Hyperdéterminant d'un SL_2-homomorphisme

Vallès, J.

Abstract

Etant donnés $A_1, \cdots, A_s$ ($s \geq 3$) des $SL_2(\mathbb{C})$-modules non triviaux de dimensions respectives $n_1 + 1 \geq \cdots \geq n_s + 1$ (avec $n_1 = n_2 + \cdots + n_s$) et

$$\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1)$$

un $SL_2(\mathbb{C})$-homomorphisme, nous montrons que l'hyperdéterminant de ϕ est nul sauf si les modules A_i sont irréductibles et si l'homomorphisme est la multiplication des polynômes homogènes à deux variables.

1 Introduction

Soient $s \geq 3$ un nombre entier, $A_1, \cdots, A_s$ des $SL_2(\mathbb{C})$-modules non triviaux de dimensions respectives $n_1+1 \geq \cdots \geq n_s+1$ avec $n_1 = n_2+\cdots+n_s$ et $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1)$ un $SL_2(\mathbb{C})$-homomorphisme. On note $Det(.)$ l'hyperdéterminant introduit par Cayley (cf. [2] et [5] ainsi que le rappel ci-dessous) et S_i le $SL_2(\mathbb{C})$-module irréductible de degré $(i+1)$. Le but de ce papier est de donner une preuve simple du résultat suivant :

$$Det(\phi) \neq 0 \Leftrightarrow A_i \simeq S_{n_i} \textit{ et } \phi \textit{ est la multiplication } S_{n_2} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \to S_{n_1}$$

Le pendant géométrique de ce résultat algébrique est qu'un fibré de Steiner de rang n sur $\mathbb{P}^n$ (défini par une matrice de formes linéaires) invariant sous l'action de $SL_2(\mathbb{C})$ est un fibré de Schwarzenberger (cf. corollaire 4.2).

Sous sa forme géométrique ce résultat est prouvé dans [1] (thm. 5.9) pour les matrices tri-dimensionnelles et se déduit du théorème 1.2 de [3] pour le cas général. Cependant ces preuves sont longues et utilisent de nombreux outils de la géométrie algébrique.

La preuve que je propose ici repose uniquement sur la décomposition (dite de Clebsch-Gordan) d'un produit tensoriel de $SL_2(\mathbb{C})$-modules en somme directe de $SL_2(\mathbb{C})$-modules irréductibles. Et puis, "*on se persuade mieux, pour l'ordinaire, par les raisons qu'on a soi-même trouvées que par celles qui sont venues dans l'esprit des autres*"(Blaise Pascal).

2 L'hyperdéterminant de Cayley

Quitte à fixer une base de A_i, *l'hyperdéterminant* de $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1)$, que l'on notera $Det(\phi)$, est un polynôme en les coefficients de la matrice ϕ, apparu la première fois sous la plume d'Arthur Cayley [2]. Au début des années 1990 il réapparaît dans le livre de Gelfand Kapranov et Zelevinski ([5], chap.1 et 14), où les auteurs en donnent une étude complète et détaillée. Ils montrent par exemple ([5], chap.14 thm 1.3) qu'il est défini lorsque $n_1 \leq n_2 + \cdots + n_s$ et que l'hyperdéterminant d'une matrice multidimensionnelle $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1)$ est nul si et seulement si elle correspond à un hyperplan tangent au Segre généralisé, i.e si et seulement si dans l'espace projectif dual $\mathbb{P}((A_1^* \otimes \cdots \otimes A_s)^*)$ le point $[\phi]$ correspondant appartient à la variété duale du Segre, soit en notation abrégée $[\phi] \in (\mathbb{P}(A_1^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_s))^\vee$.

Une matrice multidimensionnelle $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1^*)$ est dégénérée s'il existe des vecteurs non nuls $a_i \in A_i$ pour $i = 2, \cdots, s$ tels que $\phi(a_2 \otimes \cdots \otimes a_s) = 0$. Lorsque $n_1 < n_2 + \cdots + n_s$ toutes les matrices sont dégénérées.

Lorsque $n_1 = n_2 + \cdots + n_s$ les matrices dégénérées forment une hypersurface qui coïncide avec la variété duale du Segre généralisé. Autent dit (cf. [5], prop 1.1 page 445)

$$[\phi] \in (\mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_s))^\vee \Leftrightarrow \exists\, a_i \in A_i, a_i \neq 0 \mid \ \phi(a_2 \otimes \cdots \otimes a_s) = 0 \Leftrightarrow Det(\phi) = 0$$

Je remercie L.Gruson, M.Meulien et N.Perrin pour leur aide dans l'élaboration de ce texte.

3 Invariance sous $SL_2(\mathbb{C})$

On note S_i le $SL_2(\mathbb{C})$-module irréductible de degré $i+1$, $(x^{i-k}y^k)_{k=0,\cdots,i}$ une base de S_i et $\{\lambda(t), t \in \mathbb{C}^*\} \subset SL_2(\mathbb{C})$ le sous-groupe à un paramètre agissant de la manière suivante sur cette base : $\lambda(t).x^{i-k}y^k = t^{i-2k}x^{i-k}y^k$.

Théorème 3.1. *Soient $A_1, \cdots, A_s$ des $SL_2(\mathbb{C})$-modules, non triviaux, de dimensions respectives $n_1 + 1 \geq \cdots \geq n_s + 1$ avec $n_1 = n_2 + \cdots + n_s$, et $\phi \in \mathcal{L}(A_2 \otimes \cdots \otimes A_s, A_1^*)$ un $SL_2(\mathbb{C})$-homomorphisme. Alors,*

$$Det(\phi) \neq 0 \Leftrightarrow A_i \simeq S_{n_i} \text{ et } \phi \text{ est la multiplication } S_{n_2} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \to S_{n_1}$$

Exemple 3.2. *Comme le grand nombre d'indices pourrait rendre la lecture difficile nous décrivons dans cet exemple les idées de la démonstration du théorème.*

Considérons les deux $SL_2(\mathbb{C})$-modules $A = S_1 \oplus S_2$ et $B = S_0 \oplus S_1$. La décomposition en $SL_2(\mathbb{C})$-modules irréductibles du produit tensoriel $A \otimes B$ est la suivante

$$A \otimes B = S_3 \oplus S_2 \oplus S_2 \oplus S_1 \oplus S_1 \oplus S_0$$

Soit C un sous module de $A \otimes B$ de dimension 7 et ϕ la projection

$$\phi : A \otimes B \to C$$

L'hypothèse sur la dimension est vérifiée ($6 = 4 + 2$) et la projection est bien invariante sous l'action de $SL_2(\mathbb{C})$. Mais ni A ni B ni C ne sont irréductibles; montrons donc que $Det(\phi) = 0$.

Comme la projection est invariante sous $SL_2(\mathbb{C})$ on a nécéssairement $\phi(x^2 \otimes x) = x^3$ ou bien $\phi(x^2 \otimes x) = 0$. Si l'on suppose $Det(\phi) \neq 0$ on en déduit $S_3 \subset C$. Soit $W \subset C$ tel que $C = S_3 \oplus W$. Considérons l'application restreinte

$$S_1 \otimes B \to C$$

Son image est contenue dans W, l'application restreinte est donc $S_1 \otimes B \to W$. Comme $dim(W) - 1 < [dim(S_1) - 1] + [dim(B) - 1]$ il existe des vecteurs non nuls $a \in S_1$ et $b \in B$ tels que $\phi(a \otimes b) = 0$, ce qui contredit $Det(\phi) \neq 0$.

Proof. Quand ϕ est la multiplication $S_{n_2} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \to S_{n_1}$ son hyperdéterminant est non nul. En effet, l'intégrité de l'anneau des polynômes homogènes à deux variables permet de prouver que $\phi(a_2 \otimes \cdots \otimes a_s) \neq 0$ lorsque les a_i sont tous non nuls.

Réciproquement, soient $A_k = \bigoplus_{i \in I_k} [S_i \otimes U_{i,k}]$ où les $U_{i,k}$ sont des $SL_2(\mathbb{C})$ modules triviaux. Soient n_k le plus grand entier de I_k, x^{n_k} un vecteur de plus haut poids de S_{n_k} et $u_{n_k,k}$ un vecteur non nul de $U_{n_k,k}$.
Comme ϕ est un $SL_2(\mathbb{C})$-homomorphisme on a

$$\phi(\lambda(t). \bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) = \phi(t^{n_2+\cdots+n_s} \bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) =$$

$$= t^{n_2+\cdots+n_s} \phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}).$$

Par ailleurs $\phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) \neq 0$ puisque l'on a supposé $Det(\phi) \neq 0$. On en déduit qu'il existe un espace vectoriel trivial non nul $U_{n_2+\cdots+n_s}$ tel que

$$\phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) \in S_{n_2+\cdots+n_s} \otimes U_{n_2+\cdots+n_s} \subset A_1^* \tag{1}$$

Comme $\phi(\bigotimes_{k=2,\dots,s} x^{n_k} \otimes u_{n_k,k}) \neq 0$ pour tout vecteur non nul $u_{n_k,k} \in U_{n_k,k}$, l'application linéaire restreinte $\phi_{res} : U_{n_2,2} \otimes \cdots \otimes U_{n_s,s} \longrightarrow U_{n_2+\cdots+n_s}$ ne s'annule pas sur les tenseurs de rang 1. C'est dire que les variétés $\mathbb{P}(ker(\phi_{res}))$ et $\mathbb{P}(U_{n_2,2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(U_{n_s,s})$ ne s'intersectent pas dans $\mathbb{P}(U_{n_2,2} \otimes \cdots \otimes U_{n_s,s})$. Par conséquent

$$\dim U_{n_2+\cdots+n_s} \geq \dim U_{n_2,2} + \cdots \dim U_{n_s,s} - (s-2) \tag{2}$$

Supposons que A_2 contienne au moins deux représentations irréducibles. On considère le sous module $B \subset A_2$ tel que $B \oplus [S_{n_2} \otimes U_{n_2,2}] = A_2$. L'application linéaire restreinte $B \otimes (A_3 \otimes \cdots \otimes A_s) \to A_1^*$ n'est pas surjective car son image est contenue dans le sous-module W de A_1^* défini par

$$W \oplus [S_{n_2+\cdots+n_s} \otimes U_{n_2+\cdots+n_s}] = A_1^*.$$

Partant d'une égalité de dimension

$$\dim_{\mathbb{C}}(A_1) = \dim_{\mathbb{C}}(A_3) + \cdots \dim_{\mathbb{C}}(A_s) + \dim_{\mathbb{C}}(A_2) - (s-2)$$

nous obtenons, après avoir plus “enlevé” au terme de gauche qu'à celui de droite :

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) < \dim_{\mathbb{C}}(A_3) + \cdots \dim_{\mathbb{C}}(A_s) + \dim_{\mathbb{C}}(B) - (s-2)$$

On en déduit qu'il existe des vecteurs non nuls $a_3 \otimes \cdots \otimes a_s \in A_3 \otimes \cdots \otimes A_s$ et $b \in B$ tels que $\phi(a_3 \otimes \cdots \otimes a_s \otimes b) = 0$. Mais ceci contredit l'hypothèse $Det(\phi) \neq 0$.

Donc chaque module A_k, pour $k = 2, \cdots, s$, ne contient qu'une seule représentation irréductible, $A_k = S_{n_k} \otimes U_k$ (où $U_k = U_{n_k,k}$). On pose $m_k = \dim_{\mathbb{C}} U_k$ et $m = \dim_{\mathbb{C}} U_{n_2+\cdots+n_s}$. L'égalité des dimensions, rappellée ci-dessus, donne :

$$\dim_{\mathbb{C}} A_1 = (n_2+1)m_2 + \cdots + (n_s+1)m_s - (s-2)$$

L'inclusion (1) ainsi que l'inégalité (2) montrent par ailleurs que

$$\dim_{\mathbb{C}} A_1 \geq m(n_2 + \cdots + n_s + 1) \geq (m_2 + \cdots + m_s - (s-2))(n_2 + \cdots + n_s + 1)$$

On obtient, après simplification, l'inégalité

$$\sum_{i=2,\cdots,s} [m_i.(\sum_{j=2\cdots,s;j\neq i} n_j)] - (s-2)(\sum_{j=2\cdots,s} n_j) \leq 0$$

qui n'est réalisée que si $m_2 = \cdots = m_s = 1$. On a alors aussi $m = 1$ et $A_k = S_{n_k}$ pour tout $k = 1, \cdots, n$. $\square$

4 Applications aux fibrés vectoriels

Soient $A_1, \cdots, A_s$ des espaces vectoriels complexes et $\phi : A_2 \otimes \cdots \otimes A_s \to A_1^*$ une application linéaire surjective. On considère le faisceau $\mathcal{S}_\phi$ sur $\mathbb{P}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ défini par

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\phi \longrightarrow A_1 \otimes O_{\mathbb{P}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}} \xrightarrow{{}^t\phi} O_{\mathbb{P}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}}(1, \cdots, 1)$$

Remarque 4.1. *$Det(\phi) \neq 0$ si et seulement si l'homomorphisme de fibrés vectoriels*

$$A_1 \otimes O_{\mathbb{P}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}} \xrightarrow{{}^t\phi} O_{\mathbb{P}^{n_2}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}}(1, \cdots, 1)$$

est surjectif, i.e $\mathcal{S}_\phi$ est un fibré vectoriel ([5], thm3.1 chap 14, ou [1] première page). Ce dernier donne alors par projection des fibrés de Steiner “associés” sur les produits (et donc sur les Segre) $\mathbb{P}^{n_2} \times \cdots \times \widehat{\mathbb{P}^{n_i}} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ (voir [4], prop. 3.20).

Corollaire 4.2. *Un fibré de Steiner de rang $n_3 + \cdots + n_s$ (avec $s \geq 3$) sur le Segre $\mathbb{P}^{n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ qui est $SL_2(\mathbb{C})$ invariant est un fibré de Schwarzenberger.*

Proof. Soient $A_1, \cdots, A_s$ des espaces vectoriels complexes de dimensions respectives $n_1+1 \geq \cdots \geq n_s+1$ et $\phi \in A_1 \otimes \cdots \otimes A_s$ avec $n_1 = n_2 + \cdots + n_s$. Soit S un fibré de Steiner de rang $n_3 + \cdots + n_s$ sur le Segre $\mathbb{P}^{n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$. Il apparaît dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow A_1 \otimes O_{\mathbb{P}^{n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}} \longrightarrow A_2^* \otimes O_{\mathbb{P}^{n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}}(1, \cdots, 1) \longrightarrow 0$$

L'action de $SL_2(\mathbb{C})$ sur S induit une action sur la base $\mathbb{P}^{n_3} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$ et fait de A_1 et A_2 des $SL_2(\mathbb{C})$-modules puisque $A_2^* = H^1 S(-1)$ et $A_1^* = H^0(S^*)$. Lorsque S est $SL_2(\mathbb{C})$-invariant l'application multilinéaire

$$A_3 \otimes \cdots \otimes A_s \otimes (H^1 S(-1))^* \to H^0(S^*)$$

est aussi $SL_2(\mathbb{C})$-invariante. D'après le théorème cette application est la multiplication

$$S_{n_2} \otimes \cdots \otimes S_{n_s} \to S_{n_1}$$

qui induit un fibré que l'on appelle fibré de Schwarzenberger comme dans [4], [1] et bien sûr [6]. □

References

[1] V. Ancona, G. Ottaviani. *Unstable hyperplanes for Steiner bundles and multidimensional matrices*, Advances in Geometry, 1,No.2, (2001), 165-192.

[2] A. Cayley, *On the theory of linear transformations*, Cambridge Math. J. (1845), no. 4, 193–209,

[3] C. Dionisi, *Stabilizers for nondegenerate matrices of boundary format and Steiner bundles*, Rev.Mat.Complut. 17 (2004) 459-469.

[4] I. Dolgachev, M. M. Kapranov *Arrangement of hyperplanes and vector bundles on* $\mathbb{P}^n$, Duke Math. J. (1993), no. 71, 633–664.

[5] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1994).

[6] Schwarzenberger, R.L.E., *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.