Hyperdéterminant

Jean Vallès

5 novembre 2004

1 Introduction

Le but de cette note est de présenter en termes simples la notion d'**hyperdéterminant** d'une matrice multidimensionnelle $A = (a_{i_1,\cdots,i_n})$ (bidimensionnelle désignant les matrices classiques). En particulier, ce qui est vrai pour l'hyperdéterminant (qui désignera parfois le polynôme en les entrées de la matrice parfois la variété algébrique sous-jacente) sera vrai pour le **déterminant** lorsque A sera bidimensionnelle et carrée. Une des fonctions assignées à l'(hyper)déterminant (je ne sais pas si c'était ce que voulait CAYLEY [C] en 1845 lorsqu'il introduisit cette notion) est de caractériser les systèmes (multi)linéaires homogènes possèdant une solution non nulle. Bien sûr, comme dans le cas du déterminant des restrictions sur le format des matrices vont apparaître.

Deux points de vue sont adoptés. Primo, le point de vue des matrices que l'on appellera **dégénérées** qui ressortit plutôt à l'algèbre linéaire. Deuxio, le point de vue de la dualité projective, plutôt géométrique. Chaque point de vue sera illustré d'un exemple. Celui d'une matrice $3 \times 2 \times 2$ et celui d'une matrice $2 \times 2 \times 2$. Dans les deux cas, en utilisant la même astuce, on trouvera un polynôme. Bien que dans la littérature les deux soient appelés hyperdéterminants, ils n'ont pas tout à fait le même sens. Dans le premier cas l'annulation du polynôme aura lieu si et seulement si le système bilinéaire homogène, associé possède une solution non nulle. Dans le second cas, tous les systèmes bilinéaires homogènes admettent une solution non nulle. Ces exemples sont à l'origine semble-t-il d'une généralisation abusive de Cayley ; je serai là-dessus plus disert après avoir donné les exemples.

Je finirai par un énoncé permettant d'obtenir une formule explicite pour l'hyperdéterminant pour les matrices ayant **bon format**.

Enfin je ne peux pas clôre cette introduction sans dire que après 150 années de sommeil, bien plus que certaine princesse, l'hyperdéterminant a été redécouvert par Gelfand, Kapranov et Zelevinski ([GKZ], chap. 1, 13 et 14) qui en ont donné une étude détaillée complète et réjouissante à lire. Cette redécouverte a été suivie de nombreux travaux intéréssants, ceux de Dionisi et Ottaviani [DO] ainsi que Weyman et Zelevinski [WZ] par exemple. Quant à cette note, les résultats qui y sont présentés sont empruntés au livre “ Discriminants, resultants, and multidimensional determinants” ([GKZ]) dont je viens de parler. Seules les démonstrations sont originales (dans la mesure où cela est possible), et j'ai voulu surtout qu'elles soient simples.

2 Les matrices “dégénérées” planes et multidimensionnelles

Soient $n_0 \geq \cdots \geq n_s$ des entiers ordonnés et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_0+1} \otimes \cdots \mathbb{C}^{n_s+1}, \mathbb{C})$ une forme multilinéaire, i.e une matrice multidimensionnelle.

Définition 2.1. *On dit que A est dégénérée s'il existe un tenseur décomposé non nul $a_1 \otimes \cdots \otimes a_s \in \mathbb{C}^{n_1+1} \otimes \cdots \mathbb{C}^{n_s+1}$ tel que $A(- \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_s) = 0$*

Dans l'espace projectif des matrices multidimensionnelles $\mathbb{P}^{\prod(n_i+1)-1}$ vit la sous-variété des matrices dégénérées, notée $\mathfrak{M}_{\deg}$. La variété des matrices non nulles $A = l_1 \otimes \cdots \otimes l_s$, $l_i \in (\mathbb{C}^{n_i+1})^*$, notée $Seg(n_1, \cdots, n_s)$ est l'image par le morphisme de Segre généralisé du produit $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$

Théorème 2.2. $\mathfrak{M}_{\deg} \subset \mathbb{P}^{\prod(n_i+1)-1}$ *est une sous-variété algébrique irréductible. Et,*

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{M}_{\deg}) = n_0 - (n_1 + \cdots + n_s) + 1$$

$$\operatorname{degre}(\mathfrak{M}_{\deg}) = \frac{(n_0+1)!}{n_1! \cdots n_s! \operatorname{codim}(\mathfrak{M}_{\deg})!}$$

Remarque : Lorsque $n_0 = n_1 + \cdots + n_s$ on trouve une hypersurface qui est définie par l'annulation d'un polynôme appelé **déterminant** pour $s = 1$ et **hyperdéterminant** pour $s > 1$. Ce format est appelé (c'est son baptême en francais) **bon format**

Preuve du théorème 2.2 Pour cette preuve nous choisissons de décrire la matrice A comme l'application multilinéaire

$$\mathbb{C}^{n_1+1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_s+1} \xrightarrow{A} (\mathbb{C}^{n_0+1})^*$$

où l'étoile désigne le dual vectoriel.

On remarque immédiatement que si $n_0 < n_1 + \cdots + n_s$ la somme des dimensions des variétés projectives $Seg(n_1, \cdots, n_s)$ et $\mathbb{P}(\ker A)$ est plus grande que la dimension de l'espace ambiant $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n_1+1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_s+1})$. Toutes les matrices sont dégénérées (c'est pourquoi le théorème ne concerne que le cas $n_0 \geq n_1 + \cdots + n_s$). La somme des dimensions est égale à la dimension de l'espace ambiant si et seulement si $n_0 + 1 = n_1 + \cdots + n_s$. Dans ce cas le nombre de points d'intersection (ils sont distincts pour une matrice générale) est égal au degré du Segre $Seg(n_1, \cdots, n_s)$. Toutes les remarques nécéssaires sont, maintenant, énoncées.

Supposons que nous ayons la relation numérique

$$n_0 = n_1 + \cdots + n_s + k$$

Considérons alors une famille projective de dimension $k+1$ de matrices

$$\mathbb{C}^{k+2} \otimes \mathbb{C}^{n_1+1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_s+1} \xrightarrow{A_t} (\mathbb{C}^{n_0+1})^*, \ t \in \mathbb{P}^{k+1}$$

Puisque $n_0 + 1 = n_1 + \cdots + n_s + (k+1)$ nous savons que le nombre de points d'intersection de $Seg(k+1, n_1, \cdots, n_s)$ et de $\mathbb{P}(\ker A_t)$ est égal au degré de la variété de Segre $Seg(k+1, n_1, \cdots, n_s)$, c'est à dire à $\dfrac{(n_0+1)!}{n_1! \cdots n_s!(k+1)!}$.

Nous avons montré irréductibilité, codimension et degré en même temps. En effet, l'irréductibilité provient de l'irréductibilité des variétés de Segre considérées. Pour la codimension et le degré c'est clair. $\square$

2.1 Exemple

On veut résoudre le système bilinéaire suivant où x_0, x_1, y_0, y_1 sont les inconnues :

$$\begin{cases} a_{000}x_0y_0 + a_{010}x_1y_0 + a_{001}x_0y_1 + a_{011}x_1y_1 = 0 \\ a_{100}x_0y_0 + a_{110}x_1y_0 + a_{101}x_0y_1 + a_{111}x_1y_1 = 0 \\ a_{200}x_0y_0 + a_{210}x_1y_0 + a_{201}x_0y_1 + a_{211}x_1y_1 = 0 \end{cases}$$

La multimatrice $3 \times 2 \times 2$ dont il est question ici est la matrice spatiale

$$A = \begin{array}{cccc} & a_{001} & & a_{011} \\ a_{000} & & a_{010} & \\ & a_{101} & & a_{111} \\ a_{100} & & a_{110} & \\ & a_{201} & & a_{211} \\ a_{200} & & a_{210} & \end{array}$$

On se ramène à une matrice 2×2 notée A_z, de la manière suivante

$$\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2,\ z \mapsto A_z = \begin{pmatrix} a_{000}z_0 + a_{100}z_1 + a_{200}z_2 & a_{001}z_0 + a_{101}z_1 + a_{201}z_2 \\ a_{010}z_0 + a_{110}z_1 + a_{210}z_2 & a_{011}z_0 + a_{111}z_1 + a_{211}z_2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est une forme quadratique, on peut alors parler de son discriminant qui exprime si elle est lisse ou bien le produit de deux formes linéaires. La proposition qui suit serait due à Schlafli (je dois encore le vérifier)

Proposition 2.3. $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{discr}(\det(A_z))$

Preuve : En particulier les deux polynômes (discriminant et hyperdéterminant) ont degré 6. Il suffit donc de vérifier que l'un divise l'autre, ou encore en termes géométrique que si A est dégénérée alors $\det(A_z)$ est le produit de deux formes linéaires. En effet, soient $x = (x_0, x_1)$ et $y = (y_0, y_1)$ tels que $A(x \otimes y) = 0$. C'est à dire

$$(x_0, x_1)A_z \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

Quitte à supposer que $x_1 \neq 0$ et $y_1 \neq 0$ on trouve donc que la forme quadratique est le déterminant de la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} A_z \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve la proposition. $\square$

3 Dualité, variétés duales

On considère la forme bilinéaire canonique (associée à la matrice identité)

$$b : \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \to \mathbb{C},\ (x, y) \mapsto {}^t xy$$

On a, via cette forme, une correspondance entre $\mathbb{C}^N$ et son espace vectoriel dual :

$$\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{N*}, x \mapsto \{y \mid {}^t xy = 0\}$$

qui à un espace vectoriel associe son orthogonal. Par correspondance il faut comprendre la donnée d'un diagramme d'incidence

$$\begin{tikzcd} \{(x,y) \mid {}^t xy = 0\} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}^{N*} \\ \mathbb{C}^N & \end{tikzcd}$$

Qui s'étend sans difficulté aux projectifs, en notant $\mathbb{F} = \{(x,y) \in \mathbb{PC}^N \times \mathbb{PC}^{N*} \mid {}^t xy = 0\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{PC}^{N*} \\ \mathbb{PC}^N & \end{tikzcd}$$

Il est d'usage de noter $h \in \mathbb{PC}^{N*}$ le point correspondant à l'hyperplan $H \subset \mathbb{PC}^N$. Soit $X \subset \mathbb{PC}^N$ une variété (algébrique) projective. En un point lisse $x \in X$ l'espace projectif tangent est noté $T_{X,x}$. On note $X^\vee \subset \mathbb{PC}^{N*}$ la variété projective définie par $\overline{\bigcup_{x,\text{lisse}} p^{-1}q(T_{X,x})}$, définie ensemblistement par

$$X^\vee = \overline{\{h \in \mathbb{PC}^{N*} \mid H \supset T_{X,x}, \text{ pour } x \text{ lisse}\}}$$

Exemples

1) Dans $\mathbb{P}^n$ vit la courbe rationnelle normale C_n qui est l'image de $\mathbb{P}^1$ par l'application $(s:t) \mapsto (s^n : s^{n-1}t : \cdots : st^{n-1} : t^n)$. On note Δ_n le discriminant (de degré $2(n-1)$) du polynôme générique de degré n. Par exemple, le discriminant du polynôme $X^3 + xX^2 + yX + z$ est $x^2y^2 - 4zx^3 - 4y^3 + 18xyz - 27z^2$ (de degré 4 en les nouvelles variables mais 6 en les racines !).

Proposition 3.1. $C_n^\vee = \Delta_n$

Preuve : En effet un hyperplan coupe la courbe en n-points comptés avec multiplicité. Ces n-points sont les racines du polynôme donné par l'hyperplan. L'hyperplan contient la droite tangente si les n-points d'intersection sont groupés en 2 et $n-1$. □

2) Soient $1 \leq r \leq n \leq m$ des entiers. Dans l'espace $\mathbb{P}^{nm-1}$ des matrices $n \times m$ on note par X_r la variété des matrices de rang $\leq r$.

Proposition 3.2. $X_r^\vee = X_{n-r}$

Preuve : Les matrices $2 \times n$ de rang 1 sont auto-duales. □

Théorème 3.3. *Si $n_0 \geq n_1 + \cdots + n_s$ la variété des matrices dégénérée est la variété duale du Segre*

$$\mathfrak{M}_{\deg} = Seg(n_0, n_1, \cdots, n_s)^\vee$$

En particulier lorsque $n_0 = n_1 + \cdots + n_s$ (cas du bon format) nous avons

$$\mathrm{Det}(A) = 0 \Leftrightarrow A \in Seg(n_0, n_1, \cdots, n_s)^\vee$$

Remarque : Lorsque nous sommes dans le cas du format intérieur (terminologie de Weyman et Zelevinski [WZ]), c'est à dire $n_0 < n_1 + \cdots + n_s$ la variété duale $Seg(n_0, n_1, \cdots, n_s)^\vee$ est encore une hypersurface. On étend alors la définition de l'hyperdéterminant à ces matrices, même si dans ce cas l'annulation de l'hyperdéterminant ne signifie plus que la matrice est dégénénrée puisqu'elles le sont toutes (voir l'exemple ci-après des matrices $2 \times 2 \times 2$).

Preuve du théorème 3.3 L'espace tangent de $Seg(n_0, n_1, \cdots, n_s)$ au point $a_0 \otimes \cdots \otimes a_s$ est l'espace projectif engendré par la réunion

$$\bigcup_{i=1,\cdots,s} \mathbb{P}^{n_i} \times \{a_0\} \cdots \times \{\hat{a_i}\} \times \cdots \times \{a_s\}$$

En d'autres termes la matrice A correspond à un hyperplan tangent au point $a_0 \otimes \cdots \otimes a_s$ si et seulement si pour tout i variant de 0 à s

$$A(a_0 \otimes \cdots \otimes \hat{a}_i \otimes \cdots \otimes a_s) = 0$$

Il est clair que cette condition de tangence implique que la matrice A est dégénérée. Réciproquement il s'agit de prouver que s'il existe $a_1 \otimes \cdots \otimes a_s$ tel que $A(-\otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_s) = 0$ alors il existe $a_0 \in \mathbb{P}^{n_0}$ tel que l'hyperplan correspondant à la matrice A soit tangent au Segre au point $a_0 \otimes \cdots \otimes a_s$.

Pour cela on considère la famille de formes linéaires

$$f_i : \mathbb{C}^{n_0+1} \longrightarrow (\mathbb{C}^{n_i+1})^*, \ \alpha \mapsto A(\alpha \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \hat{a}_i \otimes \cdots \otimes a_s)$$

Comme elles ont un vecteur commun non nul dans les noyaux, à savoir a_i, elles n'engendrent pas $(\mathbb{C}^{n_0+1})^*$. Par conséquent $\dim(\ker(f_i)) \geq n_0 - n_i + 1$. Ceci étant vérifié pour $i = 1, \cdots, s$ on trouve

$$\dim(\ker(f_1) \cap \cdots \cap \ker(f_s)) \geq n_0 - (n_1 + \cdots + n_s) + 1$$

Ce qui prouve l'existence du vecteur non nul a_0 recherché. $\square$

3.1 Exemple

Comme je le disais dans la remarque suivant l'énoncé du théorème précédent, la variété duale des Segre de format intérieur est une hypersurface. Par exemple $Seg(1,1,1)^\vee$ est une hyperquartique de $\mathbb{P}^7$ En effet La multimatrice $2 \times 2 \times 2$ dont il est question ici est la matrice

$$A = \begin{array}{cccc} & a_{001} & & a_{011} \\ a_{000} & & a_{010} & \\ & a_{101} & & a_{111} \\ a_{100} & & a_{110} & \end{array}$$

On se ramène à une matrice 2×2 notée A_z, de la manière suivante

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2, \ z \mapsto A_z = \begin{pmatrix} a_{000}z_0 + a_{100}z_1 & a_{001}z_0 + a_{101}z_1 \\ a_{010}z_0 + a_{110}z_1 & a_{011}z_0 + a_{111}z_1 \end{pmatrix}$$

On obtient comme pour la matrice précédemment $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{discr}(\det(A_z))$, i.e.

$$\mathrm{Det}(A) = (a_{000}a_{111} + a_{100}a_{011} - a_{001}a_{110} - a_{100}a_{010})^2 - 4(a_{000}a_{011} - a_{001}a_{010})(a_{100}a_{111} + a_{001}a_{110})$$

4 Calcul dans le cas optimal

Dans cette dernière partie nous donnons un énoncé qui permet d'obtenir, étant donnée une matrice de bon format, son hyperdéterminant.

On pose $m_1 = 0, m_2 = n_1, m_3 = n_1 + n_2, \cdots, m_s = n_1 + \cdots + n_{s-1}$

Théorème 4.1. *On a une application multilinéaire δ_A qui se déduit de la donnée de A,*

$$(\mathbb{C}^{n_0+1})^* \otimes S^{m_1}\mathbb{C}^{n_1+1} \otimes \cdots \otimes S^{m_s}\mathbb{C}^{n_s+1} \xrightarrow{\delta_A} S^{m_1+1}\mathbb{C}^{n_1+1} \otimes \cdots \otimes S^{m_s+1}\mathbb{C}^{n_s+1}$$

et qui vérifie $\det(\delta_A) = \mathrm{Det}(A)$

Références

[AO] V. Ancona, G. Ottaviani. *Unstable hyperplanes for Steiner bundles and multidimensional matrices*, Advances in Geometry, 1,No.2, (2001), 165-192.

[C] A. Cayley, *On the theory of linear transformations*, Cambridge Math. J. (1845), no. 4, 193–209,

[D] C. Dionisi, *Stabilizers for nondegenerate matrices of boundary format and Steiner bundles*, Rev.Mat.Complut. 17 (2004) 459-469.

[DK] I. Dolgachev, M. M. Kapranov *Arrangement of hyperplanes and vector bundles on $\mathbb{P}^n$*, Duke Math. J. (1993), no. 71, 633–664.

[DO] C. Dionisi, G. Ottaviani *The Binet-Cauchy theorem for the hyperdeterminant of boundary format multidimensional matrices*, Journal of Algebra 259 (2003), 87-94 *math.AG/0104281*,

[GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1994).

[Sch] Schwarzenberger, R.L.E., *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.

[WZ] J. Weyman, A. Zelevinsky. *Singularities of hyperdeterminants* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 46 : 3, 591–644, 1996.