{\mathbb{E}(M)} - (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q}) \\ &= (D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} \end{aligned} \quad (2.23)$$

En remplaçant dans (2.18) les différents termes que nous venons de calculer (à savoir

(2.20), (2.21) et (2.23)), on obtient alors facilement le résultat annoncé. ■

Nous allons maintenant donner le résultat principal de ce paragraphe.

Pour cela, si U est un vecteur de probabilité sur $\{1, \dots, m\}$, on note ici $A_\infty^{ini}(U)$ la disponibilité asymptotique du système initial lorsque les redémarrages après une réparation sont contrôlés par le vecteur U :

$$A_\infty^{ini}(U) = \frac{1}{1 + a_\infty^{ini}(U)} \text{ avec } a_\infty^{ini}(U) = \frac{U \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}}{U \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}} \text{ (cf remarque 2.8).}$$

Théorème 2.9 *Supposons que l'on ait*

$$A_\infty^{ini}(D_M) \geq A_\infty^{ini}(D_R) (= A_\infty^{ini}) \quad (H_1)$$

$$\text{et } A_\infty^{ini}(\delta_k) \leq A_\infty^{ini}(D_R), \text{ pour tout } q+1 \leq k \leq m, \quad (H_2)$$

où δ_k désigne la masse de Dirac en k (ce qui correspond à des redémarrages dans l'état k).

Alors si

$$\mathbb{E}(M_k) \leq \mathbb{E}_k(T) - a_\infty^{ini}(D_R) \times \mathbb{E}_k(\text{Rép}), \text{ pour tout } q+1 \leq k \leq m, \quad (2.24)$$

la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique.

Remarque 2.10 *L'hypothèse (H_1) traduit le fait que les redémarrages après une opération de maintenance (contrôlés par le vecteur D_M) doivent être au moins aussi bons qu'après une réparation (contrôlés par le vecteur D_R). Remarquons que (H_1) est toujours vraie lorsque $D_M = D_R$, ce qui est en fait assez fréquent en pratique.*

L'hypothèse (H_2) traduit le fait que les états $q+1$ à m , sur lesquels on effectue les opérations de maintenance, doivent être "plus dégradés" que l'état "moyen" dans lequel le système redémarre après une réparation (contrôlés par D_R).

Remarquons par ailleurs qu'en fait, il n'est pas indispensable d'écrire l'hypothèse (H_2) , car elle est incluse dans (2.24). En effet, si (2.24) est vraie, on a nécessairement $\mathbb{E}_k(T) - a_\infty^{ini}(D_R) \times \mathbb{E}_k(\text{Rép}) \geq 0$, ou encore $a_\infty^{ini}(\delta_k) \geq a_\infty^{ini}(D_R)$, pour tout $q+1 \leq k \leq m$. (H_2) est donc inutile. Nous avons, malgré tout, préféré l'écrire car elle permet de mieux comprendre (2.24) et les conditions qu'elle entraîne pour les états $q+1$ à m .

*Remarquons enfin que les conditions données par le **théorème 2.9** sont indépendantes des matrices b et B , et par là même indépendantes des lois inter-inspections. Elles sont donc très faciles à vérifier. De plus, lorsqu'elles sont vraies, on peut alors affirmer que la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique pour **n'importe quelles lois inter-inspections**.*

Démonstration. En utilisant le lemme 2.7, on a ici

$$\begin{aligned} a_\infty &\leq a_\infty^{ini} \\ \Leftrightarrow & \\ & D_{MR} \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})} + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} - \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}^{m-q} \right) \\ &\leq \frac{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(\text{Rép})}}{D_R \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}} \left[D_{MR} \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}^{m-q} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Montrons tout d'abord que l'hypothèse (H_1) entraîne

$$D_{MR} \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \leq \frac{D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}}{D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}} \left(D_{MR} \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right) \quad (2.26)$$

(c'est-à-dire $A_{\infty}^{ini}(D_{MR}) \geq A_{\infty}^{ini}(D_R)$).

En remplaçant D_{MR} par sa définition (cf **théorème 2.3**), on a

$$\begin{aligned} (2.26) \\ \Leftrightarrow & \left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right) \times \left(\begin{array}{c} (D_M B(I_m - b) \bar{1}^m) \left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \\ + \left(D_R B b \left(\begin{array}{c} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{array} \right) \right) \left(D_M \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \end{array} \right) \\ \leq & \left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \times \left(\begin{array}{c} (D_M B(I_m - b) \bar{1}^m) \left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right) \\ + \left(D_R B b \left(\begin{array}{c} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{array} \right) \right) \left(D_M \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right) \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow & \left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right) \left(D_R B b \left(\begin{array}{c} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{array} \right) \right) \left(D_M \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \\ \leq & \left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \left(D_R B b \left(\begin{array}{c} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{array} \right) \right) \left(D_M \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right), \end{aligned}$$

en développant et en simplifiant.

Par ailleurs, nous avons déjà vu que $\left(D_R B b \left(\begin{array}{c} \bar{0}^q \\ \bar{1}^{m-q} \end{array} \right) \right) \geq 0$ (cf démonstration du **théorème 2.3**, point 5).

(2.26) est donc vraie dès que

$$\left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right) \left(D_M \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \leq \left(D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \left(D_M \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} \right),$$

ce qui est équivalent à (H_1) .

(2.26) est donc bien vérifiée sous (H_1) .

En utilisant (2.25) et (2.26), il est alors facile de voir que, pour avoir $a_{\infty} \leq a_{\infty}^{ini}$, il est *suffisant* d'avoir

$$\begin{aligned} & \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} - \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} \right) \\ \leq & - \frac{D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}}{D_R \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}} \left[\left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} - \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} \right) \leq -a_{\infty}^{ini} \left[\left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} \right].$$

Cette inégalité peut aussi s'écrire

$$\left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} - \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} + a_{\infty}^{ini} \times \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} \right) \leq 0. \quad (2.27)$$

Comme $\left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right)$ est un vecteur à coefficients positifs, (2.27) est alors vraie

dès que $\overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} - \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} + a_{\infty}^{ini} \times \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q}$ est un vecteur à coordonnées négatives, ou encore, ce qui est équivalent, dès que (2.24) est vraie. On en déduit que $a_{\infty} \leq a_{\infty}^{ini}$ dès que (2.24) est vraie. ■

Nous avons maintenant à notre disposition une condition suffisante sous laquelle nous savons que la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique. En particulier, nous disposons de bornes supérieures pour les durées moyennes des opérations de maintenance pour qu'il en soit ainsi. Ces bornes sont testées numériquement dans les exemples du paragraphe 2.4.4.

2.4.3 Optimisation de la politique de maintenance

Nous nous intéressons maintenant à l'optimisation de la politique de maintenance.

Rappelons tout d'abord que la politique de maintenance préventive étudiée ici dépend de quatre types de paramètres :

- l'entier q , qui précise les états sur lesquels on effectue une opération de maintenance préventive,
- les lois des durées de maintenance,
- la loi de redémarrage D_M après une opération de maintenance,
- les lois des intervalles inter-inspections.

Optimiser la politique de maintenance signifie donc a priori l'optimiser relativement à chacun de ces paramètres.

Pour le premier type de paramètre, c'est-à-dire l'entier q , nous nous contentons de faire une optimisation numérique sur quelques exemples au paragraphe 2.4.4.

Pour le deuxième type de paramètre, c'est-à-dire les lois des durées de maintenance, il est facile de voir sur la formule (2.16), que la disponibilité asymptotique ne dépend que de leurs moyennes et que, comme on pouvait s'y attendre, c'est une fonction décroissante relativement à chacune de ces moyennes $\mathbb{E}(M_i)$ pour $q+1 \leq i \leq m$. Optimiser relativement aux lois des durées de maintenance revient donc simplement à dire que le mieux est d'effectuer les opérations de maintenance le plus rapidement possible...

En ce qui concerne le troisième type de paramètre, c'est-à-dire la loi de redémarrage D_M après une opération de maintenance, il pourrait être intéressant de rechercher la loi optimale qui optimise la disponibilité asymptotique. Ce type de travail a déjà été effectué dans le premier chapitre pour le système sans maintenance, l'optimisation étant alors faite par rapport à D_R . Etant donné la complexité de l'étude pour le système sans maintenance préventive, il ne paraît guère raisonnable d'espérer obtenir ici des résultats exploitables pour le système maintenu. C'est pourquoi nous n'abordons pas ce problème.

Enfin, il nous reste à étudier l'optimisation selon le quatrième type de paramètre, à savoir les lois des intervalles inter-inspections $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. C'est l'objet principal de ce paragraphe. Nous démontrons ici que, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, **on peut restreindre l'optimisation aux intervalles inter-inspections de type déterministe** (voir **théorème 2.11** ci-dessous pour plus de détails).

Notons que ce type de résultat avait déjà été observé auparavant à diverses reprises, et cela dès les travaux de Barlow et Proschan (cf [6]). Remarquons d'ailleurs que ce résultat est tout à fait trivial lorsque la disponibilité asymptotique (ou, de façon plus générale, le critère à optimiser) ne dépend que des *moyennes* des variables inter-inspections. Il devient, en revanche, beaucoup plus difficile à démontrer dans le cas d'une politique de maintenance liée à l'évolution du système comme la nôtre.

En ce qui concerne le modèle présenté ici, C. Coccozza-Thivent avait déjà observé *numériquement* sur quelques exemples que les intervalles inter-inspections optimaux semblaient de type déterministe (le critère utilisé étant alors le coût moyen asymptotique, cf [20]). Notons que les méthodes qu'elle utilise ne lui permettent de considérer que des lois inter-inspections ayant des densités par rapport à la mesure de Lebesgue, de sorte que les lois déterministes ne rentrent pas dans le cadre de son modèle. Elles sont en fait obtenues numériquement comme lois limites de lois GAMMA, lors de la procédure d'optimisation. La méthode utilisée ici n'impose, quant à elle, aucune restriction concernant les lois des variables inter-inspections.

Enonçons maintenant notre résultat.

Afin de préciser la dépendance de A_∞ et de a_∞ par rapport aux différentes lois inter-inspections, nous les notons ici entre parenthèses. On note ainsi $A_\infty(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ au lieu de A_∞ quand les lois inter-inspections sont $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$.

On rappelle que A_∞^{ini} désigne la disponibilité asymptotique du système initial.

Théorème 2.11 *Dans le cas où $D_M = D_R =_{noté} D$ et où $\bar{A}^{q,q}$ est triangulaire supérieure :*

1.

$$(Il\ existe\ \rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_m^0\ telles\ que\ A_\infty(\rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_m^0) > A_\infty^{ini}) \quad (H)$$

\Updownarrow

$$(Il\ existe\ c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0\ tels\ que\ A_\infty(\delta_{c_1^0}^0, \delta_{c_2^0}^0, \dots, \delta_{c_m^0}^0) > A_\infty^{ini}) \quad (H')$$

2. *Sous l'hypothèse (H) ou (H'), il existe $c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_m^{opt}$ tels que*

$$A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}^0, \delta_{c_2^{opt}}^0, \dots, \delta_{c_m^{opt}}^0) \geq A_\infty(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m), \text{ pour toutes lois } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m.$$

Remarque 2.12 *Il arrive fréquemment que l'on ne puisse réparer les composants pendant que le système fonctionne. Par ailleurs, même lorsque c'est possible, il est rare qu'on puisse le faire avec des taux de réparation constants. Cela signifie qu'une modélisation markovienne de l'évolution du système en marche comme la nôtre s'applique principalement au cas d'un système formé de composants non réparables pendant que le système fonctionne. Quitte à réordonner les états par ordre de dégradation croissante, on ne perd donc guère en généralité à supposer que la matrice A_1 (et donc $\bar{A}^{q,q}$) est triangulaire supérieure. L'hypothèse " $\bar{A}^{q,q}$ est triangulaire supérieure " n'est donc pas très restrictive.*

En ce qui concerne notre deuxième hypothèse, à savoir $D_M = D_R$, elle signifie que l'on redémarre dans un état de marche donné avec la même probabilité après une réparation ou une opération de maintenance. Elle peut sembler restrictive au premier abord. En pratique, lorsque l'on s'intéresse à la disponibilité asymptotique, ce qui différencie une réparation d'une opération de maintenance, c'est principalement deux choses : d'une part, le temps d'attente de l'équipe de réparateurs au moment où l'on constate que l'on en a besoin. (A priori, lors d'une panne, elle n'est pas présente, alors que l'on peut imaginer que ce soit un réparateur qui inspecte le système). D'autre part, le temps nécessaire au redémarrage du système, qui peut être beaucoup plus long après une panne qu'après une opération de maintenance. En revanche, on peut tout à fait imaginer que l'on répare le système de la même façon pendant une réparation ou une opération de maintenance. En d'autres termes, on peut tout à fait imaginer que $D_M = D_R$.

Démonstration.

On montre tout d'abord que la conclusion du deuxième point est valide sous l'hypothèse (H').

On suppose donc (H') vraie.

On a clairement

$$\lim_{c_1, c_2, \dots, c_m \rightarrow +\infty} A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}) = A_\infty^{ini}$$

et

$$\lim_{c_1, c_2, \dots, c_m \rightarrow 0} A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}) = 0.$$

D'après (H') , on en déduit que la borne supérieure des $A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m})$ pour (c_1, c_2, \dots, c_m) décrivant $(\mathbb{R}_+^*)^m$ est en fait la borne supérieure des $A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m})$ pour (c_1, c_2, \dots, c_m) décrivant un compact de $(\mathbb{R}_+^*)^m$. Il existe donc $(c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_m^{opt})$ tel que

$$\begin{aligned} A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}, \delta_{c_2^{opt}}, \dots, \delta_{c_m^{opt}}) &\geq A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}), \\ \text{pour tous } c_1, c_2, \dots, c_m &> 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Notons $A_\infty^{opt} = A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}, \delta_{c_2^{opt}}, \dots, \delta_{c_m^{opt}})$ et P_i la propriété suivante, pour $0 \leq i \leq m$:

$$(P_i) \left\{ \begin{array}{l} A_\infty^{opt} \geq A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_i}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_m), \\ \text{pour tous } c_1, \dots, c_i > 0, \rho_{i+1}, \dots, \rho_m \text{ lois quelconques.} \end{array} \right.$$

D'après (2.28), P_m est vraie. Notre problème est de montrer que P_0 est vraie.

Etudions la forme de l'inégalité intervenant dans P_i , pour $0 \leq i \leq m$.

$$\begin{aligned} A_\infty^{opt} &\geq A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_i}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_m) \\ &\Leftrightarrow a_\infty^{opt} \leq a_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_i}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_m) \\ &\Leftrightarrow a_\infty^{opt} \leq \frac{DB\left((I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}\right)}{DB(I_m - b)g\bar{1}^m} \quad (\text{cf théorème 2.4 et §2.4.1.2}) \\ &\Leftrightarrow a_\infty^{opt} DB(I_m - b)g\bar{1}^m \leq DB(I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + DBb\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \\ &\Leftrightarrow a_\infty^{opt} DB(I_m - b)g\bar{1}^m \leq DB(I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + DB(-I_m + b + I_m)\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \\ &\Leftrightarrow DB(I_m - b)\left(a_\infty^{opt}g\bar{1}^m - gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}\right) \leq DB\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

De plus,

$$B(I_m - b) = \begin{pmatrix} I_q & -K \\ \bar{0}^{m-q,q} & -\bar{b}^{m-q,q}K + I_{m-q} - \bar{b}^{m-q,m-q} \end{pmatrix} \quad (\text{cf (2.19)})$$

où on rappelle que

$$K = (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \bar{b}^{q,m-q}.$$

Afin de bien comprendre la dépendance de (2.29) relativement aux lois $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, on note maintenant $(*)^{k,n}$ toute matrice d'ordre (k, n) indépendante de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. De plus, le symbole \Leftrightarrow signifie ici "équivalent à une expression de la forme".

On obtient :

$$\begin{aligned}
A_\infty^{opt} &\geq A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_i}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_m) \\
&\leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left((*)^{1,q}, (*)^{1,m-q} \right) \left(\begin{array}{cc} I_q & -K \\ \bar{\theta}^{m-q,q} & -\bar{b}^{m-q,q}K + I_{m-q} - \bar{b}^{m-q,m-q} \end{array} \right) (*)^{m,1} \\ &\leq \left((*)^{1,q}, (*)^{1,m-q} \right) \left(\begin{array}{cc} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & \bar{\theta}^{q,m-q} \\ \bar{b}^{m-q,q} (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} & I_{m-q} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \bar{\theta}^q \\ (*)^{m-q,1} \end{array} \right) \end{aligned} \right] \\
&\leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left[(*)^{1,q}, \left((*)^{1,q} + (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,q} \right) K + (*)^{1,m-q} + (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,m-q} \right] \left(\begin{array}{c} (*)^{q,1} \\ (*)^{m-q,1} \end{array} \right) \\ &\leq \left((*)^{1,q}, (*)^{1,m-q} \right) \left(\begin{array}{c} \bar{\theta}^q \\ (*)^{m-q,1} \end{array} \right) \end{aligned} \right] \\
&\leftrightarrow (*)^{1,1} + \left[(*)^{1,q} + (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,q} \right] K (*)^{m-q,1} + (*)^{1,1} + (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,m-q} (*)^{m-q,1} \leq (*)^{1,1} \\
&\leftrightarrow \left[(*)^{1,q} + (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,q} \right] K (*)^{m-q,1} + (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,m-q} (*)^{m-q,1} \leq (*)^{1,1} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

On rappelle par ailleurs que $K = [I_q - \bar{b}^{q,q}]^{-1} \bar{b}^{q,m-q}$ ne dépend que des lois $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ tandis que $\bar{b}^{m-q,q}$ et $\bar{b}^{m-q,m-q}$ ne dépendent que des lois $\rho_{q+1}, \dots, \rho_m$ (cf **remarque 2.8**).

Réécrivons alors l'inégalité de P_m (qui est vraie par hypothèse) en précisant entre parenthèses la dépendance des différentes matrices avec $\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}$:

$$\begin{aligned}
A_\infty^{opt} &\geq A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}) \\
&\leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\left[(*)^{1,q} + (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,q}(\delta_{c_{q+1}}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}) \right] K(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_q}) (*)^{m-q,1} \\ &+ (*)^{1,m-q} \bar{b}^{m-q,m-q}(\delta_{c_{q+1}}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}) (*)^{m-q,1} \end{aligned} \right] \leq (*)^{1,1}.
\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité par rapport aux lois (quelconques) $\rho_{q+1}, \dots, \rho_m$, on voit immédiatement que P_q est vraie.

Montrons maintenant que P_i est vraie pour $0 \leq i \leq q$ par récurrence descendante.

Supposons P_i vraie pour un $1 \leq i \leq q$. Il s'agit donc de montrer que P_{i-1} est vraie.

Notons $X^{k,n}$ toute matrice d'ordre (k, n) indépendante de c_i ($k, n \in \mathbb{N}^*$).

D'après (2.30), la propriété P_i est équivalente à une inégalité de la forme :

$$X^{1,q} K(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_i}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_q) X^{m-q,1} \leq X^{1,1},$$

pour tout $(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_i}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_q)$.

Il nous faut montrer que l'on peut intégrer cette inégalité par rapport à c_i . Pour cela, on étudie la dépendance de $K(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_i}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_q)$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne de b .

Rappelons qu'avec les hypothèses prises ici ($\bar{A}^{q,q}$ triangulaire supérieure), puisque $1 \leq i \leq q$, $I_q - \bar{b}^{q,q}$ est de la forme

$$I_q - \bar{b}^{q,q} = \begin{pmatrix} I_i - \bar{b}^{i,i} & -\bar{b}^{i,q-i} \\ \bar{\theta}^{q-i,i} & I_{q-i} - \bar{b}^{q-i,q-i} \end{pmatrix},$$

où $\bar{b}^{i,i}$, $\bar{b}^{i,q-i}$ et $\bar{b}^{q-i,q-i}$ désignent les matrices extraites de $\bar{b}^{q,q}$ définies de la façon suivante :

$$\bar{b}^{q,q} = \begin{pmatrix} \bar{b}^{i,i} & \bar{b}^{i,q-i} \\ \bar{b}^{q-i,i} = \bar{\theta}^{q-i,i} & \bar{b}^{q-i,q-i} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $(I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1}$ peut s'écrire

$$(I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} = \begin{pmatrix} (I_i - \bar{b}^{i,i})^{-1} & (I_i - \bar{b}^{i,i})^{-1} \bar{b}^{i,q-i} (I_{q-i} - \bar{b}^{q-i,q-i})^{-1} \\ \bar{0}^{q-i,i} & (I_{q-i} - \bar{b}^{q-i,q-i})^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } I_i - \bar{b}^{i,i} \equiv \left(\begin{array}{c|c} X^{i-1,i-1} & X^{i-1,1} \\ \hline 0 & 1 - b_{i,i} \end{array} \right),$$

où \equiv signifie "est égal à une expression de la forme" et $X^{i-1,i-1}$ est *triangulaire supérieure*.

On rappelle que $b_{i,i} \neq 1$ car $\{1, \dots, m\}$ est non absorbant, de sorte que $(I_i - \bar{b}^{i,i})^{-1}$ est de la forme

$$(I_i - \bar{b}^{i,i})^{-1} \equiv \left(X^{i,i-1}, \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} \right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} & (I_q - \bar{b}^{q,q})^{-1} \\ \equiv & \left(\begin{array}{c|c} \left(X^{i,i-1}, \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} \right) & \left(X^{i,i-1}, \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} \right) \begin{pmatrix} X^{i-1,q-i} \\ (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,q-i}) \end{pmatrix} X^{q-i,q-i} \\ \hline \bar{0}^{q-i,i} & X^{q-i,q-i} \end{array} \right) \\ \equiv & \left(\begin{array}{c|c} \left(X^{i,i-1}, \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} \right) & X^{i,q-i} + \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,q-i}) X^{q-i,q-i} \\ \hline \bar{0}^{q-i,i} & X^{q-i,q-i} \end{array} \right), \end{aligned}$$

et K est de la forme

$$\begin{aligned} K & \equiv \left(\begin{array}{c|c} \left(X^{i,i-1}, \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} \right) & X^{i,q-i} + \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,q-i}) X^{q-i,q-i} \\ \hline \bar{0}^{q-i,i} & X^{q-i,q-i} \end{array} \right) \times \bar{b}^{q,m-q} \\ & \equiv \left(\begin{array}{c|c} \left(X^{i,i-1}, \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} \right) & X^{i,q-i} + \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,q-i}) X^{q-i,q-i} \\ \hline \bar{0}^{q-i,i} & X^{q-i,q-i} \end{array} \right) \\ & \quad \times \left(\begin{array}{c|c} X^{i-1,i} & X^{i-1,m-q-i} \\ \hline (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,i}) & (b_{i,i+1}, b_{i,i+2}, \dots, b_{i,m-q}) \end{array} \right) \\ & \equiv \left(\begin{array}{c|c} X^{i,i} + \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,i}) & X^{i,m-q-i} + \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} (b_{i,i+1}, b_{i,i+2}, \dots, b_{i,m-q}) \\ \hline \bar{0}^{q-i,i} & + \frac{1}{1-b_{i,i}} X^{i,1} (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,q-i}) X^{q-i,m-q-i} \end{array} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que P_i est équivalente à une inégalité de la forme :

$$X^{1,q} \left(\frac{(1 - b_{i,i}) X^{i,i} + X^{i,1} (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,i})}{\bar{0}^{q-i,i}} \mid \frac{(1 - b_{i,i}) X^{i,m-q-i} + X^{i,1} (b_{i,i+1}, b_{i,i+2}, \dots, b_{i,m-q}) + X^{i,1} (b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,q-i}) X^{q-i,m-q-i}}{(1 - b_{i,i}) X^{q-i,m-q-i}} \right) X^{m-q,1} \\ \leq (1 - b_{i,i}) X^{1,1},$$

où $b_{i,j} = \mathbb{P}_i(X_{c_i} = j)$, pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.

En intégrant cette inégalité par rapport à c_i selon la loi quelconque ρ_i , on obtient la même inégalité en remplaçant $b_{i,j}$ par $\mathbb{P}_i(X_{S_1} = j)$, où $S_1/X_0 = i$ a pour loi ρ_i .

En d'autres termes, P_{i-1} est vraie. P_0 est donc vraie.

On a donc démontré que *la conclusion du deuxième point est valide sous l'hypothèse (H')*.

On démontre de la même façon que, si, pour tous $c_1, c_2, \dots, c_m > 0$, on a

$$A_\infty(\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_m}) \leq A_\infty^{ini},$$

on a alors

$$A_\infty(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \leq A_\infty^{ini}, \text{ pour toutes lois } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m.$$

En prenant la contraposée, on obtient que (H) entraîne (H').

La réciproque étant triviale, il y a donc équivalence entre l'hypothèse (H) et l'hypothèse (H'). ■

Nous savons maintenant que, moyennant quelques conditions, on peut restreindre l'optimisation de la politique de maintenance relativement aux lois inter-inspections aux lois de type déterministe. Ce résultat est bien sûr très utile, tant d'un point de vue théorique que pratique. En effet, d'un point de vue théorique, il est beaucoup plus facile de rechercher les lois optimales parmi les lois déterministes. D'autre part, d'un point de vue pratique, il est beaucoup plus simple, pour l'équipe de maintenance, de savoir qu'il lui faut venir inspecter le système à tel instant plutôt qu'à un instant aléatoire suivant telle loi (même si, en pratique, il peut y avoir de petites fluctuations autour des instants d'inspections).

Nous passons maintenant à l'étude de quelques exemples.

2.4.4 Exemples

Pour chacun des trois exemples étudiés ici, nous testons tout d'abord l'opportunité de pratiquer la politique de maintenance préventive à l'aide du **théorème 2.9** (les hypothèses (H₁) et (H₂) sont ici toujours vérifiées). Pour cela, on pose $x(i) = \mathbb{E}_i(T) - a_\infty^{ini}(D_R) \times \mathbb{E}_i(Rép)$ pour tout $2 \leq i \leq m$. Nous savons alors, d'après le **théorème 2.9** que, si $\mathbb{E}(M_i) \leq x(i)$ pour tout $q+1 \leq i \leq m$ (avec $1 \leq q \leq n-2$), la politique de maintenance préventive améliore effectivement la disponibilité asymptotique, et cela pour n'importe quelles lois inter-inspections (cf **remarque 2.10**). En revanche, s'il existe $q+1 \leq i \leq m$ tel que $\mathbb{E}(M_i) > x(i)$, le **théorème 2.9** ne permet pas de conclure. Nous recherchons alors la disponibilité asymptotique du système maintenu optimale et nous la comparons avec celle du système initial.

Remarquons que, dans les différents exemples que nous étudions ici, les lois de redémarrages D_M et D_R sont portées par $\{1, \dots, q\}$. D'après la **remarque 2.8**, la disponibilité asymptotique ne dépend alors que des lois inter-inspections $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$. L'optimisation

ne se fait donc que sur ces lois. En ce qui concerne cette optimisation, nous nous limitons aux lois déterministes lorsque c'est possible, c'est-à-dire lorsque les hypothèses du **théorème 2.11** sont vérifiées. Lorsque ce n'est pas le cas, il nous faut considérer des lois inter-inspections de type général. Comme on ne peut pas regarder toutes les lois possibles, on a choisi une famille relativement riche, à savoir les lois GAMMA. On a ainsi calculé la disponibilité asymptotique pour ce type de lois et on a cherché, à l'aide des routines d'optimisation numérique implémentées dans MATLAB, quels étaient les meilleurs paramètres de ces lois.

Exemple 2.13 *On considère un système de type "k sur n" composé de n composants identiques et indépendants, non réparables tant que le système fonctionne, de taux de défaillance constant λ (cf 1.3.5.1 pour la description d'un tel système, les notations et la forme de A_1).*

Les inspections ne donnant pas lieu à une maintenance se font sur les états 1 à q, où q varie de 1 à m - 1. (On rappelle que $m = n - k + 1$). Le système est au départ dans l'état de marche parfaite 1, et une réparation ou une opération de maintenance remettent le système dans l'état 1.

Pour calculer la disponibilité asymptotique du système maintenu, on peut utiliser deux des remarques simplificatrices du paragraphe 2.4.1.2. En effet, d'une part nous sommes dans le cas où $D_M = D_R = D = (1, 0, \dots, 0)$. D'autre part, il n'y a ici qu'un seul état de panne (cf cas où $\mathbb{E}(R_{m+k}) = \mathbb{E}(R)$ pour tout $1 \leq k \leq p$). La disponibilité asymptotique s'écrit alors

$$A_\infty = \frac{1}{1 + a_\infty}$$

avec

$$a_\infty = \frac{DB \left(\mathbb{E}(R) (I_m - b) \bar{1}^m + b \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right)}{DB (I_m - b) g \bar{1}^m}.$$

Numériquement, nous prenons les mêmes valeurs numériques que C. Coccozza-Thivent dans [20], c'est-à-dire

$$\begin{aligned} k &= 2, \lambda = 1, \mathbb{E}(R) = \frac{1}{50}, \\ \mathbb{E}(M_j) &= \frac{j}{1000}, \text{ pour tout } q + 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

(Nous avons d'ailleurs comparé nos résultats numériques qui sont identiques).

*Nous commençons par tester l'opportunité de pratiquer la politique de maintenance préventive à l'aide du **théorème 2.9**.*

*L'hypothèse (H_1) est ici vérifiée (puisque $D_M = D_R$). De plus, (H_2) est vraie car $A_\infty^{ini}(\delta_i) \leq A_\infty^{ini}(D_R)$, pour tous $q + 1 \leq i \leq m = n - 1$ et $1 \leq q \leq n - 2$, c'est-à-dire pour tout $2 \leq i \leq n - 1$. Le **tableau 2.1** donne alors les valeurs de $x(i) = \mathbb{E}_i(T) - a_\infty^{ini}(D_R) \times \mathbb{E}_i(\text{Rép})$ et de $\mathbb{E}(M_i)$ pour $2 \leq i \leq n - 1$.*

$n \setminus i$		2	3	4	5	6	7	8
3	$x(i)$	0.008						
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.002						
4	$x(i)$	0.0046	0.0108					
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.002	0.003					
5	$x(i)$	0.0031	0.0070	0.0122				
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.002	0.003	0.004				
6	$x(i)$	0.0023	0.0051	0.0085	0.0131			
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.002	0.003	0.004	0.005			
7	$x(i)$	0.0018	0.0039	0.0064	0.0095	0.0137		
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006		
8	$x(i)$	0.0015	0.0031	0.0051	0.0074	0.0103	0.0142	
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	
9	$x(i)$	0.0012	0.0026	0.0041	0.0060	0.0082	0.0109	0.0145
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008

Tableau 2.1. Ex 2.13. Test de l'apport de la maintenance (disponibilité)

D'après ce tableau, on peut d'ores et déjà affirmer que la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique pour $3 \leq n \leq 6$ et q quelconque, pour $7 \leq n \leq 8$ et $q \geq 3$, pour $n = 9$ et $q \geq 4$, et cela pour n'importe quelles lois inter-inspections. Dans les autres cas (les cas en gras), on ne peut conclure sans regarder la disponibilité asymptotique.

Nous recherchons alors la disponibilité asymptotique optimale. Les hypothèses du **théorème 2.11** étant ici vérifiées ($D_M = D_R$ et A_1 triangulaire supérieure), nous nous contentons d'étudier les politiques de maintenance préventives correspondant à des lois inter-inspections de type déterministe.

Pour chaque valeur de n , le **tableau 2.2** ci-dessous donne la disponibilité asymptotique du système initial A_∞^{ini} et pour chaque valeur de $1 \leq q \leq n - 2$, la disponibilité asymptotique optimale du système maintenu A_∞^{opt} ainsi que son argument $(c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_q^{opt})$, en italiques, juste en-dessous.

On ne donne pas toutes les valeurs de $(c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ car les variations de la disponibilité asymptotique sont parfois très faibles autour de son maximum, de sorte qu'une très grande plage de $(\mathbb{R}_+^*)^q$ donne la même disponibilité asymptotique. (Cela signifie que de petites fluctuations autour des instants d'inspections n'ont en fait guère d'importance).

n	A_{∞}^{mi}	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$	$q = 7$
3	0.9766	0.9940						
4	0.9819	0.9924 0.0852	0.9949 .					
5	0.9847	0.9922 0.3020	0.9935 0.0848 0.0680	0.9949 . .				
6	0.9864	0.9923 0.4861	0.9928 0.3524 0.2881	0.9936 . .	0.9948 . .			
7	0.9876	0.9923 0.6447	0.9925 0.5916 0.4978	0.9929 0.4225 0.3673 0.3004	0.9935 . . .	0.9945 . . .		
8	0.9885	0.9923 0.7957	0.9923 0.7801 0.6772	0.9924 0.7110 0.6255 0.5271	0.9928 0.5093 0.4589 0.3986 0.3260	0.9934	0.9943	
9	0.9892	0.9921 0.9487	0.9922 0.9453 0.8440	0.9922 0.9249 0.8296 0.7223	0.9923 0.8456 0.7646 0.6734 0.5686	0.9926 0.6148 0.5665 0.5093 0.4420 0.3615	0.9931	0.9940

Tableau 2.2. Ex 2.13. Disponibilité asymptotique initiale et optimale

On s'aperçoit ici que la politique de maintenance préventive améliore dans tous les cas la disponibilité asymptotique. Les **conditions du théorème 2.9** sont donc des conditions **suffisantes** mais **pas nécessaires**.

En ce qui concerne l'optimisation par rapport à q , il est facile de voir que, ici, la disponibilité asymptotique est optimale lorsque l'on effectue des opérations de maintenance uniquement sur l'état de marche le plus dégradé (cas $q = n - 2$) et cela, pour toutes les valeurs de n . (Ceci n'est bien sûr pas toujours vrai).

D'un point de vue numérique, on a pu observer, en effectuant les calculs, que les variations de la disponibilité asymptotique en fonction de c_i pour $1 \leq i \leq q$ sont d'autant plus importantes que l'indice i est petit. Ainsi, la valeur de c_1^{opt} est tout à fait prépondérante par rapport aux autres, alors que, pour un q "assez" grand, c_q^{opt} n'a guère d'influence. D'autre part, pour chaque valeur de (n, q) , les valeurs optimales des durées inter-inspections $c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_q^{opt}$ sont décroissantes ($c_1^{opt} \geq c_2^{opt} \geq \dots \geq c_q^{opt}$). Cela signifie que, comme on pouvait s'y attendre, **plus le système se dégrade, plus il faut l'inspecter souvent**.

Exemple 2.14 Comme dans l'exemple 2.13, nous considérons ici un système de type k sur n . En revanche, contrairement à ce qui se passait dans l'exemple précédent, les composants sont maintenant réparables pendant que le système fonctionne. Leur taux de

réparation est supposé constant et noté μ . Les autres notations sont identiques. La matrice A_1 associée à ce système est de la forme

$$A_1 = \begin{bmatrix} -n\lambda & n\lambda & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu-(n-1)\lambda & (n-1)\lambda & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & (k+2)\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & (n-k-1)\mu & -(n-k-1)\mu-(k+1)\lambda & (k+1)\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & (n-k)\mu & -(n-k)\mu-k\lambda \end{bmatrix}$$

D'un point de vue numérique, on prend :

$$\begin{aligned} D_M &= D_R = (1, 0, \dots, 0), \\ k &= 2, \lambda = 1, \mu = 2, \mathbb{E}(R) = \frac{m}{10} \\ \text{et } \mathbb{E}(M_j) &= \frac{j}{100}, \text{ pour tout } q+1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Les résultats du test du **théorème 2.9** sont donnés par le **tableau 2.3**. Dans celui-ci, les cas en gras correspondent aux cas où on ne peut conclure sans regarder la disponibilité asymptotique.

$n \setminus i$		2	3	4	5	6	7	8
3	$x(i)$	0.0571						
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.02						
4	$x(i)$	0.0333	0.1000					
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.02	0.03					
5	$x(i)$	0.0188	0.0518	0.1271				
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.02	0.03	0.04				
6	$x(i)$	0.0101	0.0262	0.0573	0.1398			
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.02	0.03	0.04	0.05			
7	$x(i)$	0.0051	0.0126	0.0258	0.0544	0.1424		
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06		
8	$x(i)$	0.0024	0.0058	0.0113	0.0217	0.0474	0.1392	
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	
9	$x(i)$	0.0011	0.0026	0.0048	0.0087	0.0168	0.0396	0.1341
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08

Tableau 2.3. Ex 2.14. Test de l'apport de la maintenance (disponibilité)

Recherchons maintenant la disponibilité asymptotique optimale. Ici $\bar{A}^{q,q}$ n'étant triangulaire supérieure pour aucune valeur de q , on ne peut appliquer le **théorème 2.11**. Comme nous l'avons annoncé au-dessus, on considère alors des variables inter-inspections suivant des lois GAMMA. Après optimisation, on trouve que les lois optimales ont un écart-type nul, c'est-à-dire que les meilleures lois inter-inspections sont de type déterministe. On retrouve donc numériquement les résultats du **théorème 2.11** bien que les hypothèses ne soient pas vérifiées.

Les résultats sont rassemblés dans le **tableau 2.4**.

n	A_∞^{ini}	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$	$q = 7$
3	0.8537	0.9434						
4	0.8824	0.9326	0.9615					
5	0.9140	0.9372 <i>0.3561</i>	0.9515 <i>0.1138</i> <i>0.0894</i>	0.9712				
6	0.9431	0.9470 <i>0.8585</i>	0.9519 <i>0.5296</i> <i>0.4075</i>	0.9627 <i>0.1623</i> <i>0.1379</i> <i>0.1069</i>	0.9789 <i>0.0090</i> <i>0.0016</i> <i>0.0001</i> $< 10^{-4}$			
7	0.9658	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	0.9703 <i>0.3308</i> <i>0.0300</i> $< 10^{-4}$	0.9853 <i>0.04</i> <i>0.01</i> <i>0.0003</i> <i>0.0001</i> $< 10^{-4}$		
8	0.9812	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	0.9904 <i>0.1</i> ...	
9	0.9903	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	A_∞^{ini}	0.9942

Tableau 2.4. Ex 2.14. Disponibilité asymptotique initiale et optimale

Les trois remarques d'ordre numérique de l'exemple 2.13 concernant, d'une part, le manque de précision de l'argument $(c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ de A_∞^{opt} , d'autre part, l'influence respective des différents c_i pour $1 \leq i \leq q$ et enfin le caractère décroissant de $(c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ sont encore valables.

Par ailleurs, pour chaque valeur de n , la disponibilité asymptotique est encore optimale lorsque l'on effectue des opérations de maintenance uniquement sur l'état de marche le plus dégradé.

En revanche, contrairement à l'exemple 2.13, la maintenance n'améliore pas la disponibilité asymptotique dans tous les cas. Ainsi, pour $n = 7$, il ne faut pas effectuer d'opérations de maintenance sur les états 2, 3 et 4 sous peine de diminuer la disponibilité asymptotique. Si l'on regarde le test fourni par le théorème 2.9, on s'aperçoit que, bien que ce test ne soit qu'une condition suffisante (cf remarque exemple 2.13 ou ici les cas $n = 5$ et $n = 6$), il nous donne malgré tout un bon ordre de grandeur pour les valeurs maximales des durées moyennes de maintenance (cf cas $n = 7, 8, 9$). En effet, lorsque $x(i)$ est nettement plus petit que $\mathbb{E}(M_i)$, il est inutile de maintenir le système. En revanche, lorsque $x(i)$ est du même ordre de grandeur que $\mathbb{E}(M_i)$ (avec malgré tout $x(i) < \mathbb{E}(M_i)$), même s'il peut éventuellement être intéressant de maintenir le système, l'amélioration de la disponibilité asymptotique n'est pas très importante.

Exemple 2.15 On considère à nouveau le cas d'un système k sur n avec des composants non réparables pendant que le système fonctionne (cas de l'exemple 2.13). On prend encore $D_M = (1, 0, \dots, 0)$. En revanche, on prend maintenant $D_R \neq D_M$. Le problème est

de voir si les résultats du **théorème 2.11** sont encore valides dans ce cas.

Pour $1 \leq q \leq 5$ fixé, on prend $D_R = \delta_q$. (Si l'on veut améliorer le système, il est souhaitable que D_R soit "meilleur" que $\delta_{q+1}, \delta_{q+2}, \dots, \delta_m$, cf **théorème 2.9**). Le système initial n'est donc pas le même pour chaque valeur de q .

On prend

$$n = 7, k = 2, \lambda = 1, \mathbb{E}(R) = \frac{1}{5} - \frac{q}{100}$$

$$\text{et } \mathbb{E}(M_j) = \frac{j}{100}, \text{ pour tout } q+1 \leq j \leq m = 6.$$

Les résultats du test du **théorème 2.9** sont donnés par le **tableau 2.6**.

$q \setminus i$		2	3	4	5	6
1	$x(i)$	0.0170	0.0369	0.0608	0.0906	0.1304
	$\mathbb{E}(M_i)$	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500	0.0600
2	$x(i)$		0.0207	0.0455	0.0766	0.1179
	$\mathbb{E}(M_i)$		0.03	0.04	0.05	0.06
3	$x(i)$			0.0265	0.0596	0.1038
	$\mathbb{E}(M_i)$			0.04	0.05	0.06
4	$x(i)$				0.0369	0.0862
	$\mathbb{E}(M_i)$				0.05	0.06
5	$x(i)$					0.06
	$\mathbb{E}(M_i)$					0.06

Tableau 2.6. Ex 2.15. Test de l'apport de la maintenance (disponibilité)

D'après ce tableau, en choisissant des redémarrages dans l'état q après une réparation, nous sommes toujours dans le cas critique où la condition suffisante du **théorème 2.9** ne nous dit rien (sauf dans le dernier cas).

Après optimisation (en utilisant des lois GAMMA), on trouve que les lois inter-inspections optimales sont encore de type déterministe. Par ailleurs, la disponibilité asymptotique est presque toujours améliorée par la maintenance (sauf dans le dernier cas), cf **tableau 2.5** ci-dessous.

q	1	2	3	4	5
$A_\infty^{ini}(\delta_q)$	0.8934	0.8896	0.8830	0.8713	0.8475
A_∞^{opt}	0.9290	0.9165	0.907	0.8794	$A_\infty^{ini}(\delta_q)$

Tableau 2.5. Ex 2.15. Disponibilité asymptotique initiale et optimale

En conclusion de ce paragraphe, il semblerait que l'on puisse **toujours se limiter à des variables inter-inspections de type déterministe pour optimiser la maintenance**, du moins lorsque le critère utilisé est la disponibilité asymptotique. (Nous l'avons vérifié sur quatre exemples sortant du cadre d'application du **théorème 2.11**, dont deux ont été cités ici). Par ailleurs, nous avons vu que le **théorème 2.9** nous donne, sous des conditions naturelles, **un bon ordre de grandeur pour les valeurs maximales des**

durées moyennes de maintenance, pour que la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique.

2.5 Coût moyen asymptotique

Nous nous intéressons maintenant à un critère qui est peut-être plus utilisé d'un point de vue industriel que la disponibilité asymptotique, à savoir le coût moyen asymptotique, c'est-à-dire le coût moyen par unité de temps sur une très grande période de temps.

Le schéma d'étude est le même que pour la disponibilité asymptotique, ce qui nous permet une rédaction plus rapide que dans le paragraphe précédent.

2.5.1 Calcul du coût moyen asymptotique

Nous montrons ici que le coût moyen asymptotique du système maintenu existe et nous le calculons.

Nous prenons en compte les coûts suivants :

- $CHI^{Rép}$ = coût horaire d'immobilisation du système pour réparation (après une panne),
- $CF_{m+k}^{Rép}$ = coût fixe d'une réparation associée à l'état $m+k$ pour $1 \leq k \leq p$ (coût des pièces de rechange + coût de déplacement par exemple),
- $CH_{m+k}^{Rép}$ = coût horaire d'une réparation (de durée R_{m+k}) associée à l'état $m+k$ pour $1 \leq k \leq p$,
- CHI^{Maint} = coût horaire d'immobilisation du système pour une opération de maintenance,
- $CF_{\mu_j}^{Maint}$ = coût fixe d'une opération de maintenance associée à l'état μ_j pour $q+1 \leq j \leq m$ (coût des pièces de rechange + coût de déplacement par exemple),
- $CH_{\mu_j}^{Maint}$ = coût horaire d'une opération de maintenance (de durée M_j) associée à l'état μ_j pour $q+1 \leq j \leq m$,
- CI = coût d'une inspection.

Afin de simplifier l'écriture, on note aussi

$$\begin{aligned} C_{\mu_j}^{Maint} &= CF_{\mu_j}^{Maint} + \left(CH_{\mu_j}^{Maint} + CHI^{Maint} \right) \mathbb{E}(M_j) \text{ pour } q+1 \leq j \leq m, \\ C_{m+k}^{Rép} &= CF_{m+k}^{Rép} + \left(CH_{m+k}^{Rép} + CHI^{Rép} \right) \mathbb{E}(R_{m+k}) \text{ pour } 1 \leq j \leq p. \end{aligned}$$

$C_{\mu_j}^{Maint}$ représente le coût moyen d'une opération de maintenance associée à l'état μ_j pour $q+1 \leq j \leq m$.

$C_{m+k}^{Rép}$ représente le coût moyen d'une réparation associée à l'état de panne $m+k$ pour $1 \leq k \leq p$.

On note aussi

$$C^{Maint} = \begin{pmatrix} \bar{0}^q \\ C_{\mu_{q+1}}^{Maint} \\ \vdots \\ C_{\mu_m}^{Maint} \end{pmatrix} \text{ et } C^{Rép} = \begin{pmatrix} C_{m+1}^{Rép} \\ \vdots \\ C_{m+p}^{Rép} \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $C(t)$ le coût d'exploitation du matériel dans l'intervalle $[0, t]$.
Le coût moyen asymptotique du système maintenu, s'il existe, est alors défini par

$$C = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(C(t))}{t}.$$

C représente donc le coût moyen par unité de temps sur une grande période.

Théorème 2.16 *Le coût moyen asymptotique du système maintenu existe et vaut*

$$\begin{aligned} C &= \kappa D_{MRB} \left(\begin{array}{l} CI \times b \bar{1}^m \\ + \sum_{j=q+1}^m \left[CF_{\mu_j}^{Maint} + (CH_{\mu_j}^{Maint} + CHI^{Maint}) \mathbb{E}(M_j) \right] \times b(\bullet, j) \\ + \sum_{k=1}^p \left[CF_{m+k}^{Rép} + (CH_{m+k}^{Rép} + CHI^{Rép}) \mathbb{E}(R_{m+k}) \right] \times (I_m - b) g A_2(\bullet, k) \end{array} \right) \\ &= \kappa D_{MRB} \left(CI \times b \bar{1}^m + \sum_{j=q+1}^m C_{\mu_j}^{Maint} \times b(\bullet, j) + \sum_{k=1}^p C_{m+k}^{Rép} \times (I_m - b) g A_2(\bullet, k) \right) \\ &= \kappa D_{MRB} \left(CI \times b \bar{1}^m + b C^{Maint} + (I_m - b) g A_2 C^{Rép} \right) \end{aligned}$$

où κ est la constante définie dans le **théorème 2.3**.

Remarque 2.17 *Il est facile d'obtenir le coût asymptotique moyen du système initial (noté C^{ini}) à partir des formules précédentes. Il suffit en effet de prendre $b = \bar{0}^{m,m}$ et $B = I_m$. On obtient ainsi :*

$$\begin{aligned} C^{ini} &= \frac{D_R \sum_{k=1}^p \left[CF_{m+k}^{Rép} + (CH_{m+k}^{Rép} + CHI^{Rép}) \mathbb{E}(R_{m+k}) \right] \times g A_2(\bullet, k)}{D_{RG} \left(\bar{1}^m + A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right)} \\ &= \frac{D_R \sum_{k=1}^p C_{m+k}^{Rép} \times g A_2(\bullet, k)}{D_{RG} \left(\bar{1}^m + A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right)} \\ &= \frac{D_{RG} A_2 C^{Rép}}{D_{RG} \left(\bar{1}^m + A_2 \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right)}. \end{aligned}$$

Démonstration.

On note $N_I(t)$ (respectivement $N_I([t_1, t_2])$) le nombre d'inspections effectuées dans l'intervalle de temps $[0, t]$ (respectivement $[t_1, t_2]$).

On note par ailleurs $N_{\mu_j}^{Maint}(t)$ (respectivement $N_{m+j}^{Rép}(t)$) le nombre d'opérations de maintenance (respectivement de réparations) associées à l'état μ_j (respectivement $m+j$) ayant lieu sur $[0, t]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} C(t) &= CI \times N_I(t) \\ &+ \sum_{j=q+1}^m \left[CF_{\mu_j}^{Maint} \times N_{\mu_j}^{Maint}(t) + (CH_{\mu_j}^{Maint} + CHI^{Maint}) \times \int_0^t \mathbb{I}_{\{Z_s = \mu_j\}} ds \right] \\ &+ \sum_{k=1}^p \left[CF_{m+k}^{Rép} \times N_{m+k}^{Rép}(t) + (CH_{m+k}^{Rép} + CHI^{Rép}) \times \int_0^t \mathbb{I}_{\{Z_s = m+k\}} ds \right]. \end{aligned}$$

L'existence et la valeur de chacune des limites intervenant dans $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(C(t))}{t}$ sont

alors données par [21].

Plus précisément, rappelons que ν désigne la loi stationnaire de la chaîne de Markov (Y_n) associée au processus semi-régénératif (Z_t) , les instants de semi-régénération étant notés (T_n) (cf démonstration du **théorème 2.3**).

D'après le point 1 de cette démonstration, nous savons que, quitte à restreindre l'espace d'états à $C = \{1 \leq i \leq m \text{ tel que } D_R(i) + D_M(i) \neq 0\}$, on peut supposer la chaîne (Y_n) irréductible. Tout point i_0 de $\{1, \dots, m\}$ est alors un point de régénération de (Z_t) . Notons $\tau = \inf(n \geq 1 / Y_n = i_0)$ et $S = T_\tau$. La chaîne (Y_n) étant irréductible, à valeurs dans un espace d'états fini, on a clairement $\mathbb{E}_i(\tau) < +\infty$ et $\mathbb{E}_i(S) < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq m$. De plus, la loi de S sous \mathbb{P}_{i_0} n'est pas arithmétique. On peut alors appliquer la **proposition 3**, puis la **proposition 6** de [21] à la fonction Φ définie par $\Phi(t) = \int_0^t \mathbb{I}_{\{Z_s=m+k\}} ds$ pour $1 \leq k \leq p$, telle que $\mathbb{E}_i(\Phi(S)) \leq \mathbb{E}_i(S) < +\infty$.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{Z_s=m+k\}} ds \right)}{t} &= \frac{\mathbb{E}_{i_0} \left(\int_0^S \mathbb{I}_{\{Z_s=m+k\}} ds \right)}{\mathbb{E}_{i_0}(S)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=m+k\}} ds \right)}{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i(T_1)} = \pi(m+k). \end{aligned}$$

De la même façon

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{Z_s=\mu_j\}} ds \right)}{t} = \frac{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s=\mu_j\}} ds \right)}{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i(T_1)} = \pi(\mu_j).$$

Pour $\Phi(t) = N_{m+k}^{Rép}(t)$, on a aussi $\mathbb{E}_i(\Phi(S)) \leq \mathbb{E}_i(\tau) < +\infty$, pour tout $1 \leq i \leq m$ et on obtient de même

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left(N_{m+k}^{Rép}(t) \right)}{t} &= \frac{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i \left(N_{m+k}^{Rép}(T_1) \right)}{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i(T_1)} \\ &= \kappa \sum_{i=1}^m D_{MR}(i) \mathbb{E}_i \left(N_{m+k}^{Rép}(T_1) \right) \\ &= \kappa \sum_{i=1}^m D_{MR}(i) \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1^-} = m+k \right) \\ &= \kappa \sum_{i=1}^m D_{MR}(i) (B(I_m - b) g A_2)(i, k) \\ &\quad \text{(cf point 2 de la démonstration du théorème 2.3)} \\ &= \kappa (D_{MR} B(I_m - b) g A_2)(k) \\ &= \kappa D_{MR} B(I_m - b) g A_2(\bullet, k). \end{aligned}$$

On a bien sûr des résultats similaires pour les états de maintenance. Le dernier résultat s'écrit ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left(N_{\mu_j}^{Maint}(t) \right)}{t} = \kappa D_{MR} B b(\bullet, j), \text{ pour } q+1 \leq j \leq m.$$

Prenons maintenant $\Phi(t) = N_I(t)$ et vérifions que $\mathbb{E}_i(N_I(S)) < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Rappelons pour cela que la $n^{\text{ième}}$ inspection a lieu à l'instant $S_n = \sum_{k=1}^n U^{(k)}$, où $U^{(k)}$ a pour loi $\rho_{X_{S_k}}$ et est indépendante de $X_{S_1}, \dots, X_{S_{k-1}}$. En utilisant le principe de démonstration de l'identité de Wald, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(S_{N_I(T_1)}) &= \mathbb{E}_i\left(\sum_{k=1}^{N_I(T_1)} U^{(k)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_i\left(\sum_{k=1}^n U^{(k)} \mathbb{I}_{\{N_I(T_1)=n\}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_i\left(U^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{I}_{\{N_I(T_1)=n\}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_i\left(U^{(k)} \mathbb{I}_{\{N_I(T_1) \geq k\}}\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\{N_I(T_1) \geq k\} = \{X_{S_1} \leq q \cap X_{S_2} \leq q \cap \dots \cap X_{S_{k-1}} \leq q\} \in \sigma(X_{S_1}, X_{S_2}, \dots, X_{S_{k-1}})$ où $\sigma(X_{S_1}, X_{S_2}, \dots, X_{S_{k-1}})$ désigne la tribu engendrée par X_{S_1}, X_{S_2}, \dots et $X_{S_{k-1}}$.

$U^{(k)}$ et $\mathbb{I}_{\{N_I(T_1) \geq k\}}$ sont donc indépendantes. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(S_{N_I(T_1)}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_i(U^{(k)}) \mathbb{P}_i(N_I(T_1) \geq k) \\ &\geq \min_{k \geq 1} \mathbb{E}_i(U^{(k)}) \times \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(N_I(T_1) \geq k) = \min_{k \geq 1} \mathbb{E}_i(U^{(k)}) \times \mathbb{E}_i(N_I(T_1)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\int_0^{+\infty} t \cdot \rho_j(dt) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$, $\min_k \mathbb{E}_i(U^{(k)}) = \min_{1 \leq j \leq m} \int_0^{+\infty} t \cdot \rho_j(dt) > 0$. Comme $\mathbb{E}_i(S_{N_I(T_1)}) \leq \mathbb{E}_i(T_1) < \infty$, on déduit de ce qui précède que $\mathbb{E}_i(N_I(T_1)) \leq \frac{\mathbb{E}_i(S_{N_I(T_1)})}{\min_{k \geq 1} \mathbb{E}_i(U^{(k)})} < +\infty$.

De la même façon,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(N_I(S)) &= \mathbb{E}_i(N_I(T_1)) + \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{\tau-1} N_I(|T_n, T_{n+1}|) \mathbb{I}_{\{\tau \geq 2\}}\right) \\ &= \mathbb{E}_i(N_I(T_1)) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=1}^{k-1} N_I(|T_n, T_{n+1}|) \mathbb{I}_{\{\tau=k\}}\right) \\ &= \mathbb{E}_i(N_I(T_1)) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_i(N_I(|T_n, T_{n+1}|) \mathbb{I}_{\{\tau \geq n+1\}}) \\ &\leq \mathbb{E}_i(N_I(T_1)) + \mathbb{E}_i(N_I(|T_1, T_2|)) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{E}_i(N_I(|T_n, T_{n+1}|) \mathbb{I}_{\{\tau \geq n\}}). \end{aligned}$$

De plus, pour $n \geq 2$, $N_I(|T_n, T_{n+1}|)$ est une variable aléatoire indépendante de $X_{T_1}, \dots, X_{T_{n-1}}$, alors que $\{\tau \geq n\} \in \sigma(X_{T_1}, \dots, X_{T_{n-1}})$.

$N_I(|T_n, T_{n+1}|)$ et $\mathbb{I}_{\{\tau \geq n\}}$ sont donc indépendantes. On en déduit :

$$\mathbb{E}_i(N_I(S)) \leq \mathbb{E}_i(N_I(T_1)) + \mathbb{E}_i(N_I(|T_1, T_2|)) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{E}_i(N_I(|T_n, T_{n+1}|)) \mathbb{P}_i\{\tau \geq n\}.$$

Par ailleurs, $\mathbb{E}_i(N_I(|T_n, T_{n+1}|)) \leq \max_{1 \leq j \leq m} \mathbb{E}_j(N_I(T_1))$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\mathbb{E}_i(N_I(S)) \leq \max_{1 \leq j \leq m} \mathbb{E}_j(N_I(T_1)) (2 + \mathbb{E}_i(\tau)) < +\infty.$$

On peut donc à nouveau utiliser les résultats de [21] et on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_I(t))}{t} = \frac{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i(N_I(T_1))}{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i(T_1)}.$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}_i(N_I(T_1))$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(N_I(T_1)) &= \sum_{j=1}^q \mathbb{E}_i(N_I(T_1) \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=j\}}) + \sum_{j=q+1}^m \mathbb{E}_i(N_I(T_1) \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=j\}}) \\ &\quad + \mathbb{E}_i(N_I(T_1) \mathbb{I}_{\{T < S_1\}}). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \mathbb{E}_i(N_I(T_1) \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=j\}}) &= \sum_{j=1}^q \mathbb{E}_i(N_I(T_1) / X_{S_1} = j) \mathbb{P}_i(X_{S_1} = j) \\ &= \sum_{j=1}^q (\mathbb{E}_j(N_I(T_1)) + 1) \times b_{i,j}, \end{aligned}$$

le "1" correspondant à l'inspection à l'instant S_1 .

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(N_I(T_1)) &= \sum_{j=1}^q (\mathbb{E}_j(N_I(T_1)) + 1) \times b_{i,j} + \sum_{j=q+1}^m \mathbb{E}_i(1 \times \mathbb{I}_{\{X_{S_1}=j\}}) + \mathbb{E}_i(0 \times \mathbb{I}_{\{T < S_1\}}) \\ &= \sum_{j=1}^q (\mathbb{E}_j(N_I(T_1)) + 1) \times b_{i,j} + \sum_{j=q+1}^m b_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^q \mathbb{E}_j(N_I(T_1)) \times b_{i,j} + \sum_{j=1}^q b_{i,j} + \sum_{j=q+1}^m b_{i,j} \text{ (en développant)} \\ &= \sum_{j=1}^q \mathbb{E}_j(N_I(T_1)) \times b_{i,j} + \sum_{j=1}^m b_{i,j}. \end{aligned}$$

D'après le **lemme 2.2**, on a donc

$$[\mathbb{E}_i(N_I(T_1))]_{1 \leq i \leq m} = Bb\bar{1}^m.$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_I(t))}{t} = \frac{\nu Bb\bar{1}^m}{\sum_{i=1}^m \nu(i) \mathbb{E}_i(T_1)} = \kappa D_{MR} Bb\bar{1}^m.$$

On déduit alors de ce qui précède que le coût moyen asymptotique existe et qu'il vaut

$$\begin{aligned}
C &= CI \times \kappa D_{MRB} b \bar{1}^m \\
&+ \sum_{j=q+1}^m \left[C_{F_{\mu_j}}^{Maint} \times \kappa D_{MRB} b (\bullet, j) + \left(C_{H_{\mu_j}}^{Maint} + C_{HI}^{Maint} \right) \times \pi(\mu_j) \right] \\
&+ \sum_{k=1}^p \left[C_{F_{m+k}}^{Rép} \times \kappa D_{MRB} (I_m - b) g_{A_2} (\bullet, k) + \left(C_{H_{m+k}}^{Rép} + C_{HI}^{Rép} \right) \times \pi(m+k) \right] \\
&= \kappa D_{MRB} \left(\begin{array}{c} CI \times b \bar{1}^m \\ + \sum_{j=q+1}^m \left[C_{F_{\mu_j}}^{Maint} + \left(C_{H_{\mu_j}}^{Maint} + C_{HI}^{Maint} \right) \mathbb{E}(M_j) \right] b(\bullet, j) \\ + \sum_{k=1}^p \left[C_{F_{m+k}}^{Rép} + \left(C_{H_{m+k}}^{Rép} + C_{HI}^{Rép} \right) \mathbb{E}(R_{m+k}) \right] (I_m - b) g_{A_2}(\bullet, k) \end{array} \right) \\
&\quad \text{(d'après le théorème 2.3)} \\
&= \kappa D_{MRB} \left(CI \times b \bar{1}^m + \sum_{j=q+1}^m C_{\mu_j}^{Maint} \times b(\bullet, j) + \sum_{k=1}^p C_{m+k}^{Rép} \times (I_m - b) g_{A_2}(\bullet, k) \right) \\
&= \kappa D_{MRB} \left(CI \times b \bar{1}^m + b C^{Maint} + (I_m - b) g_{A_2} C^{Rép} \right)
\end{aligned}$$

avec les notations simplifiées. ■

D'un point de vue numérique, la seule inconnue dans la formule du coût moyen asymptotique est là encore la matrice b . Nous utilisons la même méthode que pour la disponibilité asymptotique (cf lemme 2.6).

2.5.2 Une condition suffisante pour que la maintenance améliore le coût moyen asymptotique

Nous avons démontré au paragraphe 2.4.2 que, sous des hypothèses naturelles (redémarrages après une opération de maintenance au moins "aussi bons" qu'après une réparation, états $q+1$ à m plus dégradés que l'état moyen de redémarrage après une réparation), si les durées moyennes des opérations de maintenance ne sont pas "trop longues", alors la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique. L'intérêt de ces conditions est qu'elles sont *indépendantes des lois inter-inspections* (cf remarque 2.10) et par là même très faciles à vérifier. Peut-on avoir le même type de résultat pour le coût moyen asymptotique ?

Quelle que soit la façon dont on l'étudie, il est clair que le coût moyen des inspections par unité de temps fait nécessairement intervenir le nombre moyen d'inspections par unité de temps et donc aussi les lois inter-inspections. Ainsi, contrairement à ce qui se passait pour la disponibilité asymptotique (qui ne fait pas intervenir le nombre d'inspections), on ne peut pas espérer obtenir ici de conditions qui soient encore indépendantes des lois inter-inspections, du moins dans le cas où le coût des inspections n'est pas nul. On peut certes écrire des conditions dans le cas général (cf (2.34) ci-dessous), mais elles ne sont guère plus facile à utiliser que le coût lui-même et ne présentent que peu d'intérêt. Nous nous contentons donc de donner des conditions dans le cas où les coûts d'inspections sont nuls (ce qui signifiera en pratique négligeables devant les autres coûts).

Comme pour le théorème 2.9, si U est un vecteur de probabilité sur $\{1, \dots, m\}$, on note $C^{ini}(U)$ le coût moyen asymptotique du système initial si les redémarrages du système après une panne sont contrôlés par U au lieu de D_R . (On a donc $C^{ini}(D_R) = C^{ini}$).

Théorème 2.18 *Supposons que l'on ait*

$$C^{ini}(D_M) \leq C^{ini} \quad (H_1)$$

$$C^{ini}(\delta_k) \geq C^{ini}, \text{ pour tout } k \in \{q+1, \dots, m\} \quad (H_2)$$

et

$$CI \text{ (coût d'une inspection)} = 0 \quad (H_3)$$

Si le coût de la maintenance n'est pas trop élevé, ou plus précisément si

$$C_{\mu_j}^{Maint} + C^{ini} \times \left(\left(g\bar{1}^m + gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right) (j) - \mathbb{E}(M_j) \right) \leq \left(gA_2C^{Rép} \right) (j) \quad (2.31)$$

pour tout $q+1 \leq j \leq m$,

alors la politique de maintenance préventive améliore le coût moyen asymptotique ($C < C^{ini}$).

Remarque 2.19 *Comme pour la disponibilité asymptotique (théorème 2.9), l'hypothèse (H₁) traduit le fait que les redémarrages selon D_M sont au moins aussi bons que les redémarrages selon D_R et l'hypothèse (H₂) signifie que les états $q+1$ à m sont plus dégradés que l'état moyen de redémarrage du système initial après une réparation. (Là encore, il est facile de voir que (H₂) est en fait inutile car elle est contenue dans (2.31)).*

Notons que (2.31) signifie bien que le coût de la maintenance ne doit pas être trop élevé, comparé au coût des réparations. En effet, on peut tout d'abord remarquer que $(gA_2C^{Rép})(j)$ représente le coût moyen d'une réparation à la fin d'un cycle du système initial ayant démarré dans l'état j . D'autre part, $\left(g\bar{1}^m + gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right) (j) = \mathbb{E}_j(T) + \mathbb{E}_j(\text{Rép})$ représente la durée moyenne de ce même cycle. $(gA_2C^{Rép})(j)$ représente donc le coût moyen du système initial partant de j sur une durée égale à $\mathbb{E}_j(T) + \mathbb{E}_j(\text{Rép})$. Considérons maintenant le système maintenu au moment où l'on commence une maintenance dans l'état μ_j , c'est-à-dire au moment où on le trouve dans l'état j lors d'une inspection. Le membre de gauche de (2.31), à savoir $C_{\mu_j}^{Maint} + C^{ini} \times \left(\left(g\bar{1}^m + gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right) (j) - \mathbb{E}(M_j) \right)$, peut alors, en gros, être interprété comme le coût moyen du système maintenu à partir de ce moment-là, sur une durée égale à $\mathbb{E}_j(T) + \mathbb{E}_j(\text{Rép})$ (coût de la maintenance + coût de fonctionnement sur le reste de la période). (2.31) signifie donc bien que le coût de la maintenance ne doit pas être trop élevé comparé au coût des réparations.

Afin de mieux comprendre l'influence des différents paramètres de la maintenance, développons maintenant le coût de la maintenance dans (2.31). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & C_{\mu_j}^{Maint} + \left(CH_{\mu_j}^{Maint} + CHI^{Maint} - C^{ini} \right) \times \mathbb{E}(M_j) \\ & \leq gA_2C^{Rép}(j) - C^{ini} \times g \left(\bar{1}^m + A_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} \right) (j), \text{ pour tout } j \in \{q+1, \dots, m\} \end{aligned}$$

On en déduit que si $CH_{\mu_j}^{Maint} + CHI^{Maint} < C^{ini}$, et si les maintenances sont suffisamment longues en moyenne, (2.31) est toujours vraie. Cela s'explique par le fait que, dans ce cas, cela coûte moins cher de rester dans l'état de maintenance que de laisser le système redémarrer et risquer une nouvelle panne. Ce résultat n'a bien sûr aucun intérêt en soi : s'il est préférable de maintenir tout le temps le système pour diminuer le coût, il vaut sans doute encore mieux l'arrêter, ce qui coûtera encore moins cher... Cette remarque nous

montre en revanche que, d'un point de vue pratique, il n'est sans doute pas très réaliste d'imaginer des coûts horaires de maintenance trop petits et qu'il faut les choisir tels que $CH_{\mu_j}^{Maint} + CHI^{Maint} \geq C^{ini}$. Si ce n'est pas le cas, il est sans doute souhaitable de contrôler la disponibilité asymptotique en même temps que le coût.

Démonstration. Le principe de démonstration est le même que pour le **théorème 2.9**.

Afin de simplifier l'écriture, le vecteur $gA_2C^{Rép}$ est noté ici C^R .

D'après le **théorème 2.16**, le coût peut alors se mettre sous la forme

$$C = \kappa D_{MR}B (CI \times b\bar{1}^m + bC^{Maint} + (I_m - b)C^R)$$

avec

$$\kappa = \left[D_{MR}B \left((I_m - b) \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) + b\overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})} \right) \right]^{-1}.$$

(On rappelle que $\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} = gA_2\overline{\mathbb{E}(R_{\bullet})}$ et $\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} = g\bar{1}^m$).

Par ailleurs, nous avons montré dans la démonstration du **lemme 2.7** que

$$\begin{aligned} D_{MR}B(I_m - b)\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} &= D_{MR}\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} \\ \text{et } D_{MR}Bb\overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})} &= \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q}. \end{aligned}$$

On a de la même façon :

$$\begin{aligned} D_{MR}B(I_m - b) \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) &= D_{MR} \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) \\ &\quad - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} \right), \\ D_{MR}B(I_m - b)C^R &= D_{MR}C^R - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^R}^{m-q} \\ \text{et } D_{MR}BbC^{Maint} &= \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^{Maint}}^{m-q} \end{aligned}$$

où, si X désigne un vecteur colonne d'ordre m , \overline{X}^{m-q} désigne le vecteur colonne formé par les $m - q$ dernières composantes de X .

On obtient ainsi

$$C = \kappa \begin{pmatrix} CI \times D_{MR}Bb\bar{1}^m + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^{Maint}}^{m-q} \\ + D_{MR}C^R - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^R}^{m-q} \end{pmatrix}$$

avec

$$\kappa = \left[\begin{array}{c} D_{MR} \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right) - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} \right) \\ + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} \end{array} \right]^{-1}.$$

Par ailleurs, d'après la **remarque 2.17**, on a

$$C^{ini} = \frac{D_R C^R}{D_R \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)} \right)},$$

avec la nouvelle notation utilisée ici (C^R).

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& C \leq C^{ini} \\
\Leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} CI \times D_{MR} Bb \bar{1}^m + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^{Maint}^{m-q}} \\ + D_{MR} C^R - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^R}^{m-q} \end{array} \right) \times D_R \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \\
\leq & \left(\begin{array}{c} D_{MR} \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \\ - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}^{m-q} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)}^{m-q} \right) \\ + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} \end{array} \right) \times D_R C^R \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que, sous l'hypothèse (H_1) , nous avons $C^{ini}(D_{MR}) \leq C^{ini}$, c'est-à-dire

$$(D_{MR} C_R) D_R \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \leq D_{MR} \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) (D_R C_R). \quad (2.33)$$

(2.33)

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & \left[(D_M B (I_m - b) \bar{1}^m) D_R + \left(D_R Bb \left(\frac{\bar{0}^q}{\bar{1}^{m-q}} \right) \right) D_M \right] C^R \times D_R \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \\
\leq & \left[(D_M B (I_m - b) \bar{1}^m) D_R + \left(D_R Bb \left(\frac{\bar{0}^q}{\bar{1}^{m-q}} \right) \right) D_M \right] \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \times (D_R C^R) \\
\Leftrightarrow & \left(D_R Bb \left(\frac{\bar{0}^q}{\bar{1}^{m-q}} \right) \right) (D_M C^R) \times D_R \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \\
\leq & \left(D_R Bb \left(\frac{\bar{0}^q}{\bar{1}^{m-q}} \right) \right) D_M \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \times (D_R C^R), \\
& \text{en développant et simplifiant.}
\end{aligned}$$

Comme $D_R Bb \left(\frac{\bar{0}^q}{\bar{1}^{m-q}} \right) \geq 0$, il est suffisant de vérifier que

$$(D_M C^R) \times D_R \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \leq D_M \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \times (D_R C^R),$$

ce qui est vrai car $C^{ini}(D_M) \leq C^{ini}(D_R)$, par hypothèse, et (2.33) est vraie.

Grâce à (2.33), pour avoir (2.32), il est maintenant suffisant d'avoir

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} CI \times D_{MR} Bb \bar{1}^m + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^{Maint}^{m-q}} \\ - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^R}^{m-q} \end{array} \right) \times D_R \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)} \right) \\
\leq & \left(\begin{array}{c} - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{\mathbb{E}_\bullet(T)}^{m-q} + \overline{\mathbb{E}_\bullet(Rép)}^{m-q} \right) \\ + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}^{m-q} \end{array} \right) \times D_R C^R,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$CI \times D_{MR} B b \bar{1}^m + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^{Maint}}^{m-q} - \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \overline{C^R}^{m-q} \\ \leq C^{ini} \times \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(- \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} \right) + \overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} \right),$$

ou encore

$$CI \times D_{MR} B b \bar{1}^m + \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left(\overline{C^{Maint}}^{m-q} - C^{ini} \overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} \right) \\ \leq \left(D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \right) \left[\overline{C^R}^{m-q} - C^{ini} \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} \right) \right] \quad (2.34)$$

Si $CI = 0$, comme $D_{MR}^q K + D_{MR}^{m-q} L \geq 0$, il est clair que (2.34) est vraie dès que

$$\overline{C^{Maint}}^{m-q} - C^{ini} \overline{\mathbb{E}(M_{\bullet})}^{m-q} \leq \overline{C^R}^{m-q} - C^{ini} \left(\overline{\mathbb{E}_{\bullet}(T)}^{m-q} + \overline{\mathbb{E}_{\bullet}(Rép)}^{m-q} \right), \quad (2.35a)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$C_{\mu_j}^{Maint} + C^{ini} \times \left(\left(g \bar{1}^m + g A_2 \overline{\mathbb{E}(R_{\bullet})} \right) (j) - \mathbb{E}(M_j) \right) \leq \left(g A_2 C^{Rép} \right) (j)$$

pour tout $q + 1 \leq j \leq m$.

En d'autres termes, $C \leq C^{ini}$ dès que (2.31) est vraie. ■

2.5.3 Optimisation de la politique de maintenance

Notre problème est maintenant de voir s'il existe une politique de maintenance préventive qui minimise le coût moyen asymptotique du système maintenu.

Sur la formule obtenue dans le **théorème 2.16**, il est tout d'abord facile de voir que le coût moyen asymptotique C est une fonction croissante par rapport à chacun des différents coûts de la maintenance ($CHI_{\mu_j}^{Maint}$, $CF_{\mu_j}^{Maint}$, $CH_{\mu_j}^{Maint}$ et CI), car κ est une constante indépendante de ces coûts. D'un point de vue pratique, il faut donc essayer d'avoir des coûts de maintenance les plus petits possibles.

En ce qui concerne les durées moyennes des opérations de maintenance, contrairement à la disponibilité asymptotique, le coût moyen asymptotique C n'est pas toujours une fonction croissante par rapport aux $\mathbb{E}(M_j)$, pour $j \in \{q + 1, \dots, m\}$. En effet, si l'on regarde la dérivée de C par rapport à $\mathbb{E}(M_j)$, il est facile de voir qu'elle est de la forme $\left(CH_{\mu_j}^{Maint} + CHI_{\mu_j}^{Maint} \right) x - y$, où x et y sont des réels positifs. On en déduit que, si le coût horaire de la maintenance est petit (par rapport aux autres coûts), le coût C décroît par rapport à $\mathbb{E}(M_j)$. On retrouve donc dans ce cas le même type de comportement quelque peu paradoxal que celui évoqué dans la **remarque 2.19** et la conclusion est la même : si les coûts horaires de maintenance sont très petits, il faut sans doute contrôler simultanément le coût moyen et la disponibilité asymptotiques.

Ces remarques étant faites, nous supposons dans le reste du paragraphe que les coûts de la maintenance ($CHI_{\mu_j}^{Maint}$, $CF_{\mu_j}^{Maint}$, $CH_{\mu_j}^{Maint}$ et CI) et les durées moyennes des opérations de maintenance sont fixés. Notre problème est alors de voir s'il existe des lois inter-inspections optimales et éventuellement, de les déterminer.

Nous démontrons ici que, sous les mêmes hypothèses que pour la disponibilité asymptotique, les résultats du **théorème 2.11** restent valables pour le coût moyen asymptotique, à savoir, l'optimisation de la politique de maintenance relativement aux lois inter-inspections

peut être limitée aux intervalles inter-inspections de type déterministe.

Pour indiquer la dépendance de C par rapport aux lois inter-inspections $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, on note ici $C(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ au lieu de C .

Théorème 2.20 *Dans le cas où $D_M = D_R =_{\text{noté}} D$ et où $\bar{A}^{q,q}$ est triangulaire supérieure :*

1.

$$\begin{aligned} & (\text{Il existe } \rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_m^0 \text{ telles que } C(\rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_m^0) < C^{ini}) & (H) \\ \Updownarrow & \\ & (\text{Il existe } c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0 \text{ tels que } C(\delta_{c_1^0}^0, \delta_{c_2^0}^0, \dots, \delta_{c_m^0}^0) < C^{ini}) & (H') \end{aligned}$$

2. Sous l'hypothèse (H) ou (H'), il existe $c_1^{opt}, c_2^{opt}, \dots, c_m^{opt}$ tels que

$$C(\delta_{c_1^{opt}}^0, \delta_{c_2^{opt}}^0, \dots, \delta_{c_m^{opt}}^0) \leq C(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m), \text{ pour toutes lois } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m.$$

Démonstration. La démonstration est la même que celle du **théorème 2.11** et nous nous contentons de vérifier que l'inégalité $C(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \leq C^{ini}$ est de la même forme que l'inégalité $A_\infty(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \geq A_\infty^{ini}$, à savoir

$$DB(I_m - b)(*)^{m,1} \leq DB(*)^{m,1},$$

où on rappelle que $(*)^{k,n}$ désigne n'importe quelle matrice d'ordre (k, n) indépendante de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. (cf (2.29)).

Comme $D_{MR} = D$, le coût se met ici sous la forme

$$C = \kappa DB \left(CI \times b\bar{1}^m + bC^{Maint} + (I_m - b)gA_2C^{Rép} \right),$$

avec

$$\kappa = \left[DB \left((I_m - b)g\bar{1}^m + (I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right) \right]^{-1}$$

(cf **théorème 2.16**).

On en déduit :

$$\begin{aligned} & C(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \leq C^{ini} \\ \iff & \\ & DB \left(CI \times b\bar{1}^m + bC^{Maint} + (I_m - b)gA_2C^{Rép} \right) \\ & \leq C^{ini} \times DB \left((I_m - b)g\bar{1}^m + (I_m - b)gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)} + b\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que, dans cette inégalité, $CI, C^{Maint}, g, A_2, C^{Rép}, \overline{\mathbb{E}(R_\bullet)}$ et $\overline{\mathbb{E}(M_\bullet)}$ sont constants par rapport aux lois inter-inspections.

$C(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \leq C^{ini}$ est donc équivalent à une inégalité de la forme

$$DB \left[b(*)^{m,1} + (I_m - b)(*)^{m,1} \right] \leq DB \left((I_m - b)(*)^{m,1} + b(*)^{m,1} \right).$$

En écrivant $b = I_m - (I_m - b)$, on voit immédiatement que l'inégalité $C(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) \leq C^{ini}$ est bien de la forme souhaitée. ■

2.5.4 Exemples

Nous reprenons ici les exemples étudiés au paragraphe 2.4.4. Nous commençons par tester l'opportunité de pratiquer la politique de maintenance préventive dans le but d'améliorer son coût moyen asymptotique à l'aide du **théorème 2.18**, du moins lorsque les hypothèses sont vérifiées. Nous recherchons ensuite les lois inter-inspections qui minimisent ce coût. Comme pour la disponibilité asymptotique, il est facile de voir que, comme les lois de redémarrages D_M et D_R sont portées par $\{1, \dots, q\}$, le coût moyen asymptotique ne dépend, lui aussi, que des lois inter-inspections $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$. Comme précédemment, l'optimisation ne se fait donc que sur ces lois. Par ailleurs, lorsque l'on ne peut se limiter aux lois inter-inspections de type déterministe (c'est-à-dire lorsque les hypothèses du **théorème 2.20** ne sont pas vérifiées), nous prenons là encore des lois GAMMA.

Une fois la politique de maintenance optimisée relativement au coût, nous complétons l'étude en nous intéressant à la disponibilité asymptotique du système soumis à cette politique de maintenance optimale. En effet, même si le coût est souvent l'un des critères fondamentaux pour les industriels, il n'est malgré tout certainement pas judicieux de trop le diminuer si cela entraîne une trop grande perte de disponibilité du système. C'est pourquoi, dans chacun des exemples, nous comparons la disponibilité asymptotique du système soumis à la politique de maintenance optimale pour le coût à la disponibilité asymptotique du système initial.

Lorsque les intervalles inter-inspections optimaux pour le coût sont déterministes, nous les notons ici $(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ afin de ne pas les confondre avec ceux qui correspondent à la disponibilité asymptotique optimale, qui sont notés $(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$.

Exemple 2.21 *Le système étudié correspond à celui de l'exemple 2.13 (cas d'un système de type k sur n , formé de composants non réparables tant que le système fonctionne, $D_M = D_R = (1, 0, \dots, 0)$). Les notations et les données numériques sont identiques. Ces données sont complétées par les coûts suivants :*

$$\begin{aligned} CF_{m+1}^{Rép} &= 20 \text{ (un seul état de panne), } CH_{m+1}^{Rép} = 5, \\ CHI_{m+1}^{Rép} &= CHI^{Maint} = 95, CI = 1, \\ CF_{\mu_j}^{Maint} &= j \text{ pour } j \in \{q+1, \dots, m\}, CH_{\mu_j}^{Maint} = 5 \text{ pour } j \in \{q+1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Les coûts horaires de maintenance ont été choisis un peu plus grands que ceux de C. Coccozza-Thivent dans [20] (cf remarque 2.19 et le début du paragraphe 2.5.3). (Nous avons aussi fait les calculs avec les mêmes valeurs que C. Coccozza-Thivent et nous avons trouvé les mêmes résultats).

Avec nos données numériques, les différents coûts se mettent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} C_{\mu_j}^{Maint} &= \frac{11}{10}j \text{ pour } q+1 \leq j \leq m, C_{m+1}^{Rép} = 22 \\ \text{et } C &= \kappa DB \left(b\bar{1}^m + \sum_{j=q+1}^m \frac{11}{10}j \times b(\bullet, j) + 22 \times (I_m - b)\bar{1}^m \right). \end{aligned}$$

*Comme les coûts d'inspection ne sont pas nuls, nous ne pouvons pas tester ici les conditions données par le **théorème 2.18**.*

*En ce qui concerne l'optimisation, les hypothèses du **théorème 2.20** sont ici vérifiées et nous nous contentons de considérer des intervalles inter-inspections de type déterministe.*

Les résultats sont rassemblés dans le **tableau 2.7**, où nous donnons le coût moyen asymptotique du système initial C^{ini} et le coût moyen asymptotique optimal du système maintenu C^{opt} ainsi que son argument $(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$, juste en-dessous en italique.

n	C^{ini}	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$	$q = 7$
3	25.7812	18.4592 <i>0.1955</i>						
4	19.9396	12.8663 <i>0.3177</i>	13.7704 <i>0.3639</i> <i>0.1824</i>					
5	16.8798	10.9985 <i>0.4737</i>	10.8110 <i>0.4518</i> <i>0.2957</i>	11.9155 <i>0.5249</i> <i>0.3657</i> <i>0.1835</i>				
6	14.9660	10.1476 <i>0.6281</i>	10.0063 <i>0.5944</i> <i>0.4567</i>	9.9895 <i>0.5919</i> <i>0.4543</i> <i>0.2961</i>	10.9668 <i>0.6773</i> <i>0.5364</i> <i>0.3750</i> <i>0.1892</i>			
7	13.6404	9.7457 <i>0.7770</i>	9.7014 <i>0.7585</i> <i>0.6322</i>	9.5987 <i>0.7273</i> <i>0.6040</i> <i>0.4641</i>	9.6136 <i>0.7300</i> <i>0.6068</i> <i>0.4668</i> <i>0.3052</i>	10.4238 <i>0.8229</i> <i>0.6969</i> <i>0.5537</i> <i>0.3887</i> <i>0.1977</i>		
8	12.6593	9.5765 <i>0.9269</i>	9.5678 <i>0.9211</i> <i>0.8029</i>	9.5262 <i>0.8989</i> <i>0.7851</i> <i>0.6563</i>	9.4410 <i>0.8656</i> <i>0.7538</i> <i>0.6283</i> <i>0.4853</i>	9.4461 <i>0.8668</i> <i>0.7550</i> <i>0.6294</i> <i>0.4864</i> <i>0.3205</i>	10.0947 <i>0.9647</i> <i>0.8506</i> <i>0.7223</i> <i>0.5760</i> <i>0.4067</i> <i>0.2089</i>	
9	11.8985	9.5279 <i>1.0837</i>	9.5268 <i>1.0825</i> <i>0.9727</i>	9.5179 <i>1.0749</i> <i>0.9673</i> <i>0.8460</i>	9.4810 <i>1.0493</i> <i>0.9451</i> <i>0.8285</i> <i>0.6960</i>	9.4043 <i>1.0102</i> <i>0.9076</i> <i>0.7936</i> <i>0.6652</i> <i>0.5183</i>	9.3882 <i>1.0051</i> <i>0.9027</i> <i>0.7886</i> <i>0.6602</i> <i>0.5134</i> <i>0.3420</i>	9.8893 <i>1.1060</i> <i>1.0017</i> <i>0.8856</i> <i>0.7544</i> <i>0.6043</i> <i>0.4295</i> <i>0.2232</i>

Tableau 2.7. Ex 2.21. Coût moyen asymptotique initial et optimal

Les remarques d'ordre numérique données pour la disponibilité asymptotique et concernant, d'une part, l'influence respective des différents c_i pour $1 \leq i \leq q$, et d'autre part, le caractère décroissant de $(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ restent valables. En revanche, le coût moyen

asymptotique varie beaucoup plus rapidement autour de son optimum que la disponibilité asymptotique et la précision de $(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ est bien meilleure. Les routines d'optimisation de MATLAB nous fournissent ainsi facilement $(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ à 10^{-4} près.

Nous constatons, qu'avec les coûts choisis, la politique de maintenance préventive améliore le coût moyen asymptotique dans tous les cas.

Comme annoncé au début de ce paragraphe, nous comparons maintenant la disponibilité asymptotique du système initial A_∞^{ini} et celle du système soumis à la politique de maintenance optimale pour le coût moyen asymptotique, à savoir $A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}, \dots, \delta_{c_q^{opt}})$.

D'après le **tableau 2.1**, nous savons déjà que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique pour **n'importe quelles lois inter-inspections** pour la plupart des valeurs de n et de q . Les seuls cas à regarder sont en fait $(n, q) \in \{(7, 1), (8, 1), (9, 1), (9, 2)\}$. On obtient les résultats suivants :

- Pour $n = 7$ et $q = 1$:

$$A_\infty^{ini} = 0.9876 < A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}) = A_\infty(\delta_{0.7770}) = 0.9922.$$

- Pour $n = 8$ et $q = 1$:

$$A_\infty^{ini} = 0.9885 < A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}) = A_\infty(\delta_{0.9269}) = 0.9922.$$

- Pour $n = 9$ et $q = 1$:

$$A_\infty^{ini} = 0.9892 < A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}) = A_\infty(\delta_{1.0837}) = 0.9921.$$

- Pour $n = 9$ et $q = 2$:

$$A_\infty^{ini} = 0.9892 < A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}, \delta_{c_2^{opt}}) = A_\infty(\delta_{1.0825}, \delta_{0.9727}) = 0.9921.$$

Ainsi, dans tous les cas, **la politique de maintenance optimale pour le coût moyen asymptotique améliore aussi la disponibilité asymptotique du système.**

Exemple 2.22 Le système étudié correspond à celui de l'**exemple 2.14** (cas d'un système de type k sur n , formé de composants réparables pendant que le système fonctionne, $D_M = D_R = (1, 0, \dots, 0)$). Les notations et les données numériques sont identiques. Ces données sont complétées par les coûts suivants :

$$\begin{aligned} CF_{m+1}^{Rép} &= 25 + m \text{ (un seul état de panne)}, CH_{m+1}^{Rép} = 5, \\ CHI_{m+1}^{Rép} &= CHI_{m+1}^{Maint} = 20, CI = 0, \\ CF_{\mu_j}^{Maint} &= j \text{ pour } j \in \{q+1, \dots, m\}, CH_{\mu_j}^{Maint} = 5 \text{ pour } j \in \{q+1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} C_{\mu_j}^{Maint} &= \frac{5}{4}j \text{ pour } q+1 \leq j \leq m, C_{m+1}^{Rép} = 25 + \frac{7}{2}m \\ \text{et } C &= \kappa DB \left(\sum_{j=q+1}^m \frac{5}{4}j \times b(\bullet, j) + \left(25 + \frac{7}{2}m\right) \times (I_m - b) \bar{1}^m \right). \end{aligned}$$

Comme nous nous sommes placés dans le cas où le coût des inspections est nul, nous pouvons tester ici les conditions données le **théorème 2.18**.

Dans ce but, on note $y(j) = (gA_2C^{Rép})(j) - C^{ini} \times (g\bar{I}^m + gA_2\overline{\mathbb{E}(R_\bullet)})(j) - C_{\mu_j}^{Maint} + C^{ini} \times \mathbb{E}(M_j)$ pour $j \in \{2, \dots, m\}$. Nous devons alors regarder si les $y(j)$ sont positifs (cf (2.31)).

$n \setminus j$	2	3	4	5	6	7	8
3	5.7732						
4	1.2588	7.1088					
5	-0.6548	1.1145	6.6581				
6	-1.5968	-1.5081	-0.2097	5.2016			
7	-2.0731	-2.7353	-2.9855	-2.0937	3.1978		
8	-2.3069	-3.3058	-4.1619	-4.6756	-4.1334	1.0035	
9	-2.4161	-3.5619	-4.6583	-5.6479	-6.3572	-6.1052	-1.1528

Tableau 2.8. Ex 2.22. Test de l'apport de la maintenance (coût)

Après optimisation, nous trouvons là encore que les lois optimales sont déterministes. Les résultats numériques sont rassemblés dans le **tableau 2.9**.

n	C^{ini}	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 6$	$q = 7$
3	23.4146	7.0755						
4	13.9216	8.3602	4.8077					
5	8.3871	7.2517	5.9036	3.5971				
6	4.8387	C^{ini}	C^{ini}	4.3543	2.6408			
7	2.6211	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	1.8372		
8	1.3318	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	1.1948	
9	0.6399	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}	C^{ini}

Tableau 2.9. Ex 2.22. Coût moyen asymptotique initial et optimal

Sur ce dernier tableau, on constate que la politique de maintenance préventive n'améliore le coût que lorsque l'on a au plus 8 composants. Par ailleurs, le mieux est alors de ne maintenir le système que sur le dernier état de marche avant la panne.

Si nous comparons les deux tableaux, nous voyons qu'il n'y a que deux cas où le coût est amélioré alors que la condition suffisante n'est pas vérifiée : le cas où $n = 5$ et $q = 1$ et le cas où $n = 6$ et $q = 4$ (en gras dans le **tableau 2.9**). Par ailleurs, dans ces deux cas, les valeurs de $y(j)$ sont relativement proches de 0.

La condition suffisante donnée par le théorème 2.18 nous fournit donc une bonne indication pour savoir s'il est opportun ou non de maintenir le système dans le but d'améliorer son coût moyen asymptotique.

Comme dans l'exemple précédent, nous comparons maintenant A_∞^{ini} et $A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}, \dots, \delta_{c_q^{opt}})$. (Nous ne nous intéressons bien sûr qu'aux cas où le coût est amélioré par la maintenance).

D'après le **tableau 2.3**, le seul cas à regarder correspond à $n = 5$ et $q = 1$. De plus, on a dans ce cas

$$A_\infty^{ini} = 0.9140 < A_\infty(\delta_{c_1^{opt}}) = A_\infty(\delta_{0.5019}) = 0.9358.$$

Ainsi, dans tous les cas, la politique de maintenance optimale pour le coût asymptotique améliore là encore la disponibilité asymptotique du système.

Exemple 2.23 Le système étudié correspond à celui de l'exemple 2.15 (cas d'un système de type k sur n , formé de composants non réparables tant que le système fonctionne, $D_M = (1, 0, \dots, 0) \neq D_R = \delta_q$). Les notations et les données numériques sont identiques. Ces données sont complétées par les coûts suivants :

$$\begin{aligned} C_{m+1}^{Rép} &= 20, CH_{m+1}^{Rép} = 5, \\ CHI^{Rép} &= 95, CHI^{Maint} = 45, CI = 1, \\ C_{\mu_j}^{Maint} &= j \text{ pour } j \in \{q+1, \dots, m\}, CH_{\mu_j}^{Maint} = 5 \text{ pour } j \in \{q+1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} C_{\mu_j}^{Maint} &= \frac{3}{2}j \text{ pour } q+1 \leq j \leq m, C_{m+k}^{Rép} = 40 - q \\ \text{et } C &= \kappa D_{MRB} \left(b\bar{1}^m + \sum_{j=q+1}^m \frac{3}{2}j \times b(\bullet, j) + (40 - q) \times (I_m - b)\bar{1}^m \right). \end{aligned}$$

Après optimisation, nous trouvons là encore que les lois optimales sont déterministes. Les résultats numériques sont rassemblés dans le tableau 2.10, où nous donnons le coût moyen asymptotique du système initial C_∞^{ini} , le coût moyen asymptotique optimal du système maintenu C_∞^{opt} ainsi que son argument $(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$, la disponibilité asymptotique du système maintenu correspondante $A_\infty(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$ et la disponibilité asymptotique du système initial A_∞^{ini} . (En effet, le tableau 2.5 ne fournit ici à peu près aucun renseignement sur l'amélioration de la disponibilité asymptotique due à la politique de maintenance).

q	1	2	3	4	5
$C_\infty^{ini}(\delta_q)$	21.8750	23.3129	25.4587	28.9544	35.5932
C_∞^{opt}	12.7670	12.6861	12.5131	12.6540	14.7386
	0.6356	0.6035	0.5663	0.5624	0.6027
		0.4941	0.4591	0.4562	0.4963
			0.3405	0.3390	0.3797
				0.2093	0.2517
					0.1156
$A_\infty(c_1^{opt}, \dots, c_q^{opt})$	0.9289	0.9136	0.8905	0.8655	0.8475
$A_\infty^{ini}(\delta_q)$	0.8934	0.8896	0.8830	0.8713	0.8475

Tableau 2.10. Ex 2.23. Coût moyen asymptotique initial et optimal.

Le coût du système maintenu est ici toujours meilleur que le coût du système initial.

En revanche, pour $q = 4$, la politique de maintenance optimale pour le coût moyen asymptotique diminue un peu la disponibilité asymptotique.

2.6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre un modèle de politique de maintenance préventive dite "conditionnelle", c'est-à-dire liée à l'évolution du système : on n'arrête le système pour le maintenir que lorsqu'il est dans un état de marche relativement dégradé. Pour étudier le système soumis à une telle politique de maintenance, nous avons utilisé deux critères : la disponibilité asymptotique et le coût moyen asymptotique. En effet, si le coût moyen asymptotique est sans doute le critère le plus utilisé par les industriels, l'étude de la disponibilité asymptotique le complète bien et nous permet d'avoir une bonne idée du comportement du système soumis à la politique de maintenance.

Pour chacun de ces critères, c'est-à-dire pour la disponibilité asymptotique et pour le coût moyen asymptotique, nous avons donné des conditions sous lesquelles la politique de maintenance les améliorent et nous avons testé numériquement la validité de ces conditions sur quelques exemples numériques. Nous avons par ailleurs démontré que, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, il est possible de restreindre l'optimisation de la politique de maintenance relativement aux lois des variables inter-inspections aux seules lois déterministes (et cela pour les deux critères). Nous avons par ailleurs constaté la même propriété sur quelques exemples ne vérifiant pas ces hypothèses supplémentaires, de sorte qu'il semblerait que cela soit toujours vrai.

En ce qui concerne le contrôle de la disponibilité asymptotique lorsque l'on diminue le coût, nous nous sommes contenté ici de comparer la disponibilité du système initial avec celle du système soumis à la politique de maintenance optimisée par rapport au coût. Nous pourrions aussi imaginer de faire une optimisation par rapport au coût sous la contrainte "disponibilité asymptotique du système maintenu supérieure ou égale à celle du système initial". Une autre possibilité serait de considérer un nouveau critère de type bénéfice, qui ferait intervenir à la fois le coût moyen et la disponibilité asymptotiques (ou la probabilité que l'on soit dans tel ou tel état de marche si le rendement du système dépend de l'état de dégradation du système).

Remarquons enfin que nous avons choisi ici le coût comme critère principal. Il est bien évident que, dans certains cas, c'est la disponibilité qui est prépondérante. Cela signifie que, le cas échéant, il peut être préférable de faire le contraire de ce que nous avons fait, c'est-à-dire d'optimiser tout d'abord la politique de maintenance par rapport à la disponibilité asymptotique, puis de contrôler le coût obtenu.

Chapitre 3

Un modèle de maintenance préventive pour un système semi-markovien

3.1 Introduction

Comme dans les deux premiers chapitres de cette thèse, nous nous intéressons là encore à un système réparable. En revanche, contrairement à ce que nous avons fait jusqu'à présent, nous ne supposons plus ici que le système évolue de façon markovienne lorsqu'il est en marche. En effet, cette modélisation markovienne convient lorsque l'on a, par exemple, un système formé d'un petit nombre de composants dont les taux de panne (et éventuellement de réparation) sont constants, les composants pouvant être soumis à diverses dépendances fonctionnelles ou sollicitations extérieures. Dans la pratique, les taux ne sont pas toujours constants (surtout ceux de réparation). Par ailleurs, le nombre de composants intervenant dans un système conduit rapidement à l'explosion du nombre d'états possibles (en 2^n) et les calculs deviennent vite rédhibitoires. Ceci amène alors les industriels à utiliser une autre approche, plus statistique. Ils recueillent ainsi un certain nombre de données sur les durées de vie de leurs systèmes (données réelles ou simulées, éventuellement censurées) et recherchent la loi qui ajuste au mieux ces données. Pour ce faire, ils ont fréquemment recours à un certain nombre de lois classiques, la plus célèbre (et sans doute la plus ancienne) étant la loi de Weibull (cf [6], [55]), l'avis des experts étant à ce niveau tout à fait primordial quant au choix de type de loi utilisée.

Notre propos n'est pas ici de voir comment mener à bien ces ajustements, mais plutôt d'utiliser cette modélisation de la durée de vie d'un système par une loi unique, en général à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Remarquons pour cela que cette modélisation revient en fait à représenter l'évolution du système par un processus semi-markovien, l'espace d'états étant alors formé par un seul état de marche et éventuellement plusieurs états de panne.

Nous nous intéressons ici à un modèle un peu plus général et nous supposons que l'évolution du système peut être représentée par un processus semi-markovien (X_t) , à valeurs dans un espace d'états fini, comportant éventuellement plusieurs états de marche. Au lieu de modéliser la durée de vie par une seule loi, nous pouvons ainsi tenir compte de changements de régimes éventuels dans l'évolution du système, par exemple lorsqu'un composant tombe en panne ou sous l'influence d'une sollicitation extérieure. Remarquons aussi que cette modélisation est une généralisation naturelle du cas markovien.

Comme dans le **chapitre 2**, ce système (dit système initial) est soumis à une politique de maintenance préventive, dans le but d'améliorer sa disponibilité asymptotique. Plus précisément, si le système est au départ dans un état de marche, on l'inspecte (instantanément) à un instant aléatoire de loi ρ , où ρ est une loi quelconque. Si le système est déjà en panne en train d'être réparé, on achève normalement la réparation. Si le système est encore en marche, on l'arrête pour lui faire subir une opération de maintenance préventive. Cette opération a une durée aléatoire dépendant de l'état de dégradation du système au moment où on l'arrête. On procède de la même façon après n'importe quelle période d'arrêt.

Notre problème est alors de calculer la disponibilité asymptotique du système soumis à cette politique de maintenance préventive et de voir si elle est améliorée par la maintenance. Le cas échéant, on cherche ensuite à optimiser cette politique de maintenance, comme dans le **chapitre 2**.

De façon plus précise, ce chapitre se présente de la façon suivante :

Le système initial et la politique de maintenance préventive sont tout d'abord décrits dans le paragraphe **3.2**. Nous nous intéressons ensuite (§**3.3**) au cas particulier où la loi ρ du "temps d'attente de la maintenance" est exponentielle. L'intérêt de ce cas particulier réside dans le fait que, contrairement au cas général, le processus (Z_t) décrivant l'évolution du système maintenu est, comme le processus (X_t) , un processus semi-markovien. Ceci nous permet de montrer l'existence et de calculer la disponibilité asymptotique du système maintenu (dans le §**3.3.2**) sous des hypothèses plus faibles que dans le cas général. En particulier, nous ne supposons pas que les redémarrages après une réparation ou une opération de maintenance sont indépendants de l'état de panne ou de maintenance associé, comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent et comme nous le faisons dans le paragraphe **3.4**, consacré au cas général. Par ailleurs, le caractère semi-markovien de (Z_t) nous permet aussi de calculer la disponibilité instantanée du système maintenu (dans le §**3.3.3**), ce que l'on ne sait pas faire dans le cas général. Nous étudions alors quelques exemples pour lesquels nous optimisons la disponibilité asymptotique relativement au paramètre de la loi exponentielle et pour lesquels nous comparons les diponibilités instantanées du système initial et du système maintenu (§**3.3.4**).

Dans le cas général (§**3.4**), comme nous l'avons annoncé au-dessus, nous avons besoin de quelques hypothèses supplémentaires, que nous donnons au paragraphe **3.4.1**. L'étude repose alors, comme dans les deux premiers chapitres de cette thèse, sur le caractère semi-régénératif du processus (Z_t) (oubli du passé à chaque redémarrage). Nous commençons par donner quelques résultats préliminaires au paragraphe **3.4.2**, puis nous calculons la disponibilité asymptotique du système maintenu au paragraphe **3.4.3**. Nous nous intéressons ensuite à l'optimisation de cette disponibilité asymptotique relativement à la loi ρ du temps d'attente de la maintenance.

Nous nous plaçons tout d'abord (§**3.4.4**) dans un cadre général, où le système ne redémarre pas nécessairement de la même façon après une réparation ou une opération de maintenance. Nous observons alors sur quelques exemples que, comme dans le **chapitre 2**, il semblerait qu'il soit toujours suffisant de ne considérer que des lois ρ de type déterministe pour optimiser la maintenance. Ceci nous conduit à étudier ce type de maintenance. On montre en particulier que, sous des conditions relativement naturelles, il existe une politique de maintenance déterministe qui améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si les opérations de maintenance ne sont pas trop longues en moyenne (comme au **chapitre 2**).

Nous nous plaçons ensuite dans le cas particulier où système redémarre de la même façon après une réparation ou une opération de maintenance (§**3.4.5**). Nous montrons alors

que l'on peut effectivement se restreindre aux seules lois ρ déterministes pour optimiser la maintenance dans ce cas et nous étudions ces maintenances déterministes. Nous montrons en particulier que, si le taux de panne après un redémarrage est une fonction croissante du temps (cas IFR), ou bien décroissante puis croissante, la politique de maintenance préventive améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si elle n'est pas trop longue en moyenne. Nous étudions aussi d'autres types de comportements du taux. Nous nous intéressons ensuite au cas où il n'y a qu'un seul état de marche. Nous envisageons alors différentes lois classiques utilisées par les industriels pour modéliser la durée de vie d'un système (Weibull, Gamma, loi des valeurs extrêmes modifiée et log-normale). Différents exemples sont par ailleurs étudiés tout au long de ce paragraphe.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous commençons par décrire le système initial et la politique de maintenance préventive.

3.2 Le système initial et la politique de maintenance préventive

On considère ici un système réparable évoluant dans le temps dans un espace d'états fini selon un processus semi-markovien que l'on note $(X_t)_{t \geq 0}$. Pour un panorama général sur ce type de processus, on pourra, par exemple, consulter [2] ou [18]. Pour des applications plus spécifiquement fiabilistes, on pourra consulter [19] ou [22].

Les états de marche sont notés 1 à m , les états de panne $m+1$ à $m+p$. A l'issue d'une réparation, on suppose que le système est dans un état de marche.

Le noyau semi-markovien associé au processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est noté $(q(i, j, dt))_{1 \leq i, j \leq m+p}$. On rappelle que, par définition d'un processus semi-markovien, si le système "rentre" dans son état initial à l'instant $\tau_0 = 0$ et si τ_1 désigne le premier saut du processus (X_t) , on a alors

$$\mathbb{P}(X_{\tau_1} = j, \tau_1 \leq t / X_0 = i) = \int_0^t q(i, j, du) \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq m+p \text{ et } t \geq 0.$$

On en déduit en particulier que la loi de τ_1 sachant que $X_0 = i$ est $\sum_{j=1}^{m+p} q(i, j, dt)$ pour tout $1 \leq i \leq m+p$.

La durée moyenne passée dans l'état i , $\mathbb{E}_i(\tau_1)$, est supposée finie non nulle pour tout $1 \leq i \leq m+p$.

On note Q la matrice de transition de la chaîne de Markov associée à (X_t) .

On rappelle que

$$Q_{i,j} = \int_0^{+\infty} q(i, j, du) \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq m+p.$$

On suppose par ailleurs que le système est en marche à l'instant $t = 0$ et qu'il tombe en panne au bout d'un temps presque sûrement fini. Ainsi, si T désigne la première durée de fonctionnement du système ($T = \inf \{t \geq 0 / X_t \geq m+1\}$), on a alors $\mathbb{P}_i(T < +\infty) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Remarquons que cela entraîne que $\mathbb{E}_i(T) < +\infty$ (cf [19], **propositions 9.15** et **10.40** par exemple).

Ce système, que l'on appelle système initial, est soumis à la politique de maintenance préventive suivante.

On considère une loi de probabilité quelconque ρ sur \mathbb{R}^+ , telle que $0 < \int_0^{+\infty} t \cdot \rho(dt) < +\infty$ et un noyau semi-markovien $(q^M(i, j, dt))_{1 \leq i, j \leq m}$ sur \mathbb{R}^+ , tel que $\int_0^{+\infty} t \cdot q^M(i, j, dt) <$

$+\infty$, pour tous $1 \leq i, j \leq m$.

Soit alors S_1 une variable aléatoire indépendante de l'évolution du système et de loi ρ . S_1 correspond au début (éventuel) d'une opération de maintenance préventive. Plus précisément, on inspecte (instantanément) le système à l'instant S_1 :

- Si $S_1 < T$, le système est encore en marche à l'instant S_1 . Dans ce cas, on l'arrête pour commencer une opération de maintenance préventive. L'état de marche dans lequel le système redémarre après cette opération et la durée (aléatoire) de cette opération sont supposés indépendants de S_1 et de l'évolution du système antérieure à S_1 . Si le système est dans l'état de marche i à l'instant S_1 ($X_{S_1} = i$), le système redémarre dans l'état de marche j avec la probabilité $Q_{i,j}^M = \int_0^{+\infty} q^M(i, j, dt)$. De plus, si $Q_{i,j}^M$ est non nul (c'est-à-dire si le système peut effectivement redémarrer dans l'état j après une opération de maintenance démarrée dans l'état i), la durée de cette opération (sachant qu'elle fait passer le système de l'état i à l'état j) suit la loi $\frac{q^M(i, j, dt)}{Q_{i,j}^M}$.
- Si $S_1 \geq T$, le système est tombé en panne avant qu'on ne commence à le maintenir. On effectue alors une réparation de la même façon que pour le système initial, indépendamment de S_1 .

D'après ce qui précède, la première durée de fonctionnement du système maintenu est donc $T \wedge S_1$. Elle est suivie par une période d'arrêt, pour maintenance ou pour réparation selon la place de T par rapport à S_1 .

La politique de maintenance est ensuite définie de la même façon après chaque période d'arrêt : après la n -ième période d'arrêt, on considère une nouvelle variable aléatoire S_{n+1} de loi ρ et indépendante de l'évolution antérieure du système (et donc en particulier de S_1, S_2, \dots, S_n). Si le système fonctionne pendant une durée au moins égale à S_{n+1} après son redémarrage à l'issue de la n -ième période d'arrêt, on l'arrête pour le maintenir, sinon on le répare comme le système initial. Lorsque l'on maintient effectivement le système, l'état de marche dans lequel le système redémarre après l'opération de maintenance et la durée de cette opération sont supposés indépendants de S_{n+1} et de l'évolution du système antérieure à S_{n+1} . Si le système est dans l'état de marche i à l'instant S_{n+1} , le système redémarre dans l'état de marche j avec la probabilité $Q_{i,j}^M$. De plus, si $Q_{i,j}^M$ est non nul, la durée de cette opération (sachant qu'elle fait passer le système de l'état i à l'état j) suit la loi $\frac{q^M(i, j, dt)}{Q_{i,j}^M}$.

Cette politique de maintenance étant définie, nous terminons ce paragraphe en donnant quelques notations supplémentaires.

On note ainsi S une variable aléatoire indépendante de l'évolution du système initial et de loi ρ . S représente le temps d'attente de la première opération de maintenance (si elle a lieu).

On note aussi μ_i l'état correspondant à une opération de maintenance à partir de l'état de marche $1 \leq i \leq m$.

On note enfin $(Z_t)_{t \geq 0}$ le processus décrivant l'évolution du système maintenu, à valeurs dans $E = \{1, \dots, m + p\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$.

Nous commençons maintenant notre étude par le cas particulier où S suit une loi exponentielle.

3.3 Techniques semi-markoviennes dans un cas particulier

Dans le cas général, le processus (Z_t) n'est pas semi-markovien. En effet, lorsque le système saute d'un état de marche à un autre état de marche, le temps d'attente de la prochaine maintenance n'est pas remis à zéro, de sorte que l'évolution ultérieure du système après un tel saut dépend non seulement de l'état dans lequel il saute, mais aussi de la durée écoulée depuis le dernier redémarrage. On peut malgré tout distinguer deux cas particuliers où (Z_t) sera tout de même semi-markovien : d'une part, le cas où le système n'a qu'un seul état de marche, d'autre part, le cas où la loi ρ du temps d'attente de la maintenance est exponentielle. En effet, il est facile de voir que, dans chacun de ces deux cas, l'évolution ultérieure du système après un saut ne dépend que de l'état dans lequel le système saute. C'est tout à fait clair lorsque le saut se fait vers un état de panne ou de maintenance, ou vers un état de marche après une période d'arrêt. Lorsqu'il n'y a qu'un seul état de marche, ces types de saut étant les seuls possibles, le processus (Z_t) est semi-markovien. Lorsque le temps d'attente de la maintenance suit une loi exponentielle, c'est le caractère "sans mémoire" de cette loi qui nous permet d'"oublier" la durée écoulée depuis le dernier redémarrage lors d'un saut entre états de marche. Ainsi, dans ce cas encore, le processus (Z_t) est semi-markovien.

Nous nous contentons ici de traiter le cas où le temps d'attente de la maintenance suit une loi exponentielle, le cas où il n'y a qu'un seul état de marche ayant moins d'intérêt. En effet, dans ce dernier cas, les formes de la disponibilité asymptotique données, d'une part, par les techniques semi-markoviennes (ce paragraphe), d'autre part, par la théorie du renouvellement markovien (§3.4) sont identiques, les calculs étant par ailleurs tout à fait similaires. Afin de ne pas nous répéter inutilement, nous ne considérons donc pas ce cas ici.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons maintenant que S suit la loi exponentielle de paramètre α ($\alpha > 0$). Cette loi est notée $Exp \alpha$.

Les différents états sont rangés dans l'ordre $1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+p, \mu_1, \dots, \mu_m$ (pour les indices des matrices).

Par ailleurs, nous prenons pour le processus semi-markovien (Z_t) des notations similaires à celles correspondant au processus semi-markovien (X_t) , avec des "primes" en plus, les indices prenant alors leurs valeurs dans $E = \{1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$. On note ainsi $q'(i, j, dt)$, $Q'_{i,j}$, τ'_1, \dots

Nous commençons par énoncer quelques résultats concernant le processus (Z_t) .

3.3.1 Etude du processus (Z_t)

Rappelons tout d'abord que, pour toute mesure ω définie sur \mathbb{R}^+ telle que $\int_0^{+\infty} t \omega(dt) < +\infty$, la transformée de Laplace de ω est la fonction ω^* définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\omega^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \omega(dt), \text{ pour tout } s > 0.$$

Remarquons d'autre part que, si ω désigne une mesure définie sur \mathbb{R}^+ telle que $\int_0^{+\infty} t \omega(dt) < +\infty$, on a

$$w^*(s) = s \int_0^{+\infty} \left(\int_{[0,u)} w(dt) \right) e^{-su} du, \text{ pour tout } s > 0, \quad (3.1)$$

où $[0, u)$ désigne l'intervalle $[0, u]$ ou $[0, u[$.

Cette formule découle immédiatement du théorème de Fubini. En effet, en échangeant les intégrales, on a :

$$\begin{aligned} s \int_0^{+\infty} \left(\int_{[0,u)} w(dt) \right) e^{-su} du &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{[t,\infty)} s e^{-su} du \right) w(dt) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} w(dt) \\ &= w^*(s), \text{ pour tout } s > 0. \end{aligned}$$

Si $q_{i,j}^*$ et $q'_{i,j}$ désignent les transformées de Laplace respectives des mesures $q(i,j,dt)$ et $q'(i,j,dt)$, on obtient alors le résultat suivant :

Lemme 3.1 *La transformée de Laplace du noyau semi-markovien q' est donnée par :*

- pour $1 \leq i \leq m$, $s > 0$:

$$q'_{i,j}(s) = \begin{cases} q_{i,j}^*(s + \alpha) & \text{pour } 1 \leq j \leq m + p \\ \frac{\alpha}{\alpha + s} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha + s) \right) & \text{pour } j = \mu_i \\ 0 & \text{pour } j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \setminus \{\mu_i\} \end{cases}$$

- pour $m + 1 \leq i \leq m + p$, $s > 0$:

$$q'_{i,j}(s) = \begin{cases} q_{i,j}^*(s) & \text{pour } 1 \leq j \leq m + p \\ 0 & \text{pour } j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \end{cases}$$

- pour $i = \mu_l \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$, $s > 0$:

$$q'_{i,j}(s) = \begin{cases} q_{i,j}^{M*}(s) & \text{pour } 1 \leq j \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $q_{i,j}^{M*}$ désigne la transformée de Laplace de $q^M(i,j,dt)$.

Démonstration.

Nous considérons uniquement le cas où $1 \leq i \leq m$, les autres cas étant immédiats.

D'après (3.1), on sait que :

$$q'_{i,j}(s) = s \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u q'(i,j,dt) \right) e^{-su} du \quad (3.2)$$

pour tout $s > 0$.

Considérons tout d'abord $1 \leq j \leq m + p$.

Par définition du noyau semi-markovien, on alors :

$$\begin{aligned} \int_0^u q'(i,j,dt) &= \mathbb{P}_i \left(Z_{\tau'_1} = j \cap \tau'_1 \leq u \right) \\ &= \mathbb{P}_i \left(X_{\tau_1} = j \cap \tau_1 \leq u \cap \tau_1 \leq S \right). \end{aligned}$$

Remarquons que, comme S admet une densité et que S et τ_1 sont indépendantes, on peut écrire indifféremment $\tau_1 < S$ ou $\tau_1 \leq S$ dans cette formule.

En distinguant suivant que $u \leq S$ ou $u > S$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^u q'(i, j, dt) &= \mathbb{P}_i(X_{\tau_1} = j \cap \tau_1 \leq u \cap u \leq S) \\ &\quad + \mathbb{P}_i(X_{\tau_1} = j \cap \tau_1 \leq S \cap u > S) \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que S suit une loi exponentielle de paramètre α et l'indépendance, on a maintenant :

$$\begin{aligned} \int_0^u q'(i, j, dt) &= \mathbb{P}_i(X_{\tau_1} = j \cap \tau_1 \leq u) \mathbb{P}(u \leq S) \\ &\quad + \int_0^u \mathbb{P}_i(X_{\tau_1} = j \cap \tau_1 \leq v) \alpha e^{-\alpha v} dv \\ &= \int_0^u q(i, j, dt) \times e^{-\alpha u} + \int_0^u \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.2), on a alors :

$$\begin{aligned} q'_{i,j}(s) &= s \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u q(i, j, dt) \times e^{-\alpha u} + \int_0^u \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv \right) e^{-su} du \\ &= s \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^u q(i, j, dt) \right) e^{-(\alpha+s)u} du \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv \right) e^{-su} du \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

En échangeant les deux premières intégrales, le deuxième morceau de l'expression précédente s'écrit

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left(\int_0^u \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv \right) e^{-su} du \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_v^{+\infty} e^{-su} du \right) \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} e^{-sv} \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv \\ &= \frac{\alpha}{s} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) e^{-(\alpha+s)v} dv. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.3), on a maintenant :

$$\begin{aligned} q'_{i,j}(s) &= s \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^u q(i, j, dt) \right) e^{-(\alpha+s)u} du + \frac{\alpha}{s} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^v q(i, j, dt) \right) e^{-(\alpha+s)v} dv \right) \\ &= (s + \alpha) \left(\int_0^{+\infty} \int_0^u q(i, j, dt) e^{-(\alpha+s)u} du \right) \\ &= q_{i,j}^*(s + \alpha) \text{ (d'après (3.1))}, \end{aligned}$$

ce qui est la formule souhaitée pour $1 \leq j \leq m + p$.

Soit maintenant $j = \mu_i$.

On a, de la même façon que précédemment :

$$\begin{aligned} \int_0^u q'(i, \mu_i, dt) &= \mathbb{P}_i(S < \tau_1 \cap S < u) \\ &= \int_0^u \mathbb{P}_i(v < \tau_1) \alpha e^{-\alpha v} dv \\ &= \int_0^u \int_v^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+p} q(i, l, dt) \alpha e^{-\alpha v} dv. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{l*}(s) &= s \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u q'(i, j, dt) \right) e^{-su} du \text{ (cf (3.1))} \\ &= s \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u \left(\int_v^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+p} q(i, l, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv \right) e^{-su} du \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_v^{+\infty} s e^{-su} du \right) \left(\int_v^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+p} q(i, l, dt) \right) \alpha e^{-\alpha v} dv \\ &\quad \text{(en échangeant les deux premières intégrales)} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_v^{+\infty} \sum_{l=1}^{m+p} q(i, l, dt) \right) \alpha e^{-(\alpha+s)v} dv \end{aligned}$$

car $\left(\int_v^{+\infty} s e^{-su} du \right) = e^{-sv}$.

En utilisant le fait que $\sum_{l=1}^{m+p} q(i, l, dt)$ est une loi de probabilité et que $\int_v^{+\infty} = \int_0^{+\infty} - \int_0^v$, on obtient maintenant :

$$\begin{aligned} q_{i,j}^{l*}(s) &= \int_0^{+\infty} \left(1 - \int_0^v \sum_{l=1}^{m+p} q(i, l, dt) \right) \alpha e^{-(\alpha+s)v} dv \\ &= \alpha \left(\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+s)v} dv - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^v \sum_{l=1}^{m+p} q(i, l, dt) \right) e^{-(\alpha+s)v} dv \right) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{\alpha+s} - \frac{1}{\alpha+s} \sum_{j=1}^{m+p} q^*(\alpha+s)(i, j) \right) \end{aligned}$$

en utilisant (3.1).

On en déduit que

$$q_{i,j}^{l*}(s) = \frac{\alpha}{\alpha+s} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q^*(\alpha+s)(i, j) \right),$$

ce qui est la formule annoncée pour $j = \mu_i$.

Enfin, pour $j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \setminus \{\mu_i\}$, on a clairement $q_{i,j}^{l*}(s) = 0$, pour tout $s > 0$, ce qui achève la démonstration. ■

Les résultats précédents nous permettent maintenant de calculer facilement la ma-

trice de transition Q' de la chaîne de Markov associée à (Z_t) . En effet, comme $Q'_{i,j} = \int_0^{+\infty} q'(i, j, dt) = \lim_{s \rightarrow 0^+} q'_{i,j}(s)$, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 3.2 *La matrice de transition Q' de la chaîne de Markov associée au processus semi-markovien (Z_t) est donnée par :*

- pour $1 \leq i \leq m$:

$$Q'_{i,j} = \begin{cases} q_{i,j}^*(\alpha) & \text{pour } 1 \leq j \leq m+p \\ 1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha) & \text{pour } j = \mu_i \\ 0 & \text{pour } j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \setminus \{\mu_i\} \end{cases}$$

- pour $m+1 \leq i \leq m+p$:

$$Q'_{i,j} = \begin{cases} Q_{i,j} & \text{pour } 1 \leq j \leq m+p \\ 0 & \text{pour } j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \end{cases}$$

- pour $i \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$:

$$Q'_{i,j} = \begin{cases} Q_{i,j}^M & \text{pour } 1 \leq j \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous calculons maintenant les durées moyennes passées dans les différents états par le processus (Z_t) .

Lemme 3.3 *La durée moyenne avant le premier saut du processus semi-markovien (Z_t) partant de i est finie et vaut :*

$$\mathbb{E}_i(\tau'_1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha) \right) & \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ \mathbb{E}_i(\tau_1) = \text{noté } \mathbb{E}(R_i) & \text{pour } m+1 \leq i \leq m+p \\ \sum_{j=1}^m \int_0^{+\infty} t \cdot q^M(l, j, dt) = \text{noté } \mathbb{E}(M_l) & \text{pour } i = \mu_l \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \end{cases}$$

Remarque 3.4 *Dans le cas où $m+1 \leq i \leq m+p$, $\mathbb{E}_i(\tau_1)$ représente la durée moyenne de la réparation associée à l'état de panne i , ce qui nous amène à la noter $\mathbb{E}(R_i)$.*

De la même façon, lorsque $i = \mu_l$, $\mathbb{E}_i(\tau'_1)$ représente la durée moyenne de l'opération de maintenance associée à l'état μ_l et est notée $\mathbb{E}(M_l)$.

Démonstration. Nous ne considérons que le cas $1 \leq i \leq m$, les autres cas étant immédiats.

Remarquons tout d'abord que $\mathbb{E}_i(\tau'_1)$ est clairement finie car $\mathbb{E}_i(\tau'_1) = \mathbb{E}_i(\tau_1 \wedge S) \leq \mathbb{E}(S) = \frac{1}{\alpha} < \infty$.

Calculons alors $\mathbb{E}_i(\tau'_1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i(\tau'_1) &= \mathbb{E}_i(\tau_1 \wedge S) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(\tau_1 \wedge S > t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(\tau_1 > t) \mathbb{P}_i(S > t) dt, \end{aligned}$$

car S et τ_1 sont indépendantes.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(\tau'_1) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \sum_{j=1}^{m+p} q(i, j, du) \right) e^{-\alpha t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{m+p} q(i, j, du) - \int_0^t \sum_{j=1}^{m+p} q(i, j, du) \right) e^{-\alpha t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(1 - \int_0^t \sum_{j=1}^{m+p} q(i, j, du) \right) e^{-\alpha t} dt \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha) \right) \quad (\text{cf (3.1)}),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Nous terminons maintenant ce paragraphe consacré à l'étude du processus (Z_t) en étudiant son irréductibilité.

Lemme 3.5 *Si (X_t) est un processus semi-markovien irréductible, (Z_t) est aussi un processus semi-markovien irréductible.*

Démonstration.

Supposons (X_t) irréductible. Il s'agit de montrer que le seul ensemble clos pour la chaîne de Markov associée à (Z_t) est $E = \{1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$.

Soit donc C un tel ensemble, c'est-à-dire un ensemble tel que $\mathbb{P}_i(Z_{\tau'_1} \in C) = 1$, pour tout $i \in C$. Il nous faut montrer que $C = E$.

Vérifions tout d'abord que C contient nécessairement un élément de $\{1, \dots, m\}$.

Si ce n'est pas le cas, comme C est non vide, il contient alors au moins un élément i de $\{m+1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$.

Pour un tel i , on sait que $\mathbb{P}_i(Z_{\tau'_1} \in \{1, \dots, m\}) = 1$, car, par hypothèse, après une réparation ou une opération de maintenance, le système est en état de marche.

On a donc dans ce cas $\mathbb{P}_i(Z_{\tau'_1} \in \{1, \dots, m\}) = 1 = \mathbb{P}_i(Z_{\tau'_1} \in C)$.

Ceci entraîne que C contient nécessairement un élément de $\{1, \dots, m\}$.

Soit maintenant $i \in C \cap \{1, \dots, m\}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(Z_{\tau'_1} \in C) &= \mathbb{P}_i\left(\left\{Z_{\tau'_1} \in C \cap \{1, \dots, m+p\}\right\} \cap \{S > \tau_1\}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}_i\left(Z_{\tau'_1} = \mu_i \cap S \leq \tau_1\right) \mathbb{I}_{\{\mu_i \in C\}} \\
&= \mathbb{P}_i\left(\{X_{\tau_1} \in C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{S > \tau_1\}\right) \\
&\quad + \mathbb{P}_i(S \leq \tau_1) \mathbb{I}_{\{\mu_i \in C\}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}_i(S > \tau_1) + \mathbb{P}_i(S \leq \tau_1)$ est aussi égal à 1, on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i\left(\{X_{\tau_1} \in C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{S > \tau_1\}\right) + \mathbb{P}_i(S \leq \tau_1) \mathbb{I}_{\{\mu_i \in C\}} \\
&= \mathbb{P}_i(S > \tau_1) + \mathbb{P}_i(S \leq \tau_1).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \in C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{S > \tau_1\}) \leq \mathbb{P}_i(S > \tau_1)$$

et

$$\mathbb{P}_i(S \leq \tau_1) \mathbb{I}_{\{\mu_i \in C\}} \leq \mathbb{P}_i(S \leq \tau_1).$$

On en déduit

$$\mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \in C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{S > \tau_1\}) = \mathbb{P}_i(S > \tau_1) \quad (3.4)$$

et

$$\mathbb{P}_i(S \leq \tau_1) \mathbb{I}_{\{\mu_i \in C\}} = \mathbb{P}_i(S \leq \tau_1). \quad (3.5)$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{P}_i(S \leq \tau_1) = \alpha \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(s \leq \tau_1) e^{-\alpha s} ds > 0$$

car $\mathbb{E}_i(\tau_1) > 0$ par hypothèse.

On déduit donc de (3.5) que $\mathbb{I}_{\{\mu_i \in C\}} = 1$ et $\mu_i \in C$, pour tout $i \in C \cap \{1, \dots, m\}$.

De la même façon, (3.4) entraîne :

$$\mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \notin C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{S > \tau_1\}) = 0.$$

Ceci peut encore s'écrire

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \notin C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{t > \tau_1\}) \alpha e^{-\alpha t} dt = 0.$$

On en déduit

$$\mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \notin C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{t > \tau_1\}) = 0, \text{ pour presque tout } t > 0,$$

puis

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \uparrow \mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \notin C \cap \{1, \dots, m+p\}\} \cap \{t > \tau_1\}) \\ = \mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \notin C \cap \{1, \dots, m+p\}\}) \quad (\text{car } \mathbb{E}_i(\tau_1) < +\infty) \\ = 0. \end{aligned}$$

Ceci entraîne :

$$\mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \in C \cap \{1, \dots, m+p\}\}) = 1 \quad (3.6)$$

et ceci pour tout $i \in C \cap \{1, \dots, m\}$.

Si $C \cap \{m+1, \dots, m+p\} \neq \emptyset$, considérons maintenant $i \in C \cap \{m+1, \dots, m+p\}$.

Pour un tel i , on a alors

$$\mathbb{P}_i(Z_{\tau_1'} \in C) = \mathbb{P}_i(X_{\tau_1} \in C \cap \{1, \dots, m\})$$

car on sait que le système fonctionne après une réparation.

On en déduit que, là encore, $\mathbb{P}_i(\{X_{\tau_1} \in C \cap \{1, \dots, m+p\}\}) = 1$ car $\mathbb{P}_i(Z_{\tau_1'} \in C) = 1$.

(3.6) est donc vraie pour tout $i \in C \cap \{1, \dots, m+p\}$. Cette propriété signifie que $C \cap \{1, \dots, m+p\}$ est un ensemble clos pour la chaîne de Markov associée au processus irréductible (X_t) . Ceci entraîne que $\{1, \dots, m+p\} \subset C$.

Comme on a montré auparavant que $\mu_i \in C$ pour tout $i \in C \cap \{1, \dots, m\}$, on en déduit que $E = \{1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \subset C$.

Le seul ensemble clos pour la chaîne de Markov associée à (Z_t) est donc l'ensemble E et le processus (Z_t) est irréductible. ■

Ces résultats préliminaires étant terminés, nous abordons maintenant le calcul de la disponibilité asymptotique.

3.3.2 Calcul de la disponibilité asymptotique

Nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 3.6 *Lorsque ρ est la loi exponentielle de paramètre α ($\rho = \text{Exp } \alpha$), si (X_t) est un processus semi-markovien irréductible non-arithmétique, la disponibilité asymptotique du système maintenu existe et vaut*

$$A_\infty(\text{Exp } \alpha) = \frac{1}{1 + a_\infty(\text{Exp } \alpha)}$$

avec

$$\begin{aligned} a_\infty(\text{Exp } \alpha) &= \alpha \frac{\sum_{k=1}^p \nu'(m+k) \mathbb{E}(R_{m+k}) + \sum_{i=1}^m \nu'(\mu_i) \mathbb{E}(M_i)}{\sum_{i=1}^m \nu'(i) \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha)\right)} \\ &= \alpha \frac{\sum_{k=1}^p \nu'(m+k) \mathbb{E}(R_{m+k}) + \sum_{i=1}^m \nu'(\mu_i) \mathbb{E}(M_i)}{\sum_{i=1}^m \nu'(\mu_i)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

où ν' est la loi stationnaire de la chaîne de Markov associée au processus semi-markovien (Z_t) .

Remarque 3.7 *Lorsque ρ est une loi quelconque, la disponibilité asymptotique sera notée ultérieurement $A_\infty(\rho)$. Afin de conserver la même notation tout au long de ce chapitre, nous préférons donc la noter ici $A_\infty(\text{Exp } \alpha)$ au lieu de $A_\infty(\alpha)$, ce qui pourrait paraître plus simple au premier abord.*

Démonstration.

D'après le **lemme 3.5**, on sait déjà que (Z_t) est un processus semi-markovien irréductible (récurrent). Par ailleurs, d'après le **lemme 3.3**, on sait que les durées moyennes des cycles $\mathbb{E}_i(\tau'_i)$ sont finies. Il reste alors à vérifier que (Z_t) est un processus non-arithmétique pour pouvoir appliquer les théorèmes limites concernant les processus-semi-markoviens.

Supposons que le système soit au départ dans l'état 1 et notons R'_1 l'instant de premier retour en 1 pour (Z_t) . Soit par ailleurs A un borélien inclus dans $d\mathbb{Z}$, avec $d \in \mathbb{R}$. Il s'agit alors de vérifier que $\mathbb{P}_1(R'_1 \in A) = 0$.

Notons pour cela R_1 l'instant de premier retour en 1 pour (X_t) .

On a alors $R'_1 = R_1$ si le premier retour en 1 a lieu avant la première maintenance. Sinon, R'_1 est de la forme $R'_1 = T' + S'$ où S' suit la loi exponentielle de paramètre α et où T' est une variable aléatoire indépendante de S' .

On en déduit que

$$\mathbb{P}_1 (R'_1 \in A) \leq \mathbb{P}_1 (R_1 \in A) + \mathbb{P}_1 (T' + S' \in A).$$

Comme (X_t) est un processus non-arithmétique, on sait déjà que $\mathbb{P}_1 (R_1 \in A) = 0$.

Par ailleurs, en utilisant le fait que S' suit une loi exponentielle pour la seconde partie, il est facile de voir que $\mathbb{P}_1 (T' + S' \in A) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_1 (t + S' \in A) d\mu_{T'}(t) = 0$, où $\mu_{T'}$ représente la loi de T' .

On en déduit que $\mathbb{P}_1 (R'_1 \in A) = 0$ pour tout borélien A inclus dans $d\mathbb{Z}$, avec $d \in \mathbb{R}$ et (Z_t) est un processus non-arithmétique.

D'après les théorèmes généraux concernant les processus semi-markoviens (cf [18] ou [19] par exemple), on sait alors que la disponibilité asymptotique du système maintenu existe et qu'elle vaut

$$\begin{aligned} A_\infty (Exp \alpha) &= \frac{\sum_{i=1}^m \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)}{\sum_{i \in E} \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)}{\sum_{i=1}^m \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1) + \sum_{i \in \{m+1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_m\}} \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où ν' est la loi stationnaire de la chaîne de Markov associée au processus semi-markovien (Z_t) .

Remarquons par ailleurs que $\sum_{i=1}^m \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)$ est non nul car les $\mathbb{E}_i (\tau'_1)$ sont tous non nuls pour $1 \leq i \leq m$. En effet, d'après le **lemme 3.3**, on sait que $\mathbb{E}_i (\tau'_1) = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^* (\alpha) \right)$ pour $1 \leq i \leq m$. D'autre part, comme nous avons supposé que $\mathbb{E}_i (\tau_1)$ est non nul, $\tau_1/X_0 = i$ ne peut pas être nul presque partout. La transformée de Laplace de sa loi $\left(\sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^* (\alpha) \right)$ est donc différente de 1 et on a bien $\mathbb{E}_i (\tau'_1) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

$\sum_{i=1}^m \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)$ étant non nul, (3.8) peut alors s'écrire sous la forme

$$A_\infty (Exp \alpha) = \frac{1}{1 + a_\infty (Exp \alpha)}$$

avec

$$a_\infty (Exp \alpha) = \frac{\sum_{i \in \{m+1, \dots, m+p\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_m\}} \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)}{\sum_{i=1}^m \nu'(i) \mathbb{E}_i (\tau'_1)}.$$

En coupant la somme du numérateur en deux et en utilisant les résultats du **lemme 3.3**, on obtient alors :

$$a_\infty (Exp \alpha) = \alpha \frac{\sum_{k=1}^p \nu'(m+k) \mathbb{E} (R_{m+k}) + \sum_{i=1}^m \nu'(\mu_i) \mathbb{E} (M_i)}{\sum_{i=1}^m \nu'(i) \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^* (\alpha) \right)} \quad (3.9)$$

Comme ν' est la loi stationnaire de la chaîne de Markov associée au processus semi-markovien (Z_t) , on sait par ailleurs que

$$\nu'(j) = \sum_{i \in E} \nu'(i) Q'_{i,j}, \text{ pour tout } j \in E.$$

En particulier, en utilisant les résultats du **corollaire 3.2**, on a, pour $j = \mu_i$ et $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\nu'(\mu_i) = \nu'(i) Q'_{i,\mu_i} = \nu'(i) \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha) \right).$$

On en déduit :

$$\sum_{i=1}^m \nu'(i) \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha) \right) = \sum_{i=1}^m \nu'(\mu_i).$$

Il suffit alors de remplacer cette expression dans le dénominateur de (3.9) pour obtenir la deuxième forme proposée pour $a_\infty(\text{Exp } \alpha)$. ■

Nous venons de voir comment calculer la disponibilité asymptotique du système maintenu. En ce qui concerne celle du système initial (notée A_∞^{ini}), nous avons maintenant deux méthodes à notre disposition pour la calculer. On peut en effet utiliser la même méthode que pour le système maintenu : si (X_t) est irréductible non-arithmétique, on obtient ainsi

$$A_\infty^{ini} = \frac{1}{1 + a_\infty^{ini}} \text{ avec } a_\infty^{ini} = \frac{\sum_{k=1}^p \nu^{ini}(m+k) \mathbb{E}(R_{m+k})}{\sum_{i=1}^m \nu^{ini}(i)}$$

où ν^{ini} est la loi stationnaire de la chaîne de Markov associée au processus semi-markovien (X_t) .

On peut aussi la calculer en remarquant que A_∞^{ini} est la limite de $A_\infty(\text{Exp } \alpha)$ quand α tend vers 0^+ .

D'un point de vue numérique, remarquons que les formules obtenues pour les disponibilités asymptotiques du système maintenu et du système initial sont aisément calculables. En effet, pour le système maintenu par exemple, il suffit de déterminer la matrice de transition Q' à l'aide du **corollaire 3.2**. On en déduit alors la loi stationnaire ν' qui est un vecteur propre de Q' (ou de ${}^tQ'$ selon l'écriture) et on remplace ν' par sa valeur dans (3.7) (ou dans l'autre formule proposée), tous les autres termes étant connus.

Quelques exemples de calculs sont donnés un peu plus loin, au paragraphe **3.3.4**.

Nous étudions auparavant la disponibilité instantanée du système.

3.3.3 Calcul de la disponibilité instantanée

Rappelons tout d'abord que, pour tout $t > 0$, la disponibilité à l'instant t (aussi appelée disponibilité instantanée) est la probabilité que le système fonctionne à l'instant t .

Cette probabilité dépendant de l'état initial du système, nous supposons maintenant que le système est au départ dans l'état de marche parfaite "1".

Pour le système initial, la disponibilité instantanée est donc

$$A_t^{ini} = \mathbb{P}_1(X_t \in \{1, \dots, m\}) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}_1(X_t = j), \quad (3.10a)$$

alors que pour le système maintenu, elle vaut

$$A_t = \mathbb{P}_1(Z_t \in \{1, \dots, m\}) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}_1(Z_t = j).$$

Rappelons maintenant la méthode utilisée pour calculer la disponibilité instantanée d'un système semi-markovien (cf [22] par exemple). Nous décrivons cette méthode pour le processus (X_t) associé au système initial.

D'après (3.10a), le problème revient en fait à calculer les probabilités $\mathbb{P}_i(X_t = j)$, que l'on ne sait en général pas calculer directement. On sait en revanche trouver des équations de renouvellement vérifiées par ces probabilités. En prenant les transformées de Laplace de ces équations, on obtient alors les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto \mathbb{P}_i(X_t = j)$. On en déduit aisément la transformée de Laplace de la disponibilité instantanée. Il n'y a alors "plus qu'à" inverser cette transformée pour obtenir la disponibilité instantanée. Remarquons que ce type d'inversion se fait en général à l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici MAPLE) qui ne sont souvent pas très performants dans ce domaine. La programmation doit donc être faite de façon très soignée.

Enonçons maintenant de façon précise les résultats.

Nous donnons pour cela quelques notations supplémentaires.

On note ainsi :

- $P_t(i, j) = \mathbb{P}_i(X_t = j)$, pour tous $t \geq 0$, $i, j \in \{1, \dots, m+p\}$,
- $P_{i,j}^*$ la transformée de Laplace de $t \mapsto P_t(i, j)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, m+p\}$:

$$P_{i,j}^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} P_t(i, j) dt, \text{ pour tout } s > 0.$$

- $P^*(s) = \left(P_{i,j}^*(s) \right)_{1 \leq i, j \leq m+p}$, pour tout $s > 0$,
- $A(s)$ la matrice carrée d'ordre $m+p$ définie par

$$A_{i,j}(s) = \begin{cases} \frac{sq_{i,j}^*(s)}{1 - \sum_{k=1}^{m+p} q_{i,k}^*(s)} & \text{si } i \neq j \\ - \sum_{1 \leq k \leq m+p/k \neq i} A_{i,k}(s) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.11)$$

pour tout $s > 0$.

Remarquons que la matrice $A(s)$ est bien définie car $\sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(s)$ est différent de 1 (car $\mathbb{E}_i(\tau_1) \neq 0$, cf la démonstration de la **proposition 3.6**).

Avec ces notations, si (X_t) est irréductible, $P^*(s)$ est donnée par

$$P^*(s) = (sI_{m+p} - A(s))^{-1}, \text{ pour tout } s > 0. \quad (3.12)$$

Grâce à la linéarité de la transformée de Laplace, la transformée de Laplace de la disponibilité instantanée du système initial $\left(A^{ini*}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} A_t^{ini} dt \right)$ est alors donnée par

$$A^{ini*}(s) = \sum_{j=1}^m P_{1,j}^*(s). \quad (3.13)$$

De la même façon, nous calculons maintenant la transformée de Laplace de la disponibilité instantanée du système maintenu. On obtient le résultat suivant :

Proposition 3.8 *Si le processus semi-markovien (X_t) est irréductible et si les durées moyennes de maintenance sont non nulles, la transformée de Laplace de la disponibilité instantanée du système maintenu existe et vaut*

$$A^*(s) = \sum_{j=1}^m P'_{1,j}{}^*(s) \quad (3.14)$$

où

$$P'^*(s) = (sI - A'(s))^{-1} \quad (3.15)$$

et $A'(s)$ est la matrice carrée d'ordre $2m + p$ définie par :

- pour $1 \leq i \leq m$:

$$A'_{i,j}(s) = \begin{cases} A_{i,j}(s + \alpha) & \text{si } 1 \leq j \leq m + p \text{ et } j \neq i \\ \alpha & \text{si } j = \mu_i \\ 0 & \text{si } j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \setminus \mu_i \\ - \sum_{k/k \neq i} A'_{i,k}(s) & \text{si } j = i \end{cases}$$

- pour $m + 1 \leq i \leq m + p$:

$$A'_{i,j}(s) = \begin{cases} A_{i,j}(s) & \text{si } 1 \leq j \leq m + p \text{ et } j \neq i \\ 0 & \text{si } j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \\ - \sum_{k/k \neq i} A'_{i,k}(s) & \text{si } j = i \end{cases}$$

- pour $i = \mu_l \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$:

$$A'_{\mu_l,j}(s) = \begin{cases} \frac{sq_{i,j}^{M^*}(s)}{1 - \sum_{k=1}^m q_{i,k}^{M^*}(s)} & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ - \sum_{k/k \neq \mu_l} A'_{\mu_l,k}(s) & \text{si } j = \mu_l \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Démonstration. Pour pouvoir utiliser la même méthode que pour le système initial, il faut que (Z_t) soit un processus semi-markovien irréductible et que les durées moyennes passées dans les différents états soient non nulles (cf (3.11) et la remarque qui suit (3.11)).

Le premier point a déjà été vérifié dans le **lemme 3.5**.

Le deuxième point provient du **lemme 3.3** et du fait que nous avons supposé les durées moyennes de maintenance non nulles (et les $\mathbb{E}_i(\tau_1) \neq 0$).

On peut alors définir une matrice $A'(s)$ associée au processus (Z_t) de la même façon que la matrice $A(s)$ pour (X_t) et appliquer la méthode décrite précédemment.

La seule chose à faire est donc de déterminer la matrice $A'(s)$.

Rappelons tout d'abord que, par définition de $A'(s)$ (cf (3.11)), on a

$$A'_{i,j}(s) = \frac{sq_{i,j}^{I^*}(s)}{1 - \sum_{k \in E} q_{i,k}^{I^*}(s)} = \frac{sq_{i,j}^{I^*}(s)}{1 - \sum_{k=1}^{m+p} q_{i,k}^{I^*}(s) - \sum_{k=1}^m q_{i,\mu_k}^{I^*}(s)}.$$

Nous ne considérons que le cas $1 \leq i \leq m$, les autres cas étant immédiats.

- pour $1 \leq j \leq m+p$ et $j \neq i$, en remplaçant $q_{i,j}^*(s)$ par sa valeur (cf **lemme 3.1**), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
A'_{i,j}(s) &= \frac{sq_{i,j}^*(s+\alpha)}{1 - \sum_{k=1}^{m+p} q_{i,k}^*(s+\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha+s} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha+s)\right)} \\
&= \frac{sq_{i,j}^*(s+\alpha)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+s}\right) \left(1 - \sum_{k=1}^{m+p} q_{i,k}^*(s+\alpha)\right)} \\
&= \frac{sq_{i,j}^*(s+\alpha)}{\frac{s}{\alpha+s} \left(1 - \sum_{k=1}^{m+p} q_{i,k}^*(s+\alpha)\right)} \\
&= \frac{(s+\alpha) q_{i,j}^*(s+\alpha)}{1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(s+\alpha)} \\
&= A_{i,j}(s+\alpha).
\end{aligned}$$

- pour $j = \mu_i$, on obtient de même :

$$A'_{i,\mu_i}(s) = \frac{s \frac{\alpha}{\alpha+s} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} q_{i,j}^*(\alpha+s)\right)}{\frac{s}{\alpha+s} \left(1 - \sum_{k=1}^{m+p} q_{i,k}^*(s+\alpha)\right)} = \alpha.$$

- pour $j \in \{\mu_1, \dots, \mu_m\} \setminus \{\mu_i\}$:

$$A'_{i,j}(s) = 0,$$

ce qui achève la démonstration. ■

D'un point de vue pratique, pour calculer les disponibilités instantanées du système initial et du système maintenu, il faut donc tout d'abord déterminer les matrices $A(s)$ et $A'(s)$. On commence pour cela par calculer $A(s)$ à l'aide de sa définition (cf (3.11)). La matrice $A'(s)$ s'en déduit aisément à l'aide des formules données dans la **proposition 3.8**. On calcule ensuite $P^*(s)$ et $P'^*(s)$ à l'aide de (3.12) et de (3.15), puis $A^{ini*}(s)$ et $A^*(s)$ à l'aide de (3.13) et de (3.14). Il reste alors à inverser les transformées de Laplace pour obtenir les disponibilités instantanées A_t^{ini} et A_t .

Nous étudions maintenant quelques exemples.

3.3.4 Exemples

Pour chacun des exemples de ce paragraphe, nous calculons tout d'abord la disponibilité asymptotique du système maintenu et nous l'optimisons numériquement relativement à α . On obtient ainsi, dans les deux cas, une valeur optimale pour α . Nous calculons ensuite la disponibilité instantanée du système soumis à cette politique de maintenance optimale et nous la comparons à la disponibilité instantanée du système initial.

Pour l'un des exemples (markovien), nous comparons aussi la politique de maintenance préventive proposée au deuxième chapitre à celle présentée ici.

Parmi les lois usuelles utilisées pour la durée de fonctionnement d'un système (encore appelées lois de *défaillance*), nous avons déjà cité dans l'introduction les lois de Weibull. Un autre type de lois très fréquemment utilisées dans l'industrie sont les lois GAMMA. Ce

sont les lois que nous avons choisies ici pour décrire l'évolution de notre système, pour des raisons de simplicité. En effet, nous avons déjà évoqué précédemment les difficultés que l'on peut rencontrer pour inverser des transformées de Laplace et le calcul de la disponibilité instantanée s'avère parfois difficile à mener à bien d'un point de vue numérique. Le calcul de $A^*(s)$ faisant intervenir les transformées de Laplace des mesures $q(i, j, dt)$, il est donc souhaitable de modéliser l'évolution du système à l'aide de mesures dont les transformées de Laplace sont aisément calculables (si possible!).

Rappelons que c'est le cas des lois GAMMA et que la transformée de Laplace d'une loi $\xi = \Gamma(\lambda, \mu)$ est donnée par

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \xi(dt) = \frac{1}{(1 + \mu s)^\lambda}, \text{ pour tout } s > 0.$$

Remarquons que, même avec ce choix de lois GAMMA (et de paramètres simples pour ces lois), MAPLE a besoin d'être guidé pas à pas pour simplifier les résultats et pour décomposer correctement la transformée de Laplace de la disponibilité instantanée avant de l'inverser. Le choix du moment où l'on passe des calculs formels aux calculs numériques est aussi très important.

Ces difficultés ne concernent bien évidemment que la disponibilité instantanée. En ce qui concerne la disponibilité asymptotique, il est tout à fait possible d'utiliser des modèles beaucoup plus compliqués, et cela même pour l'optimisation par rapport à α .

3.3.4.1 Exemple 1

On considère ici un système formé de quatre composants identiques et indépendants en redondance passive, que l'on suppose numérotés de 1 à 4 (cf §1.3.5.2). Au départ, le premier composant fonctionne, les 3 autres étant en attente. (Cet état est noté "1"). Lorsque le composant 1 tombe en panne, on essaye le deuxième. Celui-ci démarre (instantanément) avec une probabilité γ ($0 < \gamma < 1$). S'il a démarré, il remplace alors le composant 1 jusqu'à ce qu'il tombe lui-même en panne. S'il n'a pas démarré, on essaye alors le composant 3, qui démarre lui-même avec une probabilité γ et ainsi de suite. On suppose que la durée de vie d'un composant suit la loi $\Gamma(\lambda, \mu)$ et que l'on ne peut pas réparer les composants tant que le système fonctionne.

On note i l'état où $i - 1$ composants sont en panne, pour $i \in \{1, \dots, 4\}$. On a donc ici $m = 4$ états de marche. L'état de panne (unique) correspond au cas où les 4 composants sont en panne.

Lorsque le système est tombé en panne, on répare tous les composants. La durée de la réparation R_5 se décompose sous la forme de la somme de deux variables aléatoires $R_{5,1}$ et $R_{5,2}$, indépendantes entre elles et indépendantes de l'évolution antérieure du système.

$R_{5,1}$ correspond à la durée de réparation proprement dite et suit la loi $\Gamma(\lambda_1, \mu_1)$. $R_{5,2}$ correspond au temps d'attente du réparateur au moment où le système tombe en panne et suit la loi $\Gamma(\lambda_2, \mu_2)$.

On a donc $R_5 = R_{5,1} + R_{5,2}$, où $R_{5,1} \hookrightarrow \Gamma(\lambda_1, \mu_1)$ et $R_{5,2} \hookrightarrow \Gamma(\lambda_2, \mu_2)$, avec $R_{5,1}$ et $R_{5,2}$ indépendantes.

Avec les hypothèses précédentes, l'évolution du système est clairement semi-markovienne.

Notons f la densité de la loi $\Gamma(\lambda, \mu)$.

Le noyau semi-markovien $(q(i, j, dt))$ du processus (X_t) est alors donné par

$$(q(i, j, dt)) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma f(t) dt & (1-\gamma) \gamma f(t) dt & (1-\gamma)^2 \gamma f(t) dt & (1-\gamma)^3 f(t) dt \\ 0 & 0 & \gamma f(t) dt & (1-\gamma) \gamma f(t) dt & (1-\gamma)^2 f(t) dt \\ 0 & 0 & 0 & \gamma f(t) dt & (1-\gamma) f(t) dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(t) dt \\ q(5, 1, dt) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que si $\lambda_2 \neq \lambda_3$ (et c'est le cas dans les valeurs numériques choisies ici, voir ci-dessous), la loi $q(5, 1, dt)$ de R_5 n'est pas aisément calculable. En revanche, sa transformée de Laplace est facile à déterminer, puisque c'est simplement le produit des transformées de Laplace des lois de $R_{5,1}$ et de $R_{5,2}$ (indépendance).

En ce qui concerne les opérations de maintenance à partir des différents états de marche, on suppose qu'elles remettent toutes le système dans l'état 1 et que leurs durées suivent toutes la même loi que $R_{5,1}$, à savoir $\Gamma(\lambda_1, \mu_1)$.

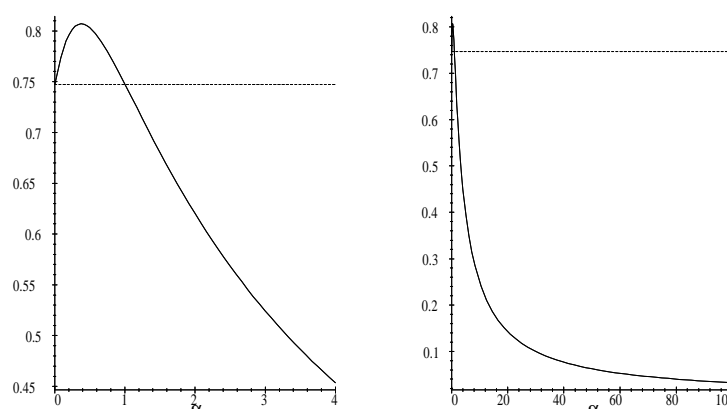
D'un point de vue numérique, on prend :

- $\lambda = 2, \mu = 1,$
- $\lambda_1 = 3, \mu_1 = 0.1,$
- $\lambda_2 = 2, \mu_2 = 1,$
- $\gamma = 0.8.$

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} A_\infty^{ini} &= 0.7473, \\ \alpha^{opt} &= 0.3791, \\ A_\infty(Exp \alpha^{opt}) &= 0.8071. \end{aligned}$$

Les figures 3.1 et 3.2 ci-dessous représentent la disponibilité asymptotique du système maintenu $A_\infty(Exp \alpha)$ en fonction de α (en trait plein), ainsi que celle du système initial A_∞^{ini} (en trait discontinu).



Figures 3.1 et 3.2. $A_\infty(Exp \alpha)$ en fonction de α , comparaison avec A_∞^{ini} .
(même figure avec une fenêtre différente)

On peut remarquer sur ces figures que la politique de maintenance n'améliore pas la disponibilité asymptotique pour toutes les valeurs de α . Ainsi, si $\alpha \gtrsim 1.0035$, c'est-à-dire,

si $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\alpha} \approx 0.9965$, la maintenance arrive trop rapidement et il est préférable de ne pas maintenir le système.

On constate aussi que $A_\infty(Exp \alpha)$ tend bien vers A_∞^{ini} quand α tend vers 0, comme nous l'avions annoncé à la fin du paragraphe **3.3.2**.

On peut par ailleurs remarquer que $A_\infty(Exp \alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers l'infini. Ce résultat est tout à fait naturel puisque, lorsque α tend vers l'infini, le temps d'attente de la maintenance tend vers 0. Comme les durées moyennes de maintenance sont non nulles, cela signifie que l'on ne fait plus que maintenir le système.

Nous avons maintenant tracé sur la **figure 3.3** la disponibilité instantanée du système soumis à la politique de maintenance optimale $A_t(Exp \alpha^{opt})$ (en trait plein) ainsi que la disponibilité instantanée du système initial (en trait discontinu).

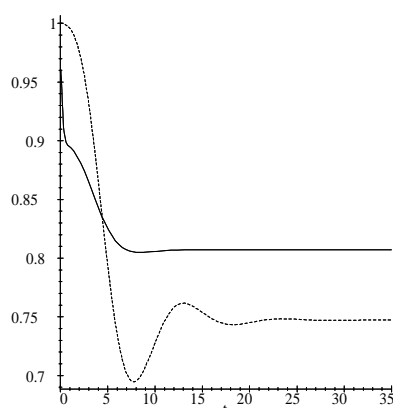


Figure 3.3. $A_t(Exp \alpha^{opt})$ et A_t^{ini} en fonction de t .

Nous nous apercevons sur cette figure que, pour $\alpha = \alpha^{opt}$, la disponibilité instantanée du système maintenu n'est pas toujours meilleure que celle du système initial. Ainsi, pour $t \approx 4.4307$, A_t^{ini} est supérieure à $A_t(Exp \alpha^{opt})$. En revanche, dès que $t \gtrsim 4.4307$, la politique de maintenance améliore la disponibilité instantanée, bien que le système n'ait pas encore atteint son régime stationnaire (le système initial en est encore loin).

Remarquons enfin que $A_t(Exp \alpha^{opt})$ varie de façon plus régulière que A_t^{ini} en fonction de t et atteint plus rapidement son régime stationnaire. La politique de maintenance semble donc "stabiliser" l'évolution du système.

3.3.4.2 Exemple 2

On considère ici le même système que celui étudié dans l'**exemple 2.13**, afin de pouvoir comparer les résultats donnés par la politique de maintenance présentée dans le **chapitre 2** à celle que nous étudions ici.

Rappelons qu'il s'agit d'un système de type k sur n , formé de n composants identiques et indépendants, de taux de panne constant λ , non réparables pendant que le système fonctionne. Les réparations et les opérations de maintenance remettent le système dans l'état de marche parfaite.

On prend $n = 5$. Les valeurs numériques sont identiques à celles de l'**exemple 2.13**. On les complète en supposant que les durées de réparation (R_5) et de maintenance ($M_i, 1 \leq i \leq 4$) suivent des lois GAMMA.

Plus précisément, on suppose que :

- $k = 2, \lambda = 1,$

- R_5 suit la loi $\Gamma(3, \frac{1}{150})$ (on a donc $\mathbb{E}(R_5) = \frac{1}{50}$),
- Pour $2 \leq i \leq 4$, M_i suit la loi $\Gamma(2, \frac{i}{2000})$ (on a donc $\mathbb{E}(M_i) = \frac{i}{1000}$).

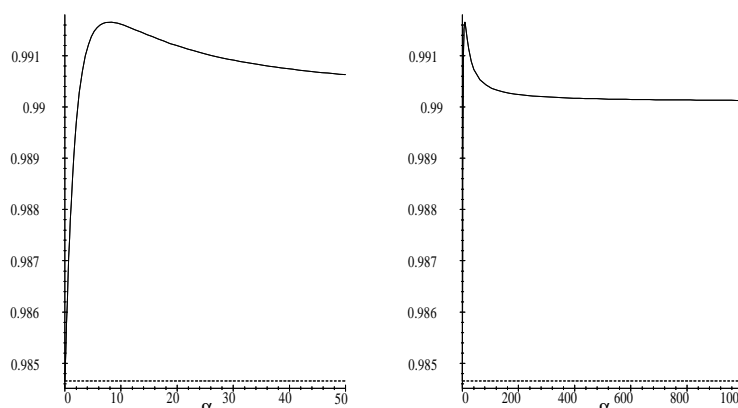
En ce qui concerne M_1 , remarquons tout d'abord que, le système étant markovien, il est à l'état neuf tant qu'il est dans l'état 1. C'est d'ailleurs pourquoi, dans le **chapitre 2**, aucune maintenance n'était jamais effectuée sur l'état 1. Il semble donc naturel de considérer ici que la durée M_1 est nulle. C'est ce que nous faisons dans un premier temps. Nous calculons alors la disponibilité asymptotique du système maintenu et nous l'optimisons par rapport à α . En ce qui concerne la disponibilité instantanée, rappelons que la méthode que nous utilisons pour la calculer nécessite que les durées moyennes de maintenance soient non nulles (cf §3.3.3). Cela nous amène alors à considérer un second cas où la durée moyenne de M_1 est non nulle (mais très faible).

Cas où $\mathbb{E}(M_1) = 0$

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} A_\infty^{ini} &= 0.9847 \text{ (identique à celle obtenue dans l'exemple 2.13),} \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A_\infty(\text{Exp } \alpha) &= 0.9901, \\ \alpha^{opt} &= 7.9534, \\ A_\infty(\text{Exp } \alpha^{opt}) &= 0.9917. \end{aligned}$$

On a par ailleurs tracé sur les **figures 3.4** et **3.5** la disponibilité asymptotique du système maintenu $A_\infty(\text{Exp } \alpha)$ en fonction de α (en trait plein), que l'on compare avec celle du système initial A_∞^{ini} (en trait discontinu).



Figures 3.4 et 3.5. $A_\infty(\text{Exp } \alpha)$ en fonction de α , comparaison avec A_∞^{ini} (même figure avec une fenêtre différente)

Ici, contrairement au cas précédent, $A_\infty(\text{Exp } \alpha)$ ne tend *pas* vers 0 quand α tend vers l'infini. Ceci s'explique par le fait que la durée moyenne de maintenance à partir de l'état 1 est nulle, de sorte que, même si le temps d'attente de la maintenance est nul (quand α tend vers l'infini), le système n'est, malgré tout, pas toujours en train d'être maintenu.

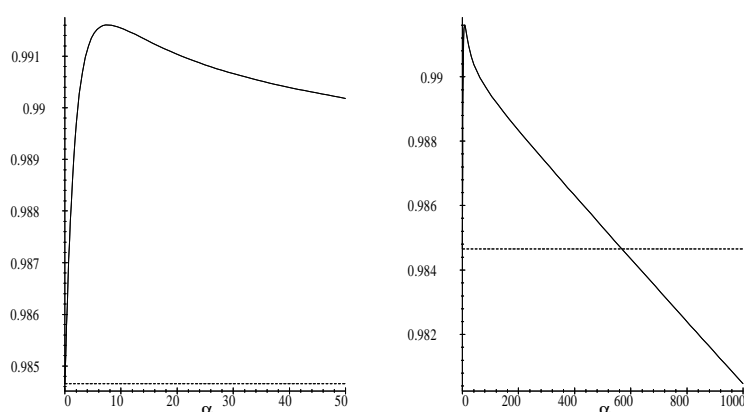
Par ailleurs, on constate ici que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique *pour n'importe quelle valeur de α* .

Cas où M_1 suit la loi $\Gamma(2, 1/200000)$, $\mathbb{E}(M_1) = 1/100000$

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} A_{\infty}^{ini} &= 0.9847 \text{ (rappel),} \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A_{\infty}(\text{Exp } \alpha) &= 0, \\ \alpha^{opt} &= 7.6806, \\ A_{\infty}(\text{Exp } \alpha^{opt}) &= 0.9916. \end{aligned}$$

Les **figures 3.6** et **3.7** représentent la disponibilité asymptotique du système maintenu $A_{\infty}(\text{Exp } \alpha)$ en fonction de α (en trait plein), ainsi que celle du système initial A_{∞}^{ini} (en trait discontinu).



Figures 3.6 et 3.7. $A_{\infty}(\text{Exp } \alpha)$ en fonction de α , comparaison avec A_{∞}^{ini} (même figure avec une fenêtre différente)

On constate ici que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique pour $\alpha \lesssim 568.6$.

La **figure 3.8** représente maintenant la disponibilité instantanée du système soumis à la politique de maintenance optimale $A_t(\text{Exp } \alpha^{opt})$ (en trait plein) et la disponibilité instantanée du système initial A_t^{ini} (en trait discontinu).

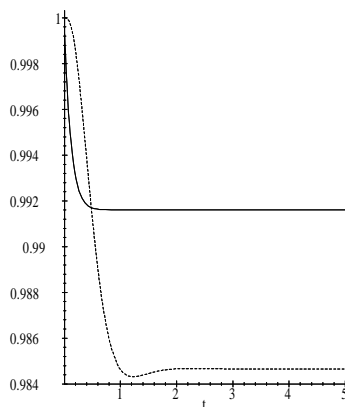


Figure 3.8. $A_t(\text{Exp } \alpha^{opt})$ et A_t^{ini} en fonction de t .

Ici, la politique de maintenance optimale améliore la disponibilité instantanée du système à partir de la valeur $t \simeq 0.5495$. (Là encore, le système maintenu atteint son régime stationnaire plus rapidement que le système initial).

Comme nous l'avions annoncé au début de ce paragraphe, nous comparons maintenant les résultats donnés par la politique de maintenance que nous venons d'étudier à ceux du **chapitre 2 (exemple 2.13)**.

Rappelons tout d'abord les résultats du **chapitre 2** :

- pour $q = 1$ (maintenance sur les états 2 à 4) : $A_\infty^{opt} = 0.9922$, $c_1^{opt} = 0.3020$,
- pour $q = 2$ (maintenance sur les états 3 et 4) : $A_\infty^{opt} = 0.9935$,
- pour $q = 3$ (maintenance sur l'état 4) : $A_\infty^{opt} = 0.9949$.

Comme on pouvait s'y attendre, les résultats donnés par la politique de maintenance du **chapitre 2** sont toujours meilleurs que ceux obtenus dans ce chapitre.

Nous comparons maintenant un peu plus précisément les politiques de maintenance donnant les résultats les plus proches, à savoir le cas $q = 1$ pour le **chapitre 2** et le cas $\mathbb{E}(M_1) = 0$ ici.

Remarquons tout d'abord que ces deux cas correspondent à des politiques de maintenance très proches. En effet, lorsque l'on choisit $\mathbb{E}(M_1) = 0$ dans ce chapitre, cela revient à dire que, lorsque le système est dans l'état 1, on ne l'arrête pas pour le maintenir. En d'autres termes, on ne l'arrête que lorsqu'on le trouve dans un état 2 à 4. La politique de maintenance est donc la même que dans le **chapitre 2** (cas $q = 1$), mis à part le fait que, ici, le temps d'attente de la maintenance, qui correspond à la première variable inter-inspection du **chapitre 2**, suit obligatoirement une loi exponentielle. Nous savons alors d'après le **chapitre 2** que, sous certaines hypothèses (vérifiées dans le cadre de cet exemple), le temps d'attente optimal est déterministe. C'est pourquoi la disponibilité asymptotique optimale est moins bonne dans le cas exponentiel.

En revanche, si l'on ne maintient *pas* le système à l'instant optimal c_{opt} , la **figure 3.8** ci-dessous nous montre qu'un temps d'attente exponentiel peut être préférable à un temps d'attente déterministe pour des temps moyens d'attente égaux. Cette figure représente en effet les disponibilités asymptotiques du système soumis aux deux types de maintenance : $A_\infty(\delta_c)$ (en trait discontinu) représente celle du système soumis à la politique de maintenance du **chapitre 2**, cas $q = 1$, avec un temps d'attente déterministe, alors que $A_\infty(\text{Exp } \frac{1}{c})$ (en trait plein) représente celle du système soumis à la politique de maintenance du **chapitre 3**, cas $\mathbb{E}(M_1) = 0$ avec un temps d'attente exponentiel.

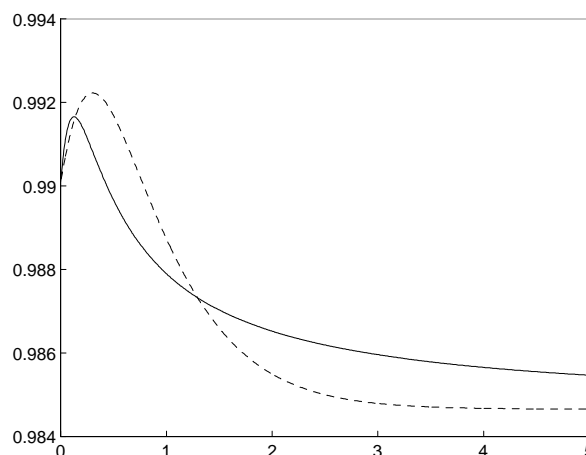


Figure 3.8. $A_\infty(\text{Exp } \frac{1}{c})$ (trait plein) et $A_\infty(\delta_c)$ (trait discontinu) en fonction de c .

On constate sur cette figure que, lorsque $c \lesssim 0.1377$ ou $c \gtrsim 1.2955$, la loi exponentielle donne de meilleurs résultats qu'une masse de Dirac (à moyenne égale). Ceci s'explique par le fait que, lorsque c est éloigné de sa valeur optimale pour $A_\infty(\delta_c)$ ($c_{opt} = 0.3020$), contrairement à une masse de Dirac, la loi exponentielle permet quant à elle de maintenir de temps en temps le système au bon moment (autour de c_{opt}).

Ainsi, *s'il n'est pas possible de maintenir le système à l'instant optimal c_{opt} (ou si cet instant est mal déterminé), il peut être préférable d'utiliser une loi plus étalée qu'une masse de Dirac pour le temps d'attente de la maintenance*. Remarquons que nous l'avons vu ici pour une loi exponentielle, mais que l'on obtiendrait bien sûr le même résultat avec d'autres lois (on en verra d'ailleurs d'autres exemples plus loin).

Nous abordons maintenant l'étude du cas général, où la loi ρ n'est plus nécessairement exponentielle.

3.4 Cas général

Dans tout ce paragraphe, nous supposons maintenant que la loi ρ du temps d'attente S de la maintenance est quelconque.

Nous précisons tout d'abord quelques hypothèses et quelques notations supplémentaires, en complément de celles du paragraphe 3.2.

3.4.1 Hypothèses - Notations supplémentaires

Rappelons que, dans le paragraphe 3.2, nous avons supposé que le système initial est dans un état de marche à l'issue d'une réparation. Grâce à l'hypothèse semi-markovienne, nous savons par ailleurs que cet état de marche (aléatoire) ne dépend que de l'état de panne $m+k$ associé à la réparation et qu'il est distribué selon la loi $Q_{m+k,\bullet}$, où $Q_{m+k,\bullet}$ désigne la $m+k$ -ième ligne de Q . Comme dans les **chapitres 1** et **2**, nous supposons maintenant que cet état de marche dans lequel le système redémarre après réparation est aussi indépendant de l'état de panne $m+k$ (ce dont nous n'avons pas besoin dans le cas où (Z_t) était semi-markovien). On note alors $D_R(i) = Q_{m+k,i}$ la probabilité que le système redémarre dans l'état de marche i après n'importe quel type de panne pour tous $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq p$ et $D_R = (D_R(1), \dots, D_R(m))$.

Rappelons par ailleurs que R_{m+k} représente la durée de la réparation associée à l'état de panne $m+k$ pour tout $1 \leq k \leq p$. On note alors

$$\overline{\mathbb{E}(R)} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(R_{m+1}) \\ \mathbb{E}(R_{m+2}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(R_{m+p}) \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on suppose maintenant que l'état de marche dans lequel le système redémarre après une opération de maintenance est lui aussi indépendant de l'état de dégradation du système au moment où l'on commence cette opération. Après une telle opération, on note alors $D_M(j)$ la probabilité que le système redémarre dans l'état de marche j (avec $D_M(j) = Q_{i,j}^M$ pour tous $1 \leq i, j \leq m$) et $D_M = (D_M(1), \dots, D_M(m))$. Rappelons par ailleurs que M_i représente la durée de la réparation associée à l'état de

maintenance μ_i pour tout $1 \leq i \leq m$. On note alors

$$\overline{\mathbb{E}(M)} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(M_1) \\ \mathbb{E}(M_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(M_m) \end{pmatrix}.$$

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution du système initial lorsqu'il est en marche.

Nous supposons ainsi que, lorsque le saut de l'état de marche i ($1 \leq i \leq m$) à l'état j ($1 \leq j \leq m+p$) est possible, c'est-à-dire lorsque $Q_{i,j}$ est non nul, la mesure $q(i, j, dt)$ admet une densité $v_{i,j}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, on suppose que $v_{i,j}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* , à support infini. (Remarquons que c'est le cas de la plupart des lois classiques utilisées en fiabilité).

Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq m+p$, lorsque le saut de l'état i à l'état j n'est pas possible (c'est-à-dire lorsque $Q_{i,j} = 0$), on convient de poser $v_{i,j} = 0$.

On note alors $\bar{v}^{m,m}$ et $\bar{v}^{m,p}$ les matrices de fonctions définies par

$$\bar{v}^{m,m} = (v_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \text{ et } \bar{v}^{m,p} = (v_{i,m+k})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p}.$$

Grâce aux hypothèses concernant les mesures $q(i, j, dt)$, il est facile de voir que la première durée de fonctionnement T sachant que $X_0 = i$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (pour tout $1 \leq i \leq m$). De plus, cette densité est elle aussi continue sur \mathbb{R}^+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* , à support infini.

On considère maintenant différentes fonctions liées à l'évolution du système initial lorsqu'il part d'un état de marche.

Pour $1 \leq i \leq m$, on note ainsi :

- \bar{F}_i la fiabilité du système initial partant de i :

$$\bar{F}_i(s) = \mathbb{P}_i(T > s), \text{ pour tout } s \geq 0.$$

- F_i la fonction de répartition de T sachant que $X_0 = i$:

$$F_i(s) = \mathbb{P}_i(T \leq s) = 1 - \bar{F}_i(s), \text{ pour tout } s \geq 0.$$

- $\bar{\bar{F}}_i$ la fonction définie par

$$\bar{\bar{F}}_i(s) = \int_0^s \bar{F}_i(t) dt, \text{ pour tout } s \geq 0.$$

- $g_{i,m+k}$ et $h_{i,l}$ les fonctions définies par

$$\begin{aligned} g_{i,m+k}(s) &= \mathbb{P}_i(T \leq s \cap X_T = m+k) \\ \text{et } h_{i,l}(s) &= \mathbb{P}_i(T > s \cap X_s = l), \end{aligned}$$

pour tous $s \geq 0$, $1 \leq i, l \leq m$ et $1 \leq k \leq p$.

– \bar{g} et \bar{h} les fonctions à valeurs matricielles définies par

$$\begin{aligned}\bar{g}(s) &= (g_{i,m+k}(s))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p} \\ \text{et } \bar{h}(s) &= (h_{i,l}(s))_{1 \leq i, l \leq m}.\end{aligned}$$

pour tout $s \geq 0$.

Avec ces notations, on a clairement

$$\sum_{k=1}^p g_{i,m+k} = F_i \text{ et } \sum_{l=1}^m h_{i,l} = \bar{F}_i, \quad (3.16)$$

pour tout $1 \leq i \leq m$.

Par ailleurs, comme la première durée de fonctionnement T sachant que $X_0 = i$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (voir au-dessus), on sait que $P_i(T = s) = 0$, pour tout $s > 0$. En particulier, on peut écrire indifféremment $T < s$ ou $T \leq s$ dans les différentes fonctions définies au-dessus. De la même façon, comme T et S sont indépendantes (où S désigne le temps d'attente de la première maintenance), on peut utiliser la même remarque dans les différents calculs de probabilités faisant intervenir T et S par la suite.

Enfin, comme la densité de T sachant que $X_0 = i$ par rapport à la mesure de Lebesgue est à support infini, on peut aussi remarquer que les fonctions \bar{F}_i ne s'annulent pas sur \mathbb{R}^+ (pour $1 \leq i \leq m$).

On considère maintenant différentes fonctions liées à l'évolution du système initial à l'issue d'une réparation. On note ainsi :

– \bar{F}_R la fiabilité du système après un redémarrage suivant une réparation :

$$\bar{F}_R(s) = \sum_{i=1}^m D_R(i) \mathbb{P}_i(T > s) = \sum_{i=1}^m D_R(i) \bar{F}_i(s) \quad (3.17)$$

– F_R la fonction de répartition correspondante : $F_R = 1 - \bar{F}_R$.

– $\bar{\bar{F}}_R = \sum_{i=1}^m D_R(i) \bar{\bar{F}}_i$ (ou encore, $\bar{\bar{F}}_R(s) = \int_0^s \bar{F}_R(t) dt$, pour tout $s \geq 0$).

Après une opération de maintenance, on définit les fonctions $\bar{F}_M, \bar{\bar{F}}_M, \bar{\bar{\bar{F}}}_M$ de la même façon que $F_R, \bar{F}_R, \bar{\bar{F}}_R$ en remplaçant simplement D_R par D_M dans les définitions précédentes.

Avec ces notations, remarquons que, les fonctions \bar{F}_i ne s'annulant pas sur \mathbb{R}^+ , il en est de même pour les fonctions \bar{F}_R et \bar{F}_M .

Nous nous intéressons maintenant au calcul des différentes fonctions que nous venons de définir, à savoir $F_i, \bar{F}_i, F_R, \bar{F}_R, F_M, \bar{F}_M, \bar{\bar{F}}_R, \bar{\bar{F}}_M, \bar{g}$ et \bar{h} .

3.4.2 Résultats préliminaires

Si w désigne une fonction positive intégrable sur \mathbb{R}^+ , on note ici w^* sa transformée de Laplace ($w^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} w(t) dt$, pour tout $s \geq 0$).

Pour tout $s \geq 0$, on note aussi $\bar{g}^*(s)$ la matrice d'ordre $m \times p$ formée par les $g_{i,m+k}^*(s)$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq k \leq p$. En d'autres termes, \bar{g}^* désigne la "transformée de Laplace"

de \bar{g} , si l'on convient que la transformée de Laplace d'une matrice est calculée terme à terme.

De la même façon, \bar{h}^* , \bar{v}^{m,m^*} et \bar{v}^{m,p^*} désignent les "transformées de Laplace" respectives de \bar{h} , $\bar{v}^{m,m}$ et $\bar{v}^{m,p}$.

Par ailleurs, si x_1, \dots, x_m sont des réels, on note $Diag(x_i, 1 \leq i \leq m)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les x_i .

Avec ces notations, on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.9 *Pour tout $s > 0$, les matrices $\bar{g}^*(s)$ et $\bar{h}^*(s)$ sont données par*

$$\begin{aligned}\bar{g}^*(s) &= \frac{1}{s} (I_m - \bar{v}^{m,m^*}(s))^{-1} \bar{v}^{m,p^*}(s) \\ \text{et } \bar{h}^*(s) &= \frac{1}{s} (I_m - \bar{v}^{m,m^*}(s))^{-1} Diag \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} v_{i,j}^*(s), 1 \leq i \leq m \right),\end{aligned}$$

où I_m désigne la matrice unité d'ordre m .

Démonstration. Pour $c \geq 0$, $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq k \leq p$, on a, par définition de $g_{i,m+k}(c)$:

$$g_{i,m+k}(c) = \mathbb{P}_i(T \leq c \cap X_T = m+k).$$

En distinguant selon ce qui se passe à l'instant τ_1 , on a alors :

$$g_{i,m+k}(c) = \mathbb{P}_i(\tau_1 \leq c \cap X_{\tau_1} = m+k) + \sum_{j=1}^m \mathbb{P}_i(T \leq c \cap X_{\tau_1} = j \cap X_T = m+k).$$

En utilisant les densités $v_{i,j}$ des mesures $q(i, j, dt)$ et en utilisant la propriété de Markov à l'instant τ_1 pour le deuxième terme, on obtient :

$$\begin{aligned}g_{i,m+k}(c) &= \int_0^c v_{i,m+k}(u) du + \sum_{j=1}^m \int_0^c \mathbb{P}_j(T \leq c-u \cap X_T = m+k) v_{i,j}(u) du \\ &= \int_0^c v_{i,m+k}(u) du + \sum_{j=1}^m \int_0^c g_{j,m+k}(c-u) v_{i,j}(u) du \\ &= \int_0^c v_{i,m+k}(u) du + \sum_{j=1}^m (g_{j,m+k} * v_{i,j})(c).\end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace de cette expression, on obtient, pour tous $s > 0$, $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq k \leq p$:

$$\begin{aligned}g_{i,m+k}^*(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sc} \left(\int_0^c v_{i,m+k}(u) du \right) dc + \sum_{j=1}^m g_{j,m+k}^*(s) v_{i,j}^*(s) \\ &= \frac{1}{s} v_{i,m+k}^*(s) + \sum_{j=1}^m g_{j,m+k}^*(s) v_{i,j}^*(s),\end{aligned}$$

en utilisant (3.1).

Ces équations peuvent alors s'écrire :

$$(I_m - \bar{v}^{m,m^*}(s)) \bar{g}^*(s) = \frac{1}{s} \bar{v}^{m,p^*}(s).$$

Remarquons par ailleurs que, comme $\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m v_{i,j}^*(s) < 1$, le théorème de Perron-Frobenius nous permet d'affirmer que 1 n'est pas valeur propre de $\bar{v}^{m,m^*}(s)$.

On en déduit le résultat annoncé, à savoir

$$\bar{g}^*(s) = \frac{1}{s} (I_m - \bar{v}^{m,m^*}(s))^{-1} \bar{v}^{m,p^*}(s).$$

Le calcul de $\bar{h}^*(s)$ se conduit de la même façon.

En distinguant suivant que $\tau_1 \leq c$ ou que $\tau_1 > c$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} h_{i,l}(c) &= \mathbb{P}_i(T > c \cap X_c = l) \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbb{P}_i(T > c \cap X_c = l \cap \tau_1 \leq c \cap X_{\tau_1} = j) \\ &\quad + \mathbb{P}_i(T > c \cap X_c = l \cap \tau_1 > c). \end{aligned}$$

En utilisant les densités $v_{i,j}$ et la propriété de Markov à l'instant τ_1 pour le premier terme, on a maintenant :

$$\begin{aligned} h_{i,l}(c) &= \sum_{j=1}^m \int_0^c \mathbb{P}_j(T > c - u \cap X_{c-u} = l) v_{i,j}(u) du + \mathbb{I}_{\{l=i\}} \mathbb{P}_i(\tau_1 > c) \\ &= \sum_{j=1}^m \int_0^c h_{j,l}(c - u) v_{i,j}(u) du + \mathbb{I}_{\{l=i\}} \int_c^{+\infty} \sum_{j=1}^{m+p} v_{i,j}(u) du. \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Laplace, on obtient :

$$h_{i,l}^*(s) = \sum_{j=1}^m h_{j,l}^*(s) v_{i,j}^*(s) + \mathbb{I}_{\{l=i\}} \sum_{j=1}^{m+p} \int_0^{+\infty} e^{-sc} \left(\int_c^{+\infty} v_{i,j}(u) du \right) dc. \quad (3.18)$$

En utilisant $\int_c^{+\infty} = \int_0^{+\infty} - \int_0^c$ et le fait que $\sum_{j=1}^{m+p} v_{i,j}$ est une densité de probabilité, la deuxième somme s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+p} \int_0^{+\infty} e^{-sc} \left(\int_c^{+\infty} v_{i,j}(u) du \right) dc &= \int_0^{+\infty} e^{-sc} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} \int_0^c v_{i,j}(u) du \right) dc \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{m+p} v_{i,j}^*(s) \end{aligned}$$

d'après (3.1).

En remplaçant dans (3.18), on obtient

$$h_{i,l}^*(s) = \sum_{j=1}^m h_{j,l}^*(s) v_{i,j}^*(s) + \mathbb{I}_{\{l=i\}} \frac{1}{s} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} v_{i,j}^*(s) \right).$$

Ceci peut alors s'écrire

$$\bar{h}^*(s) = \bar{v}^{m,m^*}(s) \bar{h}^*(s) + \frac{1}{s} \text{Diag} \left(1 - \sum_{j=1}^{m+p} v_{i,j}^*(s), 1 \leq i \leq m \right),$$

d'où la formule annoncée. ■

D'un point de vue pratique, ces résultats nous suffisent pour calculer toutes les fonctions définies à la fin du paragraphe précédent. En effet, on calcule tout d'abord les fonctions $g_{i,m+k}$ et $h_{i,l}$ en inversant leurs transformées de Laplace, fournies par le **lemme 3.9**. On en déduit les valeurs de F_i et de \bar{F}_i à l'aide de (3.16). (On peut aussi utiliser $F_i + \bar{F}_i = 1$ pour l'une de ces deux fonctions). On calcule ensuite les fonctions $\bar{\bar{F}}_i$ à l'aide de leur définition ($\bar{\bar{F}}_i(s) = \int_0^s \bar{F}_i(t) dt$). Les fonctions $F_R, F_M, \bar{F}_R, \bar{F}_M, \bar{\bar{F}}_R$ et $\bar{\bar{F}}_M$ se déduisent alors aisément des fonctions F_i, \bar{F}_i et $\bar{\bar{F}}_i$.

Ces différentes fonctions vont maintenant nous permettre de calculer la disponibilité asymptotique du système maintenu.

3.4.3 Calcul de la disponibilité asymptotique

Nous nous intéressons tout d'abord au cas général, puis nous regardons quelques cas particuliers.

3.4.3.1 Formule générale

Nous avons déjà signalé au début du paragraphe **3.3** que, contrairement au système initial, le système maintenu n'évolue en général pas selon un processus semi-markovien. Comme dans les **chapitres 1** et **2**, l'étude repose alors sur le caractère semi-régénératif du processus (Z_t) décrivant l'évolution du système. En effet, là encore, l'évolution du système après une réparation ou une opération de maintenance ne dépend que de l'état de marche dans lequel il redémarre après la période d'arrêt.

Théorème 3.10 *La disponibilité asymptotique du système maintenu existe et vaut*

$$A_\infty(\rho) = \frac{1}{1 + a_\infty(\rho)}$$

avec

$$a_\infty(\rho) = \frac{[\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M] (\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \bar{\mathbb{E}}(R) + \mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \bar{\mathbb{E}}(M))}{\mathbb{E}(F_M \circ S) \mathbb{E}(\bar{\bar{F}}_R \circ S) + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) \mathbb{E}(\bar{\bar{F}}_M \circ S)}. \quad (3.19)$$

Remarque 3.11 *Remarquons que les fonctions $F_M, \bar{F}_R, \bar{\bar{F}}_R, \bar{\bar{F}}_M, \bar{g}$ et \bar{h} ne dépendent ni des lois des durées de maintenance, ni de la loi du temps d'attente de la maintenance ρ . La disponibilité asymptotique du système maintenu dépend malgré tout de la loi ρ à travers la variable S et pas seulement de sa moyenne. En revanche, elle ne dépend que des moyennes des durées de maintenance, mais pas de leurs lois.*

Démonstration. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la succession des instants de redémarrage du système maintenu après les différentes périodes d'arrêt (pour une réparation ou pour une opération de maintenance), avec $T_0 = 0$.

Comme nous l'avons déjà annoncé, (Z_t) est clairement un processus semi-régénératif, les instants de semi-régénération associés étant les instants T_n . Soit maintenant C l'ensemble des états de marche atteignables avec une probabilité non nulle à l'issue d'une réparation ou d'une opération de maintenance : $C = \{i \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } D_R(i) + D_M(i) >$

0}. Comme pour le **théorème 2.3**, il alors est facile de voir que, quitte à restreindre l'espace d'états à C , on peut supposer la chaîne de Markov (Y_n) irréductible.

Nous avons déjà signalé que la première durée de fonctionnement T admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (cf **§3.4.1**). On en déduit alors facilement que, si le système part de l'état $1 \leq i \leq m$, la loi du premier retour en i ne peut pas être portée par un ensemble du type $d\mathbb{R}$, où $d \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, le processus (Z_t) est non-arithmétique.

D'après les théorèmes généraux de la théorie du renouvellement markovien, on sait alors que, si ν désigne la loi stationnaire de la chaîne de Markov (Y_n) et si $\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i(T_1) < +\infty$, on a :

$$A_\infty(\rho) = \frac{\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i \left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s \in \{1, \dots, m\}\}} ds \right)}{\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i(T_1)}. \quad (3.20)$$

Déterminons tout d'abord la loi stationnaire ν de la chaîne de Markov Y . On commence pour cela par calculer sa matrice de transition $(P_{i,j})$.

Soient $1 \leq i, j \leq m$. On a alors

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \mathbb{P}_i(Y_1 = j) \\ &= \sum_{k=1}^p \mathbb{P}_i(Y_1 = j / X_{T_1}^- = m+k) \mathbb{P}_i(X_{T_1}^- = m+k) \\ &\quad + \sum_{l=1}^m \mathbb{P}_i(Y_1 = j / X_{T_1}^- = \mu_l) \mathbb{P}_i(X_{T_1}^- = \mu_l) \\ &= D_R(j) \sum_{k=1}^p \mathbb{P}_i(X_{T_1}^- = m+k) + D_M(j) \sum_{l=1}^m \mathbb{P}_i(X_{T_1}^- = \mu_l) \\ &= D_R(j) \mathbb{P}_i(T \leq S) + D_M(j) \mathbb{P}_i(T > S). \end{aligned}$$

Avec les notations données dans le **§3.4.1**, ceci s'écrit :

$$P_{i,j} = D_R(j) \mathbb{E}(F_i \circ S) + D_M(j) \mathbb{E}(\bar{F}_i \circ S).$$

On sait par ailleurs que, pour tout $1 \leq j \leq m$, $\nu_j = \sum_{i=1}^m \nu_i P_{i,j}$.

On en déduit

$$\begin{aligned} \nu_j &= \sum_{i=1}^m (D_R(j) \mathbb{E}(F_i \circ S) + D_M(j) \mathbb{E}(\bar{F}_i \circ S)) \nu_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(F_i \circ S) \nu_i \right) D_R(j) + \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{E}(\bar{F}_i \circ S) \nu_i \right) D_M(j) \\ &= C D_R(j) + (1 - C) D_M(j), \end{aligned} \quad (3.21)$$

avec $C = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(F_i \circ S) \nu_i$. (Remarquons que $C < 1$ car, d'après **§3.4.1**, $\bar{F}_i > 0$ et donc $F_i < 1$, pour tout $1 < i \leq m$).

En remplaçant ν_i par sa valeur dans C , on obtient alors :

$$C = C \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(F_i \circ S) D_R(i) + (1 - C) \sum_{i=1}^m D_M(i) \mathbb{E}(F_i \circ S)$$

c'est-à-dire

$$C = C\mathbb{E}(F_R \circ S) + (1 - C)\mathbb{E}(F_M \circ S).$$

On en déduit

$$C = \frac{\mathbb{E}(F_M \circ S)}{1 - \mathbb{E}(F_R \circ S) + \mathbb{E}(F_M \circ S)} = \frac{\mathbb{E}(F_M \circ S)}{\mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) + \mathbb{E}(F_M \circ S)} \quad (3.22)$$

(car $\bar{F}_R + F_M \geq \bar{F}_R > 0$).

En remplaçant C par sa valeur dans (3.21), on a maintenant

$$\begin{aligned} \nu_j &= \frac{\mathbb{E}(F_M \circ S)}{\mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) + \mathbb{E}(F_M \circ S)} D_R(j) + \left(1 - \frac{\mathbb{E}(F_M \circ S)}{\mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) + \mathbb{E}(F_M \circ S)}\right) D_M(j) \\ &= \kappa [\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R(j) + (1 - \mathbb{E}(F_R \circ S)) D_M(j)] \end{aligned}$$

avec $\kappa = 1/(\mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) + \mathbb{E}(F_M \circ S)) < +\infty$.

Cela peut encore s'écrire :

$$\nu = \kappa [\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M] \quad (3.23)$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}_i\left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s \in \{1, \dots, m\}\}} ds\right)$ pour $1 \leq i \leq m$.

La première durée de fonctionnement du système maintenu étant $S \wedge T$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i\left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s \in \{1, \dots, m\}\}} ds\right) &= \mathbb{E}_i(S \wedge T) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}_i(s \wedge T) \rho(ds) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbb{P}_i(s \wedge T > t) dt\right) \rho(ds) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^s \mathbb{P}_i(T > t) dt\right) \rho(ds) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}_i(s) \rho(ds) \\ &= \mathbb{E}\left(\bar{F}_i \circ S\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

En remplaçant ν par sa valeur (cf (3.23)), le numérateur de $A_\infty(\rho)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i\left(\int_0^{T_1} \mathbb{I}_{\{Z_s \in \{1, \dots, m\}\}} ds\right) &= \kappa \sum_{i=1}^m [\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R(i) + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M(i)] \mathbb{E}\left(\bar{F}_i \circ S\right) \\ &= \kappa \left(\begin{array}{l} \mathbb{E}(F_M \circ S) \sum_{i=1}^m D_R(i) \mathbb{E}\left(\bar{F}_i \circ S\right) \\ + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) \sum_{i=1}^m D_M(i) \mathbb{E}\left(\bar{F}_i \circ S\right) \end{array} \right) \\ &= \kappa \left(\begin{array}{l} \mathbb{E}(F_M \circ S) \mathbb{E}\left(\bar{F}_R \circ S\right) \\ + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) \mathbb{E}\left(\bar{F}_M \circ S\right) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}_i(T_1)$ pour $1 \leq i \leq m$.

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(T_1) &= \mathbb{E}_i \left(S \wedge T + \sum_{k=1}^p R_{m+k} \mathbb{I}_{\{Z_{T_1}^- = m+k\}} + \sum_{l=1}^m M_l \mathbb{I}_{\{Z_{T_1}^- = \mu_l\}} \right) \\
&= \mathbb{E}_i(S \wedge T) + \sum_{k=1}^p \mathbb{E}(R_{m+k}) \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m+k \right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^m \mathbb{E}(M_l) \mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_l \right). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = m+k \right) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(T < s \cap X_T = m+k) \rho(ds) \\
&= \int_0^{+\infty} g_{i,m+k}(s) \rho(ds) \\
&= \mathbb{E}(g_{i,m+k} \circ S).
\end{aligned}$$

De la même façon

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i \left(Z_{T_1}^- = \mu_l \right) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(T > s \cap X_s = l) \rho(ds) \\
&= \int_0^{+\infty} h_{i,l}(s) \rho(ds) \\
&= \mathbb{E}(h_{i,l} \circ S).
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.26) les deux termes que nous venons de calculer, on a maintenant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(T_1) &= \mathbb{E}(S \wedge T) + \sum_{k=1}^p \mathbb{E}(R_{m+k}) \mathbb{E}(g_{i,m+k} \circ S) + \sum_{l=1}^m \mathbb{E}(M_l) \mathbb{E}(h_{i,l} \circ S) \\
&= \mathbb{E}(S \wedge T) + \left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} \right) (i) + \left(\mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \overline{\mathbb{E}(M)} \right) (i).
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i(T_1) = \sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}(S \wedge T) + \sum_{i=1}^m \nu_i \left(\begin{array}{c} \left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} \right) (i) \\ + \left(\mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \overline{\mathbb{E}(M)} \right) (i) \end{array} \right) \tag{3.27}$$

En remplaçant ν par sa valeur (cf (3.23)) et en utilisant (3.25), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i(T_1) = \kappa \left(\begin{array}{c} \mathbb{E}(F_M \circ S) \mathbb{E}(\bar{\bar{F}}_R \circ S) + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) \mathbb{E}(\bar{\bar{F}}_M \circ S) \\ + \left(\begin{array}{c} \mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M \\ \times \left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} + \mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \overline{\mathbb{E}(M)} \right) \end{array} \right) \end{array} \right) \tag{3.28}$$

Il est alors facile de vérifier que $\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i(T_1) < +\infty$.

En effet, on a clairement $\mathbb{E}(\bar{\bar{F}}_R \circ S) \leq \sum_{i=1}^m D_R(i) \bar{\bar{F}}_i(\infty) = \sum_{i=1}^m D_R(i) \mathbb{E}_i(T) < +\infty$ (cf §3.2) et $\mathbb{E}(\bar{\bar{F}}_M \circ S) < +\infty$ de la même façon. Comme κ et les autres termes sont

aussi finis, on a bien $\sum_{i=1}^m \nu_i \mathbb{E}_i(T_1) < +\infty$.

La disponibilité asymptotique du système maintenu est donc bien définie et elle est donnée par (3.20).

On déduit alors facilement de (3.25) et de (3.28) l'expression annoncée. ■

Nous nous intéressons maintenant à quelques cas particuliers où la formule donnant la disponibilité asymptotique peut être simplifiée.

3.4.3.2 Quelques cas particuliers

Cas où $D_R = D_M$: Nous supposons ici que $D_M = D_R =_{\text{noté}} D$.

Dans ce cas, on obtient immédiatement :

$$a_\infty(\rho) = \frac{D \left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} + \mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \overline{\mathbb{E}(M)} \right)}{\mathbb{E}(\bar{F} \circ S)}, \quad (3.29)$$

où $\bar{F} = \bar{F}_M = \bar{F}_R$.

Remarquons que le cas où il n'y a qu'un seul état de marche, que l'on peut aussi étudier à l'aide de techniques semi-markoviennes (cf début de §3.3), rentre aussi dans ce cadre. Comme nous l'avons déjà signalé, les techniques semi-markoviennes donneraient dans ce cas la même formulation de la disponibilité asymptotique (nous ne détaillons pas les calculs).

Cas où $\mathbb{E}(R_{m+k}) = \mathbb{E}(R_{m+1})$ pour tout $1 \leq k \leq p$: Le vecteur $\overline{\mathbb{E}(R)}$ se met alors sous la forme $\overline{\mathbb{E}(R)} = \mathbb{E}(R_{m+1}) \bar{1}^p$, où $\bar{1}^p$ désigne le vecteur colonne d'ordre p ne comportant que des 1.

Par ailleurs, comme $\sum_{k=1}^p g_{i,m+k} = F_i$, on a aussi $(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \bar{1}^p)(i) = \mathbb{E}(F_i \circ S)$.

On en déduit :

$$D_R \mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \bar{1}^p = \sum_{i=1}^m D_R(i) \mathbb{E}(F_i \circ S) = \mathbb{E}(F_R \circ S).$$

De la même façon : $D_M \mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \bar{1}^p = \mathbb{E}(F_M \circ S)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & [\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M] \left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} \right) \\ &= \mathbb{E}(R_{m+1}) [\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M] \mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \bar{1}^p \\ &= \mathbb{E}(R_{m+1}) [\mathbb{E}(F_M \circ S) \mathbb{E}(F_R \circ S) + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) \mathbb{E}(F_M \circ S)] \\ &= \mathbb{E}(R_{m+1}) \mathbb{E}(F_M \circ S). \end{aligned}$$

La formule de la disponibilité asymptotique (cf (3.19)) peut donc être simplifiée dans ce cas en remplaçant $[\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M] \left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} \right)$ par $\mathbb{E}(R_{m+1}) \mathbb{E}(F_M \circ S)$.

Remarquons que le cas où il n'y a qu'un seul état de panne rentre aussi dans ce cadre.

Cas où $\mathbb{E}(M_i) = \mathbb{E}(M_1)$ pour tout $1 \leq i \leq m$: Le principe est le même que dans le cas précédent. En utilisant $\sum_{l=1}^m h_{i,l} = \bar{F}_i$, on obtient ici $(\mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \bar{1}^m)(i) = \mathbb{E}(\bar{F}_i \circ S)$, puis $D_R \mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \bar{1}^m = \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S)$ et $D_M \mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \bar{1}^m = \mathbb{E}(\bar{F}_M \circ S)$.

Comme $\overline{\mathbb{E}(M)} = \mathbb{E}(M_1) \bar{1}^m$, on obtient alors

$$\begin{aligned} & \left[\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M \right] \left(\mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \overline{\mathbb{E}(M)} \right) \\ &= \mathbb{E}(M_1) \left[\mathbb{E}(F_M \circ S) D_R + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) D_M \right] \left(\mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \bar{1}^m \right) \\ &= \mathbb{E}(M_1) \left[\mathbb{E}(F_M \circ S) \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) + \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) \mathbb{E}(\bar{F}_M \circ S) \right] \\ &= \mathbb{E}(M_1) \mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S). \end{aligned}$$

Cas où S suit une loi exponentielle : Lorsque S suit une loi exponentielle, la formule générale donnant la disponibilité asymptotique (3.19) ne se simplifie pas beaucoup. C'est pourquoi nous ne donnons pas de formule particulière pour la disponibilité asymptotique dans ce cas.

Remarquons simplement que, contrairement au cas où il n'y a qu'un seul état de marche (voir ci-dessus le cas $D_M = D_R$), il est beaucoup plus difficile ici de retrouver les résultats obtenus au paragraphe **3.3** à l'aide de techniques semi-markoviennes (sous des hypothèses un peu moins restrictives). En effet, la formule (3.7) du paragraphe **3.3** fait intervenir la loi stationnaire du processus semi-markovien (Z_t) . Comme on ne sait en général pas déterminer cette loi de façon explicite (mis à part le cas où il n'y a qu'un seul état de marche), la comparaison des deux formulations demande ici de nombreuses pages de calculs, que nous ne détaillons pas. En revanche, il est facile de vérifier que les deux formulations donnent les mêmes résultats numériques, ce que nous avons fait sur quelques exemples.

Nous terminons maintenant ce paragraphe consacré au calcul de la disponibilité asymptotique par quelques remarques concernant son calcul numérique.

3.4.3.3 Calcul numérique de la disponibilité asymptotique

D'après le paragraphe **3.4.2**, nous savons déjà comment calculer les différentes fonctions $(F_M, \bar{F}_R, \bar{g}, \bar{h}, \bar{F}_R$ et $\bar{F}_M)$ qui interviennent dans l'expression de la disponibilité asymptotique (cf (3.19)).

Si w désigne l'une de ces fonctions, il est alors facile d'en déduire la valeur de $\mathbb{E}(w \circ S)$ qui intervient dans (3.19), à l'aide de

$$\mathbb{E}(w \circ S) = \int_0^{+\infty} w(t) \rho(dt). \quad (3.30)$$

A priori, les résultats du paragraphe **3.4.2** sont donc tout à fait suffisants pour calculer la disponibilité asymptotique, et c'est d'ailleurs cette méthode que nous utilisons lorsque S est déterministe.

En revanche, lorsque ce n'est pas le cas, il peut être préférable d'utiliser une autre forme de $\mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S)$ (et de $\mathbb{E}(\bar{F}_M \circ S)$).

En effet, lorsque l'on utilise (3.30) pour $\mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S)$, on obtient

$$\mathbb{E}(\bar{F}_R \circ S) = \int_0^{+\infty} \int_0^t \bar{F}_R(s) ds \rho(dt) \quad (3.31)$$

ce qui conduit à un calcul d'intégrale double.

Si la fonction de survie de S (notée $\bar{\rho}$) est facilement calculable (ou même directement donnée par les logiciels de calcul comme pour les lois GAMMA), on peut aisément éviter ce type de calculs en remarquant que

$$\mathbb{E}\left(\bar{F}_R \circ S\right) = \int_0^{+\infty} \bar{\rho}(s) \bar{F}_R(s) ds. \quad (3.32)$$

Notons que cette formule s'obtient facilement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\bar{F}_R \circ S\right) &= \sum_{i=1}^m D_R(i) \mathbb{E}_i(S \wedge T) = \sum_{i=1}^m D_R(i) \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_i(S \wedge T > s) ds \\ &= \sum_{i=1}^m D_R(i) \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S > s) \bar{F}_i(s) ds = \int_0^{+\infty} \bar{\rho}(s) \bar{F}_R(s) ds. \end{aligned}$$

Si $\bar{\rho}$ est connue, la formule (3.32), qui ne fait intervenir qu'une intégrale simple, permet alors d'obtenir une meilleure précision que (3.31) pour le calcul de $\mathbb{E}\left(\bar{F}_R \circ S\right)$ (et de $\mathbb{E}\left(\bar{F}_M \circ S\right)$). Lorsque S n'est pas déterministe et que $\bar{\rho}$ est connue, c'est donc cette formule que nous utilisons.

Ces précisions étant données, nous nous intéressons maintenant à l'optimisation de la disponibilité asymptotique.

3.4.4 Optimisation de la politique de maintenance, cas général

Comme dans le **chapitre 2**, la disponibilité asymptotique est clairement une fonction décroissante par rapport à chacune des durées moyennes de maintenance $\mathbb{E}(M_i)$ (cf (3.19)). Le seul problème est alors l'optimisation relativement à la loi ρ du temps d'attente de la maintenance.

Nous commençons par l'étude de quelques exemples.

3.4.4.1 Exemples

Comme au **chapitre 2**, comme on ne peut pas considérer toutes les lois ρ possibles, nous utilisons là encore des lois GAMMA et nous optimisons alors la disponibilité asymptotique par rapport aux paramètres de ces lois GAMMA, ou plus précisément, par rapport à leurs espérances et à leurs écart-types.

Exemple 1 Le système initial est le même que dans l'exemple étudié dans le paragraphe **3.3.4.1**. Rappelons qu'il s'agit d'un système formé de quatre composants identiques et indépendants en redondance passive. Un composant donné démarre avec la probabilité γ . La durée de vie d'un composant suit la loi $\Gamma(\lambda_1, \mu_1)$. On ne peut pas réparer les composants tant que le système fonctionne.

A la différence du paragraphe **3.3.4.1**, nous supposons ici qu'une réparation remet le système dans l'état 3. La durée moyenne d'une réparation (à partir de l'état unique de panne 5) est $\mathbb{E}(R_5) = 2$. Une opération de maintenance remet le système dans l'état de marche parfaite.

La durée d'une opération de maintenance est supposée indépendante de l'état de dégradation du système au moment où on la commence et sa moyenne vaut $\mathbb{E}(M_1) = 1$.

On prend par ailleurs :

- $\lambda_1 = 5, \mu_1 = 1,$
- $\gamma = 0.9.$

La **figure 3.9** représente alors la disponibilité asymptotique du système maintenu lorsque ρ est une loi GAMMA en fonction de l'écart-type et de la moyenne de cette loi.

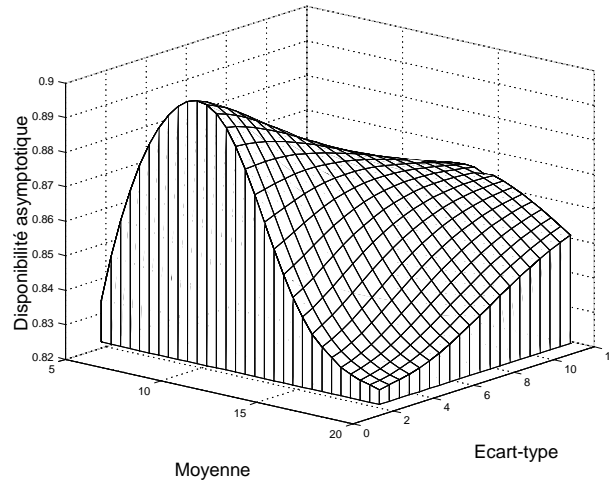


Figure 3.9. $A_\infty(\Gamma(\lambda, \mu))$ en fonction de la moyenne et de l'écart type de $\Gamma(\lambda, \mu)$.

On peut observer sur la **figure 3.9** que la disponibilité asymptotique est optimale lorsque l'écart-type de $\Gamma(\lambda, \mu)$ tend vers 0 et que sa moyenne est au voisinage de 10.

Plus précisément, si l'on optimise $A_\infty(\Gamma(\lambda, \mu))$ en fonction de son écart-type $\sqrt{\lambda\mu}$ et de sa moyenne $\lambda\mu$, on trouve que la disponibilité asymptotique est optimale lorsque l'écart-type de $\Gamma(\lambda, \mu)$ tend vers 0 et sa moyenne vers $c_{opt} \simeq 10.5061$. En particulier, la loi ρ optimale est de type déterministe.

De plus, on a alors :

$$A_\infty^{ini} = 0.8261 \text{ et } A_\infty^{opt} = 0.9010.$$

En observant la **figure 3.9**, on constate aussi que, lorsque ρ a une moyenne éloignée de c_{opt} (par exemple de l'ordre de 20), la disponibilité asymptotique du système augmente avec l'écart-type. On retrouve ainsi le même phénomène que celui observé dans l'exemple du paragraphe **3.3.4.2**, et la conclusion est la même, à savoir que, *s'il n'est pas possible de maintenir le système à l'instant optimal c_{opt} (ou si cet instant est mal déterminé), il peut être préférable d'utiliser une loi plus étalée qu'une masse de Dirac pour le temps d'attente de la maintenance.*

Exemple 2 On considère maintenant un système *markovien* formé de trois composants indépendants C_1, C_2 et C_3 en parallèle. Le composant C_i (pour $i \in \{1, 2, 3\}$) a un taux de panne λ_i et un taux de réparation μ_i constants. (Les composants sont réparables pendant que le système fonctionne). Soit A_i l'évènement "le i^{eme} composant fonctionne". On définit les états de marche suivants : "1" = $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, "2" = $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$, "3" = $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$, "4" = $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$, "5" = $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$, "6" = $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$, "7" = $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$, et l'état de panne : "8" = $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$.

On se place ici dans le cas classique où la durée d'une réparation après une panne suit la loi exponentielle $Exp(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$.

On a alors :

$$(q(i, j, dt)) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 a(t) & \lambda_2 a(t) & \lambda_1 a(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_3 b_1(t) & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 b_1(t) & \lambda_1 b_1(t) & 0 & 0 \\ \mu_2 b_2(t) & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 b_2(t) & 0 & \lambda_1 b_2(t) & 0 \\ \mu_1 b_2(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 b_2(t) & \lambda_2 b_2(t) & 0 \\ 0 & \mu_2 c_1(t) & \mu_3 c_1(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 c_1(t) \\ 0 & \mu_1 c_2(t) & 0 & \mu_3 c_2(t) & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 c_2(t) \\ 0 & 0 & \mu_1 c_3(t) & \mu_2 c_3(t) & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 c_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1 d(t) & \mu_2 d(t) & \mu_3 d(t) & 0 \end{pmatrix} dt$$

$$\text{avec } \begin{cases} a(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}, \\ b_1(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_3)t}, & b_2(t) = e^{-(\lambda_1 + \mu_2 + \lambda_3)t} & b_3(t) = e^{-(\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \\ c_1(t) = e^{-(\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3)t}, & c_2(t) = e^{-(\mu_1 + \lambda_2 + \mu_3)t} & c_3(t) = e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_3)t} \\ d(t) = e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)t} \end{cases}$$

D'après la matrice précédente, une réparation remet le système dans l'un des états "5", "6" ou "7", avec les probabilités respectives :

$$D_R(5) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad D_R(6) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \quad \text{et} \quad D_R(7) = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}.$$

En ce qui concerne les opérations de maintenance, on suppose qu'elles remettent toutes le système dans l'état de marche parfaite et que leur durée est indépendante de l'état de dégradation du système au moment où on les commence.

D'un point de vue numérique, on prend :

- $\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2.8,$
- $\mu_1 = 1.5, \mu_2 = 2, \mu_3 = 1.8,$
- $\mathbb{E}(R_8) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \simeq 0.189,$
- $\mathbb{E}(M_1) = \frac{\mathbb{E}(R_8)}{10} \simeq 0.0189.$

La **figure 3.10** représente alors la disponibilité asymptotique du système maintenu lorsque ρ est une loi GAMMA en fonction de l'écart-type et de la moyenne de cette loi.

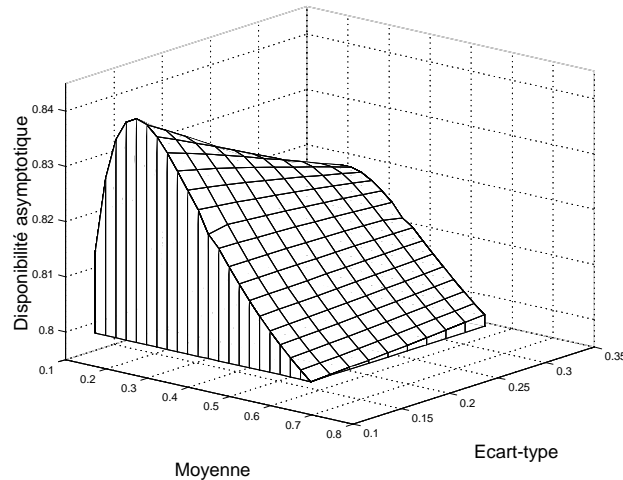


Figure 3.10. $A_\infty(\Gamma(\lambda, \mu))$ en fonction de la moyenne et de l'écart type de $\Gamma(\lambda, \mu)$.

Là encore, on constate que *la loi ρ optimale est déterministe*, ce que confirme l'optimisation de $A_\infty(\Gamma(\lambda, \mu))$ en fonction de son écart-type et de sa moyenne.

On trouve ainsi :

$$A_\infty^{imi} = 0.7717, c_{opt} = 0.1867 \text{ et } A_\infty^{opt} = 0.8518.$$

De plus, lorsque ρ a une moyenne éloignée de c_{opt} (par exemple de l'ordre de 0.6), on constate à nouveau que la disponibilité asymptotique du système augmente avec l'écart-type.

D'après les deux exemples que nous venons d'étudier (nous en avons aussi regardé quelques autres), il semblerait que, comme au **chapitre 2**, *l'étude de l'optimisation de la disponibilité asymptotique relativement à la loi ρ puisse être restreinte aux seules lois ρ déterministes*. Les maintenances correspondant aux lois ρ de ce type, que l'on appelle dorénavant maintenances déterministes, sont donc très importantes. Nous leur consacrons maintenant un paragraphe.

3.4.4.2 Etude des maintenances déterministes

Nous nous restreignons ici au cas où la loi ρ du temps d'attente de la maintenance est une masse de Dirac en un point c ($c > 0$), ce que l'on note : $\rho = \delta_c$.

Notre but est alors de donner des conditions sous lesquelles on peut affirmer qu'il existe une politique de maintenance déterministe qui améliore la disponibilité asymptotique et de déterminer la politique de maintenance déterministe optimale dans ce cas (parmi les politiques de maintenance déterministes).

Nous commençons par préciser quelques hypothèses et notations supplémentaires.

Remarquons tout d'abord que, d'après la formule (3.19), $a_\infty(\delta_c)$ se met ici sous la forme

$$a_\infty(\delta_c) = \frac{(F_M(c)D_R + \bar{F}_R(c)D_M) \left(\bar{g}(c) \overline{\mathbb{E}(R)} + \bar{h}(c) \overline{\mathbb{E}(M)} \right)}{F_M(c) \bar{\bar{F}}_R(c) + \bar{F}_R(c) \bar{\bar{F}}_M(c)} \quad (3.33)$$

Si l'on regarde cette nouvelle formule, on s'aperçoit que les variations de $a_\infty(\delta_c)$ en fonction de c sont en fait trop compliquées à étudier, et cela même si $D_M = D_R$. (N'oublions pas que $\bar{g}(c)$ et $\bar{h}(c)$ sont des matrices dont on ne connaît que la transformée de Laplace...). Cela nous amène à faire quelques hypothèses supplémentaires, afin de simplifier cette expression. On suppose ainsi que les durées moyennes de maintenance et de réparation sont indépendantes de l'état de dégradation au moment où on les commence. En d'autres termes, on suppose que

$$\mathbb{E}(M_i) = \mathbb{E}(M) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m,$$

et que

$$\mathbb{E}(R_{m+k,i}) = \mathbb{E}(R_{m+1,i}) \text{ pour tous } 1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq m.$$

On note alors $\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(R_{m+1})$ la durée moyenne d'une réparation.

En utilisant les remarques simplificatrices du paragraphe **3.4.3.2** et cette notation,

$a_\infty(\delta_c)$ se met maintenant sous la forme

$$a_\infty(\delta_c) = \frac{\mathbb{E}(R) F_M(c) + \mathbb{E}(M) \bar{F}_R(c)}{F_M(c) \bar{\bar{F}}_R(c) + \bar{F}_R(c) \bar{\bar{F}}_M(c)}. \quad (3.34)$$

C'est la forme que nous utilisons pour notre étude.

Rappelons par ailleurs que, d'après le paragraphe **3.4.1**, nous savons que les fonctions \bar{F}_R et \bar{F}_M ne s'annulent pas sur \mathbb{R}^+ . Nous avons aussi remarqué, dans ce même paragraphe, que la densité de $T/X_0 = i$ est continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* (pour tout $1 \leq i \leq m$). On en déduit que \bar{F}_R et \bar{F}_M sont de classe C_1 sur \mathbb{R}_+ , deux fois dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

Ces remarques nous permettent maintenant de définir deux nouvelles fonctions, notées τ_R et τ_M , en posant :

$$\tau_R = \frac{f_R}{\bar{F}_R} \text{ et } \tau_M = \frac{f_M}{\bar{F}_M},$$

où $f_R = -(\bar{F}_R)'$ et $f_M = -(\bar{F}_M)'$.

Les fonctions, τ_R et τ_M sont alors continues sur \mathbb{R}_+ , dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

τ_R et τ_M représentent respectivement les taux de panne après réparation et après maintenance.

Ces nouvelles notations étant données, nous abordons maintenant notre problème, à savoir l'étude de l'apport des politiques de maintenances déterministes pour la disponibilité asymptotique et son optimisation éventuelle.

Nous commençons par étudier les variations de $a_\infty(\delta_c)$ en fonction de c .

Lemme 3.12 Soient τ et u les fonctions définies par

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_R F_M + \tau_M \bar{F}_M \\ \text{et } u &= \frac{\bar{\bar{F}}_M \tau - F_M}{\bar{\bar{F}}_R \tau + \bar{F}_R}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $c > 0$, on a :

$$\frac{d}{dc} a_\infty(\delta_c) > 0 \Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < u(c).$$

Démonstration. Il s'agit simplement de calculer le numérateur de la dérivée de $c \mapsto a_\infty(\delta_c)$ par rapport à c (noté Num).

Rappelons que la forme de $a_\infty(\delta_c)$ utilisée est donnée par (3.34).

Nous calculons tout d'abord la dérivée de $F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M$:

$$\begin{aligned} \left(F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M \right)' &= f_M \bar{\bar{F}}_R + F_M \bar{\bar{F}}_R' - f_R \bar{\bar{F}}_M + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M' \\ &= \tau_M \bar{F}_M \bar{\bar{F}}_R - \tau_R \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M + \bar{F}_R \end{aligned}$$

car $f_M = \tau_M \bar{F}_M$ et $f_R = \tau_R \bar{F}_R$.

De la même façon :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E}(R) \times F_M + \mathbb{E}(M) \times \bar{F}_R \right)' &= \mathbb{E}(R) \times f_M - \mathbb{E}(M) \times f_R \\ &= \mathbb{E}(R) \tau_M \bar{F}_M - \mathbb{E}(M) \tau_R \bar{F}_R. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} Num &= (\mathbb{E}(R) \tau_M \bar{F}_M - \mathbb{E}(M) \tau_R \bar{F}_R) (F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M) \\ &\quad - (\mathbb{E}(R) F_M + \mathbb{E}(M) \bar{F}_R) (\tau_M \bar{F}_M \bar{\bar{F}}_R - \tau_R \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M + \bar{F}_R). \end{aligned}$$

En factorisant par $\mathbb{E}(R)$ et par $\mathbb{E}(M)$ et en simplifiant les résultats, on a maintenant :

$$\begin{aligned} Num &= \mathbb{E}(R) \begin{pmatrix} \tau_M \bar{F}_M (F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M) \\ -F_M (\tau_M \bar{F}_M \bar{\bar{F}}_R - \tau_R \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M + \bar{F}_R) \end{pmatrix} \\ &\quad - \mathbb{E}(M) \begin{pmatrix} \tau_R \bar{F}_R (F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M) \\ +\bar{F}_R (\tau_M \bar{F}_M \bar{\bar{F}}_R - \tau_R \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M + \bar{F}_R) \end{pmatrix} \\ &= \bar{F}_R \mathbb{E}(R) (\tau_M \bar{F}_M \bar{\bar{F}}_M - F_M (-\tau_R \bar{\bar{F}}_M + 1)) \\ &\quad - \bar{F}_R \mathbb{E}(M) (\tau_R F_M \bar{\bar{F}}_R + \tau_M \bar{F}_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R) \\ &= \bar{F}_R (\mathbb{E}(R) \times (\bar{\bar{F}}_M \tau - F_M) - \mathbb{E}(M) \times (\bar{\bar{F}}_R \tau + \bar{F}_R)) \end{aligned}$$

car $\tau = \tau_R F_M + \tau_M \bar{F}_M$.

Comme $\bar{F}_R > 0$, on en déduit que

$$\frac{d}{dc} a_\infty(\delta_c) > 0 \Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < \frac{\bar{\bar{F}}_M \tau - F_M}{\bar{\bar{F}}_R \tau + \bar{F}_R}(c) = u(c). \blacksquare$$

Les variations de $a_\infty(\delta_c)$ en fonction de c étant liées aux fonctions u et τ (définies dans le **lemme 3.12**), nous étudions maintenant leurs variations.

Lemme 3.13 *Si les taux de panne τ_M et τ_R sont croissants et si $\tau_R \geq \tau_M$, les fonctions τ et u sont alors croissantes et la fonction u admet une limite finie l en $+\infty$.*

Démonstration. Calculons tout d'abord τ' :

$$\begin{aligned} \tau' &= \tau'_R F_M + \tau_R \tau'_M \bar{F}_M + \tau'_M \bar{F}_M - \tau_M \tau'_M \bar{F}_M \\ &= \tau'_R F_M + \tau'_M \bar{F}_M + \tau_M \bar{F}_M (\tau_R - \tau_M). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses $\tau'_R \geq 0$, $\tau'_M \geq 0$ et $\tau_R \geq \tau_M$, la fonction τ est donc clairement croissante.

Ecrivons maintenant u sous la forme

$$u = \frac{\bar{\bar{F}}_M - \frac{F_M}{\tau}}{\bar{\bar{F}}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau}}.$$

Calculons tout d'abord $\left(\bar{\bar{F}}_M - \frac{F_M}{\tau}\right)'$ et $\left(\bar{\bar{F}}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau}\right)'$:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\bar{F}}_M - \frac{F_M}{\tau}\right)' &= \bar{\bar{F}}_M - \frac{\tau_M \bar{F}_M \tau - F_M \tau'}{\tau^2} \\ &= \frac{1}{\tau^2} (\bar{\bar{F}}_M \tau (\tau - \tau_M) + F_M \tau') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\bar{F}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau} \right)' &= \bar{F}_R + \frac{-\tau_R \bar{F}_R \tau' - \bar{F}_R \tau'}{\tau^2} \\ &= -\frac{1}{\tau^2} (\bar{F}_R \tau' (\tau_R - \tau) + \bar{F}_R \tau'). \end{aligned}$$

Remarquons par ailleurs que $\tau_M \leq \tau \leq \tau_R$.

Comme nous venons de voir que $\tau' \geq 0$, on en déduit que $\left(\bar{F}_M - \frac{F_M}{\tau} \right)' \geq 0$ et $\left(\bar{F}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau} \right)' \leq 0$.

De plus

$$\bar{F}_M(c) = \int_0^c \bar{F}_M(t) dt = \int_0^c \frac{f_M(t)}{\tau_M(t)} dt \geq \frac{1}{\tau_M(c)} F_M(c)$$

car τ_M est croissant.

Comme $\tau_M \leq \tau$, on a donc $\bar{F}_M \geq \frac{F_M}{\tau}$ et $\bar{F}_M - \frac{F_M}{\tau} \geq 0$.

Ceci entraîne que $u' \geq 0$ car

$$\begin{aligned} & \text{signe}(u') \\ &= \text{signe} \left(\underbrace{\left(\bar{F}_M - \frac{F_M}{\tau} \right)'}_{\geq 0} \underbrace{\left(\bar{F}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau} \right)}_{\geq 0} - \underbrace{\left(\bar{F}_M - \frac{F_M}{\tau} \right)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\bar{F}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau} \right)'}_{\leq 0} \right). \end{aligned}$$

Il nous reste enfin à vérifier que la fonction u est bornée au voisinage de $+\infty$. Remarquons tout d'abord que

$$u = \frac{\bar{F}_M - \frac{F_M}{\tau}}{\bar{F}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau}} \leq \frac{\bar{F}_M}{\bar{F}_R}.$$

Par ailleurs, on a clairement :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}_M(c)}{\bar{F}_R(c)} &= \frac{\lim_{c \rightarrow +\infty} \bar{F}_1(c)}{\sum_{i=1}^m D_R(i) \lim_{c \rightarrow +\infty} \bar{F}_i(c)} \\ &= \frac{\lim_{c \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_1(T \wedge c)}{\sum_{i=1}^m D_R(i) \lim_{c \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_i(T \wedge c)} \\ &= \frac{\mathbb{E}_1(T)}{\sum_{i=1}^m D_R(i) \mathbb{E}_i(T)} < +\infty \text{ (cf §3.2)}. \end{aligned}$$

La fonction u est donc bornée au voisinage de $+\infty$. ■

Nous donnons maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

Nous nous plaçons dans le cas où les taux de redémarrages après une réparation ou une opération de maintenance sont croissants, c'est-à-dire dans le cas où les durées de fonctionnement après un redémarrage sont IFR (Increasing Failure Rate) et dans le cas où le taux de panne après une réparation est plus grand qu'après une opération de maintenance. Remarquons que ces conditions sont relativement naturelles et fréquemment vérifiées en

pratique. Sous ces conditions, nous montrons qu'il existe une politique de maintenance déterministe qui améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si les opérations de maintenance ne sont pas trop longues en moyenne, et nous calculons la disponibilité asymptotique optimale.

Théorème 3.14 *Supposons les taux de panne τ_M et τ_R croissants et $\tau_R \geq \tau_M$.*

Il existe alors une politique de maintenance déterministe qui améliore la disponibilité asymptotique du système (ou encore $\exists c > 0$ tel que $A_\infty(\delta_c) > A_\infty^{ini}$) si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l$, où $l = \lim_{c \rightarrow +\infty} u(c) \geq 0$.

De plus, dans ce cas, il existe une politique de maintenance optimale parmi les maintenances déterministes, c'est-à-dire que

$$\exists c_{opt} > 0 \text{ tel que } A_\infty(\delta_c) \leq A_\infty(\delta_{c_{opt}}) \text{ pour tout } c > 0,$$

où c_{opt} est tel que $u(c_{opt}) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$.

La disponibilité optimale (pour les maintenances déterministes) est alors donnée par $A_\infty^{opt} = A_\infty(\delta_{c_{opt}}) = \frac{1}{1+a_\infty^{opt}}$ avec

$$a_\infty^{opt} = a_\infty(\delta_{c_{opt}}) = \frac{\mathbb{E}(R)}{\left(\bar{F}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau}\right)(c_{opt})}. \tag{3.35}$$

Démonstration.

D'après le **lemme 3.12**, $\frac{d}{dc}a_\infty(\delta_c) > 0 \Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < u(c)$.

Par ailleurs, d'après le **lemme 3.13**, u est croissante.

D'où la discussion :

- Si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \geq l$, alors $\frac{d}{dc}a_\infty(\delta_c) \leq 0$ pour tout $c > 0$.
 $c \mapsto A_\infty(\delta_c)$ est donc croissante sur \mathbb{R}_+^* .

En particulier,

$$A_\infty(\delta_c) \leq \lim_{c \rightarrow +\infty} A_\infty(\delta_c) = A_\infty^{ini}.$$

- Si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l$, on a le tableau de variation suivant :

c	0	c_{opt}	$+\infty$
$u(c)$		$\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$	l
$\frac{d}{dc}a_\infty(\delta_c)$	0	-	+
$a_\infty(\delta_c)$	0	a_∞^{opt}	a_∞^{ini}

$A_\infty(\delta_c)$ est donc optimale en tout point c_{opt} tel que $u(c_{opt}) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$.

De plus,

$$\begin{aligned}
 a_\infty(\delta_{c_{opt}}) &= \mathbb{E}(R) \frac{F_M + \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \times \bar{F}_R}{F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M}(c_{opt}) \\
 &= \mathbb{E}(R) \frac{F_M + \frac{\bar{F}_M - \frac{F_M}{\tau}}{\bar{F}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau}} \times \bar{F}_R}{F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M}(c_{opt}) \text{ car } u(c_{opt}) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \\
 &= \mathbb{E}(R) \frac{F_M \left(\bar{\bar{F}}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau} \right) + \left(\bar{F}_M - \frac{F_M}{\tau} \right) \times \bar{F}_R}{\left(\bar{\bar{F}}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau} \right) \left(F_M \bar{\bar{F}}_R + \bar{F}_R \bar{\bar{F}}_M \right)}(c_{opt}) \\
 &= \mathbb{E}(R) \frac{1}{\left(\bar{\bar{F}}_R + \frac{\bar{F}_R}{\tau} \right)}(c_{opt})
 \end{aligned}$$

après simplifications. ■

Nous reprenons maintenant les exemples du paragraphe 3.4.4.1 afin de tester les résultats du **théorème 3.14**.

3.4.4.3 Retour sur les exemples

Retour sur l'exemple 1 du §3.4.4.1 Avec les données du paragraphe 3.4.4.1 (quatre composants identiques et indépendants en redondance passive, probabilité qu'un composant démarre = γ , durée de vie d'un composant $\hookrightarrow \Gamma(\lambda_1, \mu_1)$), les taux τ_M , τ_R et τ sont donnés par la **figure 3.11**. On constate ici qu'ils sont tous les trois croissants en fonction du temps (et que $\tau_M \leq \tau \leq \tau_R$).

D'après le **lemme 3.13**, on sait alors que u est croissante et qu'elle admet une limite l finie (cf **figure 3.12**). Après calculs, on trouve ici que $l \simeq 1.8421$.

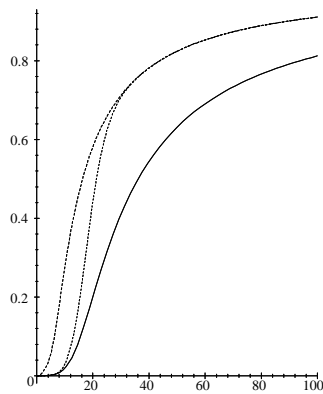


Figure 3.11. τ_M (trait plein), τ_R (pointillé) et τ (pointillé, au milieu) en fonction du temps.

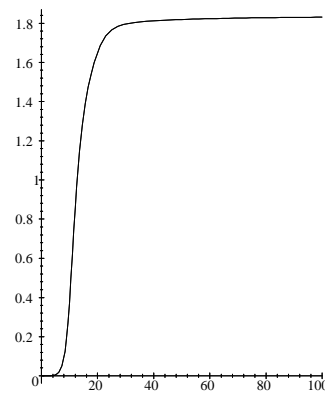


Figure 3.12. Fonction u en fonction du temps.

D'après le **théorème 3.14**, on sait alors qu'il existe une politique de maintenance déterministe qui améliore la disponibilité asymptotique du système si et seulement si

$\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l \simeq 1.8421$. (Remarquons que les durées moyennes de maintenance peuvent ici être plus longues que les durées moyennes de réparation).

Pour les données du paragraphe **3.4.4.1** ($\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} = 0.5$), les valeurs de c_{opt} et de A_{∞}^{opt} fournies par le **théorème 3.14** coïncident avec celles qui ont été données dans ce paragraphe. Nous ne les redonnons pas ici.

Retour sur l'exemple 2 du §3.4.4.1 Avec les données du paragraphe **3.4.4.1** (trois composants différents, indépendants, en parallèle), les taux τ_M , τ_R et τ sont donnés par la **figure 3.13**. On constate ici que τ_M est croissant, mais que τ_R est décroissant. Malgré tout, les fonctions τ et u sont croissantes, de sorte que l'on peut tout de même appliquer les résultats du **théorème 3.14** (voir la démonstration de ce théorème).

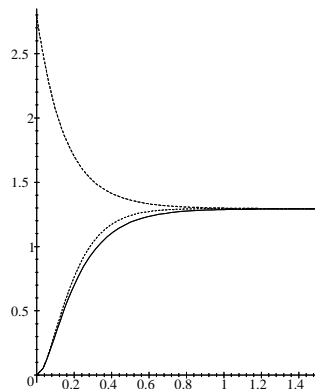


Figure 3.13. τ_M (trait plein), τ_R (pointillé) et τ (pointillé, au milieu) en fonction du temps.

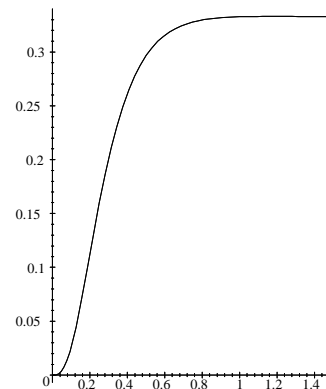


Figure 3.14. Fonction u en fonction du temps.

On sait alors qu'il existe une politique de maintenance déterministe qui améliore la disponibilité asymptotique du système si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l \simeq 0.3326$.

Là encore, pour les données du paragraphe **3.4.4.1** ($\mathbb{E}(M) = 0.1 \times \mathbb{E}(R)$), les valeurs de c_{opt} et de A_{∞}^{opt} fournies par le **théorème 3.14** coïncident avec celles qui ont été données dans ce paragraphe et ne sont pas reprises ici.

En conclusion de ce paragraphe, consacré au cas où D_M peut éventuellement être différent de D_R , il semblerait que l'optimisation de la disponibilité asymptotique puisse être, comme au chapitre 2, restreinte aux seules lois ρ déterministes. Par ailleurs, le théorème 3.14 nous fournit un critère pour savoir s'il existe une maintenance déterministe qui améliore la disponibilité asymptotique. Le cas échéant, il nous donne aussi l'instant optimal pour maintenir le système et la disponibilité asymptotique associée.

Nous nous restreignons maintenant au cas particulier où $D_M = D_R$.

3.4.5 Optimisation de la politique de maintenance, cas où $D_M = D_R$

Dans tout ce paragraphe, on suppose maintenant que les redémarrages après une opération de maintenance se font de la même façon qu'après une réparation. En d'autres termes, on se place ici dans le cas où $D_M = D_R =_{noté} D$.

On ne prend en revanche, aucune hypothèse sur les durées moyennes de réparation et de maintenance.

D'après (3.29), $a_\infty(\rho)$ se met alors sous la forme

$$a_\infty(\rho) = \frac{D\left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} + \mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \overline{\mathbb{E}(M)}\right)}{\mathbb{E}(\bar{F} \circ S)} \quad (3.36a)$$

où $\bar{F} = \bar{F}_R = \bar{F}_M$.

Dans ces conditions, nous démontrons tout d'abord le résultat observé dans le cas général (D_M éventuellement différent de D_R) sur quelques exemples, à savoir que l'optimisation de la disponibilité asymptotique relativement à la loi ρ peut être restreinte aux seules lois ρ déterministes.

3.4.5.1 Restriction aux maintenances déterministes

Plus précisément, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.15 *Dans le cas où $D_M = D_R$:*

1. (Il existe ρ^0 telle que $A_\infty(\rho^0) > A_\infty^{ini}$) (H)
 \Leftrightarrow
 (Il existe $c^0 > 0$ tel que $A_\infty(\delta_{c^0}) > A_\infty^{ini}$) (H')
2. Sous l'hypothèse (H) ou (H'), il existe $c_{opt} > 0$ tel que $A_\infty(\delta_{c_{opt}}) \geq A_\infty(\rho)$, pour toute loi ρ .

Démonstration.

1. (H') entraîne clairement (H). Montrons la réciproque, ou plutôt sa contraposée.

Supposons donc

$$A_\infty(\delta_c) \leq A_\infty^{ini}, \text{ pour tout } c > 0,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$a_\infty(\delta_c) \geq a_\infty^{ini}, \text{ pour tout } c > 0. \quad (3.37)$$

Montrons alors

$$a_\infty(\rho) \geq a_\infty^{ini}, \text{ pour toute loi } \rho.$$

Remarquons tout d'abord que, d'après (3.36a), $a_\infty(\rho)$ se met ici sous la forme

$$a_\infty(\rho) = \frac{\text{num}(a_\infty(\rho))}{\text{dén}(a_\infty(\rho))}$$

avec

$$\text{num}(a_\infty(\rho)) = D\left(\mathbb{E}(\bar{g} \circ S) \overline{\mathbb{E}(R)} + \mathbb{E}(\bar{h} \circ S) \overline{\mathbb{E}(M)}\right) = \int_0^{+\infty} \text{num}(a_\infty(\delta_c)) \rho(dc)$$

et

$$\text{dén}(a_\infty(\rho)) = \mathbb{E}(\bar{F} \circ S) = \int_0^{+\infty} \text{dén}(a_\infty(\delta_c)) \rho(dc).$$

En utilisant (3.37), on en déduit que

$$\begin{aligned} \text{num}(a_\infty(\rho)) &= \int_0^{+\infty} a_\infty(\delta_c) \cdot \text{dén}(a_\infty(\delta_c)) \rho(dc) \\ &\geq a_\infty^{\text{ini}} \int_0^{+\infty} \text{dén}(a_\infty(\delta_c)) \rho(dc) = a_\infty^{\text{ini}} \text{dén}(a_\infty(\rho)). \end{aligned}$$

En d'autres termes, on a bien $a_\infty(\rho) \geq a_\infty^{\text{ini}}$, pour toute loi ρ .

2. Supposons maintenant (H) ou (H') vérifiée.

Montrons tout d'abord qu'il existe c_{opt} tel que $A_\infty(\delta_{c_{\text{opt}}}) \geq A_\infty(\delta_c)$, pour tout $c > 0$.

La fonction $c \mapsto A_\infty(\delta_c)$ étant majorée par 1 sur \mathbb{R}_+^* , $\{A_\infty(\delta_c)/c > 0\}$ admet une borne supérieure.

De plus, on a clairement

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} A_\infty(\delta_c) = 0 \text{ et } \lim_{c \rightarrow +\infty} A_\infty(\delta_c) = A_\infty^{\text{ini}}.$$

Comme, par hypothèse, il existe $c^0 > 0$ tel que $A_\infty(\delta_{c^0}) > A_\infty^{\text{ini}}$ et que la fonction $c \mapsto A_\infty(\delta_c)$ est continue, on en déduit que $\sup\{A_\infty(\delta_c)/c > 0\}$ correspond en fait à la borne supérieure sur un compact de \mathbb{R}_+^* et qu'il est atteint.

Il existe donc c_{opt} tel que $A_\infty(\delta_{c_{\text{opt}}}) \geq A_\infty(\delta_c)$, pour tout $c > 0$.

En utilisant la même méthode que pour le point 1, il est alors facile d'en déduire que $A_\infty(\delta_{c_{\text{opt}}}) \geq A_\infty(\rho)$, pour toute loi ρ . ■

D'après ce qui précède, nous savons maintenant que l'on peut restreindre l'optimisation de la politique de maintenance aux maintenances déterministes. Ceci nous permet de donner quelques critères pour que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique, c'est-à-dire pour qu'il existe une loi ρ telle que $A_\infty(\rho) > A_\infty^{\text{ini}}$.

3.4.5.2 Quelques critères pour que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique

Nous nous plaçons ici sous les mêmes hypothèses qu'au paragraphe **3.4.4.2**, à savoir $\mathbb{E}(M_i) = \mathbb{E}(M_1) =_{\text{noté}} \mathbb{E}(M)$ pour tout $1 \leq i \leq m$, $\mathbb{E}(R_{m+k}) = \mathbb{E}(R_{m+1}) =_{\text{noté}} \mathbb{E}(R)$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Rappelons que nous avons défini dans ce paragraphe un taux de panne τ en posant $\tau = \tau_R F_M + \tau_M \bar{F}_M$.

Sous la condition $D_M = D_R$, on a clairement $\tau = \tau_M = \tau_R$ et τ représente donc le taux de panne après n'importe quel redémarrage (qui se font tous selon le même vecteur D).

De la même façon, on a $F_M = F_R$, $\bar{F}_M = \bar{F}_R$, ... Pour ne pas alourdir les notations, on enlève alors tous les indices M et R et on note F, \bar{F}, \dots

Avec ces notations, la fonction u définie dans le paragraphe **3.4.4.2** devient maintenant

$$u = \frac{\bar{F} \tau - F}{\bar{F} \tau + \bar{F}} = \frac{\bar{F} \tau + \bar{F} - 1}{\bar{F} \tau + \bar{F}} = 1 - \frac{1}{\bar{F} \tau + \bar{F}}. \quad (3.38)$$

Rappelons aussi que l désigne la limite de cette fonction u en $+\infty$ lorsqu'elle existe.

Remarquons enfin que, d'après (3.34), $a_\infty(\delta_c)$ se met ici sous la forme

$$a_\infty(\delta_c) = \frac{\mathbb{E}(R) F(c) + \mathbb{E}(M) \bar{F}(c)}{\bar{F}(c)}. \quad (3.39)$$

En faisant la synthèse des **théorèmes 3.14** et **3.15**, on obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.16 *Si $D_M = D_R$ et si τ est croissant :*

Il existe alors une politique de maintenance qui améliore la disponibilité asymptotique du système (ou encore il existe une loi ρ telle que $A_\infty(\rho) > A_\infty^{ini}$) si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l$, où $l = \lim_{c \rightarrow +\infty} u(c) \geq 0$.

De plus, dans ce cas, il existe une politique de maintenance optimale parmi tous les types de maintenances et cette politique de maintenance optimale est de type déterministe (c'est-à-dire : $\exists c_{opt} > 0$ tel que $A_\infty(\rho) \leq A_\infty(\delta_{c_{opt}})$, pour toute loi ρ).

c_{opt} est alors donné par

$$u(c_{opt}) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$$

et la disponibilité asymptotique optimale est $A_\infty^{opt} = A_\infty(\delta_{c_{opt}}) = \frac{1}{1+a_\infty^{opt}}$ avec

$$a_\infty^{opt} = a_\infty(\delta_{c_{opt}}) = \frac{\mathbb{E}(R)}{\left(\bar{F} + \frac{\bar{F}}{\tau}\right)(c_{opt})} \quad (3.40)$$

(même formule que dans le cas général, où D_M est éventuellement différent de D_R).

Démonstration. Ces résultats proviennent immédiatement des **théorèmes 3.14** et **3.15**.

■

Nous étudions maintenant le cas où le taux de panne τ est décroissant. En effet, même si ce cas est relativement rare pour les systèmes habituellement étudiés en fiabilité, il peut malgré tout se produire dans certains domaines particuliers, comme en fiabilité des logiciels par exemple, ainsi que nous l'a signalé J. L. Soler.

Proposition 3.17 *Dans le cas où $D_M = D_R$, si le taux de panne τ est décroissant, la politique de maintenance diminue la disponibilité asymptotique du système.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, d'après le **théorème 3.15**, il suffit de considérer les maintenances déterministes.

Par ailleurs, d'après (3.38), on a ici

$$\text{signe}(u') = \text{signe}\left(\left(\bar{F}\tau + \bar{F}\right)'\right) = \text{signe}\left(\bar{F}'\tau + \bar{F}\tau' - \tau\bar{F}'\right) = \text{signe}\left(\bar{F}'\tau'\right). \quad (3.41)$$

Si τ est décroissant, u est donc décroissante.

On en déduit que $u(c) \leq u(0) = 0$.

Or, d'après le **lemme 3.12**, on a $\frac{d}{dc}a_\infty(\delta_c) > 0 \Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < u(c)$.

Ceci entraîne que $c \mapsto a_\infty(\delta_c)$ est décroissante, ou encore que $c \mapsto A_\infty(\delta_c)$ est croissante. En particulier, on a donc $A_\infty(\delta_c) \leq \lim_{c \rightarrow +\infty} A_\infty(\delta_c) = A_\infty^{ini}$. ■

Nous nous intéressons maintenant au cas où le taux de panne τ n'est pas monotone.

En général, l'étude est alors beaucoup plus compliquée et il n'est souvent pas très facile de donner des conditions sous lesquelles la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique. Malgré tout, on peut tout de même envisager deux cas où il est possible d'en donner : le cas où le taux de panne est tout d'abord décroissant puis croissant et le cas contraire.

Le premier cas est très classique en fiabilité et correspond aux fameuses "courbes en baignoire" : le système est tout d'abord dans une période de "rodage" et a un taux de panne décroissant, puis il rentre dans la période "utile" où le taux de panne est à peu près constant. Enfin, le système rentre dans la période de "fin de vie" où le taux de panne est croissant car le système vieillit.

Le deuxième cas se rencontre par exemple lorsque la durée de fonctionnement du système peut être modélisée par une loi Log-normale (voir §3.4.5.3 ci-dessous). Remarquons qu'un exemple précis justifiant l'utilisation d'une telle loi peut être trouvé dans [14]. Un autre exemple de système ayant un taux de panne tout d'abord croissant puis décroissant est donné un peu plus loin (voir exemple 3.21 ci-dessous).

Théorème 3.18 Dans le cas où $D_M = D_R$:

1. S'il existe $c_0 > 0$ tel que τ est décroissant sur $[0, c_0]$ puis croissant sur $[c_0, +\infty[$, u admet alors une limite finie positive l quand c tend vers $+\infty$. La politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l$. Dans ce cas, il existe une politique de maintenance optimale et elle est obtenue pour $\rho = \delta_{c_{opt}}$, où c_{opt} est tel que $u(c_{opt}) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$ (même résultat que dans le cas IFR).
2. S'il existe $c_0 > 0$ tel que τ est croissant sur $[0, c_0]$ puis décroissant sur $[c_0, +\infty[$, la fonction u admet alors une limite l quand c tend vers $+\infty$ (avec éventuellement $l = -\infty$). De plus :
 - Si $l \geq 0$, il existe $k \in [l, 1[$ (que l'on sait calculer) tel que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < k$ (avec $k = l$ si $\tau(0) > \frac{1}{\overline{F}(\infty)}$).
 - Si $l < 0$:
 - Si $\tau(0) > \frac{1}{\overline{F}(\infty)}$, la politique de maintenance diminue la disponibilité asymptotique.
 - Si $\tau(0) \leq \frac{1}{\overline{F}(\infty)}$, il existe $k \in]0, 1[$ (que l'on sait calculer) tel que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < k$.

Dans le cas 2., lorsque la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique, il existe une politique de maintenance optimale et elle est obtenue pour $\rho = \delta_{c_{opt}}$ avec $c_{opt} = \min \left(c > 0 / u(c) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \right)$.

Dans tous les cas, (cas 1. et 2.), lorsqu'elle existe, la disponibilité asymptotique optimale est là encore donnée par (3.40).

Remarque 3.19 Remarquons que, dans le cas 2., la condition $l < 0$ signifie que la durée de fonctionnement du système comporte une "importante" partie DFR.

D'autre part, $\frac{1}{\overline{F}(\infty)}$ peut être interprété comme le taux de panne de la loi exponentielle de moyenne $\overline{F}(\infty) = \mathbb{E}_1(T)$, durée moyenne de fonctionnement du système après un redémarrage.

Si $l < 0$, la condition $\tau(0) \leq \frac{1}{F(\infty)}$ signifie alors que la politique de maintenance ne peut améliorer la disponibilité asymptotique que si le taux de panne, lors du redémarrage, est plus petit que le taux de panne de cette loi exponentielle qui donnerait la même durée moyenne de fonctionnement.

Remarquons aussi que lorsque $\tau(0) = 0$, ce qui est assez fréquent, cette condition est toujours vérifiée.

Démonstration. Là encore, d'après le **théorème 3.15**, il suffit de considérer les maintenances déterministes. Rappelons d'autre part que, d'après (3.41), u et τ varient de la même façon en fonction de c .

1. Par hypothèse, τ est décroissant sur $[0, c_0]$. Il en est donc de même pour u et on a $u(c) \leq u(0) = 0$, pour $c \leq c_0$.

D'après le **lemme 3.12**, cela implique que $c \mapsto a_\infty(\delta_c)$ est décroissante sur $[0, c_0]$, ou encore que $c \mapsto A_\infty(\delta_c)$ est croissante sur $[0, c_0]$.

On est donc ramené à optimiser $A_\infty(\delta_c)$ sur $[c_0, +\infty[$.

Comme τ est croissant sur $[c_0, +\infty[$, la discussion est alors la même que dans le cas où τ est croissant (cf la démonstration du **théorème 3.16**).

2. D'après les hypothèses et (3.41), u admet un maximum en c_0 . De plus, u étant décroissante sur $[c_0, +\infty[$, u admet une limite l (éventuellement égale à $-\infty$) en $+\infty$.

Nous distinguons maintenant différents cas, suivant la place de $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$ par rapport à $u(c_0)$ et l (avec $l \leq u(c_0)$ car u est décroissante sur $[c_0, +\infty[$).

- (a) Si $u(c_0) \leq \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$, le **lemme 3.12** entraîne alors que $c \mapsto A_\infty(\delta_c)$ est croissante sur \mathbb{R}^+ et la maintenance diminue la disponibilité asymptotique.
- (b) Si $0 \leq \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \leq l$, soit $c_{opt} = \min\left(c > 0 / u(c) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}\right)$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

c	0	c_{opt}	c_0	$+\infty$
$u(c)$	0	$\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$	$u(c_0)$	l
$a_\infty(\delta_c)$	∞	$a_\infty(\delta_{c_{opt}})$		a_∞^{ini}
$A_\infty(\delta_c)$	0	$A_\infty(\delta_{c_{opt}})$		A_∞^{ini}

La fonction $c \mapsto A_\infty(\delta_c)$ est donc maximale en c_{opt} .

- (c) Supposons maintenant que $l < \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < u(c_0)$.

Soit alors $c_{opt} = \inf\{c > 0 / u(c) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}\}$ et $c'_{opt} = \inf\{c > c_0 / u(c) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}\}$.

On a alors le tableau de variations suivant :

c	0	c_{opt}	c_0	c'_{opt}	$+\infty$
$u(c)$	0	$\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$	$u(c_0)$	$\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$	l
$a_\infty(\delta_c)$	∞	$a_\infty(\delta_{c_{opt}})$		$a_\infty(\delta_{c'_{opt}})$	a_∞^{ini}
$A_\infty(\delta_c)$	0	$A_\infty(\delta_{c_{opt}})$		$A_\infty(\delta_{c'_{opt}})$	A_∞^{ini}

La maintenance améliore donc la disponibilité asymptotique si et seulement si $a_\infty(\delta_{c_{opt}}) \leq a_\infty^{ini}$.

Or, d'après (3.39), on sait que :

$$a_\infty^{ini} = \lim_{c \rightarrow +\infty} a_\infty(\delta_c) = \frac{\mathbb{E}(R)}{\overline{\overline{F}}(\infty)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} a_\infty(\delta_{c_{opt}}) &= \frac{\mathbb{E}(R) \tau(c_{opt})}{(\tau \overline{\overline{F}} + \overline{\overline{F}})(c_{opt})} \text{ (même calcul que pour (3.35))} \\ &= \mathbb{E}(R) (1 - u(c_{opt})) \tau(c_{opt}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(a_\infty(\delta_{c_{opt}}) \leq a_\infty^{ini}) \Leftrightarrow \tau(c_{opt}) (1 - u(c_{opt})) \leq \frac{1}{\overline{\overline{F}}(\infty)}. \quad (3.42)$$

Par ailleurs, comme $l = \lim_{c \rightarrow +\infty} u(c) = 1 - \frac{1}{\tau(\infty) \overline{\overline{F}}(\infty)}$, on a aussi $\frac{1}{\overline{\overline{F}}(\infty)} = (1 - l) \tau(\infty)$.

En remplaçant dans (3.42), on a maintenant :

$$\begin{aligned} a_\infty(\delta_{c_{opt}}) \leq a_\infty^{ini} \\ \Leftrightarrow (1 - u(c_{opt})) \tau(c_{opt}) &\leq (1 - l) \tau(\infty) = \lim_{c \rightarrow +\infty} (1 - u(c)) \tau(c) \\ \Leftrightarrow v(c_{opt}) &\leq l_v, \end{aligned} \quad (3.43)$$

en posant $v = (1 - u) \tau$ et $l_v = \lim_{c \rightarrow +\infty} v(c) = (1 - l) \tau(\infty) = \frac{1}{\overline{\overline{F}}(\infty)}$.

Ceci nous amène à étudier les variations de la fonction v .

Rappelons pour cela que

$$u = 1 - \frac{1}{\overline{\overline{F}} \tau + \overline{\overline{F}}} \text{ et } u' = \frac{\overline{\overline{F}} \tau'}{(\overline{\overline{F}} \tau + \overline{\overline{F}})^2} = \overline{\overline{F}} \tau' (1 - u)^2.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} v' &= \tau'(1-u) - \bar{F} \tau'(1-u)^2 \tau \\ &= \tau'(1-u)^2 \left(\frac{1}{1-u} - \bar{F} \tau \right) \\ &= \tau'(1-u)^2 \bar{F}. \end{aligned}$$

v' est donc du signe de τ' .

On en déduit :

c	0	c_0	$+\infty$
$v'(c)$		+	0 -
$v(c)$	$v(0)$	\nearrow	\searrow l_v

D'où la discussion :

Si $v(0) > l_v$, alors $v(c_{opt}) > l_v$ et la maintenance n'améliore pas la disponibilité asymptotique (cf (3.43)).

Si $v(0) \leq l_v$, il existe $0 \leq c_3 \leq c_0$ tel que $v(c_3) = l_v$.

Dans ce cas, la maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $v(c_{opt}) \leq v(c_3)$ avec $0 \leq c_3 \leq c_0$, $0 < c_{opt} \leq c_0$.

Comme v et u sont croissantes sur $[0, c_0]$, ceci est équivalent à $u(c_{opt}) = \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \leq k = u(c_3)$.

Remarquons que, dans ce cas, $k = u(c_3) \in]l, 1[$ car $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} > l$ dans le cas considéré, et u est strictement majorée par 1.

En résumé, nous obtenons les résultats suivants :

- Si $l \geq 0$: la maintenance est utile si $0 \leq \frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \leq l$ (cas (b)) ou si $(v(0) \leq l_v$ et $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \leq u(c_3)$, cas (c)).

En faisant la synthèse de ces deux cas, la maintenance est donc utile si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \leq k$ avec $k = l$ si $v(0) > l_v$ et $k = u(c_3) \in]l, 1[$ sinon.

- Si $l < 0$: la maintenance est utile si $v(0) \leq l_v$ et $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \leq k$ avec $k = u(c_3) \in]0, 1[$.

En remarquant que $v(0) = \tau(0)$ et se souvenant que $l_v = \frac{1}{\bar{F}(\infty)}$, on obtient alors les résultats annoncés. ■

Nous donnons maintenant quelques exemples d'utilisation des résultats de ce paragraphe.

Exemple 3.20 *Nous considérons ici un système de type "k sur n" (cf §1.3.5.1) comportant n composants identiques et indépendants, de taux de panne λ et de taux de réparation μ , constants (réparables pendant que le système fonctionne).*

Lorsque le système est tombé en panne, on répare tous les composants. La durée de la réparation suit une loi générale, de moyenne $\mathbb{E}(R)$.

Ce type de système a été largement étudié dans la littérature et on sait, en particulier, que le taux de panne τ après un redémarrage (du moins dans l'état 1) est croissant (voir [36] par exemple).

Une opération de maintenance remet le système dans l'état de marche parfaite et dure en moyenne $\mathbb{E}(M)$.

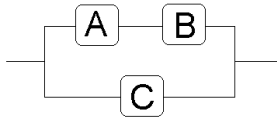
Pour un système de type 3 sur 5 et $\lambda = 4$, $\mu = 3$, on obtient alors, d'après le **théorème 3.16**, que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l = \lim_{c \rightarrow +\infty} u(c) \simeq 0,3477$. De plus, pour $\mathbb{E}(R) = 0.15$ et $\mathbb{E}(M) = \frac{\mathbb{E}(R)}{10}$, on a :

$$A_{\infty}^{ini} \simeq 0,6165, c_{opt} \simeq 0,0700 \text{ et } A_{\infty}(\delta_{c_{opt}}) \simeq 0,7184.$$

Avec les mêmes données numériques et le cas d'un système 1 sur 5 (c'est-à-dire le cas de composants en parallèle), on obtient :

$$l \simeq 0.1488, A_{\infty}^{ini} \simeq 0,9106, c_{opt} \simeq 0,3310 \text{ et } A_{\infty}(\delta_{c_{opt}}) \simeq 0,9229.$$

Exemple 3.21 On considère ici un système formé de trois composants identiques et indépendants, non réparables pendant que le système fonctionne, de taux de panne constant λ . La structure du système est donnée par le schéma suivant.



Lorsque le système est tombé en panne, on répare tous les composants. La durée de la réparation suit une loi générale, de moyenne $\mathbb{E}(R)$.

De la même façon, on suppose qu'une opération de maintenance remet le système dans l'état de marche parfaite et dure en moyenne $\mathbb{E}(M)$.

On se place dans le cas où $\lambda = 20$.

Les variations du taux τ en fonction du temps c sont alors données par la **figure 3.15** ci-dessous.

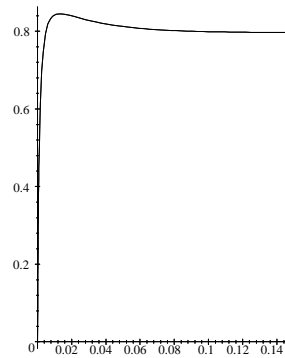
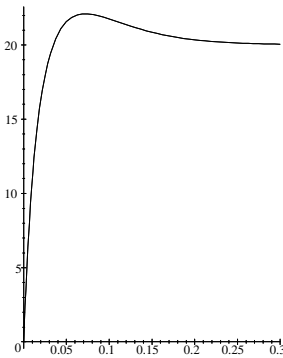


Figure 3.15. Taux de panne τ **Figure 3.16.** $A_{\infty}(\delta_c)$ en fonction de c .

Cette figure montre que nous sommes dans le cadre d'application du **théorème 3.18**, point 2. On calcule alors la limite l de la fonction u en $+\infty$, qui vaut ici $l \simeq 0.1429 > 0$. De plus, comme $\tau(0) = 0 < \frac{1}{F(\infty)}$, on détermine alors c_3 et $k = u(c_3)$, comme indiqué dans la démonstration du **théorème 3.18**. On obtient ainsi que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < k \simeq 0.2081$.

En particulier, pour $\mathbb{E}(R) = 0.015$ et $\mathbb{E}(M) = \frac{\mathbb{E}(R)}{15} = 0.001$, les variations de $A_{\infty}(\delta_c)$ en fonction de c sont données par la **figure 3.16** ci-dessus.

On obtient par ailleurs :

$$A_{\infty}^{ini} \simeq 0.7955, c_{opt} \simeq 0.0133 \text{ et } A_{\infty}(\delta_{c_{opt}}) \simeq 0.8452.$$

Exemple 3.22 Dans ce dernier exemple, nous considérons un système dont l'évolution est modélisée par un processus semi-markovien à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$, où 1, 2, 3 sont les états de marche et 4 l'état de panne. Nous supposons que le noyau semi-markovien est donné par

$$(q(i, j, dt)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} f_1(t) dt & 0 & \frac{1}{4} f_1(t) dt \\ 0 & 0 & f_2(t) dt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_3(t) dt \\ q(4, 1, dt) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où f_1 , f_2 et f_3 représentent les densités respectives des durées passées dans chacun des trois états et que ces différentes durées suivent des lois GAMMA.

Lorsque le système redémarre, on constate sur cette matrice qu'il a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de tomber directement en panne après son passage dans l'état 1. On peut alors considérer cette période comme une période de "rodage", ou de "remise en route" du système. En revanche, lorsque le système a réussi à atteindre l'état 2, il ne peut tomber en panne qu'en passant par l'état 3, plus dégradé.

Numériquement, on prend :

- $f_1 =$ densité de $\Gamma(1; 1.1)$, (de moyenne = 1.1),
- $f_2 =$ densité de $\Gamma(18; 8.2)$, (de moyenne = 147.6),
- $f_3 =$ densité de $\Gamma(25; 0.1)$, (de moyenne = 2.5).
- $\mathbb{E}(R) = 10$.

Les variations du taux τ et de la fonction u en fonction du temps sont alors données par les **figures 3.17** et **3.18** ci-dessous.

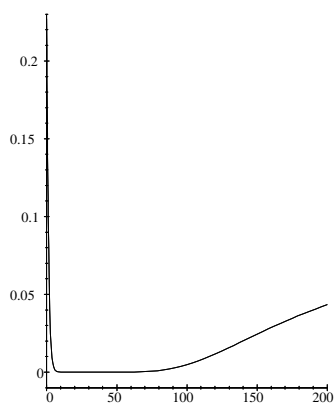


Figure 3.17. Taux de panne τ en fonction du temps.

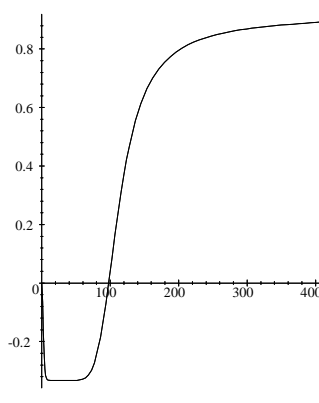


Figure 3.18. Fonction u en fonction du temps.

On constate ici que le taux a une représentation graphique en "baignoire", comportement assez fréquent, comme nous l'avons déjà signalé juste avant le **théorème 3.18**.

Supposons maintenant qu'une opération de maintenance remette le système dans l'état de marche parfaite et dure en moyenne $\mathbb{E}(M)$.

D'après ce même théorème, la politique de maintenance améliore alors la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < l \simeq 0.9$.

En particulier, pour $\mathbb{E}(M) = 1$, les variations de $A_\infty(\delta_c)$ sont données par la **figure 3.19**, ci-dessous.

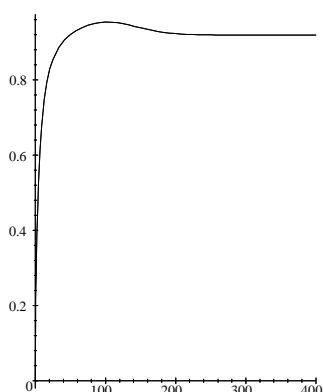


Figure 3.19. $A_\infty(\delta_c)$ en fonction de c .

De plus, on obtient ici :

$$A_\infty^{ini} = 0.919143, c_{opt} = 103.28 \text{ et } A_\infty^{opt} = 0.954033.$$

Nous nous intéressons maintenant au cas particulier où il n'y a qu'un seul état de marche ($m = 1$). Tous les redémarrages se font donc nécessairement dans ce même état et nous pouvons appliquer les différents résultats obtenus ci-dessus dans le cas où $D_M = D_R$.

3.4.5.3 Cas où il n'y a qu'un seul état de marche

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, les industriels modélisent fréquemment la durée de vie d'un système à l'aide d'une unique loi, en général choisie parmi quelques lois usuelles, ce qui revient en fait à modéliser l'évolution de leur système par un processus semi-markovien avec un seul état de marche (mais éventuellement plusieurs états de panne).

Nous nous plaçons ici dans ce cadre ($m = 1$) et nous considérons quelques unes de ces lois classiques, utilisées pour modéliser la durée de vie d'un système.

Nous ne justifions pas l'utilisation de telles lois. Le lecteur intéressé peut trouver des éléments de réponse dans l'ouvrage de J.L. Bon [14] pour les lois Gamma, Weibull et Log-normale (ainsi que d'autres). On peut aussi consulter [6], où Barlow et Proschan considèrent les mêmes lois, ainsi qu'une modification de la loi des extrêmes de Gumbell de type I, qu'ils appellent "loi des valeurs extrêmes modifiée".

Pour chacune de ces lois, nous commençons par rappeler (sans démonstration) le comportement du taux de panne du système en fonction du temps. A l'aide des résultats du paragraphe précédent, nous en déduisons des conditions nécessaires et suffisantes pour que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique, c'est-à-dire pour qu'il existe une loi ρ telle que $A_\infty(\rho) > A_\infty^{ini}$.

Proposition 3.23 1. Cas où la loi de défaillance est la loi $\Gamma(\alpha, \beta)$:

Cette loi est IFR si et seulement si $\alpha \geq 1$.

La politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\alpha > 1$ et $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

2. Cas où la loi de défaillance est la loi de Weibull $W(\alpha, \beta)$:

Cette loi est IFR si et seulement si $\beta \geq 1$.

La politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\beta > 1$ et $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < 1$.

3. Cas où la loi de défaillance est la loi des valeurs extrêmes modifiée, de densité $f(t) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{e^t-1}{\lambda} + t\right)$ sur \mathbb{R}_+ avec $\lambda > 0$ (cf [6]) :

Cette loi est toujours IFR.

La politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < 1$.

4. Cas où la loi de défaillance est la loi log-normale $LN(m, \sigma)$ de densité $f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(t)-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ sur \mathbb{R}_+^* avec $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$:

Le taux de panne τ est d'abord croissant puis décroissant.

On a par ailleurs $l = -\infty$, $\tau(0) = 0$.

Il existe $0 < k < 1$ tel que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < k$ (où k peut être calculé avec la méthode donnée dans la démonstration du **théorème 3.18**).

Démonstration.

1. Pour $\alpha > 1$, la loi étant IFR (strictement), on peut appliquer le **théorème 3.16**. Calculons alors $l = \lim_{c \rightarrow +\infty} u(c)$.

On a ici :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\bar{F}(c)\tau(c) + \bar{F}(c)} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\alpha\beta \times \frac{1}{\beta} + 0} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}. \end{aligned}$$

2. De la même façon, calculons l lorsque $\beta > 1$.

$$l = 1 - \frac{1}{\alpha\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \times \infty + 0} = 1.$$

3. On a ici : $\tau(c) = \frac{e^c}{\lambda}$ (cf [6]) et

$$l = 1 - \frac{1}{\mathbb{E}_1(\tau_1) \times \infty + 0} = 1 \text{ car } \mathbb{E}_1(\tau_1) < +\infty.$$

4. On sait que le taux de panne τ est d'abord croissant puis décroissant (cf [14] par exemple).

Remarquons par ailleurs que la densité f n'est ici continue que sur \mathbb{R}_+^* , et non pas sur \mathbb{R}_+ comme nous l'avons supposé dans tout le paragraphe **3.4**.

Regardons alors la limite de cette densité en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} f(c) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(c) - m)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \lim_{c \rightarrow 0^+} \exp\left(-\frac{(\ln(c) - m)^2}{2\sigma^2} - \ln(c)\right) \end{aligned}$$

car $\frac{1}{c} = \exp(-\ln(c))$.

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} f(c) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \lim_{c \rightarrow 0^+} \exp\left(-\ln(c) \left(\frac{\ln(c) - 2m}{2\sigma^2} + 1\right) - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Quitte à poser $f(0) = 0$, on peut donc supposer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .

On peut alors appliquer le **théorème 3.18**.

Pour cela, il nous faut déterminer la limite l de u en $+\infty$. Nous commençons par étudier celle de τ .

Si ϕ , Φ et $\tau_{N(0,1)}$ désignent respectivement la densité, la fonction de répartition et le taux de hasard de la loi normale centrée réduite, on a alors :

$$\begin{aligned} \tau(c) &= \frac{\frac{1}{c\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(c)-m)^2}{2\sigma^2}\right)}{\int_c^{+\infty} \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(t)-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\phi\left(\frac{\ln(c)-m}{\sigma}\right)}{\int_{\frac{\ln(c)-m}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du}. \end{aligned}$$

avec le changement de variables $u = \frac{\ln(t)-m}{\sigma}$, $du = \frac{dt}{t\sigma}$.

On en déduit :

$$\tau(c) = \frac{1}{c} \frac{\phi\left(\frac{\ln(c)-m}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln(c)-m}{\sigma}\right)} = \frac{1}{c} \tau_{N(0,1)}\left(\frac{\ln(c)-m}{\sigma}\right).$$

Par ailleurs, d'après [14], **§3.2.5**, on sait que $\tau_{N(0,1)}(t) =_{+\infty} t + o(t)$.

On en déduit :

$$\tau(c) =_{+\infty} \frac{1}{c} \left(\frac{\ln(c)-m}{\sigma} + o(\ln(c)) \right)$$

puis

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \tau(c) = 0^+.$$

Comme $\lim_{c \rightarrow +\infty} \bar{F}(c) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right) < +\infty$, on obtient alors

$$l = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\bar{F}\tau + \bar{F}}(c) \right) = -\infty.$$

Par ailleurs, $\lim_{c \rightarrow 0^+} \tau(c) = \lim_{c \rightarrow 0^+} f(c) = 0$ d'après (3.44).

Tout se passe donc comme si nous avions $\tau(0) = 0$ et la condition $\tau(0) \leq \frac{1}{\bar{F}(\infty)}$ du

théorème 3.18 est vérifiée.

Il existe alors $k \in]0, 1[$ (que l'on sait calculer) tel que la maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} \leq k$. ■

Nous donnons maintenant quelques exemples d'utilisation de ces résultats.

Exemple 3.24 Nous considérons ici un système dont l'évolution est modélisée par un processus semi-markovien à deux états : un état de marche (1) et un état de panne (2). On suppose que la durée de fonctionnement suit la loi log-normale $LN(m, \sigma)$ avec $m = 5$, $\sigma = 1$. Une réparation dure en moyenne $\mathbb{E}(R) = 10$.

Les variations du taux τ en fonction du temps sont alors données par la **figure 3.20** ci-dessous.

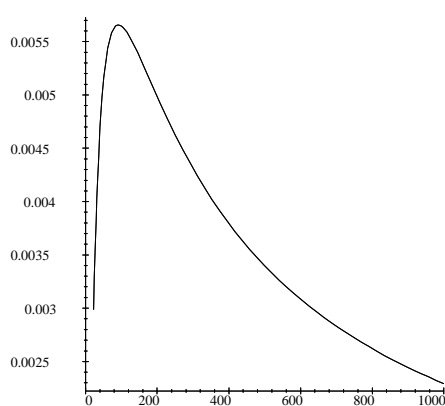


Figure 3.20. Taux de panne τ en fonction du temps.

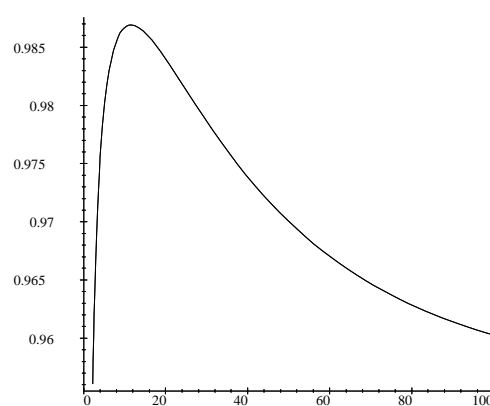


Figure 3.21. $A_\infty(\delta_c)$ en fonction de c .

D'après la **proposition 3.23**, on sait alors que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < k \simeq 0.0707$.

En particulier, pour $\mathbb{E}(M) = 0.01 \times \mathbb{E}(R) = 0.1$, les variations de $A_\infty(\delta_c)$ sont alors données par la **figure 3.21**, ci-dessus.

On obtient par ailleurs :

$$A_\infty^{ini} = 0.9607, c_{opt} = 11.58 \text{ et } A_\infty^{opt} = 0.9869.$$

Exemple 3.25 Nous considérons un système semblable à celui de l'exemple précédent, mis à part le fait que la durée de fonctionnement suit maintenant la "loi des valeurs extrêmes modifiée" (cas 3. de la **proposition 3.23**) avec $\lambda = 1$. On prend par ailleurs $\mathbb{E}(R) = 0.1$.

Les variations du taux τ en fonction du temps sont alors données par la **figure 3.22** ci-dessous.

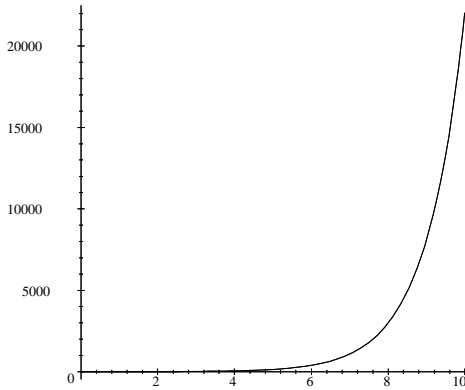


Figure 3.22. Taux de panne τ en fonction du temps.

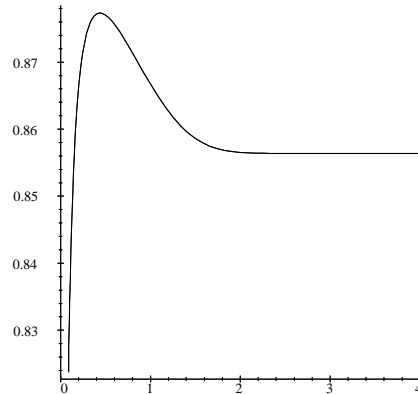


Figure 3.23. $A_\infty(\delta_c)$ en fonction de c .

On sait dans ce cas que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique si et seulement si $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} < 1$.

On prend ici $\mathbb{E}(M) = 0.1 \times \mathbb{E}(R) = 0.1$.

Les variations de $A_\infty(\delta_c)$ sont alors données par la **figure 3.23**, ci-dessus.

On obtient par ailleurs :

$$A_\infty^{ini} = 0.8564, c_{opt} = 0.4404 \text{ et } A_\infty^{opt} = 0.8773.$$

Ainsi, lorsque nos critères sont applicables, il est facile de savoir si la maintenance améliore ou non la disponibilité asymptotique. De plus, on obtient aussi aisément l'instant optimal pour maintenir le système ainsi que la disponibilité asymptotique associée.

Nous donnons maintenant un dernier exemple qui montre que, même si beaucoup de systèmes ont un taux de panne qui rentre dans notre cadre d'étude, lorsque l'évolution du système est modélisée par un processus semi-markovien ayant plus d'un état de marche, nos critères ne sont malgré tout pas toujours applicables...

3.4.5.4 Un dernier exemple

Nous considérons ici un système dont l'évolution est modélisée par un processus semi-markovien prenant ses valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. "1" et "2" représentent les états de marche, "3", l'état de panne. Le noyau semi-markovien est donné par :

$$(q_{i,j}(dt)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Gamma(\alpha_1, \beta_1) & \frac{1}{2}\Gamma(\alpha_1, \beta_1) \\ \frac{1}{2}\Gamma(\alpha_2, \beta_2) & 0 & \frac{1}{2}\Gamma(\alpha_2, \beta_2) \\ q(3, 1, dt) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après ce noyau, on a $D_R(1) = 1$ et les réparations sont complètes.

De la même façon, on suppose qu'une opération de maintenance remet aussi le système dans l'état 1 et qu'elle dure en moyenne $\mathbb{E}(M)$.

Pour $\alpha_1 = 7$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 6$ et $\beta_2 = 2$, l'évolution du taux et de la fonction u en fonction du temps sont données par les **figures 3.24** et **3.25**.

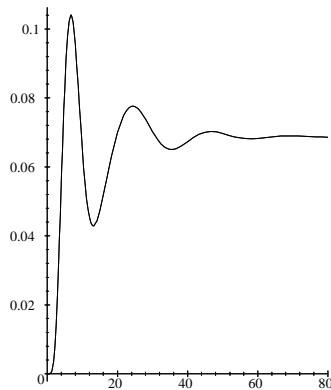


Figure 3.24. Taux τ
en fonction du temps c .

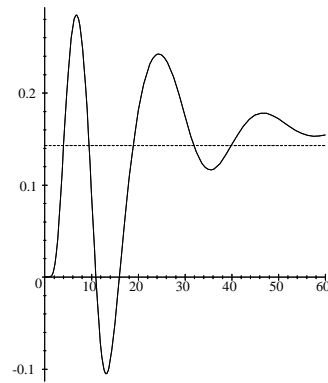


Figure 3.25. u en fonction du temps,
comparaison avec $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} = 1/7$ (en pointillé).

D'après ces figures, nous ne sommes clairement plus dans le cadre d'application de notre travail... Malgré tout, si on trace la disponibilité asymptotique $A_\infty(\delta_c)$ en fonction de c pour $\mathbb{E}(R) = 3$ et $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)} = 1/7 \simeq 0.143$, on s'aperçoit que la maintenance améliore la disponibilité asymptotique :

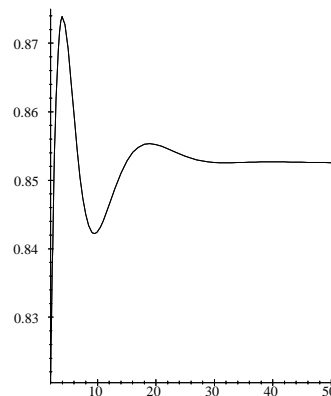


Figure 3.26. $A_\infty(\delta_c)$ en fonction de c .

Après optimisation, on obtient par ailleurs :

$$A_\infty^{ini} \simeq 0.7727, c_{opt} \simeq 1.3697 \text{ et } A_\infty(\delta_{c_{opt}}) \simeq 0.8189.$$

Ainsi, même lorsque nos critères ne sont pas applicables, on peut malgré tout optimiser la politique de maintenance de façon numérique, du moins lorsque la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique.

3.5 Conclusion

Nous avons étudié, dans ce chapitre, une politique de maintenance préventive appliquée à un système dont l'évolution est décrite par un processus semi-markovien.

Nous avons séparé notre étude en deux parties, l'une consacrée au cas particulier où le temps d'attente de la maintenance suivait une loi exponentielle, l'autre au cas général.

Dans ces deux parties, nous avons étudié l'apport de la maintenance et cherché à optimiser la disponibilité asymptotique du système maintenu.

Dans le cas exponentiel, cette étude a été effectuée de façon numérique. En effet, la formule que nous avons obtenue pour la disponibilité asymptotique dans ce cas n'est guère facile à exploiter d'un point de vue théorique, du fait de la présence de la loi stationnaire ν' de la chaîne de Markov associée au processus semi-markovien (Z_t) . En revanche, les techniques semi-markoviennes que nous avons utilisées dans ce cas nous ont permis de calculer la disponibilité instantanée du système maintenu. En particulier, nous avons comparé sur deux exemples les disponibilités instantanées du système initial et du système soumis à la politique optimale pour la disponibilité asymptotique. Nous avons ainsi constaté que la politique optimale en régime stationnaire diminuait la disponibilité instantanée lorsque t était petit (du moins pour les deux exemples étudiés). Lorsque l'horizon est fini, il faut donc faire attention à maintenir à bon escient et, le cas échéant, procéder à une optimisation de la disponibilité à un instant t fixé. Remarquons aussi que, dans ce cas, il serait peut-être préférable d'utiliser la disponibilité *moyenne* sur l'intervalle de temps $[0, t]$ $\left(\frac{1}{t} \int_0^t A_u du\right)$ plutôt que la disponibilité instantanée A_t (notions qui se confondent sur un horizon infini).

Dans le cas général, c'est-à-dire le cas où la loi ρ du temps d'attente de la maintenance est quelconque, nous avons tout d'abord observé sur quelques exemples, puis démontré dans le cas particulier où $D_M = D_R$, que l'on pouvait restreindre l'optimisation de la disponibilité asymptotique aux seuls temps d'attente de la maintenance de type déterministe. Nous avons alors donné un certain nombre de critères pour savoir s'il existe une politique de maintenance (uniquement déterministe dans le cas $D_M \neq D_R$) qui améliore la disponibilité asymptotique. En particulier, nous avons étudié quelques comportements possibles pour le taux de panne après redémarrage. Mis à part le cas DFR, nous avons obtenu dans tous les autres cas un seuil facilement calculable pour $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$, au-dessus duquel il est inutile (et même nuisible) de maintenir le système. Le cas échéant, nous avons aussi déterminé la politique de maintenance optimale, ainsi que la disponibilité asymptotique associée.

Lorsque nos critères ne sont pas applicables, même s'il n'est alors guère facile de fournir un seuil pour $\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(R)}$ pour savoir s'il est opportun ou non de maintenir, on peut malgré tout optimiser la politique de maintenance de façon numérique. Dans le cas où $D_M = D_R$, cette optimisation est grandement facilitée par le fait que nous savons pouvoir nous restreindre aux seules lois déterministes (c'est le cas de l'**exemple 3.4.5.4**). En revanche, dans le cas général ($D_M \neq D_R$), il faut a priori considérer des lois ρ quelconques, ce qui complique notablement la tâche. (Nous avons choisi ici de prendre des lois GAMMA, cf les deux exemples du paragraphe 3.4.4.1).

Enfin, rappelons le phénomène que nous avons pu observer sur quelques exemples, à savoir que, lorsque l'on ne maintient pas à l'instant optimal (soit pour des raisons techniques, soit parce que cet instant est mal déterminé), il peut être préférable d'utiliser un temps d'attente plus dispersé qu'un temps d'attente déterministe (à moyenne égale). En pratique, les systèmes étant souvent très compliqués et les modélisations qu'approximatives, l'instant optimal de maintenance n'est que rarement déterminé de façon précise (c'est plutôt l'expérience qui conduit les industriels à prévoir les plans d'entretien). Cela signifie que, dans ce cas, il peut s'avérer préférable de maintenir le système à un instant aléatoire. Ainsi, si le carnet d'entretien d'une voiture prévoit une révision au bout de 10

000 km, ce n'est non seulement pas très grave mais peut-être préférable de ne la faire qu'aux *environs* de 10 000 km...

Conclusion

Nous avons essayé de voir, dans cette thèse, comment améliorer la disponibilité asymptotique d'un système réparable.

Lorsque l'on peut réparer plus ou moins complètement le système lors d'une panne, nous avons vu, dans le premier chapitre, que le choix du degré de réparation influait sur cette disponibilité asymptotique. Nous nous sommes alors attaché, d'une part, à la recherche de la meilleure façon de réparer le système, d'autre part, à caractériser les systèmes pour lesquels les réparations complètes sont optimales, c'est-à-dire les systèmes dont tous les composants sont réellement utiles à la disponibilité asymptotique optimale. Dans ce sens, les conditions que nous avons obtenues peuvent aussi être utiles au niveau de la *conception* d'un système, en servant de guide quant au choix des redondances à installer.

Dans les deux chapitres suivants, nous avons étudié deux politiques de maintenance préventive, l'une avec un système initial markovien, l'autre avec un système initial semi-markovien. Dans les deux cas, nous nous sommes intéressé à l'apport de la politique de maintenance pour la disponibilité asymptotique du système et à son optimisation. L'intérêt principal de la première politique proposée réside dans son aspect dynamique, en liaison avec l'évolution réelle du système. Par rapport aux inspections périodiques habituellement utilisées dans l'industrie, on peut alors espérer qu'elle donne lieu à moins d'inspections inutiles, et qu'elle s'avère ainsi moins coûteuse. L'intérêt de la deuxième réside dans la modélisation semi-markovienne du système initial, plus générale que celle qui est habituellement utilisée.

En ce qui concerne les extensions possibles du travail présenté ici, un premier pas pourrait consister à essayer de s'affranchir de l'hypothèse selon laquelle les redémarrages après réparation (ou maintenance) se font toujours de la même façon, indépendamment de l'état de panne (ou de maintenance) associé, ainsi que l'a fait C. Coccozza-Thivent dans [20]. Sans cette hypothèse, le processus décrivant l'évolution du système (maintenu ou non) est encore semi-régénératif. Moyennant quelques hypothèses d'irréductibilité à préciser, on peut alors imaginer avoir accès à la disponibilité asymptotique à l'aide des mêmes techniques. En revanche, contrairement à ce qui se passe ici, il n'est sans doute pas très simple dans ce cas de calculer explicitement la loi stationnaire de la chaîne de Markov formée par les états successifs dans lequel le système redémarre. Cela signifie que l'étude de l'apport de la politique maintenance et de son optimisation serait alors vraisemblablement beaucoup plus difficile à mener que sous nos hypothèses.

Une autre possibilité d'extension consisterait à essayer d'étudier un système semi-markovien soumis à la politique de maintenance préventive définie dans le deuxième chapitre. Dans ce cas, le processus décrivant l'évolution du système serait, là encore, semi-régénératif. En revanche, contrairement au cas "presque" markovien étudié ici, la disponibilité asymptotique du système maintenu serait alors difficile à obtenir à l'aide de la théorie

du renouvellement markovien. En effet, nos calculs sont ici basés sur la propriété de Markov appliquée aux instants d'inspections. Si le système est semi-markovien, ceci n'est plus possible. Mis à part le cas où les lois inter-inspections sont de type exponentiel, où l'on pourrait sans doute utiliser la propriété de Markov aux instants de sauts du système, il serait donc difficile de calculer la disponibilité asymptotique à l'aide des mêmes méthodes. Une solution serait alors d'utiliser les techniques développées par C. Coccozza-Thivent et M. Roussignol dans [23] et de rajouter des variables supplémentaires (correspondant à la durée écoulée depuis la dernière inspection et depuis le dernier saut du système) de façon à se ramener à l'étude d'un processus markovien, à valeurs dans un espace général. Cette méthode a d'ailleurs été utilisée par C. Coccozza-Thivent dans [20]. Remarquons malgré tout que, s'il est certainement possible de calculer numériquement la disponibilité asymptotique à l'aide de ces techniques dans le cas semi-markovien pour des exemples simples, on ne peut en revanche sans doute pas espérer obtenir de formule théorique explicite dans le cas général.

Mises à part ces deux extensions, qui sont en prolongement direct avec le travail présenté ici, rappelons aussi que le premier chapitre a mis en évidence l'intérêt d'un ordre encore peu utilisé en fiabilité (si ce n'est par quelques spécialistes), à savoir l'ordre selon le taux de hasard inversé. Un prolongement naturel de notre travail serait alors de réfléchir à de nouvelles utilisations possibles de cet ordre en fiabilité. De la même façon, nous avons été amené, dans ce même chapitre, à traduire le vieillissement de notre système en terme de monotonie pour le processus de Markov sous-jacent. Là aussi, les développements récents concernant de tels processus laissent entrevoir de nouvelles applications potentielles en fiabilité.

Malgré tout, avant de nous lancer dans ces nouvelles recherches, nous souhaiterions préalablement clore le travail présenté ici en examinant son apport pour les industriels. En particulier, certains d'entre eux ayant manifesté leur intérêt pour la politique de maintenance proposée au deuxième chapitre, notre objectif est maintenant d'essayer de la mettre en place sur des exemples réels, issus de l'industrie, et de la comparer aux politiques actuellement utilisées.

Bibliographie

- [1] ANDERSON, W.J. (1991) *Continuous-Time Markov Chains : an Applications-Oriented Approach*. Springer, New York.
- [2] ASMUSSEN, S. (1992) *Applied Probability and Queues*. Wiley.
- [3] AVEN, T. ET JENSEN, U. (1999) *Stochastic Models in Reliability*. Applications of Mathematics, **41**. Springer-Verlag, New York.
- [4] BADIA, F.G., BERRADE, M.D. ET CAMPOS, A. (2000) Optimum maintenance policies for unrevealed failures. *Second International Conference on Mathematics Methods in Reliability*, Bordeaux, 4-7 Juillet, Abstracts' Book.
- [5] BARLOW, R.E., HUNTER, L.C. ET PROSCHAN, F. (1963) Optimal checking procedures when components are subject to two kinds of failure. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **11**, n°4, pp. 1078–1095.
- [6] BARLOW, R.E. ET PROSCHAN, F. (1996, première édition 1965) *Mathematical Theory of Reliability*. Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia.
- [7] BARLOW, R.E. ET PROSCHAN, F. (1975) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. International Series in Decision Processes. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.
- [8] BEICHELT, F. ET FRANKEN, P. (1984) *Zuverlässigkeit und Instandhaltung*. Hanser, München.
- [9] BÉRENGUER, C., CHÂTELET, E. ET GRALL, A. (1997) Reliability valuation of systems subjects to partial renewals for preventive maintenance. *Proc. of ESREL'97, 17-20 Juin 97, Lisbonne, Portugal*, **3**, pp 1744–1767.
- [10] BLOCH-MERCIER, S. (2000) Stationary availability of a semi-Markov system with random maintenance. *Applied Stochastic Models in Business and Industry (auparavant Applied Stochastic Models and Data Analysis)*, **16**, pp. 219–234.
- [11] BLOCK, H.W., LANDBERG, N. ET SAVITS, T.H. (1993) Repair replacement policies. *Journal of Applied Probability*, **30**, pp. 194–206.
- [12] BLOCK, H.W., SAVITS, T.H. ET SINGH, H. (1998) The reversed hazard rate function. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **12**, pp. 69–90.
- [13] BOLAND, P.J. ET EL-NEWEIHI, E. (1995) Expected cost comparisons for inspection and repair policies. *Comput. Oper. Res.*, **22**, n°4, 383–390.
- [14] BON, J.L. (1995) *Fiabilité des systèmes : modèles mathématiques*. Masson, Techniques Stochastiques.
- [15] BROWN, M. ET CHAGANTY, N.R. (1983) On the first passage times distribution for a class of Markov chains. *The Annals of Probability*, **11**, pp. 1000–1008.

- [16] CHÂTELET, E., BÉRENGUER, C. ET GRALL, A. (1997) Reliability evaluation of systems subjects to partial renewals for preventive maintenance. *Advances in Safety and Reliability*, Pergamon Press, **3**, pp. 1744–1767.
- [17] CIARLET, P.G. (1994) *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson.
- [18] ÇINLAR, E. (1975) *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall.
- [19] COCOZZA-THIVENT, C. (1997) *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Mathématiques et Applications n°28, Springer.
- [20] COCOZZA-THIVENT, C. (2000). A model for a dynamic preventive maintenance policy. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, A paraître.
- [21] COCOZZA-THIVENT, C. (2000). Convergence de fonctionnelles de processus semi-régénératifs. *Prépublications de l'Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'Université de Marne-la-Vallée*, n°02/2000.
- [22] COCOZZA-THIVENT, C. ET ROUSSIGNOL, M. (1997) Semi-Markov processes for reliability studies. *ESAIM : Probability and Statistics*, **1**, pp. 207–223.
- [23] COCOZZA-THIVENT, C. ET ROUSSIGNOL, M. (2000) A general framework for some asymptotic reliability formulas. *Advances in Applied Probability*, **32**, pp. 446–467.
- [24] DIEULLE, L. (2000) Reliability of a system with Poisson inspection times. *Journal of Applied Probability*, **36**, n°4 , pp. 1140–1155.
- [25] GERTSBAKH, I.B. (1989) *Statistical Reliability Theory*. Probability : Pure and Applied, **4**. Marcel Dekker Inc., New York.
- [26] GNEDENKO, B.V., BELIAEV, Y.K. ET SOLOVYEV, A.D. (1969) *Mathematical Methods of Reliability Theory*. Academic Press, New York.
- [27] JIANG, X., CHENG, K. ET MAKIS, V. (1998) On the optimality of repair-rost-limit policies. *Journal of Applied Probability*, **35**, pp. 936–949.
- [28] KALASHNIKOV, V. ET ROUSSIGNOL, M. (1996) Reliability of a system with regular inspection times. *Journal of Mathematical Sciences*, **81**, 5, pp. 2937–2950.
- [29] KARASU, I. ET ÖZEKICI, S. (1989) NBUE and NWUE properties of increasing Markov processes. *Journal of Applied Probability*, **26**, pp. 827–834.
- [30] KARLIN, S. (1968) *Total positivity*. Stanford University Press. Stanford. CA.
- [31] KEILSON, J. ET KESTER, A. (1977) Monotone matrices and monotone Markov processes. *Stochastic Processes and Their Applications*, **5**, pp. 231–241.
- [32] KEILSON, J. ET SUMITA, U. (1982) Uniform stochastic ordering and related inequalities. *Canadian Journal of Statistics*, **10**, pp. 181–198.
- [33] KIERSTEIN, B.M. (1976) Monotonicity and comparability of time-homogeneous Markov processes with discrete state space. *Math. Operationsforsch. Statist.*, **7**, 151–168.
- [34] KIESMÜLLER, G. (1999) Most profitable sampling policies. *Economic Quality Control*, **14**, n°3/4, pp. 105–122.
- [35] KIJIMA, M. (1997) *Markov Processes for Stochastic Modelling*, Chapman & Hall. London.
- [36] KIJIMA, M. (1998) Hazard rate and reversed hazard rate monotonicities in continuous-time Markov chains. *Journal of Applied Probability*, **35**, pp. 545–556.
- [37] KOVALENKO, I.N., KUZNETSOV, N.Y. ET PEGG, P.A. (1997) *Mathematical Theory of Reliability of Time Dependent Systems with Practical Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Chichester.

- [38] LI, H. ET SHAKED, M. (1995) On the first passage times for Markov processes with monotone convex transition kernels. *Stochastic Processes and Their Applications*, **58**, pp. 205–216.
- [39] LI, H. ET SHAKED, M. (1997) Ageing first-passage times of Markov processes : a matrix approach. *Journal of Applied Probability*, **34**, pp. 1–13.
- [40] MURTHY, D.N.P. ET ASGHARIZADEH, E. (1999) Optimal Decision making in a Maintenance Service Operation. *European Journal of Operational Research*, **116**, pp. 259–273.
- [41] NAKAGAWA, T. ET YASUI, K. (1991) Periodic replacement models with threshold levels. *IEEE Transactions on Reliability*, **40**, pp. 395–397.
- [42] NANDA, A.K. ET SHAKED, M. (2001) The hazard rate and the reversed hazard rate orders, with applications to order statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, A paraître.
- [43] VAN NOORTWIJK, J.M. ET KLATTER H.E. (1999) Optimal Inspection Decisions for the Block Mats of the Eastern-Scheldt Barrier. *Reliability Engineering & System Safety*, **65**, pp. 203–211.
- [44] RAVICHANDRAN, N. (1990) *Stochastic Methods in Reliability Theory*. John Wiley & Sons, New York.
- [45] SHAKED, M. ET SHANTHIKUMAR, J.G. (1987) IFRA properties of some Markov processes with general state space. *Math. Operat. Res.*, **12**, pp. 562–568.
- [46] SHAKED, M. ET SHANTHIKUMAR, J.G. (1994) *Stochastic Orders and their Applications*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press.
- [47] SHAKED, M. ET WONG, T. (1997) Stochastic comparisons of random minima and maxima. *Journal of Applied Probability*, **34**, pp. 420–425.
- [48] SHAKED, M. ET WONG, T. (1997) Stochastic orders based on ratios of Laplace transforms. *Journal of Applied Probability*, **34**, pp. 404–419.
- [49] SHANTHIKUMAR, J.G. (1988) DFR property of first-passage times and its preservation under geometric compounding. *The Annals of Probability*, **16**, n°1, pp. 397–406.
- [50] SHANTHIKUMAR, J.G., YAMAZAKI, G. ET SAKASEGAWA, H. (1991) Characterization of optimal order of services in a tandem queue with blocking. *Operations Research Letters*, **10**, pp. 17–22.
- [51] STOYAN, D. (1983) *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*. Wiley, Chichester.
- [52] SZEKLI, R. (1995) *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*. Lecture Notes in Statistics, **97**, Springer, New York.
- [53] TURCO, F. ET PAROLINI P. (1984) A nearly optimal inspection policy for productive equipment. *International Journal of Production Research*, **22**, n°3, pp. 515–528.
- [54] VAURIO J.K. (1999) Availability and cost functions for periodically inspected preventively maintained units. *Reliability Engineering & System Safety*, **63**, pp. 133–140.
- [55] WEIBULL, W. (1951) A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.*, **18**, pp. 293–297.