Bull. Sci. math. 125, 3 (2001) 235–252

S0007-4497(00)01070-8/FLA

FORMES NORMALES ET PROBLÈME DU CENTRE

PAR

JACKY CRESSON [a], BERTRAND SCHUMAN [b]

[a] *Equipe de Mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France*

[b] *Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, tour 46-00, 5ème étage, B.P.172, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

Manuscrit présenté par B. GAVEAU, reçu en avril 2000

RÉSUMÉ. – Soit $X=(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x})+f(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ un champ de vecteurs polynomial de degré n du plan $\mathbb{R}^2$. En utilisant la théorie des formes prénormales de J. Ecalle, on caractérise les perturbations donnant naissance à un centre. On décrit ensuite la structure des monômes résonnants, en utilisant une caractérisation géométrique (l'invariance sous une action de $\mathbb{C}^*$) de ces monômes. On obtient un théorème de décomposition qui permet d'écrire chacun de ces monômes comme produit de monômes universels. On résout alors le problème de lecture dans le cas des conditions algébriques du centre réversible, pour une perturbation polynomiale de degré quelconque. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Mots Clés: Problème du centre; Formes prénormales

AMS classification: 58F14-58F21-34C05-34C15-5201-1401

ABSTRACT. – Let $X=(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x})+f(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ be a polynomial vector field of degree n in $\mathbb{R}^2$. Using the prenormal form theory of J. Ecalle, we characterize perturbations which give rise to a center. We describe the structure of the resonants monomials using a geometric characterization (invariance under a $\mathbb{C}^*$-action) of these monomials. We obtain a decomposition theorem which allow us to write these monomials as product of universal monomials. We then solve, for any degree, the reading problem for the reversible center algebraic conditions. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

E-mail addresses: cresson@math.univ-fcomte.fr (J. Cresson), schuman@ccr.jussieu.fr (B. Schuman).

1. Introduction

On considère les champs de vecteurs du plan de la forme

$$X = i\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + P(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \overline{P(z,\bar{z})}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{1}$$

où $P(z,\bar{z}) = \sum_{2\leqslant i+j\leqslant n} a_{i,j} z^i \bar{z}^j$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Le problème du centre consiste à trouver les conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients de P assurant l'existence d'une intégrale première analytique. Par un théorème de Moussu–Malgrange, il suffit de trouver une intégrale première formelle (nihilence suivant Ecalle [7]).

Dans cet article, on donne (§.2.2) des critères explicites de nihilence en utilisant la théorie des formes prénormales développée par Ecalle [7,9]. On démontre ensuite (§.3.2) que la variété du centre est une variété algébrique invariante sous une action de $\mathbb{C}^*$ non triviale et explicite. On établit (§.4) un théorème de décomposition des monômes $\mathbb{C}^*$-invariants comme produit de monômes appelés universels, car indépendant de la forme prénormale (remarque 3.1). On aborde au §.5.1 le problème de lecture : étant donnée une condition algébrique, déterminer si c'est une condition de centre via le critère de nihilence du §.2.2. On démontre (§.5.2) que le théorème de décomposition résout ce problème dans le cas des conditions algébriques du centre réversible.

2. Formes prénormales

Dans ce paragraphe, on donne des critères explicites de nihilence en utilisant la théorie des formes prénormales développée par J. Ecalle [7,9]. Le calcul moulien rend ces critères effectifs car entièrement algorithmiques. La lecture de ce paragraphe ne suppose pas une connaissance des travaux de J. Ecalle.

2.1. Formes prénormales

2.1.1. Moules et comoules

On rappelle quelques éléments du langage des moules-comoules et de la théorie des formes prénormales des champs de vecteurs d'Ecalle. On renvoie à [7–9] pour plus de détails.

Soit X un champ de vecteur de $\mathbb{C}^k$ de la forme $X = X^{lin} + \sum_m B_m$, où $X^{lin} = \lambda x \partial_x$, $x \in \mathbb{C}^k$, $\lambda \in \mathbb{C}^k$ et les B_m sont des opérateurs différentiels homogènes de degré $m \in \mathbb{Z}^k$, i.e., $B_m.x^\nu = \beta_{m\nu} x^{m+\nu}$ où $\nu \in \mathbb{N}^k$, $\beta_{m\nu} \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces degrés.

Pour tout $M \in \mathcal{M}$ on associe un poids $\omega = M.\lambda$. Un élément $M = (M_1, \dots, M_r)$ s'appelle une *séquence*. On note $S_{\mathcal{M}}$ l'ensemble de ces séquences. Pour tout $M \in S_{\mathcal{M}}$, $M = (M_1, \dots, M_r)$ on associe un vecteur poids $\omega(M) = (\omega_1, \dots, \omega_r)$. Pour tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ on note $\|\omega\| = \omega_1 + \cdots + \omega_r$ sa norme et $l(\omega) = r$ sa longueur.

On lui associe un champ de vecteurs, appelé forme prénormale continue, notée X_{pran} défini par

$$X_{\text{pran}} = X_l + \sum_{r \geqslant 1} \frac{1}{r} \sum_{M^* = (M_1, \dots, M_r)^*} \text{Pran}^{\omega(M^*)} B_{[M^*]}, \tag{2}$$

où les $\text{Pran}_\bullet$ sont des coefficients complexes, appelés *moules*, tels que $\text{Pran}^\omega = 0$ pour $\|\omega\| \neq 0$, $B_{[M]} = [B_{M_r}[\dots[B_{M_2}, B_{M_1}]\dots]$, avec $[.,.]$ le crochet de Lie et M^* représente l'ensemble des permutations possibles de $M = (M_1, \dots, M_r)$.

La forme prénormale *élaguée* [7,9] a un moule noté Tram. On définit le moule $Sam^\bullet$ par $Sam^0 = 1$ et $Sam^{\omega_1} = 0$ si $\omega_1 \doteq 0$ et si $l(\omega) \geqslant 2$, $\omega_1 \neq 0, \dots, \omega_r \neq 0$, on a

$$Sam^\omega = \frac{r-1}{r\omega_1 \dots \omega_r} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} (-1)^{i-1} \frac{\omega_i}{(i-1)!(r-i)!} \right). \tag{3}$$

Si un seul ω_i s'annule, $Sam^\omega = Sam^{\omega^1 0 \omega^2} = \frac{(-1)^{r_1}}{r_1! r_2! [\omega^1][\omega^2]}$, où $[\omega] = \omega_1 \dots \omega_r$. Enfin, si plus d'un ω_i s'annule, alors $Sam^\omega = 0$.

Le moule de la forme élaguée est définie par $Tram^\omega = (Sam^\bullet)^{\circ l(\omega)}$, où $(Sam^\bullet)^{\circ n} = Sam^\bullet \circ \cdots \circ Sam^\bullet$, n fois.

La composition de deux moules $D^\bullet = M^\bullet \circ N^\bullet$ est définie par

$$D^\omega = \sum_{\omega^1 \dots \omega^s = \omega,\ s \geqslant 0,\ \omega^i = \emptyset} M^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} N^{\omega^1} \dots N^{\omega^s}. \tag{4}$$

2.1.2. Forme prénormale

On note $\mathbb{Q}[a]$ (resp. $\mathbb{Z}[a]$) l'anneau des polynômes en les variables $a = (a_{i,j})$, à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Z}$).

Soit $M=(M_1,\ldots,M_r)$, $M_i\in\mathcal{M}$, une séquence telle que $\|\omega(M)\|=0$. Par définition des crochets de Lie on a

$$B_{[M]}=(z\bar{z})^{d(\omega(M))}\big(B^1_{[M]}z\partial_z+B^2_{[M]}\bar{z}\partial_{\bar{z}}\big), \tag{5}$$

où $d(\omega(M))\in\mathbb{N}$, avec $B^i_{[M]}\in\mathbb{Z}[a]$, $i=1,2$, de degré $l(M)$.

Soit $\mathcal{M}^m$ l'ensemble des séquences de $\mathcal{M}$ telles que $d(\omega(M))=m$ dans (5). On note $W^i_m=\sum_{M\in\mathcal{M}^m}(\sum_{M^*}\mathrm{Pran}^{\omega(M^*)}B^i_{[M^*]})$, $i=1,2$. On a $W^2_m=\overline{W^1_m}$ car le champ est réel.

THÉORÈME A. – *La forme prénormale élaguée du champ* (1) *est de la forme*

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{tram}}&=i(z\partial_z-\bar{z}\partial_{\bar{z}})+i\sum_{k\geqslant1}\big(\mathrm{Im}(U_k)+\mathrm{Re}(V_k)\big)(z\bar{z})^k(z\partial_z-\bar{z}\partial_{\bar{z}})\\ &\quad+\sum_{k\geqslant1}\big(\mathrm{Re}(U_k)-\mathrm{Im}(V_k)\big)(z\bar{z})^k(z\partial_z+\bar{z}\partial_{\bar{z}}), \end{aligned} \tag{6}$$

avec $U_k\in\mathbb{Q}[a]$, $V_k\in\mathbb{Q}[a]$ de la forme

$$\begin{aligned} U_m&=-i\sum_{\substack{M\in\mathcal{M}^m,\\ l(M)\ \mathrm{impair}}}\sum_{M^*}\mathit{Tram}^{\omega(M^*)}B^1_{[M^*]},\\ V_m&=\sum_{\substack{M\in\mathcal{M}^m,\\ l(M)\ \mathrm{pair}}}\sum_{M^*}\mathit{Tram}^{\omega(M^*)}B^1_{[M^*]}. \end{aligned} \tag{7}$$

Remarques 2.1. – (1) Le théorème A a notamment été obtenu par F. Takens ([14], proposition 2.3, p. 58), ou H. Dulac. Néanmoins, les coefficients (a_l et b_l dans les notations de [14]) de la forme normale de Takens n'ont pas une expression explicite de la forme (7). Ceci est nécessaire si l'on veut entreprendre une étude algébrique de ces coefficients.

(2) On pourrait sans doute obtenir un résultat analogue en utilisant les travaux de A. Baider [2]. Mais, comme le remarque l'auteur [2, p. 54], on ne dispose pas d'algorithme de construction de ces formes normales, bien qu'elle soit calculable.

(3) Le langage des moules-comoules d'Ecalle permet un calcul effectif de ces formes prénormales à l'aide d'un logiciel de calcul formel comme Maple (voir [4]).

(4) Le théorème est encore vrai si on remplace le moule *Tram* de la forme élaguée par le moule de la forme royale ou régale définies dans [9].

Démonstration du théorème. – Elle repose sur le :

LEMME 1. – *Le moule Tram*$^{\omega} \in i\mathbb{Q}$ *si* $l(\omega)$ *est pair, Tram*$^{\omega} \in \mathbb{Q}$ *sinon.*

Démonstration. – On a $\omega_i \in i\mathbb{Z}$, $\forall i$. Si $l(\omega) = 2n$, on vérifie que $\mathrm{Sam}^{\omega} \in i\mathbb{Q}$, et $\mathrm{Sam}^{\omega}\mathbb{Q}$ sinon. Il suffit de montrer que cette propriété est stable sous la composition des moules.

Suppsons $l(\omega) = 2m$.

Dans (4), si $s = 2n$, alors $\mathrm{Sam}^{\|\omega^1\|,\dots,\|\omega^s\|} \in i\mathbb{Q}$. Comme $l(\omega^1) + \cdots + l(\omega^s) = 2m$ (*), on doit avoir un nombre pair de séquences de longueur impair et donc un nombre pair de séquences de longueur pair. On en déduit $\mathrm{Sam}^{\omega^1} \dots \mathrm{Sam}^{\omega^s} \in \mathbb{Q}$.

Si $s = 2n + 1$, alors $\mathrm{Sam}^{\|\omega^1\|,\dots,\|\omega^s\|} \in \mathbb{Q}$. D'après (*), on doit avoir un nombre pair de séquences de longueur impair, donc un nombre impair de séquences de longueur pair, d'où $\mathrm{Sam}^{\omega^1} \dots \mathrm{Sam}^{\omega^s} \in i\mathbb{Q}$. On a donc $\mathrm{Tram}^{\omega} \in i\mathbb{Q}$ si $l(\omega)$ est pair.

Si $l(\omega) = 2n + 1$, un raisonnement analogue donne $\mathrm{Tram}^{\omega} \in \mathbb{Q}$. □

Nous avons donc $W_m^1 = U_m + i V_m$ avec $U_m, V_m \in \mathbb{Q}[a]$ définis comme dans (7).

2.2. Critère de nihilence

Un champ de vecteurs est dit *nihilent* lorsqu'il possède au moins une intégrale première formelle.

On appelle *degré de nihilence* de X, que l'on note *nil*, le nombre maximal d'intégrales premières formelles indépendantes de X. La nihilence est dite *totale* lorsque *nil* est égal au degré de *résonance positive*, c'est à dire, au nombre de multi-entiers $n \in \mathbb{N}^k$ indépendants pour lesquels $n.\lambda = 0$.

Avec les notations du §.2.1, on a :

LEMME 2. – *Un champ* $X = X_l + \sum_n B_n$ *est totalement nihilent si et seulement si pour toute forme prénormale* X_{pran}*, on a* $X_{\mathrm{pran}}.x^m = 0$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}^k$ *tel que* $m.\lambda = 0$.

Démonstration. – On note $x^n = x_1^{n_1} \dots x_\nu^{n_k}$ l'un des monômes de l'intégrale première ϕ tel que $|n| = v$, v étant la *valuation* de ϕ. On a

$$X.\phi = 0 \Leftrightarrow X.x^n = (n.\lambda)x^n + (\text{termes de degré} > v) = 0. \tag{8}$$

Donc, X possède une intégrale première si et seulement si $X_{\mathrm{pran}}.x^n = 0$ pour tout n tel que $n.\lambda = 0$. □

Les intégrales premières du champ (1) sont donc de la forme

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{k \geqslant 1} \Phi_k (z\bar{z})^k, \quad \Phi_k \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Un critère de nihilence totale est alors donné par :

LEMME 3. – *Le champ* (1) *est totalement nihilent si et seulement si* $\mathrm{Re}(U_k) - \mathrm{Im}(V_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. – On a $X_{tram}.(z\bar{z})^n = n(z\bar{z})^n \sum_{k \geqslant 1} (\mathrm{Re}(U_k) - \mathrm{Im}(V_k)) (z\bar{z})^k = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On en déduit $\mathrm{Re}(U_k) - \mathrm{Im}(V_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

2.2.1. Coefficients de Poincaré–Lyapounov

On note $H = z\bar{z}$ et $\omega = dH + Q(z, \bar{z})\, dz + \overline{Q(z, \bar{z})}\, d\bar{z}$, où $Q(z, \bar{z}) = \sum_{k,l} q_{k,l} z^k \bar{z}^l$. Soit $\omega_0 = i\, dz \wedge d\bar{z}$ telle que $i_X \omega_0 = \omega$, alors $q_{k,l} = i\bar{a}_{l,k}$. Le théorème A donne par dualité, $i_{X_{tram}} \omega_0 = \omega_{tram}$ avec

$$\omega_{tram} = dH + \sum_{k \geqslant 1} \mathrm{Re}(W_k)(z\bar{z})^k\, dH + \mathrm{Im}(W_k)(z\bar{z})^k (\bar{z}\, dz - z\, d\bar{z}), \tag{10}$$

où W_k est un polynôme à variables dans $q = (q_{i,j})$ et à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Le critère de nihilence se traduit par $\mathrm{Im}(W_k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. La décomposition moule-comoule (7) des W_k (appelés coefficients de Poincaré–Lyapounov [10]) permet une étude algébrique de ces coefficients.

3. $\mathbb{C}^*$-invariance et variété du centre

On démontre que la variété du centre est une variété algébrique invariante sous une action de $\mathbb{C}^*$ non triviale et explicite.

3.1. Idéal du centre

On rappelle quelques éléments de géométrie algébrique. Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{C}[x]$. L'ensemble

$$\Sigma(F)=\{x\in\mathbb{C}^m \mid f(x)=0,\ \forall f\in F\}, \tag{11}$$

est appelée une *variété algébrique* définie par F.

L'idéal engendré par F, défini par

$$a_F=\{p_1f_1+\cdots+p_nf_n \mid p_i\in\mathbb{C}[x],\ f_i\in F\}, \tag{12}$$

est tel que $\Sigma(F)=\Sigma(a_F)$.

On note a l'ensemble des coefficients a_{ij} du champ (1).

On note $C_k=\mathrm{Re}(U_k)-\mathrm{Im}(V_k)$, $\forall k\in\mathbb{N}$ avec U_k, V_k définis dans le théorème A.

L'annulation succesive des coefficients C_k définit une séquence d'ensembles algébriques emboités

$$\Sigma(C_1)\supset\Sigma(C_1,C_2)\supset\cdots\supset\Sigma(C_1,\ldots,C_n)\supset\cdots \tag{13}$$

On note $\mathcal{C}$ le sous ensemble de a ainsi décrit.

On sait que pour toute séquence d'ensembles algébriques emboités $Y_1\supset Y_2\supset\cdots$, il existe un entier r tel que $Y_r=Y_{r+1}$.

Le lemme 2.3 entraine donc

PROPOSITION 4. – *L'ensemble $\mathcal{C}$ des points de a tel que le champ* (1) *soit un centre est une variété algébrique.*

Remarque 1. – Ce résultat est bien connu [14, p. 55], ou H. Dulac [6].

A tout ensemble Z de $\mathbb{C}^m$, l'ensemble

$$i_Z=\{f\in\mathbb{C}[x] \mid f\,|_Z=0\}, \tag{14}$$

est un idéal, appelé *idéal d'annulation* de Z. Si Z est un ensemble algébrique $\Sigma(a)$ dans $\mathbb{C}^m$, on notera cet idéal a_Z.

IDÉAL DE DULAC. – *L'idéal de Dulac est l'idéal d'annulation de $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{D}$.*

On peut consulter l'article de S. Yakovenko [15, p. 205] où l'idéal de Dulac est décrit avec une base explicite des polynômes ainsi que la variété du centre dans le cas $n = 2$.

Les relations algébriques nécessaires et suffisantes d'existence d'un centre se lisent sur une forme prénormale choisie. Le théorème suivant montre que l'idéal d'annulation engendré par ces relations est indépendant de la transformation choisie.

THÉORÈME 1. – *L'idéal d'annulation engendré par les coefficients C_k, $k \in \mathbb{N}$, est indépendant de la transformation normalisante.*

Nous renvoyons à [10] pour la démonstration.

3.2. $\mathbb{C}^*$-invariance

On note a l'ensemble des coefficients $a_{i,j}$, $l = \mathrm{card}(a)$ et $\lambda = (i, -i)$. On pose $a = (a_1, \ldots, a_l)$. Pour tout $a_{i,j} \in a$, il existe un unique $M \in \mathcal{M}$ tel que B_M dépend de $a_{i,j}$. On note $M_{a_{i,j}}$ cet élément. On associe à chaque coefficient $a_{i,j}$ un poids $p = -i M_{a_{i,j}}.\lambda$. On note $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_l\}$ l'ensemble des poids associés aux éléments de a.

On note T l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^l$ définie par

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^l &\longrightarrow \mathbb{C}^l, \\ (\xi, a) &\longmapsto \left(\xi^{p_1} a_1, \ldots, \xi^{p_l} a_l\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Remarque 2. – Cette action est indépendante de la forme prénormale considérée.

On note $\mathbb{Q}[a]^T$ l'ensemble des polynômes à variable dans $a = (a_{i,j})$, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, invariants sous l'action de T.

LEMME 1. – *Pour tout $k \geqslant 1$, $U_k, V_k \in \mathbb{Q}[a]^T$.*

Démonstration. – Soit $M = (M_1, \ldots, M_r)$ telle que $\|\omega(M)\| = 0$. On a $T(B^i_{[M]}) = \xi^{i\|\omega(M)\|} B^i_{[M]}$ pour $i = 1, 2$, d'où $T(B^i_{[M]}) = B^i_{[M]}$. $\square$

Remarque 3. – Le résultat du lemme 3.1 n'est pas à confondre avec l'invariance de la forme normale sous l'action d'une rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ du système de coordonnées (voir [14], proposition 2.4, p. 58), ou H. Dulac [6], qui est une forme géométrique du théorème A. Au contraire, le lemme 3.1 est algébrique et lié à la seule donnée du spectre.

On déduit de la proposition 2.5 et du lemme 3.1 que la variété du centre est une variété algébrique invariante sous l'action de T.

3.3. Obstruction à la $\mathbb{C}^*$-invariance

Si $P_{2n}(z,\bar{z})$ est un polynôme homogène de degré $2n$, on a $\mathcal{M} = \{(i-1, 2n-i),\ i = 0,\ldots,2n,\ (2n,-1)\}$ et $\Omega = \{2i-2n-1,\ i = 0,\ldots,2n,\ 2n+1\}$.

LEMME 2. – *Si P est homogène de degré $2n$, il n'existe pas de séquence $M \in S_{\mathcal{M}}$ telles que $\|\omega(M)\| = 0$ et $l(M)$ impaire.*

Démonstration. – Soit $M = (M_1,\ldots,M_{2k+1})$, on a $\omega_i = 2p_i - 1$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$, d'où $\|\omega(M)\| = 2\sum_{i=1}^{2k+1} p_i - (2k+1)$. Si $\|\omega(M)\| = 0$, alors $2\sum_{i=1}^{2k+1} p_i = (2k+1)$ ce qui est impossible. □

On en déduit :

LEMME 3. – *Si $P_n(z,\bar{z})$ est un polynôme homogène de degré n, on a*
(i) *si $n = 2m$, $U_k = 0$ et $V_{2k-1} = 0$ pour tout $k \geqslant 1$,*
(ii) *si $n = 2m+1$, $U_{2k} = 0$ et $V_{2k-1} = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.*

Démonstration. – Dans le cas homogène, on a

$$\mathcal{M}^m = \{M \in S_{\mathcal{M}}, d(\omega(M)) = m\} = \{M \in S_{\mathcal{M}}, l(\omega(M)) = m\}. \tag{16}$$

Par définition de U_m et V_m, on en déduit : si $m = 2k$, alors $U_{2k} = 0$ et si $m = 2k-1$ alors $V_{2k-1} = 0$. De plus, si $n = 2q$ on a $U_k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ par le lemme 3.3. □

4. Monômes résonnants universels

On reprend les notations du §.3.2. L'ensemble des monômes à variables dans $a = (a_{i,j})$, invariants sous l'action de T, est en bijection avec le monoide $\{d \in \mathbb{N}^l; d.p = 0\}$ où $p = (p_1,\ldots,p_l)$ et . est le produit scalaire usuel. On démontre que ces monômes se décomposent à l'aide d'un nombre fini de monômes invariants, caractérisés par la donnée d'une base du monoide. Dans le cas de l'action décrite au §.3.2, un théorème de décomposition explicite est obtenu. Dans [13, pp. 20–49], K.S. Sibirsky a obtenu un résultat analogue pour une perturbation cubique du champ (1).

4.1. $\mathbb{C}^*$-invariance et monoide

La $\mathbb{C}^*$-invariance structure les monômes résonnant. Soit $b=(a,\bar{a})$ l'ensemble des coefficients du polynôme P. On suppose $a=(a_{i,j})\in\mathbb{C}^N$, alors $b\in\mathbb{C}^{2N}$. On note p_k les poids des b_k définis par le poids du coefficient respectif dans a ou $\bar{a}$.

Soit $d\in\mathbb{N}^{2N}$ et $b^\nu=b_1^{d_1}\dots b_{2N}^{d_{2N}}$ un monôme résonnant $\mathbb{C}^*$-invariant. Alors, on a

$$d_1p_1+\cdots+d_{2N}p_{2N}=0. \tag{R}$$

Pour $x\in\mathbb{R}^{2N}$, $y\in\mathbb{R}^{2N}$, on note $x.y$ le produit scalaire euclidien usuel. On note $p=(p_k)\in\mathbb{Z}^{2N}$. La relation de résonance (R) se traduit donc par $d.p=0$. On note $\mathcal{R}$ l'opérateur $\mathcal{R}:\mathbb{Z}^{2N}\to\mathbb{Z}$ défini pour $p\in\mathbb{N}^{2N}$ par $\mathcal{R}(x)=x.p$. On défini de même l'opérateur $\mathcal{R}^+=\mathcal{R}\mid_{\mathbb{N}^{2N}}$. Les éléments $\mathbb{C}^*$-invariants sont dans le noyau de $\mathcal{R}^+$.

L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}^{2N}$ donne une structure de $\mathbb{Z}$-module aux éléments de $ker(\mathcal{R})$.

4.1.1. Cônes et monoides

Nous allons maintenant démontrer qu'il existe une "base" des monômes résonnants $\mathbb{C}^*$-invariants. Pour cela, on introduit quelques définitions.

Cône : Soit $M=\{y_1,\dots,y_k\}\subset\mathbb{R}^n$, l'ensemble des combinaisons linéaires positives

$$x=\lambda_1y_1+\cdots+\lambda_ky_k,$$

pour $\lambda_1\geqslant 0,\dots,\lambda_k\geqslant 0$, d'éléments de M est appelée le *cône polyédral* déterminé par M. On le note $\sigma=\mathbb{R}^+y_1+\cdots+\mathbb{R}^+y_k$.

Pour $u\in\mathbb{R}^n$ fixé, $u=0$, et $\alpha\in\mathbb{R}$, l'ensemble $H=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x.u=\alpha\}$ est un hyperplan. Les ensembles $H^+=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x.u\geqslant\alpha\}$ et $H^-=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x.u\leqslant\alpha\}$ sont appelés les *demi-espaces* bornés par H. Si $\sigma\subset H^+$ et $\alpha=0$, alors on dit que σ a une *pointe*, précisément 0.

Monoide : Un semi-groupe A, i.e. un ensemble S non vide muni d'une opération associative $+:S\times S\to S$, est appelé un *monoide* si il est commutatif, possède un zéro et satisfait à la loi d'élimination, $s+x=t+x$ implique $s=t$ pour tout $s,t,x\in S$.

On a alors le lemme suivant :

LEMME 4. – *Si σ est un cône, alors $\sigma\cap\mathbb{Z}^n$ est un monoide.*

On dira qu'un monoide est de type *fini* si il existe $a_1, \ldots, a_r \in S$, appelé *générateurs,* tels que

$$S = \mathbb{N}a_1 + \cdots + \mathbb{N}a_r.$$

Un système de générateurs est dit minimal si aucun de ses éléments n'est engendré par les autres.

On a alors le lemme de finitude suivant :

LEMME 5. – *Si σ a une pointe alors le monoide $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ a* (*à rénumérotation près*) *un unique système minimal de générateurs.*

4.1.2. Monômes universels

On considère le cône σ défini par (R) en supposant les $\nu_k \in \mathbb{R}$. Il a une pointe car $\sigma = H$. On peux donc appliquer le lemme de finitude sur $\sigma \cap \mathbb{Z}^n = \rho$ qui correspond à la $\mathbb{C}^*$-invariance. Le monoide ρ est donc de type fini.

Notons $e_1, \ldots, e_r,\ e_i \in \mathbb{N}^{2N}$ un système de générateurs de ce monoide. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^{2N}$, $k = \sum \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. La traduction sur le monôme b^k est

$$b^k = (b^{e_1})^{\alpha_1} \ldots (b^{e_r})^{\alpha_r}. \tag{17}$$

On appelle les monômes b^{e_k} des *monômes universels*. On les note U_k. La terminologie de monôme universel vient de leur caractérisation. Les monômes résonnants $\mathbb{C}^*$-invariants intervenant dans les formes prénormales dépendent de la transformation normalisante choisie. Néanmoins, la décomposition est elle indépendante de la forme prénormale considérée.

L'objet du prochain paragraphe est de déterminer le système minimal de générateurs du monoide d'invariance.

4.2. Théorème de décomposition

4.2.1. Notations

On a $a^+(2m) = (a_{m+1,m-1}, \ldots, a_{i,2m-i}, \ldots, a_{2m,0})$, $n^+(2m) = m$ et $a^-(2m) = (a_{0,2m}, \ldots, a_{i,2m-i}, \ldots, a_{m,m})$, $n^-(2m) = m+1$ et $a^0(2m) = \emptyset$, $n^0(2m) = 0$. De même, on a $a^+(2m+1) = (a_{m+2,m-1}, \ldots, a_{i,2m+1-i}, \ldots, a_{2m+1,0})$, $n^+(2m+1) = m$ et $a^-(2m+1) = (a_{0,2m+1}, \ldots, a_{i,2m-i}, \ldots, a_{m,m+1})$, $n^-(2m+1) = m+1$ et $a^0(2m+1) = a_{m+1,m}$, $n^0(2m+1) = 1$.

On note a le vecteur de $\mathbb{C}^N$ défini par $a = (a^+(2), \ldots, a^+(n), a^-(2), \ldots, a^-(n))$, avec $N = N^+ + N^-$ où $N^+ = m^2$ (resp. $N^+ = m^2 + m$)

et $N^- = m^2 + 2m - 1$ (resp. $N^- = m^2 + 3m$) si $n = 2m$ (resp. $n = 2m + 1$). De même, on note $a_0 = (a_0(2), \ldots, a_0(n))$, avec $N^0 = m - 1$ (resp. $N^0 = m$) si $n = 2m$ (resp. $n = 2m + 1$). Soit p le vecteur de $\mathbb{Z}^N$ défini par les poids correspondants aux coefficients de $a = (a_1^+, \ldots, a_{N^+}^+, a_1^-, \ldots, a_{N^-}^-)$, noté $p = (p_1^+, \ldots, p_{N^+}^+; -p_1^-, \ldots, -p_{N^-}^-)$. Soit $s = N^- - N^+$ la signature de l'ensemble. On a toujours $s > 0$. Pour tout $a \in \mathbb{C}^N$ et $l \in \mathbb{Z}^N$, on note $a^l = a_1^{l_1} \ldots a_N^{l_N}$ et $|a|^l = |a_1|^{l_1} \ldots |a_N|^{l_N}$.

4.2.2. Monômes universels et théorème de décomposition

Un monôme de degré $d \in \mathbb{N}$ de U_k ou V_k est de la forme $a^l \bar{a}^{\bar{l}}$, avec $l = (l_1, \ldots, l_N)$, $\bar{l} = (\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_N)$ où $l \in \mathbb{N}^N$, $\bar{l} \in \mathbb{N}^N$, tels que $\sum_{i=1}^N (l_i + \bar{l}_i) = d$.

DÉFINITION 1 (Monômes universels). – *On appelle monômes universels les monômes suivants* :

$$U_i = (a_i^+)^{p_i^-} (a_i^-)^{p_i^+}, \quad U_{N^+ + i} = (a_i^+)^{p_{N^+ + 1}^-} (a_{N^+ + 1}^-)^{p_i^+},$$

$$U_{2N^+ + j} = (a_{j+1}^+)^{p_{N^+ + j + 1}^-} (a_{N^+ + j + 1}^-)^{p_{j+1}^+}, \quad i = 1, \ldots, N^+, \ j = 1, \ldots, s.$$

Ces monômes sont obtenus en écrivant explicitement l'invariance sous l'action de $\mathbb{C}^*$. Celle-ci définit un $\mathbb{Z}$-module, uniquement déterminé par une relation sur les poids des coefficients. Le choix d'une base canonique de ce réseau donne les monômes universels, constituants élémentaires des monômes résonnants. En effet, on a :

THÉORÈME 1 (De décomposition). – *Tous les monômes résonnants s'écrivent sous la forme suivante* :

$$(a_0)^l (\bar{a}_0)^{\bar{l}} \left(\prod_{i=1}^{2n-1} U_i^{k_i} \right) |a|^m,$$

avec $m \in \mathbb{Z}^N$ tel que $m_i - p_i^- k_i \in \mathbb{N}$ et $m_{N^+ + i} - p_i^+ k_i - p_{N^+ + 1}^- k_{i + N^+} - p_{N^+ + i}^- k_{2N^+ + i} \in \mathbb{N}$ pour $i = 1, \ldots, N^+$, ainsi que $m_{N^+ + 1} - \sum_{i=1}^{N^+} k_i p_i^- \in \mathbb{N}$, et $m_{N^+ + j} - k_{2N^+ + j} p_j^- \in \mathbb{N}$ pour $j = 1, \ldots, s$.

Démonstration. – La démonstration s'effectue en deux étapes. La première traduit le problème de la décomposition des monômes résonnants en la recherche d'une base d'un $\mathbb{Z}$-module. La seconde étape consiste à transcrire l'information sur les poids en termes des coefficients.

(a) *Réseau.* – On écrit l'action de $\mathbb{C}^*$ sur un monôme résonnant de la forme $a^l\bar{a}^{\bar{l}}$, où $l \in \mathbb{N}^N$, $\bar{l} \in \mathbb{N}^N$. On a alors $l.p - \bar{l}.p = 0$, où p est le vecteur poids. Afin de simplifier notre approche, nous préférons travailler sur un réseau plutôt qu'un semi-groupe. On a donc la relation de résonance suivante pour $k = l - \bar{l} \in \mathbb{Z}^N$,

$$k.p = 0. \tag{R}$$

LEMME 3 (Base du réseau). – *Une base du $\mathbb{Z}$-module $k.p = 0$, où $k \in \mathbb{Z}^N$, est donnée par les $N-1$ vecteurs suivants* :

$$\begin{aligned}
e_i &= (0, \dots, p_i^-, \dots\dots, 0;\ 0, \dots, p_i^+, \dots, 0;\\
&\qquad 0, \dots\dots, 0), \quad i = 1, \dots, N^+,\\
e_{i+N^+} &= (0, \dots, p_{N^++1}^-, \dots, 0;\ 0, \dots\dots, 0;\\
&\qquad p_i^+, \dots\dots, 0), \quad i = 1, \dots, N^+,\\
e_{2N^++i-1} &= (0, \dots, p_{N^++i}^-, \dots, 0;\ 0, \dots\dots, 0;\\
&\qquad 0, \dots, p_i^+, \dots, 0), \quad i = 2, \dots, s.
\end{aligned}$$

Le choix de cette base est minimale dans le sens où les vecteurs la constituant ne possèdent que deux composantes non nulles.

Démonstration. – Ces vecteurs sont évidemment libres (simple calcul). Nous allons donc simplement montrer qu'ils sont générateurs. Soient $\alpha \in \mathbb{Z}^N$ et un vecteur $k \in \mathbb{Z}^N$ solution de l'équation de résonance. On cherche une décomposition de k sous la forme

$$k = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . e_i .$$

On obtient le système d'équations suivant :

$$k_i = \alpha_i p_i^- + \alpha_{N^++i} p_{N^++i}^- + \left(1 - \delta_1^i\right) p_{N^++i}^-, \quad i = 1, \dots, N^+, \tag{18}$$

$$k_{N^++i} = \alpha_i p_i^+, \quad i = 1, \dots, N^+, \tag{19}$$

$$k_{2N^++1} = \sum_{i=1}^{N^+} \alpha_{N^++i} p_i^+, \tag{20}$$

$$k_{2N^++i} = \alpha_{2N^++i-1} p_i^+, \quad i = 2, \dots, s, \tag{21}$$

avec $\delta_1^i = 1$ si $i = 1$, 0 sinon.

Des équations (17), (18) et (20), on déduit α_i pour $i = 1, \ldots, N$. Il reste à vérifier la consistence de ce choix avec l'equation (19). On a

$$\sum_{i=1}^{N^+} (\alpha_{N^+ + i} p_{N^+ + 1}^-) p_i^+ = \sum_{i=1}^{N^+} k_i p_i^+ - \sum_{i=1}^{N^+} (\alpha_i p_i^+) p_i^- - \sum_{i=2}^{N^+} (\alpha_{2N^+ + i - 1} p_i^+) p_{N^+ + i}^-, \tag{22}$$

en utilisant l'équation (17). On déduit de (18) et (20),

$$\sum_{i=1}^{N^+} (\alpha_{N^+ + i} p_{N^+ + 1}^-) p_i^+ = \sum_{i=1}^{N^+} k_i p_i^+ - \sum_{i=1}^{N^+} k_{N^+ + i} p_i^- - \sum_{i=2}^{N^+} k_{2N^+ + i} p_{N^+ + i}^-. \tag{23}$$

Comme par définition, k est une solution de l'équation résonnante, nous avons

$$\sum_{i=1}^{N^+} k_i p_i^+ - \sum_{i=1}^{N^+} k_{N^+ + i} p_i^- - \sum_{i=2}^{N^+} k_{2N^+ + i} p_{N^+ + i}^- = k_{2N^+ + 1} p_{N^+ + 1}^-, \tag{24}$$

ce qui redonne bien l'équation (19). $\square$

(b) *Réduction.* – Afin d'obtenir les éléments minimaux, il convient de réduire les vecteurs précédents. On note $c_i = \mathrm{PGCD}(p_i^-, p_i^+)$ pour $i = 1, \ldots, N$. On note $e_i^r \in \mathbb{Z}^N$ le vecteur associé à e_i, défini par $e_i^r = e_i c_i^{-1}$. On obtient donc un vecteur de base dont les éléments non nuls sont premiers entre eux.

(c) *Transcription en terme de monômes résonnants.* – Le lemme précédent, nous permet de décomposer tout élément $k \in \mathbb{Z}^N$ sous la forme $k = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i$, d'où $l = \bar{l} + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i$. Alors, on a

$$a^l \bar{a}^{\bar{l}} = |a|^{2\bar{l}} a^{\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i e_i},$$

soit

$$a^l \bar{a}^{\bar{l}} = |a|^{2\bar{l}} \prod_{i=1}^{N-1} (a^{e_i})^{\alpha_i} = |a|^{2\bar{l}} \prod_{i=1}^{N-1} \left(a^{e_i^r}\right)^{c_i \alpha_i}.$$

On note $U_i = a^{e_i^r}$. On vérifie que les U_i sont les monômes universels de la définition 4.1. □

5. Problème de lecture et problème du centre

5.1. Le problème de lecture

Le critère de nihilence formulé dans le lemme 2.3 donne une approche algorithmique du problème du centre. De nombreuses méthode algébriques (bases de Gröbner et ses variantes, théorie de l'élimination) permettent de trouver des conditions algébriques “a priori” de centre [10, 11]. Ces conditions étant données, on cherche à savoir si elles vérifient l'infinité des équations du critère de nihilence.

PROBLÈME DE LECTURE. – *Etant données des conditions algébriques, déterminer si elles donnent un centre via le critère de nihilence.*

Dans le cas des conditions algébriques conduisant à un système hamiltonien, le champ possède un centre par le théorème de Poincaré. Néanmoins, il est en général difficile de “voir” qu'un champ est hamiltonien sauf si on en est convaincu par avance [1]. Les conditions algébriques étant données, il n'existe, à notre connaissance, aucune méthode générale permettant de lire la nihilence du champ sans une idée de sa structure.

La solution de ce problème passe par une meilleure compréhension des formes prénormales en général, notamment de leur structure. Le théorème de décomposition, conséquence de la $\mathbb{C}^*$-invariance du §.3.2, doit être considérée comme un premier pas en ce sens.

Dans le prochain paragraphe, on montre comment ce théorème résout le problème de lecture dans le cas des conditions algébriques du centre réversible.

Le problème de lecture conduit au problème suivant :

PROBLÈME DE LA PROFONDEUR. – *Etant donnée une condition algébrique, quel est le nombre minimal $k_0 \in \mathbb{N}$ d'équations $C_k = 0$, $k \leqslant k_0$ nécessaires pour s'assurer que c'est une condition de centre.*

La finitude découle du caractère algébrique de la variété du centre. On renvoie à [4,12] pour plus de détails.

5.2. Centre réversible

On note les monômes universels (définition 4.1) de degré pair (resp. impair) P_k (resp. I_k), $k = 1, \dots, \hat{N}$ (resp. $k = 1, \dots, \check{N}$).

THÉORÈME 4. – *Les conditions algébriques*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}(P_k) = 0, \quad i = 1, \dots, \hat{N}, \\ &\operatorname{Re}(I_k) = 0, \quad i = 1, \dots, \check{N} \end{aligned} \tag{CS}$$

sont des conditions de centre.

Démonstration. – Soit un monôme résonnant de degré pair. Par le théorème de décomposition, il s'écrit sous la forme d'un produit de monômes universels. La contrainte du degré impose un nombre pair de I_k. La condition (CS) donne $I_k \in i\mathbb{R}$ pour $k = 1, \dots, \hat{N}$. Le produit d'un nombre pair de I_k est donc réel. Tous les P_k étant par ailleurs réels via (CS), on en déduit que tout monôme résonnant de degré pair est réel. Par un raisonnement analogue, on montre que tout monôme résonnant de degré impair est purement imaginaire. D'après la définition des U_k, V_k du théorème A on en déduit $\operatorname{Re}(U_k) = 0$ et $\operatorname{Im}(V_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On conclut par le lemme 2.3 que les conditions (CS) sont des conditions de centre. □

Un champ de vecteurs est dit réversible si il existe un angle $\theta \in \mathbb{S}^1$ tel qu'il soit invariant par la transformation $(z, t) \mapsto (\bar{z}\mathrm{e}^{2i\theta}, -t)$. On déduit du théorème 5.1 :

COROLLAIRE 1. – *La condition* (CS) *est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un centre réversible.*

Démonstration. – On reprend les notations du §.4.2.1. La symétrie du champ par rapport à une droite d'inclinaison $\theta \in \mathbb{S}^1$ dans le plan entraine les relations

$$a_l^\sigma = -\bar{a}_l^\sigma \mathrm{e}^{-i\sigma 2\theta p_l^\sigma}, \tag{SYM}$$

pour $\sigma = \pm$ et $l = 1, \dots, N^+$ si $\sigma = +$, $l = 1, \dots, N^+ + s$ sinon. On en déduit

$$\left(a_l^+\right)^{p_m^-}\left(a_m^-\right)^{p_l^+} = (-1)^{p_l^+ + p_m^-}\left(\bar{a}_l^+\right)^{p_m^-}\left(\bar{a}_m^-\right)^{p_l^+},$$

pour tout couple (l, m). On a donc, pour tout monôme universel U_i (définition 4.1)

$$U_i = (-1)^{\deg(U_i)} \bar{U}_i.$$

On en déduit que si U_i est un monôme pair, on doit avoir $\mathrm{Im}(U_i) = 0$, et $\mathrm{Re}(U_i) = 0$ sinon.

Réciproquement, supposons les conditions (CS) données. On a un centre par le théorème 5.1. La contrainte sur le monôme universel $U_{N^+ + l}$, $l = 1, \ldots, N^+$, s'écrit

$$\left(a_l^+\right)^{p^-_{N^++1}} \left(a^-_{N^++1}\right)^{p_l^+} = (-1)^{p_l^+ + p^-_{N^++1}} \left(\bar{a}_l^+\right)^{p^-_{N^++1}} \left(\bar{a}^-_{N^++1}\right)^{p_l^+}.$$

On pose

$$\mathrm{e}^{2i\theta p^-_{N^++1}} = -\frac{\bar{a}^-_{N^++1}}{a^-_{N^++1}}.$$

On a alors

$$a_l^+ = -a_l^+ \mathrm{e}^{-2i\theta p_l^+}, \quad l = 1, \ldots, N^+.$$

Un calcul analogue sur les contraintes associées aux monômes universels U_i, $U_{2N^+ + j}$, $i = 1, \ldots, N^+$, $j = 1, \ldots, s$ donne le reste des conditions de symétrie du champ par rapport à la droite de pente θ dans le plan. □

RÉFÉRENCES

[1] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I., Mathematical aspect of classical and celestial mechanics, in: Arnold V.I. (Ed.), Encyclopaedia of Math. Sciences, Dynamical Systems III, Springer-Verlag, 1993.

[2] Baider A., Unique normal forms for vector fields and Hamiltonians, J. Differential Equations 78 (1989) 33–52.

[3] Cresson J., Critères de nihilence, Note aux CRAS, 1999.

[4] Cresson J., Formes prénormales des champs de vecteurs polynomiaux, Preprint, 1999.

[5] Cresson J., Schuman B., Formes normales et problème du centre symétrique, C. R. Acad. Sci., Série I 327 (1998) 581–584.

[6] Dulac H., Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour points singuliers un centre, Bull. Sci. Math. 32 (2) (1908) 230–252.

[7] Ecalle J., Singularités non abordables par la géométrie, Ann. Inst. Fourier 42 (1992) 73–164.

[8] Ecalle J., Schlomiuk D., The nilpotent part and distinguished form of resonant vector fields or diffeomorphisms, Ann. Inst. Fourier 43 (1993) 1407–1483.
[9] Ecalle J., Vallet B., Correction and linearization of resonnant vector fields or diffeomorphisms, Math. Z. 229 (1998) 249–318.
[10] Françoise J.-P., Succesive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields, Ergodic Theory Dynamical Systems 16 (1996) 87–96.
[11] Fronville A., Singularité résiduelle et problème du centre, Thèse, Paris VI, 1996.
[12] Schuman B., Correction et linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux, Preprint, 1999.
[13] Sibirsky K.S., Invariants Algébriques des Équations Différentielles et Matrices, Schtrintsa, Kishinev, 1976.
[14] Takens F., Singularities of vector fields, Publ. Math. IHES 43 (1974) 47–100.
[15] Yakovenko S., A geometric proof of Bautin theorem, in: Concerning the Hilbert Sixteenth Problem, Amer. Math. Soc. Transl., Series 2, Vol. 165, 1995, pp. 203–219.