Chapitre 1

Introduction

1.1 Version française

Le contexte

L'objectif de ce document est de présenter l'essentiel de mon travail de recherche, qui propose quelques contributions dans le domaine des mathématiques pour la fiabilité. Rappelons que depuis les ouvrages fondateurs de (Barlow et Proschan, 1965, 1975), ce domaine désigne l'étude du fonctionnement de ce que l'on appelle un système, un système pouvant représenter à peu près n'importe quel machine ou appareil susceptible d'être en marche ou en panne à un instant donné. Pour ce type d'étude, deux approches sont possibles, que l'on peut qualifier respectivement de statique et de dynamique : l'une s'intéresse aux propriétés d'un système à un instant t donné avec, par exemple, l'étude des fonctions de structure, des réseaux bayésiens, des arbres de défaillances... L'autre envisage au contraire son évolution au cours du temps. C'est à ce dernier aspect qu'est consacré tout ce mémoire, et plus précisément à l'étude de systèmes dont l'évolution dans le temps est aléatoire et modélisée par un processus stochastique. Ce type d'étude présente deux volets : un volet statistique, dont le but est de déterminer un modèle stochastique qui soit le mieux ajusté possible aux données (et éventuellement aux avis d'experts), et un volet probabiliste qui, partant d'un modèle stochastique donné, vise à analyser le comportement aléatoire du système et à faire de la prévision. Nous laissons pour notre part tout aspect statistique de côté pour nous consacrer à une approche essentiellement probabiliste.

Si l'on se place d'un point de vue industriel, les pannes aléatoires d'un système peuvent avoir diverses incidences, les unes du domaine économique, du fait de coûts de réparation ou d'indisponibilité, les autres du domaine de la sûreté de fonctionnement, lorsqu'il s'agit de composants critiques pour l'environnement ou la santé humaine par exemple. Ceci induit des contraintes, qui imposent à un industriel de contrôler le bon fonctionnement du système qu'il exploite. Ces contraintes s'expriment à l'aide d'indicateurs, qui permettent de mesurer les performances d'un système, de contrôler sa qualité, sa fiabilité, son coût de fonctionnement... Ceci induit un premier problème, qui est le calcul de ces indicateurs, pour lesquels on ne dispose pas nécessairement de formules analytiques exactes, ou dont la forme exacte pose des problèmes d'évaluation numérique. Un deuxième problème est aussi de voir comment agir pour améliorer ces indicateurs, afin de gagner en sécurité ou en profit. L'essentiel de ce document se situe dans la lignée de ces deux problèmes : les deux premiers chapitres (Chapitres 2 et 3) sont consacrés à l'étude de politiques de maintenance, qui, en prévenant certaines pannes, permettent d'améliorer certains indicateurs ; les chapitres suivants (Chapitres 4, 5 et 6) sont principalement consacrés à l'évaluation numérique de ces indicateurs, et ce, pour divers modèles d'évolution stochastique ; une partie du Chapitre 6 présente aussi une étude de sensibilité, qui permet de classer les différents paramètres d'un système selon leur importance, c'est-à-dire selon leur influence sur un indicateur donné. Le dernier chapitre (Chapitre 7) présente quant à lui des travaux en cours, ainsi que quelques projets, dont certains sont d'une essence différente.

Chapitre 2. Optimisation de politiques de maintenance

Ce chapitre est consacré à une présentation rapide de mes travaux de thèse (1997-2000), ainsi qu'à un prolongement de ces travaux effectué ultérieurement, en collaboration avec mon directeur de thèse, Michel Roussignol (UPEMLV). L'objet de cette thèse est de proposer, étudier et optimiser différentes politiques de maintenance préventives ou correctives, pour des systèmes se dégradant suivant des processus markoviens ou semi-markoviens, à valeurs dans un espace d'états fini. Les durées de réparation suivent des lois quelconques et les niveaux de maintenance corrective ou préventive peuvent être ajustés. Les critères d'optimisation utilisés sont la disponibilité et le coût moyen par unité de temps asymptotiques. Les processus décrivant l'évolution des systèmes, qu'il soient soumis à maintenance préventive ou non, sont semi-régénératifs, et le calcul des critères d'optimisation reposent sur la théorie du renouvellement markovien. Dans ce cadre, trois études différentes ont été menées :

Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à optimiser le niveau de maintenance corrective d'un système à dégradation markovienne, relativement à la disponibilité asymptotique. Ceci nous a amené à mettre une hypothèse de vieillissement sur le système, que nous avons traduite par une monotonie du processus de Markov sous-jacent, relativement à un ordre encore assez peu utilisé en fiabilité, à savoir l'ordre pour le taux de hasard inversé. Lorsque le degré de réparation est mesuré à l'aide de ce même ordre, nous avons montré dans [P2] que la disponibilité asymptotique est d'autant meilleure que les réparations sont complètes. Contrairement à ce à quoi on aurait sans doute pu s'attendre, l'ordre stochastique usuel n'est en revanche pas suffisant pour avoir ce type de résultat. Divers exemples d'optimisation du niveau de maintenance corrective relativement à la disponibilité asymptotique sont par ailleurs donnés dans [P3].

Dans un deuxième temps, nous avons proposé une politique de maintenance préventive pour ce même système (à dégradation markovienne). L'état du système est observé au travers d'inspections instantanées parfaites. La politique de maintenance étudiée est de type dynamique, c'est-à-dire liée à l'évolution du système : lors d'une inspection, si le système n'est pas trop dégradé, on se contente de choisir la date (aléatoire) de la prochaine inspection en fonction de son état courant ; s'il est très dégradé, on l'arrête pour lui faire subir une opération de maintenance préventive. Pour cette politique, nous avons montré dans [P4] que, sous certaines conditions, le plan d'inspections optimal était déterministe. Nous avons par ailleurs étudié l'apport de la politique de maintenance préventive pour les critères étudiés et déterminé les plans d'inspections optimaux. Ceci nous a permis de vérifier que, comme l'on pouvait s'y attendre, les inspections séquentielles proposées ici sont effectivement plus efficaces que des inspections périodiques, pourtant fréquemment utilisées.

Dans un troisième temps, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une politique de maintenance suivant l'âge (Barlow et Proschan, 1965) pour un système semi-markovien, cf [P1]. Là encore nous avons montré que, sous certaines conditions, la politique optimale correspond à un temps d'attente de la maintenance de type déterministe. Nous avons aussi donné différentes conditions pour que la politique de maintenance améliore la disponibilité asymptotique, selon le comportement du taux de panne après un redémarrage (croissant, décroissant, décroissant puis croissant, ...).

Le travail fait ultérieurement avec Michel Roussignol [P5] est consacré à un système à dégradation markovienne, soumis à la même politique de maintenance dynamique que celle étudiée lors de la thèse. Les critères d'intérêt sont la fiabilité et le taux de défaillance asymptotique, c'est-à-dire des critères liés à la première durée de bon fonctionnement du système. Ces critères sont donc d'une essence très différente de ceux étudiés dans la thèse. Notons par ailleurs que, malgré un intérêt applicatif certain, le taux de défaillance asymptotique n'a cependant été que peu étudié dans la littérature consacrée à la maintenance, ce qui est sans doute dû au fait qu'il est souvent plus difficile à déterminer que les autres critères. Pour notre étude, nous commençons par établir des équations de renouvellement markovien vérifiées par la fiabilité du système maintenu. Ces équations sont défectives, au sens où le noyau sous-jacent est de masse strictement inférieure à 1. En le renormalisant, on se ramène à de vraies équations de renouvellement markovien, qui nous permettent d'obtenir un équivalent de la fiabilité de la forme $R(t) \sim C \times e^{-\beta_0 t}$ quand t tend vers $+\infty$, où β_0 est calculable numériquement. On montre ensuite que β_0 est le taux de défaillance asymptotique. Enfin, nous donnons des conditions portant sur la maintenance pour que la politique de maintenance améliore à la fois la fiabilité et le taux de défaillance asymptotique.

Chapitre 3. Remplacement préventif de composants obsolescents

Ce chapitre est lui aussi consacré à l'étude de politiques de maintenance préventive, mais dans un contexte différent. Une première partie de ces travaux a été effectuée en collaboration avec Pierre-Etienne Labeau (Université Libre de Bruxelles), la deuxième partie seule. Le contexte est le suivant : nous considérons des composants identiques et indépendants, qui sont remplacés instantanément lorsqu'ils tombent en panne. Contrairement au cadre usuel de ce type d'étude, où les composants de rechange sont généralement supposés être des copies conformes de ceux qu'ils remplacent tout-au-long de la période d'intérêt, nous envisageons ici une innovation technologique qui permet de disposer, à partir d'un certain moment, de nouveaux composants, plus fiables et plus économiques. Tous les composants mis en place ultérieurement à cette innovation sont supposés être issus de cette nouvelle technologie. Le problème est alors de déterminer la meilleure stratégie de remplacements des anciens composants par des nouveaux : est-il préférable de remplacer les anciens dès l'apparition des nouveaux composants (stratégie purement préventive) ou d'introduire les nouveaux progressivement, au fur et à mesure que les anciens tombent en panne (stratégie purement corrective) ? Des stratégies mixtes, associant des remplacements préventifs et correctifs, peuvent-elles encore être meilleures ? Le critère d'optimisation utilisé est une fonction de coût sur un horizon de temps fini, qui inclut des dépendances économiques entre les remplacements.

Lorsque les composants ont des taux de panne constants, nous avons démontré avec Pierre-Etienne Labeau [P6] que les seules stratégies optimales possibles étaient purement correctives, purement préventives, ou encore presque purement préventives (remplacement préventif de tous les composants dès la première panne d'un ancien composant). Des conditions précises portant sur les paramètres des différents types de composants ainsi que sur la durée de mission prévue permettent de déterminer la stratégie optimale. Les outils principaux sont la théorie des processus de Poisson et les statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle.

Dans [P14], je me suis ensuite intéressée au cas où les composants ont des taux de panne quelconques (composants présentant des phénomènes de vieillissement). Dans ce cas, on peut observer numériquement que la stratégie optimale à horizon fini évolue de façon non régulière en fonction des paramètres des composants. D'un point de vue théorique, les fonctions de coût faisant intervenir des fonctions de renouvellement non connues explicitement et des statistiques d'ordre associées à des variables aléatoires pas nécessairement identiquement distribuées, il semble illusoire d'espérer obtenir des conditions précises permettant de spécifier la stratégie optimale de remplacement à horizon fini dans ce cadre. On obtient en revanche des conditions précises portant sur les lois des durées de vie des composants et sur leurs autres paramètres, permettant de spécifier la stratégie optimale sur un horizon infini. On montre ainsi que, contrairement au cas de taux constants, et sans doute aussi, contrairement à l'intuition, n'importe quelle stratégie peut ici être optimale sur un horizon infini. Des optimisations menées numériquement montrent par ailleurs qu'il en est de même pour un horizon fini, même proche. On observe aussi numériquement que les résultats théoriques à horizon infini semblent être un bon indicateur de la stratégie à suivre sur un horizon fini.

Chapitre 4. Encadrement de quantités fiabilistes

Dans ce chapitre, nous abordons la partie "évaluation numérique d'indicateurs" de ce mémoire. Contrairement au chapitre suivant qui propose des méthodes du domaine de l'analyse numérique, celles utilisées dans ce chapitre restent du domaine des probabilités.

Nous nous intéressons ici à diverses quantités fiabilistes, dont l'évaluation numérique est traditionnellement faite, au moins dans un contexte industriel, à l'aide d'approximations. En pratique, la précision de ces approximations n'est pas toujours contrôlée, soit parce qu'elle est inconnue d'un point de vue théorique, soit parce que son évaluation est trop coûteuse en temps de calcul et/ou de développement logiciel. Nous proposons ici des encadrements de ces quantités fiabilistes par des bornes simples et aisément calculables, et dont la précision peut être ajustée en fonction d'un pas de temps $h > 0$. Dans chaque cas, la convergence des bornes vers les quantités visées lorsque h tend vers 0 est démontrée. Des algorithmes de calculs des bornes sont fournis.

Le principe de base de ces encadrements est très simple et consiste à encadrer une variable aléatoire (v.a.r.) de loi quelconque par deux v.a.r. discrètes approximantes à valeurs dans $h\mathbb{Z}$. Si le principe d'approximation d'une v.a.r. quelconque par une v.a.r. discrète n'est certes pas nouveau, il n'en demeure pas moins que l'encadrement que nous utilisons ici n'a apparemment été que peu exploré dans la littérature. Comme nous allons le voir plus loin, il permet cependant d'encadrer de très nombreuses quantités fiabilistes, et ce, pour des modélisations très diverses.

Dans [P9], nous commençons par remarquer que, partant de l'encadrement d'une v.a.r. quelconque par deux v.a.r. à valeurs dans $h\mathbb{Z}$, il est immédiat d'en déduire des encadrements de sommes de v.a.r. indépendantes quelconques à l'aide de sommes de v.a.r. discrètes, toutes à valeurs dans le même espace $h\mathbb{Z}$. On en déduit des encadrements pour diverses quantités fiabilistes liées à des sommes de v.a.r. indépendantes, comme la fiabilité d'un système formé de composants en redondance passive, des fonctions de renouvellement ou des fonctions de survie associée à des sommes géométriques de v.a.r.. Les bornes obtenues sont du même type mais ne font plus intervenir que des v.a.r. à valeurs dans $h\mathbb{N}$. Leur calcul est aisé et facilement implémentable. Notons que les quantités d'intérêt ici, et en particulier les fonctions de renouvellement, ont fait l'objet de très nombreuses publications consacrées à leur évaluation numérique. On peut ainsi se référer à (Dohi *et al.*, 2002), qui comprend un grand nombre de références, les unes spécifiques, consacrées à un type de loi donnée, les autres générales. Un travail de comparaison avec ces dernières a été fait, qui montre l'intérêt de la méthode proposée ici, pour laquelle la précision des résultats est connue directement alors que celle des autres méthodes, même lorsqu'elle est accessible, semble souvent plus difficile à évaluer.

Partant d'un processus semi-markovien (SMP) à temps continu, le même principe d'encadrement est utilisé dans [P11] pour construire deux SMP à temps discret qui encadrent le SMP initial. Les états visités par ces deux SMP discrets sont les mêmes que pour le SMP initial. Les intervalles inter-arrivées des deux SMP discrets encadrent les intervalles inter-arrivées du SMP initial. (L'un reste un peu plus longtemps dans chaque état visité ; l'autre un peu moins longtemps). Comme précédemment, les lois des v.a.r. encadrantes, ici les intervalles inter-arrivées des deux SMP discrets, ont pour support $h\mathbb{N}$. Une fois ces deux SMP discrets encadrants construits, nous montrons que la solution d'une équation de renouvellement markovien (ERM) associée au SMP initial peut être encadrée à l'aide de solutions d'ERM associées aux deux SMP discrets. Ces ERM discrètes sont faciles à résoudre et fournissent des bornes simples pour les solutions des ERM continues. L'intérêt applicatif de ce travail est que la plupart des quantités fiabilistes à temps fini liées à un système semi-markovien sont solutions d'ERM continues que l'on ne sait pas résoudre explicitement. La méthode proposée ici fournit des approximations de ces quantités avec une précision connue et ajustable (à l'aide de h), ce qui ne semble pas toujours être le cas des autres méthodes, cf (Csenki, 2002) et ses références par exemple.

Nous terminons ce chapitre en nous consacrant à des systèmes markoviens ([P12]). L'intérêt de cette modélisation, très utilisée par les industriels, est que la plupart des indicateurs sont, dans ce cadre, connus de façon explicite. En ce qui concerne les indicateurs à temps fini, leur formulation fait cependant intervenir des exponentielles de matrice, difficiles à évaluer pour de gros systèmes. Ceci a donné lieu à de très nombreuses publications consacrées à leur évaluation numérique, cf (Moler et Van Loan, 1978, 2003) et leurs références par exemple. Nous particularisons ici les résultats obtenus précédemment dans un cadre semi-markovien au cadre markovien. Les bornes obtenues se simplifient considérablement. Pour les probabilités de transition, ces bornes fournissent des approximations que l'on peut facilement interpréter en termes du processus de Markov sous-jacent. Ces approximations s'avèrent être proches de méthodes classiques (méthode d'Euler explicite et uniformisation externe) ainsi que de (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004a). Nous avons alors comparé les résultats obtenus par ces différentes méthodes, et ce généralement à l'avantage de la méthode proposée ici, aussi bien pour la qualité des résultats que pour les temps de calculs observés.

Chapitre 5. Méthodes de volumes finis en fiabilité dynamique

Dans ce chapitre, nous continuons à nous intéresser à l'évaluation numérique d'indicateurs fiabilistes mais dans un domaine différent, celui de la fiabilité dynamique. Les travaux présentés ici sont tous en collaboration avec Robert Eymard (UPEMLV), avec en plus Christiane Cocozza-Thivent (UPEMLV) pour [P7] et [P8], Michel Roussignol pour [P7], et Alain Prignet (UPEMLV) pour [P13].

La fiabilité dynamique, introduite par (Devooght, 1997), est l'étude de ce que l'on appelle des systèmes hybrides, c'est-à-dire des systèmes dont l'évolution est gouvernée par deux types de dynamiques : l'une est discrète, liée à l'arrivée d'événements isolés, comme la panne d'un composant ou l'ouverture d'une vanne ; l'autre est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, liée à l'évolution de variables continues, du type température, pression, durée passée dans un état... Ces deux dynamiques sont en mutuelle interaction, ce qui en complexifie notablement l'étude. On modélise leur évolution à l'aide de processus markoviens déterministes par morceaux (PDMP), introduits et étudiés par (Davis, 1984, 1993). Un PDMP est un processus $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans un espace d'état $E \times \mathbb{R}^d$ (E est fini), qui saute à des instants isolés. Entre deux sauts, I_t est fixé et X_t suit une trajectoire déterministe qui dépend de I_t. Le taux de transition de I_{t^-} à I_t est une fonction $a\left(I_{t^-}, I_t, X_{t^-}\right)$. Lors d'un saut de I_t à l'instant t, la variable "continue" X_t peut aussi sauter et est distribuée selon une loi $\mu_{\left(I_{t^-}, I_t, X_{t^-}\right)}(\mathrm{d}y)$. La modélisation de Davis comprend en plus des sauts éventuels du processus lorsqu'il atteint la frontière de l'espace où il est défini, ce que nous n'envisageons pas ici.

Pour un système hybride modélisé par un PDMP, les indicateurs fiabilistes ne sont généralement pas atteignables analytiquement et sont la plupart du temps évalués par simulation de Monte-Carlo, ce qui induit fréquemment de longs temps de calculs. Nous proposons ici des méthodes alternatives issues de l'analyse numérique, de type volumes finis. Ce type de méthode n'a, à notre connaissance, pas été utilisée auparavant en fiabilité. Les indicateurs fiabilistes (à temps fini) s'exprimant à l'aide des lois marginales du PDMP (les lois à t fixé), nous nous attachons plus spécifiquement à leur évaluation. Pour ce faire, nous commençons par les caractériser comme unique solution d'un système d'équations intégro-différentielles [P7]. Puis, partant de ces équations, nous proposons deux schémas de type volumes finis dont nous démontrons la convergence, l'un explicite [P8], l'autre implicite [P13].

Un PDMP étant un processus markovien, nous pouvons écrire les équations de Chapman-Kolmogorov associées (aussi appelées équations de Dynkin). Ces équations stipulent que la loi marginale $\rho_t = (\rho_t(i, \mathrm{d}x))_{i\in E}$ du processus à l'instant t, vérifie

$$\rho_t h = \rho_{\mathrm{ini}} h + \int_0^t \rho_s H_0 h \ \mathrm{d}s \tag{1.1}$$

pour tout $t \geq 0$ et $h : E \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, où H_0 est le générateur étendu du processus et ρ_{ini} la loi initiale du PDMP. Ces équations sont données dans (Davis, 1993), ainsi que le générateur H_0. Le but de [P7] est de montrer que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est l'unique famille de probabilités solution de ces équations. Pour cela, nous étendons classiquement (1.1) à des fonctions dépendant du temps et montrons que

$$0 = (\rho_{\mathrm{ini}}\varphi)(\cdot,\cdot,0) + \int_{\mathbb{R}^+} \rho_s H\varphi(\cdot,\cdot,s) \ \mathrm{d}s \tag{1.2}$$

pour toute $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ régulière à support compact, où

$$H\varphi(\cdot,\cdot,s) = H_0(\varphi(\cdot,\cdot,s)) + \frac{\partial}{\partial s}\varphi(\cdot,\cdot,s). \tag{1.3}$$

Il s'agit alors de montrer que $\rho_s(i, \mathrm{d}x) \times \mathrm{d}s$ est l'unique mesure de Radon vérifiant ces nouvelles équations, ce qui permet de conclure sur le problème initial grâce à un argument de continuité. Pour cela, si $\tilde{m}(i, \mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$ désigne la différence de deux solutions de (1.2), on remarque que $\tilde{m}\psi = 0$ pour toute fonction ψ de la forme $\psi(\cdot,\cdot,s) = H\varphi(\cdot,\cdot,s)$. En utilisant des transformées des fonctions φ le long des trajectoires du processus et un théorème de Cauchy-Lipschitz fonctionnel, on montre ensuite que cette propriété est vraie pour suffisamment de fonctions ψ pour pouvoir en déduire que $\tilde{m}$ est nulle et ainsi conclure sur notre problème d'unicité.

Dans le cas où ρ_{ini} et $\mu_{(i,j,x)}(\mathrm{d}y)$ sont des mesures à densité, la loi marginale du PDMP ρ_t est aussi une mesure à densité, $\rho_t(i, \mathrm{d}x) = u(i, x, t)\ \mathrm{d}x$. Les équations de Chapman-Kolmogorov peuvent alors s'écrire sous la forme suivante (au moins formellement) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(i,x,t) + \mathrm{div}(u(i,x,t)\mathbf{v}(i,x)) \\ &= \sum_{j\in E} \int_{\mathbb{R}^d} a(j,i,y)\,(u(j,y,t) - u(i,x,t))\ m_{j,i,y}(x)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{1.4}$$

avec $u(i,x,0) = u_{\text{ini}}(i,x)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $i \in E$, où $u(i,x,t)$ est la fonction inconnue et où $u_{\text{ini}} : E \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, $\mathbf{v} : E \times \mathbb{R}^d \to E \times \mathbb{R}^d$, $m_{j,i,y} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ et $a : E^2 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ sont des données liées au PDMP.

Dans le vocabulaire de l'analyse numérique, ces équations apparaissent comme des équations différentielles partielles de type hyperbolique linéaire, couplées par leur second membre. Dans [P8], nous proposons un schéma de type volumes finis explicite décentré amont pour ces équations (dans le cadre général où les mesures n'admettent pas nécessairement de densité).

Contrairement au cadre usuel d'étude de ce type d'équations, où les fonctions sont généralement intégrables (L_1) et bornées (L_∞), les solutions sont ici des densités de probabilités, c'est-à-dire des fonctions certes intégrables mais pas nécessairement bornées. Ce cadre inhabituel nous amène à l'emploi de techniques nouvelles pour ce type d'étude. A titre d'exemple, certains passages à la limite nécessitent qu'une famille de solutions approchées soit relativement compacte, ce qui nous conduit, dans notre cadre, à devoir démontrer que la famille de probabilités approchées fournie par le schéma est tendue. Pour cela, nous construisons une suite de rayons à deux indices, qui permet de contrôler la propagation de la masse de probabilités liée aux sauts du processus ainsi que celle liée à son évolution déterministe entre les sauts. Ceci s'avère assez technique. De la même façon, les démonstrations usuelles reposent sur des inégalités de type BV (Bounded Variation) faibles, qu'il semble impossible d'obtenir ici dans un cadre général. Ceci nous amène à un résultat de convergence sous une condition du type "pas d'espace"/"pas de temps" qui tend vers zéro (ainsi que le pas de temps), alors que les conditions usuelles, appelées conditions CFL (Courant–Friedrichs–Lewy), sont du type inverse, à savoir "pas de temps"/"pas d'espace" borné. Ceci constitue une différence essentielle entre le cadre probabiliste de ce travail et le cadre usuel.

Ce schéma a été testé sur différents systèmes de petite taille, qui montrent sa bonne performance. Cependant, sur quelques exemples pour lesquels des quantités asymptotiques sont atteignables analytiquement, on a pu observer de petites disparités lorsque l'on se rapproche du régime stationnaire. Ceci nous a amené à développer un nouveau schéma de volumes finis dans [P13], cette fois-ci de type implicite. Après avoir écrit un premier schéma implicite de type décentré amont classique, nous nous sommes aperçus, en étudiant la convergence de ce schéma, que nous avions besoin pour conclure, de résultats du type

$$\forall R, T > 0,\ \forall i \in E,\ \lim_{h_{\mathcal{M}} \to 0} h_{\mathcal{M}} \times \int_0^T |P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i,\cdot)|_{BV(B(0,R))} \mathrm{d}t = 0, \quad (1.5)$$

où $h_{\mathcal{M}}$ et δt sont respectivement les pas d'espace et de temps, $P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i,x)\,\mathrm{d}x$ représente l'approximation de $\rho_t\,(i,\mathrm{d}x)$ fournie par le schéma, et $|\cdot|_{BV(B(0,R))}$

est la semi-norme BV sur la boule fermée $B(0,R) \subset \mathbb{R}^d$. Malheureusement, comme pour le schéma explicite, les papiers antérieurs montrant ce type de résultats, ne s'appliquent pas au cadre L_1 de notre étude. Nous avons alors développé une nouvelle inégalité de type BV-faible, de la forme :

$$\int_0^T |P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i,\cdot)|_{BV(B(0,R))} \mathrm{d}t \leq \frac{C}{h_{\mathcal{M}}^{1/q}}, \tag{1.6}$$

pour un $1 < q < 2$, à partir de laquelle (1.5) se déduit aisément. Pour montrer cette inégalité, nous utilisons des techniques inspirées de papiers de Boccardo, Droniou, Gallouet, Herbin et Vazquez (références précises dans le chapitre 5), qui ne fonctionnent cependant pas pour un schéma de type décentré amont classique, nécessitant un terme de viscosité. Ceci nous a amené à considérer un schéma intermédiaire entre un schéma décentré amont et un schéma de Lax-Friedrichs modifié, qui comprend quant à lui un terme de viscosité. Grâce à l'inégalité BV-faible, le résultat de convergence obtenu ici est valide dès que les pas de temps et d'espace tendent vers 0, sans aucune condition de type CFL ou CFL inverse. Par ailleurs, cette inégalité BV-faible est indépendante du schéma et peut être utilisée telle quelle dans d'autres contextes. La démonstration de l'inégalité BV-faible est le point le plus technique de ce travail, ainsi que de montrer que l'on peut appliquer cette inégalité à la solution du schéma. Un autre point technique est, dans une moindre mesure, la tension de la famille de lois approchées, que l'on montre ici en construisant explicitement une fonction de Liapounov $\mathcal{V}$ telle que

$$\sup_{0\leq s\leq t, 0<h_{\mathcal{M}}, \delta t\leq C_1, 0<\varepsilon\leq C_2} P_s^{\mathcal{M},\delta t}\mathcal{V} < +\infty,$$

(où $\varepsilon > 0$ est une constante qui intervient dans le terme de viscosité), ce qui permet de conclure, selon une démarche classique en probabilités.

Chapitre 6. Autres travaux en fiabilité dynamique

Dans ce chapitre, nous présentons divers autres travaux dans le domaine de la fiabilité dynamique. Les deux premiers, [P10] et [S1] (travail soumis), sont en collaboration avec Robert Eymard, avec en plus Michel Roussignol pour [S1]. Le dernier concerne la thèse de Margot Desgrouas, que nous avons co-encadrée avec Christiane Cocozza-Thivent (50%) et qui a été soutenue le 30 janvier 2007.

L'objectif de [P10] est de montrer à un public de type ingénieur, d'une part comment modéliser un exemple concret à l'aide d'un processus de Markov déterministe par morceaux, d'autre part comment évaluer numériquement les quantités d'intérêt associées. Pour ce faire, nous nous intéressons à un cas-test, proposé en 2003 par la société française Air Liquide à un comité technique de l'ESRA (European Safety and Reliability Association). Il s'agit d'un système de production de gaz, pour lequel il faut calculer différents critères : les disponibilités asymptotiques du système et de la production, ainsi que les fréquences annuelles asymptotiques de perte totale de production et de perte de production nominale. Le système étudié est de dimension réduite, mais évolue en fonction d'un contexte environnemental typique de la fiabilité dynamique. Nous modélisons ce système à l'aide d'un PDMP puis nous calculons les critères d'intérêt, d'une part par méthode de volumes finis implicite, d'autre part par simulation de Monte-Carlo. Les critères d'intérêt étant ici asymptotiques, nous calculons les critères instantanés correspondants jusqu'à ce qu'ils soient stabilisés, du moins pour la méthode de volumes finis. Pour la simulation de Monte-Carlo, nous préférons utiliser le caractère régénératif du PDMP sous-jacent et calculer les quantités d'intérêt sur un cycle. Les résultats numériques obtenus par les deux méthodes sont cohérents, les temps de calculs étant en revanche nettement à l'avantage de la méthode de volumes finis.

Le travail suivant, [S1], est consacré à des études de sensibilité en fiabilité dynamique : les caractéristiques du PDMP sous-jacent sont supposées dépendre d'une famille de paramètres et le problème est de comparer l'influence qu'ont ces différents paramètres sur divers critères fiabilistes, à horizon fini et infini. Les critères d'intérêt sont de la forme $R\,(t)$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{R(t)}{t}$, avec

$$R(t) = \int_0^t \rho_s h \,\mathrm{d}s,$$

où h est une fonction régulière bornée. L'influence d'un paramètre p est étudiée au travers de la dérivée du critère par rapport à p. Pour un critère à horizon fini, l'existence de cette dérivée provient de celle de $\frac{\partial}{\partial p}\,(\rho_s h)$, que l'on montre à l'aide d'un théorème général donnant des propriétés de régularité de solutions d'équations différentielles et des équations de Chapman-Kolmogorov, vérifiées par $\rho_s h$. En pratique, la dérivée $\frac{\partial}{\partial p}\,(\rho_s h)$ implique généralement h, mais aussi les $\frac{\partial h}{\partial x_k}$ pour $1 \leq k \leq d$ (et éventuellement $\frac{\partial h}{\partial p}$), et l'on ne sait pas l'évaluer directement. On utilise alors une forme de dualité et on introduit une fonction φ_t, que l'on appelle fonction d'importance associée à (h, t), et qui est telle que

$$H\varphi_t(i, x, s) = h\,(i, x)$$

pour tout $(i, x, s) \in E \times \mathbb{R}^d \times [0, t[$, avec $\varphi_t(i, x, t) = 0$ pour tout $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$, où H est défini par (1.3). On montre que, pour h indépendante de p, on a :

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\int_0^t \rho_s h \,\mathrm{d}s\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\int_0^t \rho_s H\varphi_t(\cdot,\cdot,s)\,\mathrm{d}s\right) = -\int_0^t \rho_s \frac{\partial H}{\partial p}\varphi_t(\cdot,\cdot,s)\,ds$$

où $\frac{\partial H}{\partial p}$ représente l'opérateur dérivé de H. On en déduit aisément $\frac{\partial}{\partial p}\,(R(t))$ pour h éventuellement dépendante de p. La formulation obtenue est une extension aux PDMP des résultats obtenus par (Gandini, 1990) pour les processus de Markov de sauts à espace d'état fini. Les résultats pour les critères à horizon infini sont obtenus de façon similaire, en introduisant une fonction potentiel Uh, solution de $H_0 Uh\,(i,x) = \pi h - h(i,x)$ pour tout $(i,x) \in E \times \mathbb{R}^d$, où π est la loi stationnaire du PDMP (que l'on suppose exister et être unique). Les résultats obtenus dans ce cas sont une extension de ceux de (Cao et Chen, 1997). L'intérêt de ce travail est de réduire le calcul des dérivées des critères par rapport à p à celui des fonctions d'importance et potentiels, en plus de l'évaluation initiale des lois marginales, nécessaires au calcul du critère étudié. Lorsque les paramètres p sont nombreux, les fonctions d'importance et potentiels étant indépendantes du paramètre par rapport auquel on dérive, cette méthode apparaît comme plus économique que la méthode usuelle de différences finies.

Enfin, nous terminons ce chapitre en présentant rapidement les travaux effectués par Margot Desgrouas lors de sa thèse, consacrée au comportement asymptotique des PDMP, cf (Desgrouas, 2007). Dans un premier temps, Margot Desgrouas s'est intéressée à l'étude des lois stationnaires pour un PDMP (existence, unicité), ainsi qu'à la convergence de ce PDMP. Elle a en particulier étudié le caractère régénératif d'un PDMP et essayé de donner des conditions suffisantes pour qu'un PDMP soit Harris récurrent positif. Lorsque l'espace des variables continues est de dimension 1, les conditions obtenues semblent plutôt satisfaisantes. En dimension supérieure, ces conditions pourraient sans doute être quelque peu affinées. Dans un deuxième temps, Margot Desgrouas s'est intéressée à l'évaluation numérique de critères asymptotiques pour un PDMP, qui s'expriment à l'aide de sa loi stationnaire (sous des conditions qui assurent son existence et son unicité). Partant de la caractérisation de cette loi stationnaire à l'aide du générateur du PDMP, Robert Eymard lui a proposé un algorithme de type volumes finis, permettant d'approximer cette loi stationnaire. Margot Desgrouas a démontré la convergence de cet algorithme lorsque l'espace des variables continues est de dimension 1 et borné. Elle a aussi appliqué ses résultats (existence et unicité d'une loi stationnaire, convergence vers cette loi, calcul numérique) à de petits exemples issus de la fiabilité classique, que l'on ne savait pas traiter auparavant, sinon par simulation de Monte-Carlo.

Chapitre 7. Conclusion, Travaux en cours, Projets

Diverses perspectives sont données tout-au-long de ce mémoire, qui sont autant de pistes pour poursuivre les travaux effectués. Dans ce dernier chapitre, nous complétons ces perspectives par un aperçu de quelques travaux en cours et autres projets, les uns et les autres à des stades divers d'avancement.

1.2 English version

Context

The objective of this document is to present the main part of my research work, which proposes some contributions in the field of mathematics for reliability. Let us first recall that since the founding works of (Barlow et Proschan, 1965, 1975), this field is concerned with the study of the functioning of a so-called system, where a system can stand for any machine or device liable to be operational or out of order at some given time. Such a study may be done through two different approaches, which may be respectively qualified as static and dynamic: the first one is concerned with the properties of a system at some fixed time t, such as the study of structure functions, Bayesian networks, fault trees... On the contrary, the other one considers its evolution with time. This document is devoted to this last aspect, and more specifically, to the study of systems randomly evolving in time, with evolution modelled by a stochastic process. This kind of study may be performed through two different points of view: one is statistical, which aims at finding the best stochastic model fitting with data (and eventually with experts advice), and the other one is probability, which starts from a known stochastic model and aims at analyzing the random evolution of a system and at anticipating its future. As for us, we leave aside any statistical aspects to concentrate on a probability approach.

From an industrial point of view, random failures of a system may have different consequences, with economical impact, because of repair and unavailability costs, and/or safety impact, because of components critical to environment or health. This induces constraints, which impose to an industrialist to control the good functioning of his operating system. Such constraints are given in terms of indicators, which provide measures for the performances of a system, its quality, its reliability, its functioning cost... A first problem for an industrialist then is to compute such indicators, for which a full analytical form is not always available or which may be difficult to assess numerically. A second problem also is to find solutions for improving such indicators, in order to increase safety or profit. Most of the scope of this document lies in line with those two problems: first chapters (Chapters 2 & 3) are devoted to the study of maintenance policies, which may help improving indicators by preventing some failures; next chapters (Chapters 4, 5 & 6) are mainly concerned with the numerical assessment of indicators for different stochastic models; some part of Chapter 6 also presents some sensitivity analysis, which may help ranking the parameters of a system according to their respective importance or influence on some fixed indicator. The last chapter (Chapter 7) provides information about working papers and projects, among which some are of a different spirit.

Chapter 2. Optimization of maintenance policies

This chapter quickly presents my PhD-thesis (1997-2000), as well as some paper written later on, in collaboration with my PhD-thesis director, Michel Roussignol (UPEMLV), in continuation with my PhD work. My PhD-thesis aims at proposing, studying and optimizing different maintenance policies, both preventive and corrective, for Markov or semi-Markov deteriorating systems with finitely many possible states. Repair durations are generally distributed and fullness degrees of corrective or preventive maintenance may be adjusted. Optimization criteria are asymptotic availability and mean cost per unit time. Whether they are submitted to preventive maintenance or not, all systems evolve according to semi-regenerative processes, and optimization criteria are computed via the Markov renewal theory. Three different studies have been lead on within this framework:

In a first time, we have been interested in optimizing the corrective maintenance degree for a Markov deteriorating system, with respect to its asymptotic availability. This has lead us to put some aging assumption on the system, which has been translated through some monotony of the underlying Markov process with respect to the reversed hazard rate ordering, which is not that usual in reliability for the moment. In case that the repair degree is measured with respect to the same order, the asymptotic availability has been shown in [P2] to be all the better as the repairs are full. Contrary to what might surely have been expected, the usual stochastic order is however insufficient to derive such results. Examples of repair-degree optimization with respect to the asymptotic availability are provided in [P3].

In a second time, we have proposed a preventive maintenance policy for the same system, with markovian deterioration. The state of the system is observed through instantaneous and perfect inspections. The maintenance policy is of the dynamic kind, in the sense that it is linked to the system evolution: by an inspection, if the system is found in an acceptable state, one simply chooses the (random) time for the next inspection; if the system is found too degraded, it is stopped to be preventively maintained. Given such a maintenance policy, we have proved in [P4] that, under technical conditions, the optimal inspection schedule was deterministic. We have also studied the improvements of the studied criteria due to the preventive maintenance policy and found the optimal inspection schemes. This has allowed us to check that, as expected, the sequential inspections schemes proposed here, are more efficient than the periodic ones, which are however frequently used.

In a third and final time, we have studied in [P1] a so-called age maintenance policy (Barlow et Proschan, 1965) for a semi-Markov system. Here again, we have showed that under technical conditions, the optimal policy matches with a deterministic waiting time for the maintenance action. We have also given different conditions for the maintenance policy to improve the asymptotic availability, according to the behavior of the failure rate after some new start (increasing, decreasing, decreasing and next increasing...).

The next study performed later on with Michel Roussignol in [P5], is concerned with a Markov deteriorating system, submitted to the same dynamic preventive maintenance policy as in the PhD thesis. Criteria of interest are the reliability and the asymptotic failure rate, which are linked to the time to first failure of the system and hence are of a very different kind from those studied in the thesis. Note that, though presenting a clear interest for applications, the asymptotic failure rate has not been much studied yet in the reliability literature, which is likely due to generally higher difficulties for its assessment than for other criteria. We here begin with establishing Markov renewal equations, which are fulfilled by the reliability of the maintained system. Such equations are defective, in the sense that the mass of the underlying kernel is strictly below one. Using some normalization procedure, we boil down to true Markov renewal equations, from where we deduce some asymptotic form for the reliability of the shape $R(t) \sim C \times e^{-\beta_0 t}$ when t goes to infinity, where β_0 may be numerically estimated. We next show that β_0 is the asymptotic failure rate. Finally, conditions are provided in terms of the maintenance policy so that it improves both reliability and asymptotic failure rate.

Chapter 3. Preventive replacement of obsolescent components

This chapter is also devoted to preventive maintenance, but in a different context. A first part of the study has been achieved in collaboration with Pierre-Etienne Labeau (Université Libre de Bruxelles), and the second part, alone. The context is the following: identical and independent components are considered, which are instantaneously replaced in case of failure. Contrary to the usual framework for this kind of study, where the spare components are generally assumed to be exact copies of the ones they replace all along the period of interest, we here take into consideration some technological innovation, from where new components become available, which are more reliable and cost-effective than the older ones. All components set up after the arrival of the innovation are assumed to be issued from the newer technology. The problem then is to decide which replacement strategy is the best, in order to replace the older by the newer components: is it better to replace all older components by the newer ones as soon as those are available (purely preventive strategy) or is it better to introduce the newer one by one, only at failure of an older one (purely corrective strategy)? Could mixed strategies, associating both preventive and corrective replacements, be still better? Optimization is lead on with respect of a cost function on a finite time horizon, which includes economical dependence between replacements.

When all components have constant failure rates, we have proved with Pierre-Etienne Labeau [P6] that the only possible optimal strategies were either purely corrective, purely preventive or nearly purely preventive (preventive replacement of all older components at first failure among them). Precise conditions are given, in terms of the parameters of both types of components and of the mission time, which provide the optimal strategy. Main tools are Poisson processes and order statistics of independent and identically exponentially distributed random variables.

In [P14], I have been interested in the case of components with general failure rates (aging components). In this case, one may numerically observe that the optimal strategy on a finite time horizon does not evolve regularly with respect of the components parameters. From a theoretical point of view, as the cost functions involve renewal functions with no known explicit forms and order statistics of non necessarily identically distributed random variables, it seems that there is no hope for finding precise conditions characterizing the optimal strategy on a finite time horizon in that case. We however get precise conditions linked to the distributions of the components life times and to their other parameters, which provides the optimal strategy on an infinite horizon. We thus show that, contrary to the case of constant failure rates and most probably contrary to intuition too, any replacement strategy may here be optimal on an infinite horizon. Numerical optimizations actually show that this result is still true for a finite time horizon (even short). We also observe numerically that asymptotic theoretical results seem to be a good indicator about the strategy to choose in the finite case.

Chapter 4. Bounds for indicators in the reliability field

In this chapter, we now come to the part of this document devoted to numerical assessment of indicators. Oppositely to next chapter, which is concerned with methods from numerical analysis, the tools used here still come from the probability field.

The objects of interest are different quantities in reliability, which generally require approximations for their numerical evaluation, at least in an industrial context. For practical purposes, the precision of such approximations is not always checked, because it is theoretically unknown, or because of too costly an evaluation, in terms of computation time and/or software development. We here propose simple bounds for those quantities, which are easy to compute and adjustable, according to some time step $h > 0$. In each case, the convergence of the bounds towards the goal quantity is proved when h goes to zero. Algorithms for the computations of the bounds are provided.

The founding principle for these bounds is very simple and consists in bounding any random variable (r.v.) with general distribution by two discrete approximating r.v. with range in $h\mathbb{Z}$. If this approximating principle of a general r.v. by a discrete r.v. clearly is not new, the fact remains that the bounds used here do not seem to have been much explored in the literature. As we shall see further, they however allow to bound lots of different quantities in reliability, under very various models assumptions.

In [P9], we first note that, starting from the discrete random bounds with range in $h\mathbb{Z}$ for any general r.v., it is straightforward to derive bounds for sums of independent r.v. with general distributions, which are sums of discrete r.v., all with range in the same $h\mathbb{Z}$. We derive bounds for different quantities in reliability which are linked to sums of independent r.v., such as the reliability of a system formed of components in cold standby, renewal functions, or survival functions associated to geometric sums of r.v.. Such bounds are of a similar form but only involve r.v. with range in $h\mathbb{N}$. Their computation is simple and easy to implement. Note that the quantities of interest here have been the object of numerous publications dealing with their numerical assessment, and especially renewal functions. One can thus look at (Dohi *et al.*, 2002) with a great number of references, among which specific ones, devoted to a single family of distribution, and others, dedicated to the general case. Some comparison study has been lead on with the last category, which puts in evidence the interest of the present method, for which the precision of the results is immediately known, whereas other methods generally require additional work for its evaluation (in case it is available).

Starting from a semi-Markov process (SMP) in continuous time, the same bounding principle is used in [P11] to construct two discrete time SMPs which bound the initial SMP. The successive states visited by both discrete time SMPs are the same as those of the initial SMP. The inter-arrival durations of the two discrete SMPs are bounds for the inter-arrival durations of the initial SMP. (One stays a little longer in each state, the other a little shorter). As before, the bounding r.v., namely the inter-arrival durations of the discrete SMPs here, have all distributions with support in $h\mathbb{N}$. Once those two bounding discrete SMPs constructed, we show that the solution of a Markov renewal equation (MRE) associated to the initial SMP may be bounded by solutions of MREs associated to the discrete SMPs. Such discrete MREs are easy to solve and provide simple bounds for solutions of continuous time MREs. The main interest of this work for applications is that most finite time quantities in reliability linked to a semi-markovian system are solutions of continuous time MREs, which cannot be solved explicitly. The present method provides bounds for such quantities with a known and adjustable precision (through the choice of h), which does not seem to be always the case with other methods, see (Csenki, 2002) and references therein for instance.

We now come to the end of this chapter, which is dedicated to Markov systems ([P12]). Such models are very common in industry and their main interest comes from the fact that most indicators are explicitly known in such a context. As far as finite time indicators are concerned, their exact formulation though involves matrix exponentiations, which may be difficult to evaluate in case of large systems. This has lead to numerous publications devoted to their numerical assessment, see (Moler et Van Loan, 1978, 2003) and references therein for instance. The previous results from the semi-markovian context are here specialized to the markovian case. The bounds thus provided may here be highly simplified. As for the transition probabilities, such bounds yield approximations for them, which are easy to interpret in terms of the underlying Markov process. Such approximations turn out to be near from classical methods (Euler's forward approximation and external uniformization), as well as from (Cocozza-Thivent et Eymard, 2004a). We have hence compared the results provided by the present method to these other ones, which was generally to the advantage of the present one, both for the quality of the results and for the computation times.

Chapter 5. Finite volume schemes in dynamic reliability

In this chapter, we go on with studying the numerical assessment of indicators in reliability but in the different context of dynamic reliability. All works are in common with Robert Eymard (UPEMLV), in addition with Christiane Cocozza-Thivent (UPEMLV) for [P7] and [P8], Michel Roussignol for [P7], and Alain Prignet (UPEMLV) for [P13].

Dynamic reliability was introduced by (Devooght, 1997) and is concerned with the study of so-called hybrid systems, in the sense that their evolution is governed by two kinds of dynamics: one is discrete and corresponds to the arrival of isolated events, such as failure of a component or opening of a valve; the other is continuous with range in $\mathbb{R}^d$ and is linked to the evolution of continuous variables such as temperature, pressure, elapsed time in the current state... Both dynamics interact in each other, which makes their study more difficult. Their evolution is modelled with a Piecewise Deterministic Markov Process (PDMP), introduced and studied by (Davis, 1984, 1993). A PDMP is a process $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ with range in some $E \times \mathbb{R}^d$ (where E is a finite state space), which jumps at countably many isolated random times. Between jumps, the discrete component I_t is fixed whereas X_t follows a deterministic trajectory which depends on I_t. The transition rate from I_{t^-} to I_t is a function $a\left(I_{t^-}, I_t, X_{t^-}\right)$. By a jump of I_t at time t, the "continuous" variable X_t may also jumps and the after-jump distribution of X_t is some $\mu_{\left(I_{t^-}, I_t, X_{t^-}\right)}(\mathrm{d}y)$. Davis's model also includes eventual jumps of the process when reaching the boundary of its state space, which are not taken into consideration here.

In case of a hybrid system modelled by a PDMP, reliability indicators generally are unavailable in a closed form so that they are most of the time evaluated through Monte-Carlo simulations, which often induces long computation times. We here propose alternate methods from the numerical analysis field, based on finite volume schemes. To our knowledge, such methods do not seem to have been used before in reliability. As finite time reliability indicators may be expressed in terms of the marginal distribution of the PDMP (the distribution at time t), we here concentrate on its numerical evaluation. With that aim, we first characterize this distribution as the single solution of a set of integro-differential equations [P7]. Next, starting from such equations, two finite volume schemes are proposed and proved to converge, whereof one is explicit [P8], and the other implicit [P13].

Due to the Markov property of a PDMP, we may write the associated Chapman-Kolmogorov equations (also called Dynkin equations). According to such equations, the marginal distribution $\rho_t = \left(\rho_t\left(i, \mathrm{d}x\right)\right)_{i\in E}$ of the process at time t fulfills

$$\rho_t h = \rho_{\text{ini}} h + \int_0^t \rho_s H_0 h \ \mathrm{d}s \tag{1.7}$$

for all $t \geq 0$ and all $h : E \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ regular enough, where H_0 is the extended generator of the process and ρ_{ini} is its initial distribution. Such equations are given in (Davis, 1993), as well as the generator H_0. The purpose of [P7] is to show that $(\rho_t)_{t\geq 0}$ is the unique solution of such equations. With that aim, we classically extend (1.7) to time dependent functions and we show that

$$0 = \left(\rho_{\text{ini}}\varphi\right)(\cdot,\cdot,0) + \int_{\mathbb{R}+} \rho_s H\varphi\left(\cdot,\cdot,s\right)\ \mathrm{d}s \tag{1.8}$$

for all $\varphi : E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ regular with a compact support, where

$$H\varphi\left(\cdot,\cdot,s\right) = H_0\left(\varphi\left(\cdot,\cdot,s\right)\right) + \frac{\partial}{\partial s}\varphi\left(\cdot,\cdot,s\right). \tag{1.9}$$

We next have to prove that $\rho_s\left(i, \mathrm{d}x\right) \times \mathrm{d}s$ is the single Radon measure fulfilling those last equations, which allows to conclude about the initial problem using some continuity argument. For that purpose, we set $\tilde{m}(i, \mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$ to be the difference between two solutions to (1.8) and we notice that $\tilde{m}\psi = 0$ for all function ψ of the shape $\psi\left(\cdot,\cdot,s\right) = H\varphi\left(\cdot,\cdot,s\right)$. Using transforms of φ along the trajectories of the process and a functional version of the Cauchy-Lipschitz's theorem, we next show that $\tilde{m}\psi = 0$ is true for sufficiently many functions ψ to conclude that $\tilde{m}$ is zero. This allows to put an end to our uniqueness problem.

In case where ρ_{ini} and $\mu_{(i,j,x)}\left(\mathrm{d}y\right)$ admit a density with respect to Lebesgue measure, the marginal distribution ρ_t of the PDMP admits one too: $\rho_t(i, \mathrm{d}x) = u(i, x, t)\ \mathrm{d}x$. Chapman-Kolmogorov equations then write (at least formally):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(i,x,t)+\operatorname{div}(u(i,x,t)\mathbf{v}(i,x))\\&=\sum_{j\in E}\int_{\mathbb{R}^d}a(j,i,y)\left(u(j,y,t)-u(i,x,t)\right)m_{j,i,y}\left(x\right)\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{1.10}$$

with $u(i,x,0)=u_{\text{ini}}(i,x)$ for almost all $x\in\mathbb{R}^d$, all $t\in\mathbb{R}_+$ and all $i\in E$, where $u(i,x,t)$ is the unknown function and where $u_{\text{ini}}:E\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$, $\mathbf{v}:E\times\mathbb{R}^d\to E\times\mathbb{R}^d$, $m_{j,i,y}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$ and $a:E^2\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$ are data linked to the PDMP.

In the vocabulary from numerical analysis, such partial differential equations are hyperbolic linear equations, coupled by their right-hand side. A finite volume scheme is proposed in [P8] for such equations, which is an explicit upstream weighting scheme (in the general case of non necessarily absolutely continuous measures).

Contrary to the usual context of study for such equations, where functions generally are integrable (L_1) and bounded (L_∞), solutions here are probability density functions, which certainly are integrable but not necessarily bounded. This unusual framework requires the use of new methods for this kind of study. As an example, some limits taking require a family of approximated solutions to be relatively compact. In our context, we hence have to prove the tightness of the family of approximated probability measures provided by the scheme. For that purpose, we construct a double sequence of radii, which allows to control the propagation of the probability mass due both to the jumps of the process and to its deterministic evolution between jumps. This happens to be technical. In the same way, usual proofs are based on weak BV (Bounded Variation) inequalities, which seem impossible to obtain here in a general framework. This leads us to a convergence result under some inverse CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) condition, which here writes: "space step"/"time step" goes to zero (as well as the time step), whereas usual results are often obtained under direct CFL condition, such as "time step"/"space step" bounded. This clearly differentiate the probability framework of this paper from the usual one.

This scheme has been tested for different small systems, and has proved to be generally quite efficient. However, looking at a few examples for which asymptotic quantities are available in closed form, little discrepancies may be observed when approaching the stationary mode. This has lead us to develop a new finite volume scheme in [P13], now of the implicit type. After having written a first implicit upstream weighted scheme and studied its convergence, we have observed that results like

$$\forall R,T>0,\ \forall i\in E,\ \lim_{h_{\mathcal{M}}\to 0}\ h_{\mathcal{M}}\times\int_0^T|P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i,\cdot)|_{BV(B(0,R))}\mathrm{d}t=0,\tag{1.11}$$

were needed to put an end to the proof, where $h_{\mathcal{M}}$ and δt respectively are the space and time steps, $P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i,x)\ \mathrm{d}x$ stands for the approximation of $\rho_t\,(i,\mathrm{d}x)$ as provided by the scheme, and $|\cdot|_{BV(B(0,R))}$ is the BV semi-norm on the closed ball $B\,(0,R) \subset \mathbb{R}^d$. Unfortunately, just as for the explicit scheme, previous papers showing such results cannot be applied in the L_1 framework of the present study. We consequently had to develop a new weak-BV inequality, which here writes:

$$\int_0^T |P_t^{\mathcal{M},\delta t}(i,\cdot)|_{BV(B(0,R))}\mathrm{d}t \leq \frac{C}{h_{\mathcal{M}}^{1/q}}, \tag{1.12}$$

for some $1 < q < 2$, from where (1.11) is easy to derive. The technics used to prove this inequality take their inspiration in papers by Boccardo, Droniou, Gallouet, Herbin and Vazquez (precise references in Chapter 5), which however do not fit with a classical upstream weighted scheme and require a non vanishing viscosity term. This has lead us to consider an intermediate scheme between an upstream weighted one and a modified Lax-Friedrichs one, which does contain a viscosity term. Due to the weak-BV inequality, the convergence result is here obtained without any CFL or inverse CFL condition. Besides, this inequality is independent of the scheme and may consequently be useful in other contexts. The proof of this inequality is the most technical point of the present work, as well as proving that this inequality may be used for the solution of the scheme. Another technical point is, to a smaller degree, the tightness of the family of approximate probability measures, which is here shown by explicitly constructing a Liapounov function $\mathcal{V}$ such that

$$\sup_{0\leq s\leq t, 0<h_{\mathcal{M}},\delta t\leq C_1, 0<\varepsilon\leq C_2} P_s^{\mathcal{M},\delta t}\mathcal{V} < +\infty,$$

where $\varepsilon > 0$ is some constant number which intervenes in the viscosity term. Classical arguments from probability theory then allow to conclude.

Chapter 6. Other studies in dynamic reliability

This chapter is devoted to other works in dynamic reliability. The first two studies ([P10] and [S1], submitted work) are in common with Robert Eymard, in addition with Michel Roussignol for [S1]. The last part of this chapter deals with the PhD thesis of Margot Desgrouas, which we have supervised in common with Christiane Cocozza-Thivent (50%). The PhD defense took place on 30th January 2007.

The purpose of [P10] is to show to some audience of engineers, first how to model a concrete system with a piecewise deterministic Markov process and secondly, how to numerically assess the quantities of interest for this system. With that aim, a benchmark is considered, which was first proposed by the French company Air Liquide to some technical committee of ESRA (European Safety and Reliability Association): this benchmark deals with a system of gas production, for which assessment of different criteria is required, such as asymptotic availability both of the system and of the production, as well as asymptotic annual frequencies of loss of production, both total loss and loss of nominal production. The studied system is of small size but evolves according to some environmental context typical of dynamic reliability. We model this system with a PDMP and next compute the required criteria both by an implicit finite volume scheme and by Monte-Carlo simulations. Such criteria are asymptotic and we compute their transitory versions until they are stabilized, at least for the finite volume method. As for the Monte-Carlo simulations, we have better use the regenerative character of the underlying PDMP and compute the required quantities on a cycle. The numerical results provided by both methods are coherent, with computing times clearly shorter by the finite volume scheme, however.

Next work, [S1], is devoted to sensitivity analysis in dynamic reliability: the characteristics of the underlying PDMP are assumed to depend on some family of parameters; the problem then is to compare their respective influence on different reliability indicators, both in finite and infinite time. The criteria of interest are of the shape $R\left(t\right)$ and $\lim_{t\to+\infty}\frac{R(t)}{t}$, with

$$R(t)=\int_0^t \rho_s h \,\mathrm{d}s,$$

where h is some bounded and regular function. The influence of some parameter p on some criterion is studied through its derivative with respect of p. For a finite time criterion, existence of such a derivative comes from that of $\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho_s h\right)$, which is shown using some general theorem providing regularity properties for solutions of differential equations, as well as the Chapman-Kolmogorov equations fulfilled by $\rho_s h$. In most cases, the derivative $\frac{\partial}{\partial p}\left(\rho_s h\right)$ is a function of both h and all $\frac{\partial h}{\partial x_k}$'s with $1\le k\le d$ (and eventually $\frac{\partial h}{\partial p}$), which cannot be evaluated directly. We then use some duality property and introduce some new function φ_t, which we call importance function associated to (h,t). This function is such that

$$H\varphi_t(i,x,s)=h\left(i,x\right)$$

for all $(i,x,s)\in E\times\mathbb{R}^d\times[0,t[$, with $\varphi_t(i,x,t)=0$ for all $(i,x)\in E\times\mathbb{R}^d$, where H is defined by (1.9). We next show that:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\int_0^t \rho_s h \,\mathrm{d}s\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\int_0^t \rho_s H\varphi_t(\cdot,\cdot,s)\,\mathrm{d}s\right)=-\int_0^t \rho_s\frac{\partial H}{\partial p}\varphi_t(\cdot,\cdot,s)\,ds$$

for all function h independent on p, where $\frac{\partial H}{\partial p}$ stands for some new operator, derivative operator of H. We easily derive $\frac{\partial}{\partial p}\left(R(t)\right)$ for functions h which may now depend on p. The results are an extension to PDMP's of those provided by (Gandini, 1990) for pure jump Markov processes with finite state space. The study of the infinite time criteria is done in the same way by introducing some potential function Uh, solution to $H_0Uh\,(i,x) = \pi h - h(i,x)$ for all $(i,x) \in E \times \mathbb{R}^d$, where π is the stationary distribution of the PDMP (which is assumed to exist and to be unique). The provided results are an extension of those by (Cao et Chen, 1997). The main interest of this work is to reduce the numerical assessment of the derivatives of the studied criteria with respect of p to the computation of the importance and potential functions, in addition with the evaluation of the marginal distributions, required for the initial numerical assessment of the criteria. As the importance and potential functions are independent on the choice of the parameter with respect of which differentiation is taken, this method appears as more economical than usual finite differences, in case of a great number of parameters p.

Finally, we end this chapter by quickly presenting the research carried out by Margot Desgrouas during her PhD thesis, devoted to the asymptotic behavior of PDMP's, see (Desgrouas, 2007). In a first time, Margot Desgrouas has been interested in studying stationary distributions for PDMP's (existence and uniqueness), as well as in convergence of PDMP's. She studied more particularly regenerative properties of a PDMP and tried to give sufficient conditions for a PDMP to be positive Harris recurrent. In case of a one-dimensional state space for the continuous variable, the conditions that she obtained seem rather satisfactory. Such conditions might however surely be refined in higher dimensions. In a second time, Margot Desgrouas has been interested in the numerical assessment of asymptotic criteria for a PDMP, which may be expressed in terms of its stationary distribution (under conditions ensuring its existence and uniqueness). Starting from the characterization of this stationary distribution in terms of the PDMP generator, Robert Eymard proposed to her a finite volume scheme for its approximation. Margot Desgrouas proved the convergence of this scheme in case where the state space for the continuous variable is bounded and one-dimensional. She also applied her results (existence and uniqueness of a stationary distribution, convergence towards this distribution, numerical computation) to a few small examples coming from classical reliability, which could not be studied before but by Monte-Carlo simulations.

Chapter 7. Conclusion, Current works, Projects

Different prospects are given all along this document, which provide as many tracks to go on with the presented works. Such prospects are completed in this last chapter by some glance at current works and other projects, with respective different degrees of advancement.