THÉORIES DE PLONGEMENT DES SYSTÈMES DYNAMIQUES - UN PROGRAMME

par

Jacky Cresson

Table des matières

Ce mémoire décrit uniquement les problèmes de recherche liés aux *théories de plongement* des systèmes dynamiques que je développe actuellement. En ce qui concerne l'instabilité hamiltonienne, la théorie des formes normales, le problème du centre et la théorie des nombres, je renvoie à la présentation analytique des travaux, qui contient une liste non exhaustive de problèmes(1) et mon mémoire d'habilitation à diriger des recherches(2) [**20**].

1. Sur les théories de plongement

La modélisation en physique est basée pour l'essentiel sur les modèles différentiels, avec comme outils principaux les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Or, la nature même de ces outils est de modéliser des comportements dynamiques suffisamment réguliers. Il me semble donc qu'il y a la un biais induit par notre exploration de la nature, à savoir qu'on ne modélise (ou sait modéliser) que les phénomènes qui peuvent se décrire via ces modèles différentiels. Rien pourtant ne justifie cette limitation. Dans la plupart des problèmes physiques réels, une partie des phénomènes échappe à la modélisation, soit parce qu'on ne les connait pas(3), soit parce qu'on ne sait pas comment les modéliser(4). L'idée est donc que les modélisations physiques (ou autres) sont les *traces régulières de dynamiques plus complexes* qui ne nous sont pas directement accessibles.

Les *théories de plongement des systèmes dynamiques* consistent à déterminer les dynamiques plus générales sous jacentes aux dynamiques régulières conduites par des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

La démarche que j'ai adoptée pour reconstruire ces dynamiques *cachées*, est la suivante:

(1) Pour un programme de recherche sur la théorie des formes normales en suivant le formalisme des moules de Jean Ecalle exposé dans [**21**], nous pourions rajouter les thèmes suivants: - *Moules et formes normales de Poincaré renormalisées*, - *Théorie des formes normales robustes*, qui consiste à poser les fondations complètes de ces nouvelles formes normales introduites par W. Tucker [**65**], - *Moules, séries de fourier et théorie KAM*, dont le programme comprend l'extension du formalisme des moules aux séries de fourier (penser aux actions/angles des systèmes hamiltoniens), la comparaison entre les démonstrations classiques du théorème KAM (par exemple à la Eliasson [**32**]) et celle qui découlerai de ce formalisme, et donc une nouvelle approche sur le phénomène de *compensation* des petits diviseurs [**31**].

(2) J'ai soutenu mon HDR fin 2001, et certains problèmes ont évidemment évolué, mais une bonne part des problèmes relatifs au problème du centre sont toujours d'actualité.

(3) A vrai dire cette situation est quasi inévitable et justifie à elle seule la sortie du cadre différentiel, car rien ne dit que ce qui nous échappe soit modélisable par les outils différentiels.

(4) Je pense ici aux variations de l'applatissement du soleil au cours du temps, qui devient un paramètre à prendre en compte a priori dans toute étude de l'évolution du système solaire sur de grandes échelles de temps.

- La limitation des comportements dynamiques possibles pour une équation différentielle ou une EDP provient entre autre de la définition même de la dérivée d/dt, qui impose des restrictions strictes de régularité aux solutions. Pour obtenir des dynamiques plus générales, on commence par définir des *extensions* du calcul différentiel. Le terme extension renvoie à une notion que je préciserai en détail plus tard. Disons pour résumer que le nouvel opérateur doit se réduire à la dérivée classique dans les cas réguliers(5).

- Une extension étant donnée, on peut associer à tout opérateur différentiel son *analogue étendu*. C'est cette procédure que j'appelle la *procédure de plongement*.

La stratégie des théories de plongement est en germe dans l'article [**22**]. En suivant la formalisation de [**18**], on peut présenter un plongement non-différentiable via le *calcul d'échelle*(6), i.e. via une extension du calcul différentiel sur les fonctions non différentiables. Le résultat essentiel de [**22**] est que les systèmes lagrangiens naturels de la forme

$$L(x,v) = 1/2mv^2 - U(x),\ x,v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ m \in \mathbb{R}^{*,+}, \tag{1}$$

sont associés à une équation de Schrödinger non linéaire.

Pour résumer la situation, introduisons les notations suivantes:

On plonge la fonctionnelle $L(x, dx/dt)$ définie pour $x \in C^1(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$ via un opérateur D satisfaisant les contraintes suivantes:

- D est défini sur $C^0(\mathbb{R})$,
- $D = d/dt$ sur $C^1(\mathbb{R})$.

Autrement dit, on peut donner un sens à $L(X, DX)$, où $X \in C^0(\mathbb{R})$. On associe naturellement au Lagrangien $L(x,v)$ son *équation d'Euler-Lagrange*, donnée par

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{EL}$$

Cette équation se plonge dans C^0 de la manière suivante:

$$D\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{$P(EL)$}$$

(5) Je ne précise pas plus ici, car cela demande de définir comment nous avons étendu la notion de fonction différentiable.
(6) Je renvoie à [**22**] pour les fondements de ce calcul.

Ce plongement, noté P ici, revient à dire que tout opérateur différentiel défini sur C^1 de la forme

$$\frac{d}{dt} \circ a(x) - b(x), \tag{2}$$

où a et b sont deux fonctions C^1, se plonge comme

$$D \circ a - b, \tag{3}$$

cette fois défini sur C^0.

En notant P la fonctionelle L étendue à C^0, nous avons donc le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} L(x, dx/dt) & \xrightarrow{\pi_{MA}} & EL \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ L(x, Dx) & \xrightarrow{?} & P(EL), \end{array} \tag{4}$$

où π_{MA} est le *principe de moindre-action* [**3**]. Le point d'intérrogation renvoie à l'existence d'un principe de moindre-action étendu sur le lagrangien $L(x, Dx)$, i.e. valable sur C^0. C'est pour répondre à cette question que j'ai développé dans [**23**] le *calcul des variations non différentiable*, i.e. pour des fonctionnelles définies sur C^0. Je ne vais pas m'attarder sur les aspects techniques de ce nouveau calcul des variations. Le point essentiel est que la notion d'extremale qui se dégage est exactement celle qui rend commutatif le diagramme (4), soit

$$\begin{array}{ccc} L(x, dx/dt) & \xrightarrow{\pi_{MA}} & EL \\ \downarrow P & & \downarrow P \\ L(x, Dx) & \xrightarrow{\pi_{MAND}} & P(EL), \end{array} \tag{5}$$

où π_{MAND} est le *principe de moindre-action non différentiable* de [**23**]. Ce résultat est appellé *lemme de cohérence* dans [**22**].

L'équation de Schrödinger non linéaire s'obtient via un principe de moindre action non différentiable (voir [**23**]).

Les applications de cette procédure de plongement non différentiable concernent essentiellement les fondements mathématiques de la relativité d'échelle (voir [**22**],[**23**]).

La première formalisation d'une théorie de plongement concerne l'extension *stochastique* des systèmes dynamiques [**18**] dans un travail en commun avec Sébastien Darses. Les idées de David Mumford [**47**] sur l'insertion du stochastique dans les bases de modélisation des phénomènes de la nature s'inscrivent dans cette théorie.

Comme pour la théorie du plongement non différentiable, on commence par définir une bonne extension de la dérivée classique d/dt sur les processus stochastiques. Le d/dt est d'abord étendu avec la même notation aux processus déterministes différentiables. Pour construire l'extension $\mathcal{D}$, nous avons utilisé les travaux de Edward Nelson [**48**] dans ses *théories dynamiques du mouvement Brownien.* Plusieurs problèmes techniques et conceptuels se posent sur lesquels je reviendrai plus loin.

Nous avons développé un *calcul des variations stochastiques*(7) initié par K. Yasue(8)[**71**] en 1981. Le principe de moindre action stochastique ainsi obtenu permet de formuler le *lemme de cohérence stochastique*, i.e. la commutativité de l'analogue stochastique du diagramme (5) donné par

$$
\begin{array}{ccc}
L(x,dx/dt) & \xrightarrow{\pi_{MA}} & EL \\
\downarrow P & & \downarrow P \\
L(x,Dx) & \xrightarrow{\pi_{MAS}} & P_S(EL),
\end{array}
\tag{6}
$$

où π_{MAS} est le *principe de moindre-action stochastique* de [**18**] et P_S le plongement stochastique.

Quels sont donc les pistes de recherche suggérées par ces travaux ?

L'architecture des constructions des théories de plongement va naturellement conduire à trois grands types de problèmes:

1- Construction d'extension du calcul différentiel,
2- Géométries associées au plongement des systèmes lagrangiens
3- Applications dynamiques de ces théories.

Les prochains paragraphes décrivent quelques pistes de recherche dans chacun de ces thèmes.

(7)Il faut faire attention ici à un point de terminologie. En probabilité, il semble que le terme "calcul des variation stochastiques" recouvre essentiellement l'utilisation du *calcul de Malliavin.* Il ne s'agit pas de cela ici.

(8)Il y a beaucoup à dire ici. Les travaux de Yasue, comme beaucoup d'autres qui ont suivi, sont des *généralisations* au stochastique des outils classiques de la mécanique, mais sans cadre conceptuel. Ce manque d'un cadre de pensée se devine dans les questions récurrentes et non résolues de ces pseudo théories. Par exemple, trente ans après l'introduction d'un choix ad hoc d'accélération par Edward Nelson[**48**], on trouve dans plusieurs travaux ([**53**],[**16**],p.158), des choix différents ou équivalents, avec toujours la même question de légitimité. Dans notre cadre, cette question n'a pas de sens et l'accélération est fixée une fois l'opérateur $\mathcal{D}$ défini, et est égale à $\mathcal{D}^2X$ tout simplement. On obtient d'ailleurs, l'accélération proposée par Nelson (voir [**18**]).

2. Extension du calcul différentiel

Comme noté ci-dessus, une étape essentielle dans toute théorie de plongement des EDP est celle de l'extension du calcul différentiel classique. Ce problème a bien entendu était abordé par de nombreux chercheurs, mais jamais sous l'angle dynamique et géométrique qui a conduit mes travaux. Les extensions que je recherche doivent satisfaire plusieurs contraintes, dont les deux plus importantes sont à mon avis les suivantes:

- recollement à la dérivée classique,
- possibilité d'interprétation géométrique, même intuitive.

Par exemple, la dérivée stochastique introduite dans [**18**] répond à ces deux contraintes, de même que la dérivée d'échelle de [**22**], mais alors que l'interprétation géométrique de la dérivée d'échelle est immédiate, celle de la dérivée stochastique ne l'est pas[(9)].

2.1. Résolution minimale et calcul d'échelle. — Je renvoie à [**22**] pour une introduction au calcul d'échelle. J'ai introduit dans ce travail une notion dite de *résolution minimale*, qui veut en substance, capturer à partir d'une famille donnée d'approximations d'un graphe de fonction, la nature de la fonction sous jacente, avec le comportement suivant: si $r \neq 0$ alors la fonction est non différentiable et si $r = 0$ la fonction est différentiable. La résolution minimale que j'ai définie ne remplit pas exactement ce programme et pose des problèmes. C'est évidemment lié à une certaine idée de la modélisation des phénomènes physiques en général. Un problème mathématique relié est celui de savoir, à partir du comportement de la longueur l_ϵ des courbes approximées, si la courbe limite est rectifiable ou non. Je renvoie à [**5**] pour un premier travail en ce sens. C'est ici une démarche du même type que pour la résolution minimale: c'est la famille des approximations qui est connue, et on pose une question sur la régularité de la courbe limite.

La résolution minimale est encore mal formalisée. Les premières définitions que j'ai données de cette notion se confrontent à des difficultés d'ordre conceptuel ou théoriques. Le problème essentiel à mon avis est l'absence d'une définition purement intrinsèque de cette notion (voir à ce sujet [**22**] pour un commentaire). Il me semble que cette situation est inévitable, mais sans doute pour de bonnes raisons. Le non intrinsèque tient au choix d'une constante, qui en pratique, tient le rôle d'une *précision*, i.e. d'un seuil de mesure sur les distances entre deux points, qui a bien un sens si on se refère à une expérience

[(9)] Il faut en fait, par la nature même du calcul stochastique de [**18**], renoncer à une interprétation *trajectorielle* de la dérivée, bien que sa signification géométrique est plus ou moins celle d'une moyenne de taux d'accroissement sur des trajectoires du processus.

physique, mais que l'on doit rajouter dans le problème mathématique.

Partant donc du fait qu'il existe une précision donnée, peut-on construire une notion de résolution minimale au sens de [**22**] ?

Je ne crois pas qu'il soit possible en fait de distinguer toujours les comportements non différentiables des autres via une résolution minimale. Par exemple, dans l'étude de la divergence de graphes de fonctions de [**5**], on montre qu'il existe différentes zônes de vitesses de divergences, et que dans l'une d'entre elle, il n'est pas possible de distinguer le caractère rectifiable des courbes.

Par ailleurs, il faut que la résolution minimale soit calculable pour être utile, ce qui n'est pas du tout évident dans [**22**]. Cette notion est pourtant essentielle, car elle conditionne dans les modélisations le passage d'un modèle différentiel classique à un modèle prenant en compte la non différentiabilité. Ce passage s'effectue via le calcul d'échelle dans [**22**], mais on peut imaginer toute une gamme de procédures suivant les problèmes étudiés.

2.2. Intégration fonctionnelle. — La théorie de plongement stochastique nous a conduit à étudier les différentes notions de calcul stochastique, et notamment les notions d'*intégrales stochastiques*. Il en existe plusieurs variantes sur lesquelles je ne vais pas revenir, et qui répondent à des contraintes souvent particulières.

L'exemple que j'ai en tête est le développement d'une notion d'intégrale stochastique sur le mouvement brownien fractionnaire, qui est maintenant un objet important des mathématiques financières [**17**]. Plusieurs intégrales ont vu le jour:

1 - l'intégrale de Decreusefond L.-Üstünel A.S. [**29**],
2 - l'intégrale de Carmona P.-Coutin L. [**10**],[**11**]
3 - l'intégrale au sens de Riemann-Young-Stieltjes de [**30**],[**74**]
4 - l'intégrale au sens de Russo F., Vallois P., [**57**].

On peut montrer, sous certaines conditions, que ces intégrales coincident (voir [**10**], corollaire 1 et la remarque qui suit pour l'équivalence de 1, 2 et 3. Laure Coutin a par ailleurs annoncé dans un séminaire[10] l'équivalence de 2 et 4). Or, aucun résultat d'unicité n'a été mis en évidence pour ces opérateurs.

Je pense qu'il est nécessaire de reformuler la problèmatique de la construction (ou de l'extension) d'une intégrale stochastique sur le mouvement fractionnaire pour voir

[10] Séminaire de probabilité de Besançon, mars 2005.

directement si oui ou non, on a unicité de l'objet construit directement. Une piste pour commencer ce travail est de s'inspirer des travaux de Pierre Cartier et Cécile DeWitt-Morette ([**13**],[**14**]) sur une approche *axiomatique* de *intégration fonctionnelle*(11). L'intérêt de cette approche est clairement expliquée dans ([**15**],p.54-55): il est possible de définir de manière unique un élément d'intégration en fixant la valeur de l'intégrale sur certains intégrands bien choisis. Par exemple, supposons que l'on veuille définir l'intégrale ordinaire, alors il suffit de poser $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(a+x)^2}dx = 1$ pour tout a. Ce phénomène de rigidité se généralise pour certaines extension d'intégration fonctionnelle. En utilisant ce type de construction ou plutôt de caractérisation d'une intégrale fonctionnelle, j'espère récupérer directement l'équivalence des extensions de 1 à 4.

Le but de cette manoeuvre n'est évidemment pas de se limiter à ce résultat d'équivalence. Une fois la caractérisation axiomatique de ces intégrales mise au claire, nous aurons une voie toute traçée pour savoir *comment* généraliser ces intégrales, ce qui n'est pas le cas avec les définitions actuelles, trop liées à la résolution de problèmes techniques ou de calcul sous jacents. La prise en compte de processus stochastiques de plus en plus complexes demande la mise au point d'une *stratégie* de construction de ces intégrales.

2.3. Autour du calcul fractionnaire. — Il existe plusieurs extensions du calcul différentiel aux fonctions continues, dont celle initiée par Leibniz, connue sous le nom de *calcul fractionnaire*. Les fondements mathématiques de ce type de calcul s'inscrivent dans l'étude des opérateurs pseudo-différentiel et est maintenant bien établie [**58**].

L'intérêt pour ce calcul s'est soudainement développé avec l'apparition en physique et dans la nature en général(12), de phénomènes décris par des courbes très irrégulières, comparables aux graphes des fonctions nulle part différentiables, comme la fonction de Weierstrass [**64**]. Pourtant, il n'est pas évident que cet outil soit adéquate à l'étude de la géométrie de ces objets très irréguliers. En fait, il est à peu près clair que les opérateurs de calcul fractionnaire prennent toute leur importance dans un autre domaine, celui des EDP ou des équations intégro-différentielles. C'est d'ailleurs dans ce dernier domaine que cet outil est utilisé par les ingénieurs [**8**]. Les opérateurs de calcul fractionnaire répondent dans ce cas à des contraintes de représentation des données (par exemple des problèmes

(11)L'intégration fonctionnelle est clairement reliée aux problèmes d'analyse stochastique.

(12)L'exemple qui m'a le plus marqué est l'article de L. Borredon, B. Henry et S. Wearne [**9**] autour de l'utilisation du calcul fractionnaire en biologie suite à l'observation de la structure très irrégulière de certaines cellules cancéreuses.

de continuité comme dans [**8**]) et de calculs pratiques.

Il convient donc de comprendre la nature de cet opérateur, i.e. d'en donner une construction qui éclaire son champ d'action, notamment en vue de répondre à la question récurrente de son interprétation géométrique ([**50**],[**59**]).

En m'inspirant de la façon dont les ingénieurs utilisent les opérateurs fractionnaire, j'ai donné une construction [**24**] qui présente l'opérateur de Riemann-Liouville comme solution d'un problème algébrique précis d'extension de la notion de dérivée sur les distributions (contrainte de linéarité, continuité, interpolation de la dérivée). On voit ainsi qu'il permet dans les équations de convolution (donc les EDP linéaires) d'avoir une liberté sur l'expression des solutions via le choix du paramètre de différentiation $\alpha \in \mathbb{R}$. Beaucoup reste à comprendre, notamment son rôle dans le calcul des fonctions de transferts, par exemple, il semble que les approximations numériques de ces opérateurs par des séries sont, à nombre de terme égal, bien meilleur que les approximations classiques. Je renvoie à [**8**] pour des exemples d'applications de ces idées. Il y a là tout un champ à explorer qui met en jeux aussi bien les aspects théoriques que pratiques.

Dans [**24**], on note que l'opérateur de calcul fractionnaire, noté D^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$, peut aussi être défini pour $\alpha \in \mathbb{C}$(13). Pourquoi cette possibilité est-elle à étudier et comprendre ?

Il semble que de nombreux phénomènes physiques font apparaître de manière naturelle ces opérateurs ([**63**], [**50**]), mais la signification précise de la partie complexe de l'indice de différentiation α est inconnue. Or, La construction algèbrique de [**24**] nous pousse à chercher cette signification du côté des EDP, mais je ne pense pas, contrairement à [**50**], que cet indice est un quelconque contenu géométrique profond(14). Ceci dit, D. Sornette [**63**] fait apparaître des "dimensions" complexes dans son étude de l'*invariance d'échelle discrete* ou la composante complexe donne par rapport à l'invariance d'échelle pure, une information sur les "modulations" entre les différentes échelles (voir [**63**]). Si interprétation géométrique il y a, elle est peut être à chercher dans cette voie.

(13)Comme l'avais déja remarqué Laurent Schwartz [**60**].

(14)On peut déja noter que lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, la valeur de la dérivée d'une fonction f en un point x, n'est pas la même que celle de $f + c$, $c \in \mathbb{R}$, au même point. Or, la structure géométrique de l'objet elle, n'a pas changé. En conséquence, même si certaines propriétés globales peuvent se lire sur cet opérateur (comme le caractère höldérien d'une fonction par exemple), on est loin d'une information géométrique comparable à celle donnée par la dérivée par exemple.

3. Géométries et plongements des systèmes lagrangiens

Les différentes théories de plongement nous permettent d'explorer des objets géométriques en dehors du cadre classique de la *géométrie différentielle*. En effet, certaines variétés topologiques ne possèdent pas de structures différentiables[(15)] et les extensions du calcul différentiels utilisées dans les théories de plongements peuvent sans doute se rendre utile dans ce cas et ceci d'au moins deux façons:

- La première est de contruire une nouvelle *analyse des variétés*. On peut citer ici l'analyse non différentiable associée au calcul d'échelle [**27**].

- Ces extensions du calcul différentiel suggère aussi de *nouvelles géométries*, soit directement comme la *géométrie stochastique*, dont un premier exemple sont les *surfaces browniennes* (voir [**35**]), soit via une interprétation géométrique de ce même calcul, dont un exemple sont les *variétés d'échelle* introduites dans [**26**].

Par ailleurs, dans le cas du plongement des systèmes lagrangiens, on a la question suivante, dont la légitimité provient du lemme de cohérence (dans [**22**],[**18**]):

Comment se transporte la structure symplectique sur les systèmes lagrangiens plongés ?

Ces questions sont des thèmes de recherche à part entière et nécessiteraient sans doute des programmes détaillés de travail. Dans la suite, je vais simplement décrire quelques pistes.

3.1. Géométrie non différentiable. — C'est un pur produit du calcul d'échelle. Ce calcul permet de définir de nouvelles structures, l'analogue notamment du plan tangent à une variété et permet de commencer à analyser la géométrie des objets très irréguliers. Le point important est qu'il est aussi possible de faire de la *dynamique*, i.e. d'écrire des équations du mouvement sur ces objets. Les fondations de cette géométrie sont encore à parfaire, mais les perspectives et les applications en vue sont suffisamment importantes pour y passer du temps. Par ailleurs, on y observe des phénomènes nouveaux, notamment les objets ou notions *intrinsèques*[(16)] habituelles sur les variétés deviennent dépendantes dans une certaine mesure du choix de l'atlas, ce qui n'est pas sans poser

---

(15) Ce résultat est loin d'être trivial. Le premier exemple est dû à J. Kervaire [**38**]. On trouvera des références utiles dans [**61**] et le travail récent de C. Pugh [**54**].

(16) Les notions ne dépendent pas du choix des cartes locales, donc de celle de l'atlas différentiable fixé sur le variété.

des problèmes. On peut bien entendu ensuite extraire de ces notions ou quantités des données intrinsèques, mais je pense qu'on perd là ce qui fait la différence essentielle entre une variété différentiable et une qui ne l'est pas.

3.2. Géométrie d'échelle. — La *géométrie d'échelle* définie dans [**26**] est un sous-produit de la théorie de plongement non différentiable. Les difficultés importantes liées à l'analyse non différentiable des variétés m'a conduit à définir des objets nouveaux. L'idée est de remplacer une variété topologique sans structure différentiable par un objet géométrique sur lequel l'analyse soit facile, et qui transforme les effets de la non différentiabilité en une notion manipulable.

Pour ce faire, j'ai d'abord cherché à coder certains effets de la non différentiabilité d'une courbe du plan. On peut d'ailleurs se limiter aux graphes de fonctions. Dans ce cas, une conséquence essentielle au niveau de la géométrie est qu'il est impossible de construire un système de coordonnées sur la courbe, analogue du système de coordonnées curviligne. La raison étant simplement que la longueur entre deux points quelconques de la courbe est toujours infinie. J'ai donc défini ce que j'ai appelé un *système de coordonnées fractales*, qui mime pour l'essentiel ce problème. Quelle est l'idée ? On construit des approximations(17) de cette courbe γ, γ_e, $e \in \mathbb{R}^+$, avec $\gamma_0 = \gamma$. Comment traduire la non existence du repère curviligne sur γ ? Pour qui chaque e, il existe une(18) coordonnée curviligne $s(e)$, mais cette coordonnée à un comportement dynamique non trivial en e, ce que j'appelle la *dynamique d'échelle*. Dans le cas non différentiable, la dynamique d'échelle implique la divergence en e de $s(e)$ lorsque e tend vers zéro. La version abstraite de cette construction conduit à une notion de $\mathbb{R}^n$ fractale et donc à celle de variété fractale.

La définition des variétés fractales n'est pas satisfaisante. Il me semble qu'un bon cadre est celui des *espaces fibrés*. Une première étape consiste à considérer un *espace-échelle*, qui est la réunion des espaces à toutes les échelles. Il est naturellement muni d'une structure d'espace fibré de base $\mathbb{R}^+$. Pour comparer les fibres à différentes échelles, il existe déja une notion géométrique, celle de *connexion*, introduite par Elie Cartan [**12**] dans ses travaux en relativité. La dynamique d'échelle permet déjà de comparer des éléments de différentes fibres. Y-a t'il une connexion associée ?

Je me demande aussi dans quelle mesure la dynamique d'échelle n'est pas mieux codée par la donnée d'une métrique dépendant d'échelle, ce qui est différent de la vision ci-dessus.

(17) Il y a beaucoup de façons de le faire, mais ceci importe peu. L'objet abstrait qui est défini ensuite n'est plus lié à ces choix.
(18) Il est possible de fixer une origine o_e sur chaque courbes pour rendre la construction cohérente.

En tout cas, la géométrisation de ces idées me semble importante, pas seulement parce qu'elle donne un cadre géométrique clair à la théorie de la relativité d'échelle, mais surtout parce qu'elle introduit de nouveaux objets géométriques qui répondent à certains problèmes de modélisation.

3.3. Géométrie symplectique stochastique. — La géométrie symplectique stochastique provient du plongement stochastique des systèmes lagrangiens et bien entendu du lemme de cohérence, qui assure un transport adéquat des équations d'Euler-Lagrange compatible avec le principe de moindre action stochastique. Deux questions vont se poser naturellement:

- Quelle est la bonne géométrie sous-jacente à ce plongement stochastique ?

Je pense, mais c'est justement à développer, que la bonne géométrie est, une version abstraite des surfaces brownienne, i.e. moyennant quelques conditions évidemment, des processus définis sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ (on peut imaginer aussi les analogues complexes puisque ceux ci apparaissent déja dans la théorie de plongement stochastique [**18**]). Le but est donc d'abstraire ces objets, qui sont les analogues des nappes paramétrées de $\mathbb{R}^3$, pour créer la notion de *variété stochastique*.

Supposons un moment que ces variétés stochastiques soient bien définies, alors un système lagrangien étant donné, on peut se demander:

- Comment se transporte la structure symplectique classique au stochastique ?

Je pense que dans un premier temps, nous allons pouvoir uniquement raisonner sur les nappes stochastiques de $\mathbb{R}^3$ et même précisément sur les surfaces brownienne. Cette étape est d'autant plus importante qu'il existe un moyen de construire un système hamiltonien stochastique[(19)]. Les constructions devraient donc être cohérentes avec tous ces objets.

3.4. Applications. — Les applications possibles de ces différentes géométries sont nombreuses.

Une application qui me tient à coeur est celle des fondements mathématiques de la relativité d'échelle, dont le présent programme est en fait une conséquence. La relativité d'échelle demande la construction de ce que l'on pourrait appeler des *variétés fractales*,

[(19)]Le travail de T. Misawa et K. Yasue [**45**] est un premier pas.

et qui sont en fait des familles à un paramètre de variétés différentiables, mais dont le paramètre est contraint par une dynamique, la *dynamique d'échelle*.

La géométrie d'échelle de [**26**] est adaptée à ce problème et a déja fourni une version rigoureuse de la *relativité spatiale restreinte d'échelle*, i.e. une relativité prenant en compte seulement les effets espace/échelle, en supposant le temps absolu. Il reste maintenant à construire la relativité générale d'échelle sur des *variétés riemanniennes fractales*(20) introduites dans [**26**].

La *géométrie symplectique stochastique* est bien sûr destinée à poser les fondements d'une *mécanique stochastique*(21) à part entière, qui serait réellement le pendant de la mécanique classique. Cette mécanique prend en compte les aspects *aléatoires* des expériences physiques et se relie aux données classiques via la théorie de plongement stochastique de [**18**].

3.5. Note sur la mécanique quantique. — La théorie de plongement stochastique, bien que partageant l'introduction du stochastique dans la mécanique, et une partie du formalisme, n'est pas un prolongement des travaux d'Edward Nelson sur la mécanique stochastique comme interprétation de la mécanique quantique. Comme je le soulignais, notre formalisme permet de mettre les idées de Nelson dans une forme agréable et de faire apparaître des structures et une cohérence dans sa manière de quantifier(22) la mécanique classique. Mais pour des raisons qui sont partagées par Nelson [**49**], je ne crois pas que cette théorie, en ce qui concerne ses applications à la mécanique quantique, ait un avenir. Une des objections est qu'elle ne pourra jamais répondre à la question fondamentale ([**16**],p.196):

Quelle est l'origine des probabilités en mécanique quantique ?

4. Applications

4.1. EDP et principe de moindre action. — L'équation de Schrödinger linéaire ou non linéaire peut être obtenue par un principe de moindre action non différentiable [**23**] ou stochastique [**18**]. Ces résultats suggère le problème suivant:

(20)Pour de très bonnes raisons, il n'existe pas de relativité d'échelle restreinte tout court. Ceci est dû à la non linéarité des équations d'échelle dans les systèmes de coordonnées classiques [**26**].
(21)Si la géométrie symplectique arrive à terme, cette mécanique stochastique sera bien loin de celle introduite par Edward Nelson [**48**] sans aucune structure géométrique.
(22)Le mot quantifier n'est pas assez pécis ici. Il existe toute une hiérarchie des méthodes de quantification, et c'est une méthode de *première quantification*[**41**] qui est donnée par Nelson.

Toute EDP *naturelle* peut elle être obtenue par un principe de moindre action de ce type ?

Par naturelle, j'entend principalement les grandes EDP de la physique, comme les équations de Navier-Stokes par exemple.

Pour l'*équation de Navier-Stokes*, il semble que cela soit possible comme le montre des calculs heuristiques de Laurent Nottale [**51**]. Ce résultat, si il se confirme, n'a rien d'évident car il suggère un cadre lagrangien pour l'étude de cette équation. Il me semble d'ailleurs qu'il serait intéressant de comparer cette approche avec les travaux de Jean Leray [**42**],[**43**].

Au passage, les calculs effectués par Nottale demandent l'introduction d'une interpolation *complexe* de la dérivée, i.e. d'une famille D^α, $\alpha \in \mathbb{C}$, d'opérateurs agissant sur C^0 et tels que $D^n = d/dt^n$. On rejoint ici les problèmatiques sur la construction des opérateurs de *calcul fractionnaire* étudiés dans [**24**].

L'*équation de Dirac* entre aussi dans cette problèmatique, en suivant les calculs heuristiques de Nottale [**52**]. Dans ce cas, c'est une extension du calcul d'échelle [**22**] qui est nécessaire et donc du calcul des variations [**23**].

Il me semble qu'il existe aussi une relation plus profonde entre les théories de plongements et les EDP. L'article de M. Andler [**1**] sur les travaux de Jean Leray, notamment sur les EDP en mécanique des fluides, rappelle qu'une des questions abordées par Jean Leray est celle de la définition adéquate de la notion de solution pour ces problèmes. Via son travail sur les solutions *turbulentes*, hautement *irrégulières*, il pose la question du sens d'une EDP dans ce cas. Il y a eu bien sûr de nombreux travaux sur ce sujet, avec par exemple l'invention des notions de solutions faibles, fortes et de ce que nous appelons maintenant les espaces de Sobolev. Comme pour nos théories de plongement, le point de départ est la définition par Jean Leray d'une notion de *quasi-dérivation.* La *théorie des distributions* de Laurent Schwartz continue ce travail via l'introduction d'une notion de dérivée, étendant la définition usuelle[23], sur les distributions. L'approche des théories de plongement suggère justement que la modélisation des EDP ne prend en compte que la partie régulière des comportements dynamiques, mais que la *structure des équations*, si elles sont bien établies sur ces composantes régulières, n'a aucune raison de changer

[23] Il faut faire attention ici car ce n'est pas tout à fait vrai.....la dérivée au sens des distributions ne se recolle à la définition usuelle que lorsque la distribution sous jacente est suffisamment régulière (voir [**60**],[**24**]).

radicalement sur les solutions turbulentes[24]. Le fait d'obtenir ces EDP via des principes de moindre action non différentiable ou stochastique conforte cette vision, car la structure lagrangienne sous jacente à ces équations est déja définie sur un ensemble de solutions (courbes) plus étendu que les simples solutions régulières. Si la notion de solution faible ou plutôt forte a un sens profond pour ses équations c'est précisément à mon avis parce qu'une structure annexe s'étend naturellement au dela des solutions régulières. L'existence d'un lagrangien serait dans ce cas une bonne explication conceptuelle au recours à ces solutions faibles/fortes.

4.2. Dynamique à long terme des systèmes instables. — La dynamique des systèmes dynamiques instables ou *chaotiques*[25] est par nature difficile à étudier, aussi bien du point de vue numérique que théorique. La *théorie ergodique* est une tentative de réponse à ce type de problèmatique, mais les progrès sont très lents. Il me semble que l'on peut, à l'aide des théories de plongement, proposer un autre point de vue sur l'étude à *long terme* de ces systèmes, quitte bien sûr, à perdre un peu d'information quantitative[26]

Pour expliquer notre idée, nous allons utiliser la théorie du plongement stochastique [**18**] dans le cas des systèmes lagrangiens naturels.

---

[24] C'est évidemment sur la structure des équations, et non les équations elles même qu'il faut raisonner. Ces dernières ne sont pas invariantes sous changement de variables alors que la structure (lagrangienne par exemple) l'est. Les équations de la mécanique classique par exemple n'ont pas en tant que tel de sens physique profond, mais le principe de moindre action et donc la structure lagrangienne sous jacente, elle oui. En ce sens, il semble inconvenant voir irréaliste de simplement donner un sens à une EDP en utilisant la théorie des distributions et espérer en déduire quoi que ce soit sur le problème *réel* sous jacent. Sans plus d'arguments pour étayer cette extension cela ressemble plus à une manipulation formelle des équations.

[25] Je ne donne pas plus de précision ici. On pourrait par exemple parler de systèmes dynamiques hyperboliques ou de notions plus faibles.

[26] La théorie de plongement stochastique rejoint l'idée suivante, commune dans la communauté des systèmes dynamiques: Le comportement à long terme d'un système dynamique chaotique peut être décrit par un processus aléatoire (voir par exemple [**40**]). Bien que cette idée ait quelques ressemblances avec la théorie de plongement stochastique, elle n'a en fait rien à voir. Ce qui se cache derrière ce processus, c'est l'idée que la sensibilité aux conditions initiales peut être vue comme la donnée comme condition initiale d'une variable aléatoire. En supposant que tout condition initiale est remplacé par la même variable aléatoire, on en vient à construire un processus de la manière suivante: on regarde l'évolution du système dynamique durant un temps T. Soit x_0 une condition initiale donnée et ϕ_t le flot associé au système dynamique. Si le système est sensible aux conditions initiales, il existe un horizon de prédictabilité (cet horizon n'a rien d'intrinsèque au système et c'est bien là un des problèmes) au dela duquel la donnée de $\phi_T(x_0)$ ne peut pas être reliée à celle de x_0. On modélise alors cette observation en reliant à un temps T la variable aléatoire. Par itération et normalisation, on construit ainsi un processus, qui n'est autre que le mouvement brownien. Cette manière d'induire le stochastique naturellement dans le système dynamique est evidemment très intéressante, mais elle est difficilement réalisable, notamment en raison des données non intrinsèques sous jacentes, et pourtant pertinentes pour un système physique donné. Cette idée est ce que j'appelle la *quantification dynamique*. On est bien loin de la théorie de plongement stochastique. Néanmoins, il me semble que cette théorie est finalement une bonne alternative à la construction de la quantification dynamique.

Comme problème modèle de base, on considère le *problème des n corps*, i.e. la dynamique de n points matériels de masse m autour d'un point matériel de masse M, avec $n \geq 3$. Dans ce cas, en notant L_{Kepler} le lagrangien associé à la dynamique des n problèmes de Kepler, i.e. la dynamique d'un point matériel de masse m autour du point de masse M, le lagrangien total peut s'écrire comme

$$L_{n-\text{corps}} = L_{\text{Kepler}} + L_{\text{perturbation}}, \tag{7}$$

où $L_{\text{perturbation}}$ provient des intéractions mutuelles entre tous les corps de masse m.

Supposons maintenant que $M >> m$, alors $L_{n-\text{corps}}$ est une *petite* perturbation de L_{Kepler}. Les dynamiques de $L_{n-\text{corps}}$ et L_{Kepler} ne sont pas semblables, il y a a priori *instabilité générique* [(27)] et les expériences numériques [**39**] montrent essentiellement une *sensibilité aux conditions initiales*. Comment dépasser cet *horizon* de prédictabilité pour dire quelque chose de significatif au niveau dynamique ?

L'idée très informelle ou plutôt l'espoir est le suivant:

Via un plongement stochastique de la dynamique, on perd en information quantitative et qualitative fine sur le système, mais on gagne en *robustesse*, i.e. en stabilité sous perturbation des informations dynamiques que l'on récupère. Ici, le stochastique a son importance parmi toutes les théories de plongement possibles. C'est essentiellement une information *statistique* que nous voulons finalement récupérer, statistique sur les trajectoires possibles du système. Donc, bien que le système initial soit génériquement instable sous perturbation, sa version stochastique elle ne l'est pas. Mieux, on s'attend à une stabilité générique dans ce cas[(28)].

Cette idée très générale nous encourage à developper les points suivants:

[(27)] On peut être plus précis: l'instabilité générique dont il est question ici est une instabilité de nature topologique, qui rejoint la conjecture dite de *Chaos hamiltonien* par V.I. Arnold [**4**] et bien entendu l' *hypothèse quasi-ergodique* [**72**].

[(28)] Je n'ai pas d'argument mathématiques précis pour sous tendre cette conjecture. Cette idée provient des applications de la théorie de plongement stochastique en mécanique céleste. Dans [**19**], nous étudions la formation d'anneaux de densité de matière dans une nébuleuse protoplanétaire, i.e. une étoile entourée d'un nuage de petits corps. On montre dans ce cas, que des structures se forment et que ces structures, inaccessibles via les l'étude des équations classiques, sont apparentes dans le plongement stochastique. Je ne vois aucune raisons pour que ces structures disparaissent via de petites perturbations.....car elles se sont formées déja dans un context hautement turbulent. Plus généralement, il me semble qu'un faisceau d'idées autour de la création de structures stables dans des contexts hautement instables (les travaux de Raoul Robert [**55**],[**56**] par exemple) confortent ce point de vue. On rejoint évidemment la thématique de la recherche des attracteurs étranges développée ci-dessus.

- la notion de stabilité sous plongement stochastique n'a rien d'évident. Quel sens lui donner ? Intuitivement, ce sont les densités de probabilité que l'on récupère qui doivent être stables sous un certain sens qu'il convient de mettre au point.

- La recherche d'exemples explicites ou cette idée de stabilité générique soit démontrée. L'oscillateur harmonique et le problème de Kepler sont justement deux bons candidats.

4.3. Attracteurs étranges. — Les attracteurs étranges sont à la sources de nombreux et difficiles travaux. La plupart du temps, les questions mathématiques abordées sont sur la nature géométrique de ces objets, leurs propriétés de stabilité sous perturbation, et leurs propriétés dynamiques. Ce qui m'a toujours surpris dans ces objets, comme l'*attracteur de Hénon* par exemple, est qu'il est difficile de savoir que cet attracteur existe si on ne fait pas quelques expériences numériques pour le "voir" apparaître. La même chose est vraie d'ailleurs pour l'*attracteur de Lorenz* [**37**]. Ma question est donc la suivante:

Est-il possible de démontrer l'existence d'un attracteur étrange directement sur une équation ?

Bien entendu, pour la version *géométrique* de l'attracteur de Lorenz la réponse est oui, mais pour l'équation initiale c'est beaucoup moins simple. On renvoie aux travaux de W. Tucker ([**66**],[**67**]) pour une démonstration de l'existence de l'attracteur de Lorenz dans l'équation initiale, répondant aussi à un problème de S. Smale [**62**].

Supposons donc que je prenne les équations de Lorenz. Le système d'équations n'est pas lagrangien, mais il existe un procédé canonique pour lui associer un lagrangien (voir par exemple [**2**]). Ce langrangien peut s'étudier via la procédure de plongement stochastique. On obtient alors dans les bon cas, une EDP qui contraint la densité des processus solutions. Mon espoir est donc que la structure de l'attracteur soit visible dans cette densité. Les attracteurs étranges possèdent des propriétés de stabilité sous perturbations [**46**] qui ont toutes les chances de s'étendre dans le cas stochastique(29). Evidemment, rien ne dit que l'EDP que nous obtiendrons soit beaucoup plus facile que l'équation initiale, mais cette étude des attracteurs est une première étape dans cette recherche d'outils permettant de mettre en évidence des structures cohérentes dans les systèmes dynamiques.

(29)Je viens de découvrir l'article de L.S. Young [**73**] sur la stabilité stochastique des attracteurs hyperboliques. Son approche est à comparer avec celle que nous proposons.

Il me semble aussi que cet exemple peut servir de base pour comparer les outils de la théorie ergodique pour les systèmes chaotiques, par exemple les *mesures de Sinai-Bowen-Ruelle* dites SRB [**68**], car dans le cas de l'équation de Lorenz, il existe une mesure SRB sur le flot dont le support soit l'attracteur (voir [**67**]). Cette comparaison doit nous fournir des renseignements intéressant sur l'eventuelle complémentarité des deux théories. Les articles de Marcelo Viana ([**69**],[**70**]) sont une source d'inspiration et de problèmes concernant les attracteurs et les nouveaux outils dynamiques à développer.

4.4. Divers. — Il y a bien sûr beaucoup d'autres thèmes à regarder, liés d'une manière ou d'une autre à la théorie de plongement stochastique. Par exemple, quels sont les analogues des théorèmes KAM, des ensembles d'Aubry-Mather,...etc. À vrai dire, il y a là un champ immense d'investiguation. Il existe des travaux dans cette directions (voir par exemple les travaux de L.C. Evans [**33**],[**34**] et aussi [**36**]), mais leur point de départ est de construire des “analogues” de certains théorèmes pour des EDP (voir [**33**]). La théorie de plongement stochastique elle fournit un cadre pour poser ces questions et dépasse la simple analogie de structures ou de notions. Je garde en tête ces questions, mais la théorie n'est pas encore assez bien développée au niveau géométrique, notamment le caractère symplectique stochastique, pour aborder pleinement ces problèmes.

Besançon le 16 mars 2005.

Références

[1] Andler M., Jean Leray (1906-1998), Proceedings of the American Philosophical Society, Vol. 144, no. 4, 2000.

[2] Audin M., *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours spécialisé, 8, Société Mathématiques de France et EDP Sciences, 2001.

[3] Arnold V.I., *Mathematical Mathods of classical mechanics*, 2d edition, Springer, 1989.

[4] Arnold V.I., Mathematical problems in classical physics, dans *Trends and perspective in applied mathematics*, Appl. Math. Sc. Series 100, Springer 1992, 1-20.

[5] Ben Adda F., Cresson J., Divergence d'échelle et différentiabilité, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 261-264, 2000.

[6] Ben Adda F., Cresson J., About non differentiable functions, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 721-737.

[7] Ben Adda F., Cresson J., Fractional differential equations and the Schrödinger equation, Applied Math. and Comp. 161 (2005), 323-345.

[8] Battaglia J., Puigsegur L., Kusiak A., Représentation non entière du transfert de chaleur par diffusion. Utilité pour la caractérisation et le contrôle non destructif thermique, à paraître dans International Journal of thermal sciences.

[9] Borredon L., Henry B., Wearne S., Differentiating the non-differentiable - Fractional calculus, Parabola 35(2) (1999) 9-19.

[10] Carmona P., Coutin L., Intégrale stochastique pour le mouvement brownien fractionnaire, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 231-236, 2000.

[11] Carmona P., Coutin L., Montseny G., Stochastic integration with respect to fractional brownian motion, Ann. I. H. Poincaré (2003), p. 27-68.

[12] Cartan E., Les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, I et II, Ann. Ec. Norm. 40, 1923, pp. 325-342 et 41, 1924, pp. 1-25.

[13] Cartier P., DeWitt-Morette C., A new perspective on functional integration, J. Math. Phys. 36(5), 1995, p. 2237-2312.

[14] Cartier P., DeWitt-Morette C., Functional integration, J. Math. Phys. 41(6), 2000, p. 4154-4187.

[15] Cartier P., L'intégrale des chemins de Feynman: d'une vue intuitive à un cadre rigoureux, dans *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, Vol. 1, Ed. Cassini, 2000, p. 25-59.

[16] Chung K. L., Zambrini J-C., *Introduction to random time and quantum randomness*, Monographs of the portuguese Mathematical Society, Vol. 1, World Scientific, 2003.

[17] Comte F., Renaud E., Long memory continuous time models, J. Econometrics 73 (1996), 101-150.

[18] Cresson J., Darses S., Stochastic embedding of dynamical systems, preprint, 60.p, 2005.

[19] Cresson J., Darses S., About the Titius-Bode law I. Thoery, en préparation, 2005.

[20] Cresson J., *Quelques problèmes de physique mathématique*, mémoire d'habilitation à diriger des recherches, 2001, 76.p.

[21] Cresson J., *Calcul moulien*, 90.p, 2005.

[22] Cresson J., Scale calculus and the Schrödinger equation, Journal of Mathematical Physics 2003.

[23] Cresson J, Non differentiable variational principles, Journal of Mathematical analysis and applications, 2005.

[24] Cresson J, About the fractional calculus, preprint, 10.p, 2005.

[25] Cresson J., About non differentiability, *Actes du colloque de Tarbes sur les dérivées non entières*, en préparation, 2005.

[26] Cresson J., Scale geometry I. Fractal coordinate systems and scale relativity, preprint, 2003.

[27] Cresson J., Non differentiable geometry, manuscrit, 2003.

[28] Darses S., Saussereau B., en préparation, 2005.

[29] Decreusefond L., Üstünel A., Stochastic analysis of the fractional Brownian motion and its application, Potential Ana. 10 (1997), 177-214.

[30] Dudley R., Norvaisa R., An introduction to p-variation and Young integrals, Tech. Rep. 1, University of Aarhus, 1998.

[31] Ecalle J., Vallet B., Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms, Math. Z. 229, 249-318, (1998).

[32] Eliasson H., Absolutely convergent series expansions for quasi-periodic motions, reports, Department of mathematics, University of Stockholm no.2, 1988.

[33] Evans L.C., Towards a quantum analog of weak KAM theory, 26.p, preprint

[34] Evans L.C., Gomes D., Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. Arch. Ration. Mech. Anal. 157, 1-33.

[35] Falkoner K., *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons, 1990.

[36] Gomes D.A., A stochastic analogue of Aubry-Mather theory, Nonlinearity 15 (2002), 581-603.

[37] Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Appl. Math. Sciences 42, (1983).

[38] Kervaire M., A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv. 34 (1960), 257-270.

[39] Laskar J., Astron. Astrophys. 287, L9 (1994).

[40] Laskar J., On the spacing of planetary systems, Phys. Rev. Letters, 2001.

[41] Lesniewski A., Noncommutative geometry, Notices of the AMS, Vol. 44, no. 7, 800-805.

[42] Leray J., Lagrangian analysis and mechanics: a mathematical structure related to asymtotics expansion and Maslov index, MIT Press (1981), 271 pages.

[43] Leray J., Programme de travail élaboré en 1998, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I, p.1-2, 1999.

[44] Marle C-M., Espace et temps physiques et description des systèmes mécaniques, *dans* Colloque International "Géométrie au vingtième siècle, 1930-2000", Institut Henri Poincaré, Paris, France, 24-30 septembre 2001.

[45] Misawa T., Yasue K., Canonical stochastic dynamical systems, J. Math. Phys. 28(11) (1987), 2569-2573.

[46] Morales C., Pujals E., Singular strange attractors on the boundary of Morse-Smale systems, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 30:693-717 (1997).

[47] Mumford D, The dawning of the age of stochasticity, in *Mathematics: Frontiers and perspectives*, V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur editors, AMS, 2000, 197-218.

[48] Nelson E., *Dynamical theories of Brownian motion*, second edition, Princeton, 2001.

[49] Nelson E., Stochastic mechanics and random fields,

[50] Nigmatullin R, Le Mehaute A, Is there a geometrical/physical meaning of the fractional integral with complex fractional exponent ?, preprint, 2005.

[51] Nottale L., Scale relativity and quantization of the universe I. Theoritical framework, Astron. Astrophys. 327, 867-899 (1997).

[52] Nottale L., Célérier M-N., Dirac equation in Scale relativity, preprint, 2001.

[53] Pavon M., Hamilton's principle in stochastic mechanics, J. Math. Phys. 36(12), (1995), 6774-6800.

[54] Pugh C., Smoothing a topological manifold, Topology and its applications 124 (2002), 487-503.

[55] Robert R., L'effet papillon n'existe plus!, Gaz. Math. No. 90 (2001), 11-25.

[56] Robert R., Turbulence et structure, Actes du 29ème congrès d'Analyse Nmérique: CANum'97 (Larnas, 1997), 119-129.

[57] Russo F., Vallois P., Forward, backward and symmetric stochastic integration, Prob. Theory Related fields 97 (1993), p. 403-421.

[58] Samko S., Kilbas A., Marichev O., *Fractional integrals and derivatives; Theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[59] Rutman R, On physical interpretations of fractional integration and differentiation, Theortical and Mathematical Physics, Vol. 105, No. 3, 1995.

[60] Schwartz L., *Théorie des distributions*, 2d édition, Herman Ed., 1966.

[61] Siebemmann L., Topological manifolds, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice, Vol. 2, 1970, pp. 133-163.

[62] Smale S., Mathematical problems for the Next century, Math. Intell., 1998.

[63] Sornette D., Discrete scale invariance and complex dimensions, Physics reports 297, 239-270 (1998).

[64] Tricot C., *Courbes et dimensions fractales*, 2d edition, Springer, 1999.

[65] Tucker W., Robust normal forms for saddles of analytic vector fields, Nonlinearity 17 (2001), 1965-1983.

[66] Tucker W., A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem, Found. Comp. Math. 2:1, 53-117, 2002.

[67] Tucker W., The Lorenz attractor exists, C. R. Acad. Sci. Math. t. 328, Série I, 1197-1202, 1999.

[68] Viana M., Stochastic dynamics of deterministic systems, Braz. Math. Colloq. 21, IMPA, 1997.

[69] Viana M., Dynamical systems: moving into the next century, dans *Mathematics unlimited*, 2001.

[70] Viana M., A probabilistic and geometric perspective, Doc. Math. Extra Volume ICM 1998.

[71] Yasue K., Stochastic calculus of variations, Journal of functional Analysis 41, 327-340 (1981).

[72] Yoccoz J-C., Travaux de Herman sur les tores invariants, Séminaire Bourbaki no. 754, 1992.

[73] Young L.S., Stochastic stability of hyperbolic attractors, Ergod. Th. and Dyn. Sys. 6:311-319 (1986).

[74] Zähle M., Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus, Proba. Theory Related Fields 111 (1998), p. 333-374.

JACKY CRESSON