Thèse

Présentée à

l'Université de Metz

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Metz
Spécialité : Mathématiques appliquées

par

Isabelle GREFF

Schémas boîte :
Etude théorique et numérique

Soutenue le 15 décembre 2003 devant le Jury composé de :

Monsieur Roland BECKER,	Professeur à l'Université de Pau et des pays de l'Adour Rapporteur, Excusé
Madame Vivette GIRAULT,	Maître de Conférences à l'Université de Paris VI Rapporteur

Monsieur Jean-Pierre CROISILLE,	Professeur à l'Université de Metz, Directeur de thèse
Monsieur François DUBOIS,	Professeur au CNAM, Président du jury
Monsieur Alexandre ERN,	Professeur à l'ENPC, Invité
Monsieur Jean-Luc GUERMOND,	Directeur de Recherches CNRS au LIMSI
Monsieur Eric SONNENDRUCKER,	Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz
UFR MIM - CNRS UMR 7122, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 1

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier plus particulièrement Monsieur Jean-Pierre Croisille d'avoir accepté de diriger cette thèse, de m'avoir encadrée et inititiée au travail de la recherche. J'ai apprécié sa disponibilité et les discussions intéressantes que nous avons menées.

Toute ma considération va à Monsieur Roland Becker pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. Ses questions intéressantes et ses encouragements m'ont aidée.

Un grand merci à Madame Vivette Girault qui m'a fait l'honneur d'apporter ses remarques et ses commentaires sur ce travail. Ils m'ont été fort utiles pour affiner la rédaction de ce mémoire.

J'adresse tous mes remerciements à Messieurs François Dubois, Jean-Luc Guermond et Eric Sonnendrucker pour avoir participé au jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur Alexandre Ern d'avoir été présent lors de la soutenance de cette thèse et surtout de nous avoir encouragées Linda El Alaoui et moi pour notre travail de réflexion sur les schémas boîte pour l'équation de convection-diffusion.

Je remercie le Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz pour m'avoir accueillie et soutenue pendant ces années et m'avoir permis de finaliser ma thèse.

Je remercie également l'Institut Max-Planck pour les Mathématiques appliquées aux sciences de Leipzig et plus particulièrement Monsieur Wolfgang Hackbusch et son équipe pour leur accueil chaleureux depuis septembre 2003.

Sommaire

Introduction générale

Présentation des schémas boîte

Schémas boîte en dimension 1

La notion de schémas boîte est introduite par Keller dans [31]. Il s'agit à l'origine d'une méthode numérique pour l'approximation de l'équation de convection-diffusion 1d. Cette méthode est à l'interface des méthodes de différences finies et des méthodes de volumes finis. Elle s'apparente à la méthode de différences finies au sens où les inconnues discrètes sont situées au niveau des nœuds du maillage. Elle s'apparente aussi à la méthode de volumes finis au sens où la discrétisation s'opère en moyennant les équations sur les cellules du maillage. Dans le cas des schémas boîte, le maillage est utilisé à la fois pour localiser les inconnues au niveau des nœuds du maillage et pour localiser les volumes de contrôles, sur lesquels on moyenne les équations. L'inconvénient majeur est que le nombre de nœuds est différent du nombre de volumes en général : *a priori*, on n'a pas le bon décompte entre nombre d'inconnues et nombre d'équations. Ceci n'est le cas ni pour la méthode de différences finies, où la discrétisation se fait au niveau des nœuds, ni pour la méthode de volumes finis, où les inconnues sont situées au niveau des volumes de contrôle. Cependant pour des opérateurs elliptiques, H.B. Keller a remarqué qu'en ajoutant au système d'équations une variable auxiliaire p égale au flux, ainsi que les conditions limites de Dirichlet pour l'inconnue primale, on obtient le bon décompte :

$$\text{nombres d'équations} = \text{nombres d'inconnues}.$$

C'est-à-dire $2\times(N-1)$ boîtes $+2$ C.L. $= 2N$ inconnues. A la suite de Keller, l'effort principal a porté sur les lois de conservation hyperboliques (convection pure, équations d'Euler...), Courbet [12, 13], Chattot [8, 9], Wornom, Hafez [46, 47]. Cependant ces travaux sont restés peu diffusés et peu étudiés en raison du succès de la méthode des volumes finis classique (MUSCL), qui utilise des flux numériques d'interface.

Schémas boîte en dimension 2

En dimension 2 et 3, la difficulté principale des schémas boîte réside dans l'adéquation entre nombre d'équations et nombre d'inconnues. Une étude préliminaire menée par B. Courbet dans [14] a cependant proposé une idée originale pour un problème elliptique sur maillages triangulaires. Si on localise u et $p \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ au milieu des arêtes du maillage, alors, on obtient un bon décompte. L'interprétation de cette observation en terme d'espaces d'éléments finis mixtes a été effectuée ensuite par B. Courbet et J-P. Croisille dans [15]. La méthode boîte peut donc se voir comme une méthode de type Petrov-Galerkin, où les espaces d'approximation sont des espaces d'éléments finis et les espaces de test sont de type Galerkin discontinus.

Principes généraux des schémas boîte

Schémas boîte elliptiques et éléments finis mixtes

Peut-on dégager un cadre général pour le design de tels schémas pour les problèmes elliptiques ? C'est-à-dire existe-t-il d'une part des espaces d'éléments finis $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ et d'autre part des espaces de type Galerkin discontinus $M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ tels que le problème discret : chercher $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_K \int_K (\operatorname{div} p_h + f)\, v_h \, dx = 0 \ , \quad \forall v_h \in M_{2,h} \\ \displaystyle\sum_K \int_K (p_h - \nabla u_h) \cdot q_h \, dx = 0 \ , \quad \forall q_h \in X_{2,h} \end{array} \right. \tag{0.1}$$

admette une unique solution qui converge vers la solution exacte du problème mixte de Poisson ? Le problème discret (0.1) est alors appelé **Schéma boîte**. Le choix des espaces $M_{1,h}$, $X_{1,h}$, $M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ n'est pas simple et doit satisfaire la condition nécessaire mais non suffisante

$$\dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} = \dim M_{2,h} + \dim X_{2,h} \, . \tag{0.2}$$

On s'est attaché au cas particulier des maillages en triangles et en rectangles. On mêle de façon harmonieuse des espaces d'éléments finis pour les espaces d'approximation à des espaces de type Galerkin discontinus pour les fonctions tests. Les schémas boîte ainsi construits sont équivalents à des méthodes d'éléments finis mixtes usuelles. La solution $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ du schéma boîte (0.1) est en fait, la solution d'une formulation variationnelle pour l'inconnue scalaire u_h et une réécriture locale du gradient p_h, en fonction de u_h. D'autre part, dans certains cas, on peut reconstruire la solution de problèmes mixtes classiques (Raviart-Thomas) à partir de la solution $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ du schéma boîte (0.1).

Extension des schémas boîte à des équations de convection-diffusion

Le point de départ est l'article de B. Courbet [12], où un design de schémas boîte en 1d pour l'équation de convection $u_t + c\, u_x = 0$ est proposé. Le principe consiste à prendre la moyenne de l'équation de convection sur les mailles 1d :

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_{j-1/2}(t) + c\,\frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h_{j-1/2}} = 0$$

et de choisir ensuite une formule de quadrature pour approcher la moyenne $\bar{u}_{j-1/2}(t)$ de la boîte $j-1/2$ en fonction des inconnues nodales $u_j(t)$ et $u_{j-1}(t)$. Il s'agit donc d'un problème de quadrature numérique et non pas de flux numérique. Quelle est la nature de cette moyenne numérique ? Afin de refléter une approximation locale dans la boîte $K_{j-1/2}$, on choisit une formule du type

$$\bar{u}_{j-1/2}(t) = \frac{u_j(t) + u_{j-1}(t)}{2} + D_u(t)\,(u_j(t) - u_{j-1}(t))$$

où $D_u(t)$ est un coefficient de décentrement par boîte à préciser. Pour l'équation de convection-diffusion 1d, $u_t + c\,u_x - \varepsilon\,u_{xx} = 0$, on suit le même principe en étudiant la forme mixte de l'équation de convection-diffusion. C'est-à-dire l'équation de convection-diffusion dans laquelle on introduit le flux de diffusion $p = -\varepsilon\,u_x$. On obtient alors deux moyennes de mailles, $\bar{u}_{j-1/2}(t)$ une moyenne sur u et $\bar{p}_{j-1/2}(t)$ une moyenne sur le flux p, pour lesquelles on introduit deux décentrements de maille D_u et D_p.

Les questions qui se posent sont naturellement de savoir si on définit effectivement un schéma de la sorte, si le schéma converge et comment choisir les paramètres de décentrement D_u et D_p.

En vue des applications pratiques, nous nous limitons à une généralisation en deux dimensions du schéma boîte 1d proposé pour l'équation de convection-diffusion 1d par une méthode de type ADI. Ce choix d'une méthode de splitting, au détriment d'une généralisation sur maillage triangulaire ou quadrangulaire du schéma boîte, a été motivé par une mise en œuvre rapide. Néanmoins, l'objectif à plus long terme est la construction d'un schéma boîte pour l'équation de convection-diffusion 2d. Les domaines d'applications possibles sont les problèmes d'écoulement en milieux poreux, en particulier le cas test Couplex proposé par l'ANDRA.

Plan, Présentation des résultats obtenus

Chapitre 1 : Le schéma de Keller pour l'équation de la chaleur Dans ce chapitre, nous rappellons le schéma de Keller pour l'équation de la chaleur en dimension 1. On s'intéresse au problème des oscillations mentionné par Keller. On propose alors une formulation différente du schéma avec l'introduction d'un paramètre ϑ de discrétisation temporelle. Ce paramètre est en fait le coefficient du ϑ-schéma qui corrige dans certains cas les oscillations temporelles. Dans le cas particulier $\vartheta = 1/2$, pour une condition initiale de type front, apparaît un mode oscillant au niveau du front. Dans ce cas, on introduit un second paramètre, qui supprime sous certaines conditions les oscillations. Quelques exemples numériques illustrent les différents cas présentés.

Chapitre 2 : Quelques schémas boîte sur maillages en triangles Le second chapitre présente une généralisation en 2d de la construction du schéma boîte 1d pour le problème de Poisson sur maillages triangulaires.
On commence par rappeler le schéma boîte de plus bas degré, introduit par B. Courbet et J.-P. Croisille [15]. On propose ensuite sur le même principe deux schémas boîte d'ordre plus élevé qui utilisent l'espace quadratique, P^2 non-conforme décrit par M. Fortin et M. Soulie [28]. Le premier schéma boîte est inspiré des résultats obtenus par M. Fortin et M. Fahrloul, [29]. L'espace d'approximation de u est donc l'espace P^2 non-conforme et l'espace d'approximation du flux est l'espace de Brezzi-Douglas-Marini de degré 1, [5], enrichi par le rotationnel de la bulle quadratique non-conforme. Le second schéma boîte est une généralisation à l'ordre 2 du schéma boîte de B. Courbet et J.-P. Croisille. L'espace d'approximation du flux est l'espace de Raviart-Thomas d'ordre 1, enrichi par la bulle quadratique. Les deux schémas boîte admettent une unique solution stable. De plus les estimations d'erreur *a priori* sont comparables à celles obtenues par la méthode des éléments finis. Finalement, quelques résultats numériques pour chacun des schémas boîte proposés concluent ce chapitre.

Chapitre 3 : Quelques schémas boîte sur maillages en rectangles On introduit 3 nouveaux schémas boîte sur le modèle précédent en dimension 2 sur des maillages en rectangles :
• Le schéma 1 utilise comme espace d'approximation les espaces Q^1 non-conforme et l'espace de Raviart-Thomas sur rectangles, enrichi par une bulle. Les espaces test sont des espaces de type Galerkin discontinus constants par maille, également enrichis.
• Le schéma 2 est inspiré du schéma algébrique proposé par B. Courbet [12] pour les équations de Navier-Stokes. De plus, on prouve que la solution du schéma 2 s'écrit en fonction de la solution du schéma 1.
• Le schéma 3 utilise comme espace d'approximation les espaces Q^1_{rot} de R. Rannacher et S. Turek et l'espace de Raviart-Thomas sur rectangles. Les espaces de test sont des espaces de type Galerkin discontinus constants par maille, enrichis. Ce schéma boîte peut être considéré comme une généralisation naturelle du schéma boîte de B. Courbet et J-P. Croisille [15], dans le cas de maillages en rectangles. En effet, ses inconnues sont situées au niveau des arêtes et proviennent directement de la moyenne des équations du problème elliptique. Noter que d'autres auteurs ont également étudié le schéma 3, [11].
Pour ces trois schémas boîte, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution ainsi que quelques estimations d'erreur *a priori*.

Chapitre 4 : Equation de convection-diffusion en une et deux dimensions d'espace Afin de mettre en œuvre rapidement une version de schémas boîte en dimension 2 on s'est intéressé dans le Chapitre 4 au problème de convection-diffusion instationnaire. Ce problème nécessite l'introduction de paramètres de décentrement pour stabiliser le problème. On explicite le schéma boîte et le choix des coefficients de décentrement sous des contraintes d'existence, d'unicité, de stabilité... en dimension 1. Comme au Chapitre 1, on étudie les modes oscillants liés au schéma (indépendants de la stabilité du schéma), qui apparaissent pour des conditions initiales de type front. On utilise ensuite une méthode de splitting (en fait ADI), pour généraliser rapidement ce schéma boîte 1d en dimension 2.

Notations générales

Nous définissons ici les notations principales utilisées dans la suite. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Nous notons $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire $L^2(\Omega)$

$$(u,v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx \tag{0.3}$$

et la norme associée

$$\|v\|_{0,\Omega} = (v,v)_{0,\Omega}^{1/2}. \tag{0.4}$$

Pour tout entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev d'ordre m est défini par :

$$H^m(\Omega) \;=\; \{v, |v \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\} \tag{0.5}$$

Il est muni de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}. \tag{0.6}$$

Nous utiliserons la semi-norme associée

$$|v|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|= m} \|\partial^\alpha v\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2} \tag{0.7}$$

où α désigne le multi-indice : $\alpha \;=\; (\alpha_1,\alpha_2)$, $\alpha_i \geq 0$. $|\alpha|$ est le module de α égal à $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$. $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$ représente la dérivée partielle de u d'ordre α par rapport à x_1 et x_2.
Nous utilisons les espaces de Hilbert $(H_0^1(\Omega), |\cdot|_{1,\Omega})$ et $(H_{\mathrm{div}}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{div},\Omega})$, définis par :

$$H_0^1(\Omega) = \Big\{v \in H^1(\Omega),\ v_{|\Gamma} = 0\Big\} \quad \text{et} \quad H_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^2,\ \mathrm{div}\, v \in L^2(\Omega)\}, \tag{0.8}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{\mathrm{div},\Omega} = \Big(|v|_{0,\Omega}^2 + |\,\mathrm{div}\, v|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}. \tag{0.9}$$

Soit K une partie du domaine Ω. On note $P^k(K)$ les polynômes de degré total k sur K et $Q^k(K)$ les polynômes de degré k en chaque variable d'espace de l'élément K.
Dans la suite, C désigne une constante générique, positive, ne dépendant que du domaine Ω, indépendante de h. Elle peut prendre différentes valeurs dans chaque inéquation.

CHAPITRE 1

Le schéma de Keller pour l'équation de la chaleur

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré d'une part à un rappel sur le schéma boîte de Keller, introduit dans l'article [31], d'autre part à quelques expériences numériques réalisées avec ce schéma. Nous proposons ensuite, dans les Paragraphes 1.4 et 1.6 une amélioration du schéma de Keller : d'une part un schéma boîte avec un décentrement temporel ϑ, (Section 1.4), d'autre part un schéma boîte avec une meilleure approximation pour l'inconnue u appelé β-schéma (Section 1.6). Nous faisons également le lien avec la méthode des éléments finis à la Section 1.5.

1.2 Le schéma de Keller pour l'équation de la chaleur

1.2.1 Principe du schéma

Dans cette section, nous rappellons le schéma de Keller introduit dans [31], dans le cas particulier de l'équation de la chaleur.
Soit le domaine espace-temps $R(T) = [0,1] \times [0,T],\ T > 0$. On considère la forme mixte de l'équation de la chaleur dans $R(T)$. Soit p la variable auxilliaire de flux $p(x,t) = \varepsilon\, u_x(x,t)$, donnée à tout instant t, où $\varepsilon > 0$ est le coefficient de diffusion. En particulier, on a à l'instant initial $p\,(x,0) = \varepsilon \frac{d}{dx} u^0\,(x)$. L'équation de la chaleur s'écrit alors,

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - p_x = f\,, & (x,t) \in R(T) \\ p = \varepsilon u_x\,, & (x,t) \in R(T) \\ u\,(x,0) = u^0\,(x)\,, & x \in [0,1] \\ p\,(x,0) = p^0\,(x) = \varepsilon\,\frac{d}{dx} u^0\,(x)\,, & x \in [0,1] \\ u\,(0,t) = g_0(t),\ u(1,t) = g_1(t)\,, & t \in]0,T] \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où les fonctions f,u^0, g_1, g_2 sont données. Pour $u^0 \in C^2([0,1])$, $f \in C^1(R(T))$, $g_0,\ g_1 \in C^1([0,T])$, le problème possède une unique solution dans $C^1([0,T]; C^2([0,1]))$. Soit $\mathcal{R}_h(T)$ un maillage espace-temps du domaine $R(T)$ de nœuds (x_j, t^n), où

$x_0 = 0 < \ldots < x_j < \ldots < x_J = 1$ et $t^0 = 0 < \ldots < t^n < \ldots < t^N = T$.
Soit $K_{j-1/2}^{n-1/2} = [x_{j-1}, x_j] \times [t^{n-1}, t^n]$ une cellule du maillage $\mathcal{R}_h(T)$, encore appelée "boîte" (Figure 1.1). Dans une boîte $K_{j-1/2}^{n-1/2}$ du maillage, le pas d'espace est $h_{j-1/2} = x_j - x_{j-1}$, pour tout $1 \leq j \leq J$ et le pas de temps est $k^{n-1/2} = t^n - t^{n-1}$, pour tout $1 \leq n \leq N$. Les indices j, $j+1/2$ indexeront les boîtes spatiales, tandis que les exposants n, $n+1/2$ indexeront le temps.

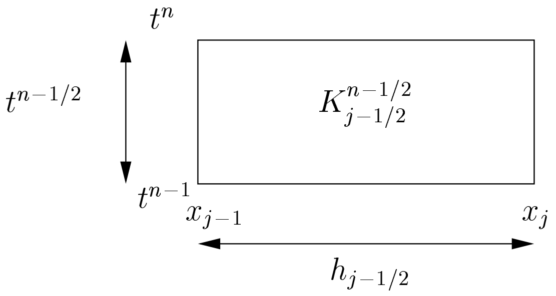

FIG. 1.1 – Cellule $K_{j-1/2}^{n-1/2}$ du maillage

On reprend les notations de Keller : on définit les points milieux $x_{j+1/2}$ et $t^{n+1/2}$ et les moyennes $\phi_{j+1/2}^n$ et $\phi_j^{n+1/2}$ des fonctions définies aux nœuds

$$\begin{array}{lcl} x_{j+1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) & ; & t^{n+1/2} = \frac{1}{2}(t^n + t^{n+1}) \\ \phi_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(\phi_j^n + \phi_{j+1}^n) & ; & \phi_j^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_j^n + \phi_j^{n+1}) \end{array} \tag{1.2}$$

Les fonctions de mailles $\bar{D}_x \phi_{j-1/2}^n$ et $\bar{D}_t \phi_j^{n-1/2}$ sont définies par

$$\bar{D}_x \phi_{j-1/2}^n = \frac{1}{h_{j-1/2}}(\phi_j^n - \phi_{j-1}^n) \qquad ; \qquad \bar{D}_t \phi_j^{n-1/2} = \frac{1}{k^{n-1/2}}(\phi_j^n - \phi_j^{n-1}) \,. \tag{1.3}$$

Pour $\psi(x,t)$ définie sur $R(T)$, on définit ψ_j^n, $\psi_{j+1/2}^n$, respectivement $\psi_j^{n+1/2}$, comme les valeurs de la fonction ψ au point x_j à l'instant t^n, au point milieu $x_{j+1/2}$ du segment $[x_j, x_{j+1}]$ à l'instant t^n, respectivement au point x_j à l'instant intermédiaire $t^{n+1/2}$:

$$\psi_j^n = \psi(x_j, t^n) \ , \ \psi_{j+1/2}^n = \psi(x_{j+1/2}, t^n) \ , \ \psi_j^{n+1/2} = \psi(x_j, t^{n+1/2}) \tag{1.4}$$

En utilisant une approximation de type différences finies centrées du problème (1.1), on obtient le schéma donné en fonction de u_j^n et p_j^n pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{D}_t \, u_{j-1/2}^{n-1/2} - \bar{D}_x \, p_{j-1/2}^{n-1/2} = f_{j-1/2}^{n-1/2} \ , & n \geq 1 \\ p_{j-1/2}^n = \varepsilon_{j-1/2} \, \bar{D}_x u_{j-1/2}^n \ , & n \geq 0 \,. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Les données initiales sont discrétisées par :

$$\begin{array}{l} u_j^0 = u^0(x_j) \,, \quad 0 \leq j \leq J \\ p_j^0 = p^0\,(x_j), \quad 0 \leq j \leq J \end{array} \tag{1.6}$$

Les conditions aux limites sont discrétisées par :

$$u_0^n = g_0^n\,, \quad u_J^n = g_1^n\,, \quad n \geq 1 \tag{1.7}$$

On considère le produit scalaire (sous la condition que l'une des conditions limite soit nulle) introduit par Keller :

$$(\phi^n, \psi^n)_h = \sum_{j=1}^{J} \phi_{j-1/2}^n \, \psi_{j-1/2}^n \, h_{j-1/2} \quad \text{et} \quad \|\phi^n\|_h^2 = (\phi^n, \phi^n)_h\,. \tag{1.8}$$

La définition du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_h$ donne les identités suivantes :

$$(\bar{D}_x \phi, \psi)_h \;=\; [\phi_J \psi_J - \phi_0 \psi_0] - (\phi, \bar{D}_x \psi)_h \tag{1.9}$$

$$(\bar{D}_t \phi^{n-1/2}, \phi^{n-1/2})_h \;=\; \frac{1}{2k^{n-1/2}}(\|\phi^n\|_h^2 - \|\phi^{n-1}\|_h^2) \tag{1.10}$$

Lemme 1.2.1 *Ce schéma admet une unique solution* $(u_j^n, p_j^n) \in \mathbb{R}^{J+1} \times \mathbb{R}^{J+1}$ *à tout instant* t^n*,* $0 \leq n \leq N$*.*

Prouvons l'existence et l'unicité de la solution du système ((1.5)-(1.6)-(1.7)).
Preuve du Lemme 1.2.1 :
Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution en tout instant $n \geq 1$. On suppose que $n \geq 1$. Soit (u_j^{n-1}, p_j^{n-1}) l'unique solution à l'instant $n-1$, prouvons l'existence et l'unicité de (u_j^n, p_j^n) à l'instant n. La solution (u_j^n, p_j^n), si elle existe est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{D}_t \, u_{j-1/2}^{n-1/2} - \bar{D}_x \, p_{j-1/2}^{n-1/2} = f_{j-1/2}^{n-1/2}\,, & 1 \leq j \leq J \\ p_{j-1/2}^n = \varepsilon_{j-1/2} \, \bar{D}_x u_{j-1/2}^n\,, & 1 \leq j \leq J \\ u_0^n = g_0^n\,, \quad u_J^n = g_1^n & \end{array} \right. \tag{1.11}$$

Le nombre d'inconnues et le nombre d'équations sont égaux à $2\,(J+1)$. On doit donc prouver l'existence et l'unicité d'un système linéaire avec autant d'équations que d'inconnues. Il suffit donc de prouver l'unicité de la solution, c'est-à-dire que $f = 0$, $u_0^n = u_J^n = 0$ et $u^{n-1} = p^{n-1} = 0$ impliquent que $u^n = p^n = 0$.
Calculons $(\varepsilon \, \bar{D}_x \, u^{n-1/2}, \bar{D}_x \, u^{n-1/2})_h$:

$$(\varepsilon \, \bar{D}_x \, u^{n-1/2}, \bar{D}_x \, u^{n-1/2})_h = \sum_{j=1}^{J} h_{j-1/2} \, \varepsilon_{j-1/2} \, D_x \, u_{j-1/2}^{n-1/2} \, D_x \, u_{j-1/2}^{n-1/2} \tag{1.12}$$

D'après l'équation $(1.11)_2$, par bilinéarité de $(\phi^n, \phi^{n-1}) \mapsto \phi^{n-1/2}$, on a $\varepsilon_{j-1/2} \, D_x \, u_{j-1/2}^{n-1/2} = p_{j-1/2}^{n-1/2}$. En remplaçant cette expression dans (1.12) et en utilisant l'identité (1.9), on obtient puisque $u_0 = u_J = 0$

$$(\varepsilon \, \bar{D}_x \, u^{n-1/2}, \bar{D}_x \, u^{n-1/2})_h = (p^{n-1/2}, \bar{D}_x \, u^{n-1/2})_h = -(\bar{D}_x \, p^{n-1/2}, u^{n-1/2})_h \tag{1.13}$$

On utilise l'équation $(1.11)_1$ qui donne $\bar{D}_x \, p^{n-1/2} = \bar{D}_t \, u^{n-1/2}$

$$(\varepsilon \, \bar{D}_x \, u^{n-1/2}, \bar{D}_x \, u^{n-1/2})_h = -(\bar{D}_t \, u^{n-1/2}, u^{n-1/2})_h \tag{1.14}$$

Grâce à l'identité (1.10) on obtient

$$2\,k^{n-1/2}\,\|\sqrt{\varepsilon}\,\bar{D}_x\,u^{n-1/2}\|_h^2+(\|u^n\|_h^2-\|u^{n-1}\|_h^2)=0 \tag{1.15}$$

Par unicité de la solution à l'instant $n-1$, $u^{n-1}=0$ et $p^{n-1}=0$, donc

$$\|\sqrt{\varepsilon}\,\bar{D}_x\,u^{n-1/2}\|_h^2+\frac{1}{2k^{n-1/2}}\|u^n\|_h^2=0 \tag{1.16}$$

Ce qui implique que $u^n=0$ et $\bar{D}_x\,u^{n-1/2}=0$. En reportant dans les équation (1.11), on déduit que $p^n=0$. Ce qui prouve l'existence et l'unicité de la solution à tout instant n. ■

1.2.2 Estimations d'erreur

Dans la suite on suppose que le terme source f est nul. Soit $(U(x,t),P(x,t))$ la solution du problème continu (1.1). On suppose que U et P sont de classe $\mathcal{C}^\infty([0,1]\times[0,T])$. Soient e et d les erreurs aux noeuds du maillage spatio-temporel $\mathcal{R}_h(T)$ définies pour tout $0\le j\le J$ et $0\le n\le N$ par :

$$e_j^n=U(x_j,t^n)-u_j^n\;,\quad d_j^n=P(x_j,t^n)-p_j^n\;. \tag{1.17}$$

Alors, e et d satisfont le système aux différences :

$$\begin{cases} \bar{D}_t e_{j-1/2}^{n-1/2}-\bar{D}_x d_{j-1/2}^{n-1/2}=\sigma_{j-1/2}^{n-1/2}\,, & 1\le j\le J\\ d_{j-1/2}^n-\varepsilon_{j-1/2}\bar{D}_x e_{j-1/2}^n=-\rho_{j-1/2}^n\,, & 1\le j\le J\\ e_j^0=0\,, \quad 0\le j\le J & \\ d_j^0=0\,, \quad 0\le j\le J & \\ e_0^n=0\,,\quad e_J^n=0 & \end{cases} \tag{1.18}$$

où les termes de troncatures $\rho_{j-1/2}^n$ et $\sigma_{j-1/2}^{n-1/2}$ sont donnés par :

$$\begin{cases} \rho_{j-1/2}^n &= \varepsilon_{j-1/2}\Big(\bar{D}_xU(x_j,t^n)-\frac{\partial U(x_{j-1/2},t^n)}{\partial x}\Big)\\ &\quad+\Big(P(x_{j-1/2},t^n)-\frac{1}{2}\big(P(x_j,t^n)+P(x_{j-1},t^n)\big)\Big)\\ \sigma_{j-1/2}^{n-1/2} &= \Big(\frac{\partial P(x_{j-1/2},t^{n-1/2})}{\partial x}-\frac{1}{2}\bar{D}_x(P(x_j,t^n)+P(x_j,t^{n-1}))\Big)\\ &\quad+\Big(\frac{1}{2}\bar{D}_t\big(U(x_j,t^n)+U(x_{j-1},t^n)\big)-\frac{\partial U(x_{j-1/2},t^{n-1/2})}{\partial t}\Big) \end{cases} \tag{1.19}$$

Lemme 1.2.2 *Nous avons les estimations d'erreur pour u et p :*

$$\|e^n\|_h\le K_1\sup_{\nu\le n}\Big(\|\rho^{\nu-1/2}\|_h+\|\sigma^{\nu-1/2}\|_h\Big) \tag{1.20}$$

$$\|d^n\|_h\le K_2\sup_{\nu\le n}\Big(\|\rho^{\nu-1/2}\|_h+\|\sigma^{\nu-1/2}\|_h\Big) \tag{1.21}$$

K_1 et K_2 sont des constantes qui dépendent de ε.

Preuve :
Pour prouver ces estimations d'erreur, on calcule $(\varepsilon\, \bar{D}_x\, e^{n-1/2}, \bar{D}_x\, e^{n-1/2})_h$. Le calcul est analogue à celui de la preuve du Lemme 1.2.1.

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon\, \bar{D}_x\, e^{n-1/2}, \bar{D}_x\, e^{n-1/2})_h &= (d^{n-1/2} + \rho^{n-1/2}, \bar{D}_x\, e^{n-1/2})_h \\
&= -(\bar{D}_x\, d^{n-1/2}, e^{n-1/2})_h + (\rho^{n-1/2}, \bar{D}_x\, e^{n-1/2})_h \\
&= -(\bar{D}_t e^{n-1/2} - \sigma^{n-1/2}, e^{n-1/2})_h + (\rho^{n-1/2}, \bar{D}_x\, e^{n-1/2})_h \\
&= -(\bar{D}_t e^{n-1/2}, e^{n-1/2})_h + (\sigma^{n-1/2}, e^{n-1/2})_h + (\rho^{n-1/2}, \bar{D}_x\, e^{n-1/2})_h \\
&= -\frac{1}{2k^{n-1/2}}(\|e^n\|_h^2 - \|e^{n-1}\|_h^2) + (\sigma^{n-1/2}, e^{n-1/2})_h \\
&\quad +(\rho^{n-1/2}, \bar{D}_x\, e^{n-1/2})_h
\end{aligned}
$$

En sommant cette expression pour $1 \leq \nu \leq n$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n} 2\, k^{\nu-1/2}\, \|\sqrt{\varepsilon}\, \bar{D}_x\, e^{\nu-1/2}\|_h^2 &= -\sum_{\nu=1}^{n}(\|e^\nu\|_h^2 - \|e^{\nu-1}\|_h^2) \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} 2\, k^{\nu-1/2} \Big((\sigma^{\nu-1/2}, e^{\nu-1/2})_h + (\rho^{\nu-1/2}, \bar{D}_x\, e^{\nu-1/2})_h \Big) \\
&= -(\|e^n\|_h^2 - \underbrace{\|e^0\|_h^2}_{=0}) \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{n} 2\, k^{\nu-1/2} \Big((\sigma^{\nu-1/2}, e^{\nu-1/2})_h + (\rho^{\nu-1/2}, \bar{D}_x\, e^{\nu-1/2})_h \Big)
\end{aligned}
$$

Donc en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on obtient la majoration

$$
\sum_{\nu=1}^{n} 2\, k^{\nu-1/2}\, \|\sqrt{\varepsilon}\, \bar{D}_x\, e^{\nu-1/2}\|_h^2 + \|e^n\|_h^2 \;\leq\; C \sup_{\nu \leq n} \big(\|\sigma^{\nu-1/2}\|_h + \|\rho^{\nu-1/2}\|_h \big) \sum_{\nu=1}^{n} 2\, k^{\nu-1/2}\, \|\bar{D}_x\, e^{\nu-1/2}\|_h
$$

A l'aide d'une majoration du type $P\,Q \leq \frac{P^2}{4\omega} + \omega\, Q^2$, on prouve qu'il existe une constante K_1 dépendante de ε, telle que

$$
\|e^n\|_h \leq K_1 \sup_{\nu \leq n} \Big(\|\rho^{\nu-1/2}\|_h + \|\sigma^{\nu-1/2}\|_h \Big)
$$

On déduit l'estimation de l'erreur en p de l'équation (1.18) donnée par

$$
\|d^n\|_h^2 \leq \|\varepsilon\, \bar{D}_x e^n\|_h^2 + \|\rho^n\|_h^2
$$

et des relations précédentes. ■

Noter que $\|\cdot\|_h$ n'est une norme uniquement que dans le cas où une des conditions limite est nulle : en effet

$$
\|\phi^n\|_h = \|\psi^n\|_h \iff \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \phi_j = \psi_j + \alpha(-1)^j
$$

Pour que $\|\cdot\|_h$ définisse une norme, une des deux conditions aux limites doit être nulle ; on n'a pas en général $\|\phi^n\|_h = 0 \Rightarrow \phi = 0$. La solution discrète $(u_j^n, p_j^n)_j$ contient un mode oscillant. Pour éliminer l'effet de cette oscillation, Keller propose de considérer les moyennes de mailles suivantes :

$$\bar{u}^n_{j-1/2} = \frac{1}{2}(u^n_j + u^n_{j-1}), \quad \text{ou} \quad \bar{p}^n_{j-1/2} = \frac{1}{2}(p^n_j + p^n_{j-1}), \quad \text{pour } 1 \leq j \leq J \tag{1.22}$$

Dans ce cas, $\|\bar{u}^n\|_h = \|u^n\|_h$ et $\|\bar{p}^n\|_h = \|p^n\|_h$ et $\|\cdot\|_h$ est une norme pour les fonctions de grille constantes par morceau définies sur $(K_{j-1/2})_{1\leq j\leq J}$.

1.3 Comportement numérique du schéma boîte pour une condition initiale de type créneau

Dans cette section, nous mettons en évidence numériquement deux types d'oscillations pour l'équation de la chaleur de condition initiale de type créneau. Nous présentons deux exemples de comportement transitoires sur $u_t - u_{xx} = 0$ et sur $u_t - \frac{1}{8}u_{xx} = 0$, pour un même maillage et à pas de temps k fixé.

Nous étudions la solution u du schéma de Keller (1.5)-(1.6)-(1.7) associée au problème continu suivant :

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad x \in]0,2[,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,2] \\ u(0,t) = 1,\ u(2,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

où $\varepsilon = 1$ ou $1/8$ et la condition initiale est de type créneau :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < 0.5 \\ 0 \text{ si } 0.5 < x < 2 \end{cases} \tag{1.24}$$

Nous considérons un maillage du segment $[0,2]$ en 101 points équidistants. Le pas de temps est $k = h^2$. Nous étudions deux cas selon la valeur du coefficient de diffusion ε, par l'intermédiaire du nombre sans dimension $\mu = \frac{\varepsilon k}{h^2}$: $\mu = 1$, puis $\mu = 1/8$.
Les Figures 1.2 et 1.4 représentent pour $\mu = 1$ la solution u du schéma de Keller (1.5) en trait continu et la solution exacte du problème ((1.23)-(1.24)) en trait pointillé au bout de 5 et 50 itérations (c'est-à-dire $T = 2.10^{-3}$, puis $T = 2.10^{-2}$). La solution exacte n'étant pas connue explicitement, nous la calculons numériquement à l'aide du schéma boîte.
Nous constatons l'apparition d'oscillations situées au niveau du front de la condition initiale d'abscisse $x = 0.5$. Les Figures 1.3 et 1.5 zooment ce mode oscillant aux instants respectifs $T = 2.10^{-3}$, $T = 2.10^{-2}$.
Si $\mu = 1/8$, nous constatons également l'apparition d'oscillations dans la solution calculée (trait continu), situées cette fois de part et d'autre du front initial. Les Figures 1.6 et 1.7 représentent la solution exacte et la solution calculée par le schéma de Keller à l'instant $T = 2.10^{-3}$ et les Figures 1.8 et 1.9, les solutions exactes et calculée à l'instant $T = 2.10^{-2}$.

• Evolution des oscillations pour $\mu = 1$:

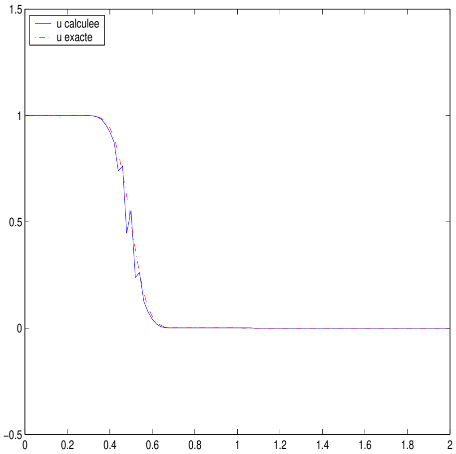

FIG. 1.2 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-3}$.

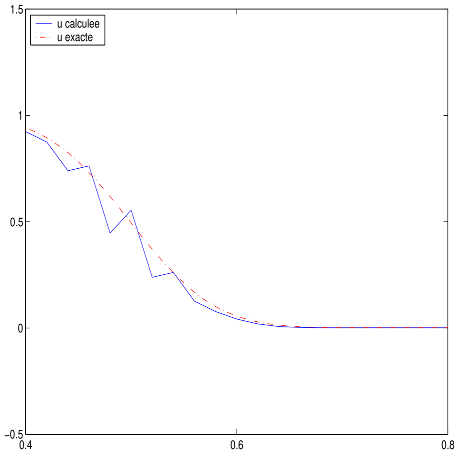

FIG. 1.3 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-3}$. Zoom sur $[0.4, 0.8]$.

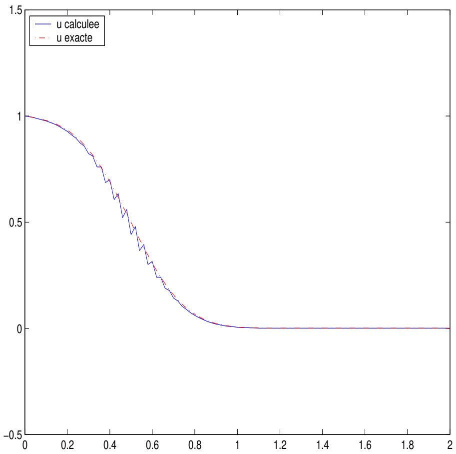

FIG. 1.4 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-2}$.

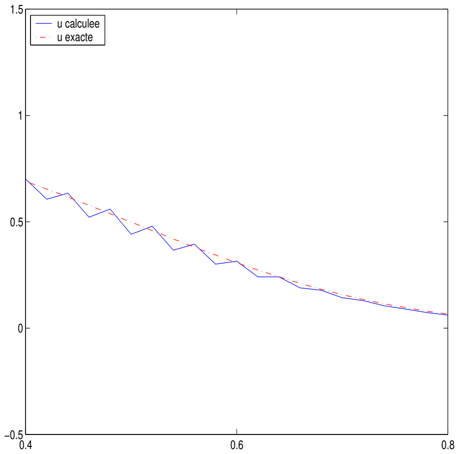

FIG. 1.5 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-2}$. Zoom sur $[0.4, 0.8]$.

• Evolution des oscillations pour $\mu = 1/8$:

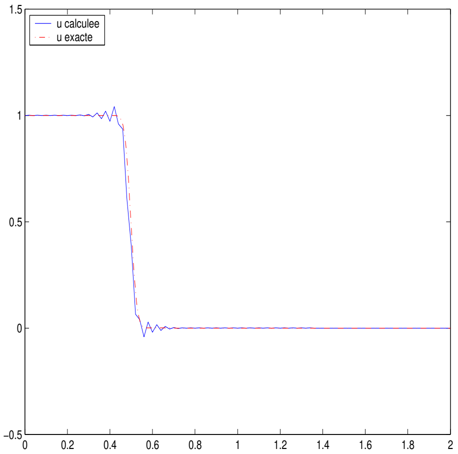

FIG. 1.6 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-3}$.

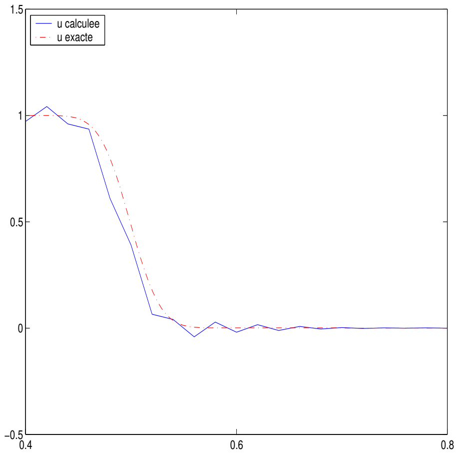

FIG. 1.7 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-3}$. Zoom sur $[0.4, 0.8]$.

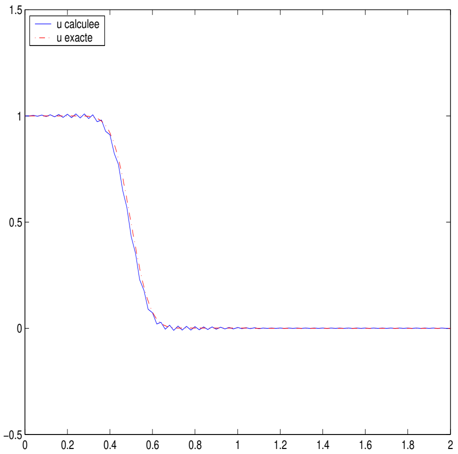

FIG. 1.8 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-2}$.

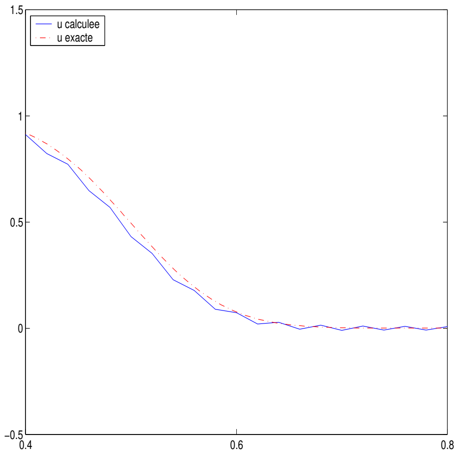

FIG. 1.9 – Schéma de Keller (1.5), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-2}$. Zoom sur $[0.4, 0.8]$.

A noter que ce phénomène d'oscillations n'est pas dû à un problème de stabilité du schéma et n'est pas non plus lié à de la dispersion. Nous en donnerons une interprétation au Paragraphe 1.4.4. Ce phénomène n'apparaît pas pour une condition initiale régulière de type Gaussienne. En effet : considérons la solution exacte de l'équation de la chaleur (1.23) :

$$u(x,t) = \exp(-2\,t)\,\cos\left(\frac{x}{\sqrt{5.10^{-3}}}\right) \tag{1.25}$$

de condition initiale u^0, donnée par la solution exacte à l'instant $t = 0$. Les conditions limites sont de type Dirichlet données par la solution exacte sur la frontière. Le coefficient de

diffusion est $\varepsilon = 10^{-2}$. Le segment $[0,2]$ est maillé par 51 points équidistants, le pas d'espace est $h = 0.04$ et le pas de temps est $k = h^2$. On calcule la solution du schéma boîte de Keller en $T = 8.10^{-3}$ (au bout de 5 itérations), puis en $T = 8.10^{-1}$ (au bout de 500 itérations).
La solution exacte est représentée en trait continu et la solution calculée par le schéma boîte de Keller est représentée par des cercles, aux instants $T = 8.10^{-3}$ (Figure 1.10) et $T = 8.10^{-1}$ (Figure 1.11). Aucun mode oscillant ne vient perturber la solution, puisque le condition initiale est assez régulière.

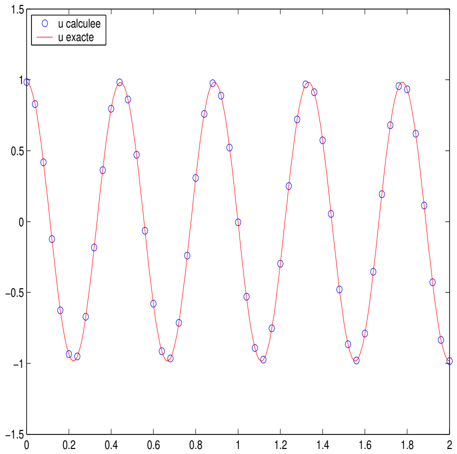

FIG. 1.10 – Solutions exacte et calculée en T=0.008.

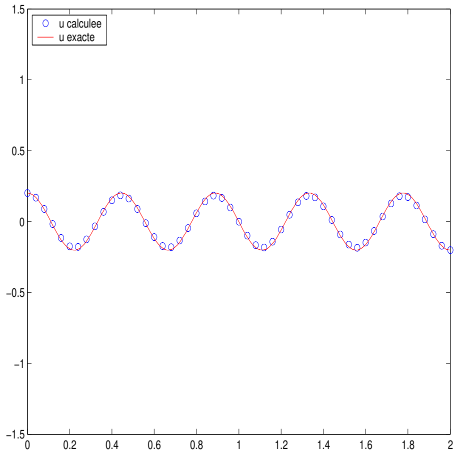

FIG. 1.11 – Solutions exacte et calculée en T=0.8.

1.4 Une première généralisation du schéma de Keller

1.4.1 La construction du schéma boîte décentré en temps

Dans cette partie, nous étudions une généralisation du schéma de Keller en introduisant un décentrement temporel ϑ lors de la discrétisation en temps de l'équation de la chaleur. On conserve le design du schéma de Keller rappelé au Paragraphe 1.2. On considère toujours la forme mixte de l'équation de la chaleur sur le segment $[0,1]$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + p_x = f\,, & x \in]0,1[,\ t > 0 \\ p = -\varepsilon u_x\,, & x \in]0,1[,\ t > 0 \\ u\,(x,0) = u^0\,(x)\,, & x \in [0,1] \\ p\,(x,0) = -\varepsilon\,\frac{d}{dx}u^0(x)\,, & x \in [0,1] \\ u\,(0,t) = u\,(1,t) = 0\,, & t > 0 \end{array} \right. \tag{1.26}$$

On définit un maillage non équidistant du segment $[0,1]$ en J intervalles (Figure 1.12). Les coordonnées des noeuds sont $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_J = 1$. On note $K_{j-1/2} = [x_{j-1}, x_j]$ la cellule spatiale du maillage encore appelée *boîte* de longueur $h_{j-1/2}$ pour $1 \leq j \leq J$.

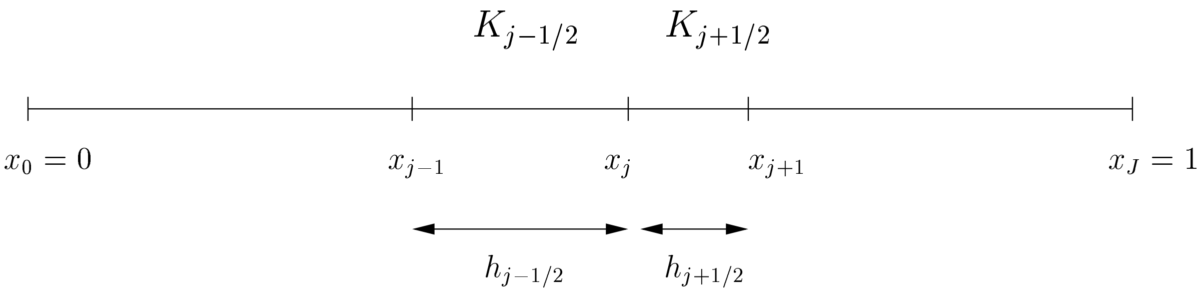

FIG. 1.12 – Maillage du segment $[0,1]$.

En intégrant sur chaque boîte $K_{j-1/2}$ $(1 \leq j \leq J)$ du maillage, les équations $(1.26)_1$ et $(1.26)_2$, on obtient le système suivant, pour $t > 0$:

$$\left\{\begin{array}{ll} h_{j-1/2}\,\frac{d}{dt}(\Pi^0 u(t))_{j-1/2} + \big(p\,(x_j\,,\,t) - p(x_{j-1}\,,\,t)\big) = h_{j-1/2}\,(\Pi^0\,f(t))_{j-1/2}, & 1 \leq j \leq J \\ h_{j-1/2}\,(\Pi^0\,p)_{j-1/2}\,(t) = -\varepsilon\,[u\,(x_j\,,\,t) - u\,(x_{j-1}\,,\,t)], & 1 \leq j \leq J \\ u(x_j,0) = u^0(x_j)\,, \qquad 0 \leq j \leq J & \\ p(x_j,0) = p^0(x_j)\,, \qquad 0 \leq j \leq J & \\ u\,(x_0\,,\,t) = u\,(x_J\,,\,t) = 0\,, \qquad t > 0 & \end{array}\right. \tag{1.27}$$

Sur chaque boîte $K_{j-1/2}$, on approche les moyennes spatiales des fonctions u, p et f données par $\Pi^0 u_{j-1/2}$, $\Pi^0 p_{j-1/2}$ et $\Pi^0 f_{j-1/2}$ respectivement par les fonctions $\bar{u}_{j-1/2}$, $\bar{p}_{j-1/2}$ et $\bar{f}_{j-1/2}$. Pour $0 \leq j \leq J$, on définit les approximations $(u_j(t))_j$ et $(p_j(t))_j$ à chaque instant t, de la solution exacte $(u(x,t), p(x,t))$ au point d'abscisse x_j. On obtient ainsi le système approché suivant pour tout $t \in]0,T]$ et tout $1 \leq j \leq J$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\bar{u}_{j-1/2}\,(t) + \frac{p_j\,(t) - p_{j-1}\,(t)}{h_{j-1/2}} = \bar{f}_{j-1/2}\,(t)\,, & 1 \leq j \leq J \\ \bar{p}_{j-1/2}\,(t) = -\varepsilon\,\frac{u_j\,(t) - u_{j-1}\,(t)}{h_{j-1/2}}\,, & 1 \leq j \leq J \\ u_j(0) = u^0(x_j)\,, \qquad 0 \leq j \leq J & \\ p_j(0) = p^0(x_j)\,, \qquad 0 \leq j \leq J & \\ u_0\,(t) = u_J\,(t) = 0\,, \qquad t > 0 & \end{array}\right. \tag{1.28}$$

Il reste à fermer le système (1.28) en exprimant $\bar{u}_{j-1/2}\,(t)$ et $\bar{p}_{j-1/2}\,(t)$, en fonction de $u_j(t)$ et $p_j(t)$. Pour les moyennes $\bar{u}_{j-1/2}$ de u et $\bar{p}_{j-1/2}$ de p, sur chaque boîte $K_{j-1/2}$, on choisit une approximation de type trapèze :

$$\bar{u}_{j-1/2}(t) = \frac{1}{2}(u_j(t) + u_{j-1}(t)), \tag{1.29}$$

$$\bar{p}_{j-1/2}\,(t) = \frac{1}{2}\,(p_j\,(t) + p_{j-1}\,(t)). \tag{1.30}$$

En remplaçant $\bar{u}_{j-1/2}(t)$ et $\bar{p}_{j-1/2}(t)$ par les formules (1.29) et (1.30) dans (1.28), on obtient le schéma semi-discretisé en espace, continu en temps défini pour tout $t \in]0,T]$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\big(\frac{d}{dt}u_j\,(t) + \frac{d}{dt}u_{j-1}\,(t)\big) + \frac{p_j\,(t) - p_{j-1}\,(t)}{h_{j-1/2}} = \bar{f}_{j-1/2}\,(t)\,, \quad 1 \leq j \leq J \\ \frac{1}{2}\big(p_j\,(t) + p_{j-1}\,(t)\big) = -\frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\big(\,u_j\,(t) - u_{j-1}\,(t)\big)\,, \qquad 1 \leq j \leq J \\ u_j(0) = u^0(x_j)\,, \quad 0 \leq j \leq J \\ p_j(0) = p^0(x_j)\,, \quad 0 \leq j \leq J \\ u_0\,(t) = u_J\,(t) = 0\,, \quad t > 0 \end{array}\right. \tag{1.31}$$

On s'intéresse maintenant à la discrétisation en temps du système (1.31). On considère une discrétisation de l'intervalle de temps $[0,T]$ en $N+1$ points notés $t^0 = 0 < \ldots < t^n < \ldots < t^N = T$. Par simplicité, on suppose que le pas de temps $k = t^n - t^{n-1}$ est constant. On approche les inconnues semi-discrètes $u_j(t)$ et $p_j(t)$ par les inconnues nodales u_j^n et p_j^n aux instants t^n, pour $0 \leq n \leq N$. On introduit la variable incrémentale en temps δ^n définie par $\delta^n v_j = \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k}$. L'intégration de l'équation $(1.31)_1$ par un ϑ-schéma, donne l'équation en $\delta^n u$ valable pour tout $0 \leq n \leq N-1$ et $1 \leq j \leq J$:

$$\frac{1}{2}(\delta^n u_j + \delta^n u_{j-1}) + \frac{\vartheta\, k}{h_{j-1/2}}(\delta^n p_j - \delta^n p_{j-1}) + \frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n) = \vartheta \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} + (1-\vartheta)\bar{f}_{j-1/2}^n \tag{1.32}$$

On approche l'équation $(1.31)_2$ en temps par

$$\frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,, \quad 1 \leq j \leq J,\;\; 1 \leq n \leq N \tag{1.33}$$

Les conditions initiales sont approchées par

$$\begin{array}{l} u_j^0 = u^0(x_j)\,, \quad 0 \leq j \leq J \\ p_j^0 = p^0(x_j)\,, \quad 0 \leq j \leq J \end{array} \tag{1.34}$$

Les conditions limites deviennent

$$u_0^n = u_J^n = 0\,, \quad 1 \leq n \leq N \tag{1.35}$$

Remarque :
Noter que nous n'avons pas d'équation d'évolution sur p, mais simplement la relation $p(x,t) = -\varepsilon\, u_x(x,t)$ à tout instant. En particulier, à l'instant initial, $p\,(x,0) = -\varepsilon \frac{d}{dx}u^0(x)$, discrétisé par $(1.34)_2$. Ainsi, le système linéaire (1.32-1.33-1.34-1.35) admet autant d'équations que d'inconnues, qui est une condition nécessaire pour être bien posé. Dans la suite, nous remplaçons l'équation (1.33) par le système d'équations équivalent $1 \leq j \leq J$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\delta^n p_j + \delta^n p_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1}) = 0\;,\; 0 \leq n \leq N-1 \\ \frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\;,\; 1 \leq n \leq N-1\,. \end{array}\right. \tag{1.36}$$

Nous obtenons donc le schéma boîte suivant :

Définition 1.4.1 (Schéma boîte pour l'équation de la chaleur)
On définit le schéma boîte suivant associé à l'équation de la chaleur (1.26) : chercher $(u_j^n,\, p_j^n)$, $0 \le j \le J$ *et* $0 \le n \le N$ *tels que*

$$\left\{\begin{array}{ll}
(i)\ \frac{1}{2}(\delta^n u_j + \delta^n u_{j-1}) + \frac{\vartheta\, k}{h_{j-1/2}}(\delta^n p_j - \delta^n p_{j-1}) + \frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n) & \\
\qquad = \vartheta \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} + (1-\vartheta)\bar{f}_{j-1/2}^{n}\,, & 1 \le j \le J,\ 0 \le n \le N-1 \\
(ii)_1\ \frac{1}{2}(\delta^n p_j + \delta^n p_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1}) = 0\,, & 1 \le j \le J,\ 0 \le n \le N-1 \\
(ii)_2\ \frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,, & 1 \le j \le J,\ 1 \le n \le N-1 \\
(iii)\ u_j^0 = u^0(x_j)\,, \quad 0 \le j \le J & \\
(iv)\ p_j^0 = p^0(x_j)\,, \quad 0 \le j \le J & \\
(v)\ u_0^n = u_J^n = 0\,, \quad 1 \le n \le N &
\end{array}\right. \tag{1.37}$$

Nous procédons à l'élimination du flux p_j^n dans l'équation (1.37-*(i)*) : on considère le système ((1.37-*(i)*)-(1.37-*(ii)*$_1$)) : pour tout $1 \le j \le J$ et tout $0 \le n \le N-1$

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(\delta^n u_j + \delta^n u_{j-1}) \ + \ \frac{\vartheta\, k}{h_{j-1/2}}(\delta^n p_j - \delta^n p_{j-1}) \ + \ \frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n) \\
\qquad\qquad = \ \vartheta \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} \ + \ (1-\vartheta)\bar{f}_{j-1/2}^{n} \\
\frac{1}{2}(\delta^n p_j + \delta^n p_{j-1}) \ + \ \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\,(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1}) \ = \ 0
\end{array}\right. \tag{1.38}$$

On élimine la variable $\delta^n p_j$ dans l'équation $(1.38)_1$ et la variable $\delta^n p_{j-1}$ dans l'équation $(1.38)_2$, on obtient le système équivalent pour tout $1 \le j \le J$ et tout $0 \le n \le N-1$

$$\left\{\begin{array}{l}
\delta^n u_j(\frac{1}{2} - \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}^2}) + \delta^n u_{j-1}(\frac{1}{2} + \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}^2}) - 2\frac{\vartheta\, k}{h_{j-1/2}}\delta^n p_{j-1} + \frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n) \\
\qquad = \vartheta \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} + (1-\vartheta)\bar{f}_{j-1/2}^{n} \\
\delta^n u_j(\frac{1}{2} + \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}^2}) + \delta^n u_{j-1}(\frac{1}{2} - \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}^2}) + 2\frac{\vartheta\, k}{h_{j-1/2}}\delta^n p_j + \frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n) \\
\qquad = \vartheta \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} + (1-\vartheta)\bar{f}_{j-1/2}^{n}
\end{array}\right. \tag{1.39}$$

Donc le schéma boîte (1.37) est encore équivalent au système ((1.39)-(1.37*(ii)*$_2$)-(1.37*(iii)*) -(1.37*(iv)*)-(1.37*(v)*)) donné par

$$\left\{\begin{array}{ll}
(i)\quad \frac{1}{2}(\delta^n u_j + \delta^n u_{j-1}) - \delta^n p_{j-1}\left(2\frac{\vartheta\, k}{h_{j-1/2}}\right) - \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}^2}(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1}) + \frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n) & \\
\qquad = \vartheta \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} + (1-\vartheta)\bar{f}_{j-1/2}^{n}\,, & 1 \le j \le J,\ 0 \le n \le N-1 \\
(ii)\quad \frac{1}{2}(\delta^n u_j + \delta^n u_{j-1}) + 2\frac{\vartheta\, k}{h_{j-1/2}}\delta^n p_j + \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}^2}(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1}) + \frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n) & \\
\qquad = \vartheta \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} + (1-\vartheta)\bar{f}_{j-1/2}^{n}\,, & 1 \le j \le J,\ 0 \le n \le N-1 \\
(iii)\quad \frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,, & 1 \le j \le J,\ 1 \le n \le N-1 \\
(iv)\quad u_j^0 = u^0(x_j)\,, \qquad 0 \le j \le J & \\
(v)\quad p_j^0 = p^0(x_j)\,, \qquad 0 \le j \le J & \\
(vi)\quad u_0^n = u_J^n = 0\,, \qquad 1 \le n \le N &
\end{array}\right. \tag{1.40}$$

Les relations (1.40)-*(i)* et (1.40)-*(ii)* sont vraies sur chaque segment $K_{j-1/2}$, pour $1 \le j \le J$. On identifie les valeurs de $\delta^n p_j$ données par (1.40)-*(i)* sur la boîte $K_{j+1/2}$ et par (1.40)-*(ii)* sur la boîte $K_{j-1/2}$ (condensation statique). On obtient le schéma uniquement en $\delta^n u_j$ pour

$1 \leq j \leq J-1$ et $0 \leq n \leq N-1$:

$$\Big(\frac{h_{j+1/2}}{2} - \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j+1/2}}\Big)\,\delta^n u_{j+1} + \Big(\frac{h_{j+1/2}}{2} + \frac{2\vartheta\,\varepsilon\, k}{h_{j+1/2}} + \frac{h_{j-1/2}}{2} + \frac{2\vartheta\,\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}}\Big)\,\delta^n u_j$$
$$+\Big(\frac{h_{j-1/2}}{2} - \frac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}}\Big)\,\delta^n u_{j-1} + (p^n_{j+1} - p^n_{j-1})$$
$$= h_{j+1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j+1/2} + (1-\vartheta)\bar f^n_{j+1/2}) + h_{j-1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j-1/2} + (1-\vartheta)\bar f^n_{j-1/2})\,. \tag{1.41}$$

En utilisant la relation (1.40 *(iii)*) dans $K_{j-1/2}$ et $K_{j+1/2}$, le terme $p^n_{j+1} - p^n_{j-1}$ s'exprime uniquement en fonction des u^n_j par

$$p^n_{j+1} - p^n_{j-1} = 2\varepsilon\Big(-\frac{u^n_{j+1}}{h_{j+1/2}} + (\frac{1}{h_{j+1/2}} + \frac{1}{h_{j-1/2}})\,u^n_j - \frac{u^n_{j-1}}{h_{j-1/2}}\Big) \tag{1.42}$$

ce qui donne en remplaçant dans (1.41)

$$\Big(\tfrac{h_{j+1/2}}{2} - \tfrac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j+1/2}}\Big)\,\delta^n u_{j+1} + \Big(\tfrac{h_{j+1/2}}{2} + \tfrac{2\vartheta\,\varepsilon\, k}{h_{j+1/2}} + \tfrac{h_{j-1/2}}{2} + \tfrac{2\vartheta\,\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}}\Big)\,\delta^n u_j$$
$$+\Big(\tfrac{h_{j-1/2}}{2} - \tfrac{2\vartheta\varepsilon\, k}{h_{j-1/2}}\Big)\,\delta^n u_{j-1} = \tfrac{2\varepsilon}{h_{j+1/2}}u_{j+1} - \Big(\tfrac{2\varepsilon}{h_{j+1/2}} + \tfrac{2\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)u_j + \tfrac{2\varepsilon}{h_{j-1/2}}u_{j-1}$$
$$+h_{j+1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j+1/2} + (1-\vartheta)\bar f^n_{j+1/2}) + h_{j-1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j-1/2} + (1-\vartheta)\bar f^n_{j-1/2})$$

En remplaçant $\delta^n u$ par sa valeur, on obtient le schéma compact à trois points :

$$\begin{aligned} a_1 u^{n+1}_{j+1} + a_0 u^{n+1}_j + a_{-1} u^{n+1}_{j-1} \;&=\; b_1 u^n_{j+1} + b_0 u^n_j + b_{-1} u^n_{j-1} \\ +k\,\Big[h_{j+1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j+1/2} \;&+\; (1-\vartheta)\bar f^n_{j+1/2}) + h_{j-1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j-1/2} + (1-\vartheta)\bar f^n_{j-1/2})\Big]\,, \end{aligned} \tag{1.43}$$

où les coefficients a_1, a_0, a_{-1} et b_1, b_0, b_{-1} sont définis par

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = h_{j+1/2}\Big(\frac{1}{2} - 2\vartheta\,\mu_{j+1/2}\Big) \\ a_0 = h_{j+1/2}\Big(\frac{1}{2} + 2\vartheta\,\mu_{j+1/2}\Big) + h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} + 2\vartheta\,\mu_{j-1/2}\Big) \\ a_{-1} = h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} - 2\vartheta\,\mu_{j-1/2}\Big) \\ b_1 = h_{j+1/2}\Big(\frac{1}{2} + 2(1-\vartheta)\,\mu_{j+1/2}\Big) \\ b_0 = h_{j+1/2}\Big(\frac{1}{2} - 2(1-\vartheta)\,\mu_{j+1/2}\Big) + h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} - 2(1-\vartheta)\,\mu_{j-1/2}\Big) \\ b_{-1} = h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} + 2(1-\vartheta)\,\mu_{j-1/2}\Big) \end{array}\right. \tag{1.44}$$

On en déduit le lemme suivant qui permet de calculer l'inconnue scalaire u indépendamment du flux de diffusion p, puis de reconstruire p *a posteriori* en fonction de la solution u.

Lemme 1.4.1 *Le schéma boîte (1.37) associé à l'équation de la chaleur (1.26) est équivalent au problème découplé :*
(1) u est solution du système tridiagonal suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} (i)\; a_1 u^{n+1}_{j+1} + a_0 u^{n+1}_j + a_{-1} u^{n+1}_{j-1} &=& b_1 u^n_{j+1} + b_0 u^n_j + b_{-1} u^n_{j-1} \\ && +k\, h_{j+1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j+1/2} + (1-\vartheta)\bar f^n_{j+1/2}) \\ && +k\, h_{j-1/2}(\vartheta \bar f^{n+1}_{j-1/2} + (1-\vartheta)\bar f^n_{j-1/2})\,, \\ && \qquad 1 \leq j \leq J-1\,,\; 1 \leq n \leq N-1 \\ (ii)\; u^0_j = u^0(x_j)\,, \quad 0 \leq j \leq J && \\ (iii)\; u^n_1 = u^n_J = 0\,,\; 1 \leq n \leq N && \end{array}\right. \tag{1.45}$$

(2) le flux de diffusion p est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcll}
(i)\ -2\frac{\vartheta}{h_{j-1/2}}p_j^{n+1} & = & -2\frac{\vartheta}{h_{j-1/2}}p_j^n + \delta^n u_j\,(\frac{1}{2}+2\mu\frac{\vartheta}{h_{j-1/2}}) + \delta^n u_{j-1}(\frac{1}{2}-2\mu\frac{\vartheta}{h_{j-1/2}}) & \\
 & & +\frac{1}{h_{j-1/2}}(p_j^n - p_{j-1}^n)\,, & 1\le j\le J\,,\ 0\le n\le N-1 \\
(i)bis\ \left(2\frac{\vartheta\,k}{h_{1/2}}\right)\delta^n p_0 & = & \left(\frac{1}{2}-\frac{2\vartheta\varepsilon\,k}{h_{1/2}^2}\right)\delta^n u_1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{2\vartheta\varepsilon\,k}{h_{1/2}^2}\right)\delta^n u_0 + \frac{1}{h_{1/2}}(p_1^n - p_0^n) & \\
 & & -\vartheta\bar{f}_{1/2}^{n+1} + (1-\vartheta)\bar{f}_{1/2}^n & \\
(ii)\ \frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) & + & \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,, & 1\le j\le J\,,\ 1\le n\le N-1 \\
(iii)\ p_j^0 & = & p^0(x_j)\,, & 0\le j\le J
\end{array}\right. \tag{1.46}$$

1.4.2 Etude du schéma boîte décentré en temps

Dans cette section, on se limite au cas où le pas d'espace est constant et noté h. On présente donc une étude de type différence finies.

Proposition 1.4.1 *Le schéma boîte (1.37) admet une unique solution* (u_j^n, p_j^n), *pour* $0\le j\le J$ *et* $0\le n\le N$.

Rappel : Lemme de Gershgorin, [27] :
Les valeurs propres d'une matrice A sont telles que $Sp(A)\subseteq\bigcup_{i\in I}D(a_{ii},r_i)$ où $D(a_{ii},r_i)$ est le disque fermé de centre a_{ii} et de rayon $r_i=\sum_{j\neq i,j\in I}|a_{ij}|$ et I est l'ensemble des indices matriciels.
Preuve de la proposition :
L'inconnue u est solution du système linéaire $Au=B$, où A est la matrice tridiagonale de composantes a_{-1}, a_0 et a_1 et B le second membre de composantes les conditions initiales et le second membre de l'équation (1.45-*(i)*). On prouve que cette matrice est inversible, puisque ses valeurs propres sont toutes non nulles. En effet : on vérifie facilement la condition de Gershgorin dans le cas de maillages équidistants : $|a_1|+|a_{-1}|<|a_0|$.

Le flux p est donné de façon unique par la formule de reconstruction (1.46). ■

Proposition 1.4.2 *Le schéma boîte (1.37) est stable au sens de Von Neumann si et seulement si* $\vartheta\ge\frac{1}{2}$.

Preuve :
Etudions le facteur d'amplification $g(\theta)$ du schéma. On a

$$g(\theta)=\frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)}\qquad \theta=\xi\,h\in[0,\pi] \tag{1.47}$$

où g_1 et g_2 sont définis respectivement par

$$g_1(\theta)=1+\ (\cos\theta-1)\ \left(\frac{1}{2}+2\,\mu\,(1-\vartheta)\right)$$

$$g_2(\theta) = 1 + \ (\cos\theta - 1)\ \left(\frac{1}{2} - 2\,\vartheta\mu\right)$$

Ce qui donne

$$g(\theta) = 1 + \frac{2\mu(\cos\theta - 1)}{1 + \ (\cos\theta - 1)\ \left(\frac{1}{2} - 2\,\vartheta\mu\right)} \tag{1.48}$$

Donc

$$|g(\theta)| \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2\mu(\cos\theta-1)}{1+(\cos\theta-1)\left(\frac{1}{2}-2\,\vartheta\mu\right)} \leq 0 \\ 2 + \frac{2\mu(\cos\theta-1)}{1+(\cos\theta-1)\left(\frac{1}{2}-2\,\vartheta\mu\right)} \geq 0 \end{cases} \tag{1.49}$$

Or, $\mu(\cos\theta - 1) \leq 0$, donc

$$\begin{aligned} |g(\theta)| \leq 1 \quad &\iff \quad \begin{cases} 1 + \ (\cos\theta - 1)\ \left(\frac{1}{2} - 2\,\vartheta\mu\right) \geq 0 \\ 1 + (\cos\theta - 1)\left(\frac{1}{2} + (1 - 2\,\vartheta)\mu\right) \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \quad 1 + (\cos\theta - 1)\left(\frac{1}{2} + (1 - 2\,\vartheta)\mu\right) \geq 0 \end{aligned} \tag{1.50}$$

(puisque $2\,\vartheta\mu \geq 0$). Le schéma est stable au sens de Von Neumann si et seulement si $|g(\theta)| \leq 1$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$. L'étude des variations de la fonction

$$L : \theta \mapsto 1 + (\cos\theta - 1)\left(\frac{1}{2} + (1 - 2\,\vartheta)\mu\right) \tag{1.51}$$

fait ressortir deux cas : $L(\theta) \geq 0$ si et seulement si

$$\left(\tfrac{1}{2} + (1 - 2\,\vartheta)\mu \geq 0 \text{ et } \vartheta \geq \tfrac{1}{2}\right) \text{ ou } \left(\tfrac{1}{2} + (1 - 2\,\vartheta)\mu \leq 0\right).$$

C'est-à-dire si $\vartheta \geq \frac{1}{2}$. Ce qui achève la preuve. ■

Lemme 1.4.2 *Le schéma boîte (1.37) est consistant avec le problème continu (1.1) à l'ordre 2 en espace, et 1 en temps si $\vartheta \neq \frac{1}{2}$, 2 en temps si $\vartheta = \frac{1}{2}$.*

Preuve :
Le facteur d'amplification est

$$g(\theta) = \frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)} = \frac{b_0 + (b_1 + b_{-1})\cos\theta}{a_0 + (a_1 + a_{-1})\cos\theta} \tag{1.52}$$

On suppose que les pas de temps et d'espace k et h tendent vers 0 et que le coefficient μ est borné par μ_1, $0 < \mu < \mu_1$ quand k, $h \to 0$. On étudie l'ordre en k et en h du terme, [42] :

$$\frac{1}{k}\left(e^{k\,q(\xi)} - g(h\,\xi)\right) \tag{1.53}$$

où q est le symbole de l'opérateur spatial $\varepsilon\,u_{xx}$, donné par $q(\xi) = -\varepsilon\,\xi^2$. Un développement limité de $e^{kq(\xi)}$ d'ordre 2 en k est

$$e^{kq(\xi)} = 1 - k\,\varepsilon\,\xi^2 + \frac{k^2}{2}\varepsilon^2\,\xi^4 + \mathcal{O}(k^3) \tag{1.54}$$

Un développement limité de g à l'ordre 4 en $\theta = \xi\, h$ au voisinage de 0 donne

$$g(\theta) = 1 - \mu\,\theta^2 + \mu\,\theta^4\big(-\frac{1}{6} + \vartheta\,\mu\big) + \mathcal{O}(\theta^6) \tag{1.55}$$

En combinant les deux relations (1.54) et (1.55) on obtient

$$e^{kq(\xi)} - g(h\xi) = \varepsilon^2\xi^4\,k^2(\frac{1}{2} - \vartheta) + h^2 k\frac{\varepsilon\xi^4}{6} + \mathcal{O}(k^3) + \mathcal{O}(h^6) \tag{1.56}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{k}\Big(e^{kq(\xi)} - g(h\xi)\Big) = \varepsilon^2\xi^4\,k(\frac{1}{2} - \vartheta) + h^2\frac{\varepsilon\xi^4}{6} + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^4) \tag{1.57}$$

Le schéma boîte (1.37) est donc consistant avec le problème continu (1.1) d'ordre 2 en espace et 1 en temps si $\vartheta \neq \frac{1}{2}$ et 2 en temps sinon. ■
D'autre part, si l'on choisit $k = \mathcal{O}(h^2)$, ce qui est classique pour une équation de diffusion, alors on obtient un schéma d'ordre 2 en h.

1.4.3 Etude numérique

Naturellement, on se demande ce que donne le schéma boîte (1.37) sur le cas test (1.23-1.24) de la Section 1.3, pour des valeurs de ϑ supérieures à 1/2. On reprend les tests réalisés au Paragraphe 1.3, pour le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad x \in]0,2[,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,2] \\ u(0,t) = 1,\ u(2,t) = 0\,, \quad t > 0. \end{array} \right. \tag{1.58}$$

où la condition initiale est de type créneau :

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } 0 < x < 0.5 \\ 0 \text{ si } 0.5 < x < 2 \end{array} \right. \tag{1.59}$$

Le pas de temps est $k = h^2 = 4.10^{-4}$, $\varepsilon = 1$ ou 1/8 et ϑ augmente à la valeur $\vartheta = 0.505$. On représente les solutions calculées au temps final $T = 2.10^{-2}$ (50 itérations en temps) sur la Figure 1.13 pour $\varepsilon = 1$ et sur la Figure 1.14 pour $\varepsilon = 1/8$. Les oscillations au niveau du front initial $x = 0.5$ n'apparaissent plus ou s'amortissent plus ou moins rapidement.
Les oscillations ont presque complètement disparu. Donc, un léger décentrement en temps de la variable ϑ permet d'éliminer les oscillations présentes pour le schéma de Keller (1.5-1.6-1.7) à $\vartheta = \frac{1}{2}$. Pour expliquer ce phénomène nous étudions plus précisément le facteur d'amplification du schéma boîte (1.37).

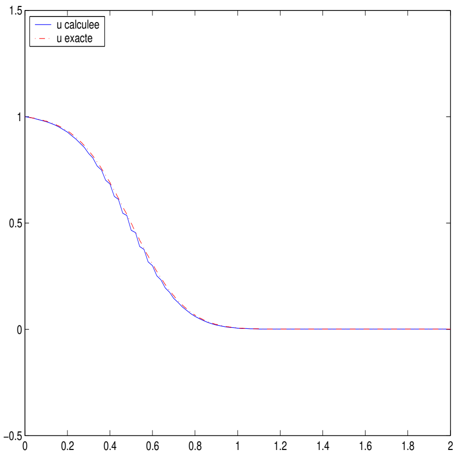

FIG. 1.13 – Schéma de boîte (1.37), augmentation de $\vartheta = 0.505$. $\mu = 1$, $T = 2.10^{-2}$.

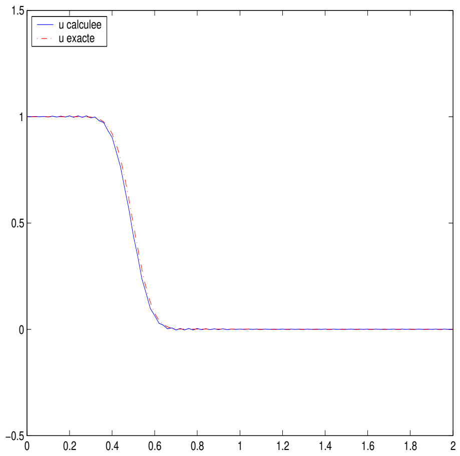

FIG. 1.14 – Schéma de boîte (1.37), augmentation de $\vartheta = 0.505$. $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-2}$.

1.4.4 Interprétation des oscillations lorsque $\vartheta = \frac{1}{2}$

Interprétons les oscillations de l'équation de chaleur à l'aide du facteur d'amplification. Nous avons vu (1.48) que le facteur d'amplification du schéma boîte (1.37) est donné par la formule

$$g(\theta) = \frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)} \tag{1.60}$$

où g_1 et g_2 sont définis respectivement par

$$g_1(\theta) = 1 + \ (\cos\theta - 1)\ \left(\frac{1}{2} + 2\,\mu\,(1-\vartheta)\right) \qquad \text{et} \qquad g_2(\theta) = 1 + \ (\cos\theta - 1)\ \left(\frac{1}{2} - 2\,\vartheta\mu\right)$$

On représente sur la Figure 1.15 le facteur d'amplification $g\ :\ \theta \in [0, 2\,\pi[\mapsto g(\theta)$ pour différentes valeurs de $\vartheta \in [\frac{1}{2}, 1]$, quand $\mu = 1$.
On s'aperçoit que pour la valeur $\vartheta = \frac{1}{2}$, $g(\pi) = -1$. Vérifions cette observation par l'étude de g :

$$\begin{aligned} g(\theta) = -1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - 2\mu(1-2\vartheta) + \cos\theta\,(1 + 2\mu(1-2\vartheta)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad L(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{1.61}$$

où L est la fonction définie par (1.51). Sous la condition nécessaire et suffisante de stabilité $\vartheta \geq \frac{1}{2}$, on prouve que $L(\theta) = 0$ si et seulement si ($\theta = \pi$ et $\vartheta = \frac{1}{2}$). C'est-à-dire $g(\theta) = -1$ si et seulement si ($\theta = \pi$ et $\vartheta = \frac{1}{2}$).

On constate que le schéma boîte (1.37) conserve les modes oscillants éventuellement présents dans la solution initiale, puisqu'il multiplie par 1 ou -1 le mode oscillant de fréquence $\xi = \frac{\pi}{h}$. Le mode $(-1)^j$ est présent dans la décomposition en série de Fourier du créneau initial u_0 (1.24), avec un coefficient non nul. Ce mode parasite est donc entretenu par le schéma quand

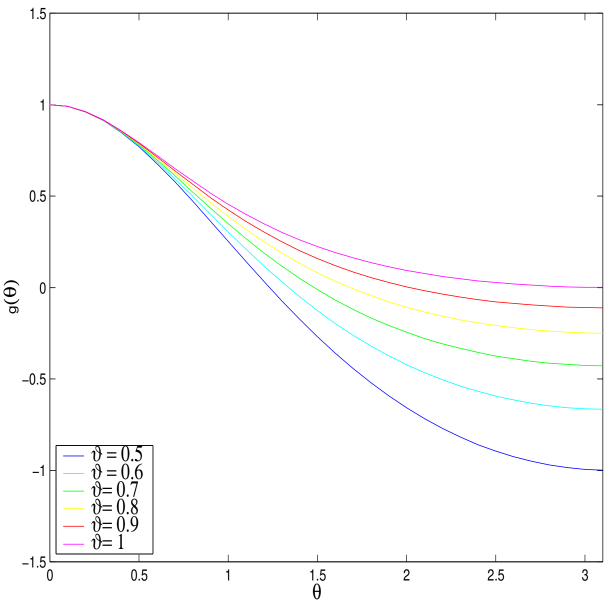

FIG. 1.15 – Représentation du facteur d'amplification $g(\theta)$ en fonction de θ pour $\mu = 1$, selon les valeurs prises par le paramètre ϑ.

$\vartheta = \frac{1}{2}$. Le mode oscillant observé au Paragraphe 1.3 correspond clairement à cette oscillation haute fréquence, qui est stable mais qui ne s'amortit pas. En effet, la discrétisation en temps de type Crank-Nicholson est A-stable mais non fortement A-stable. Ceci a pour conséquences de conserver les modes oscillants du type $(-1)^j$ qui peuvent apparaître dans la solution du schéma boîte.

1.5 Interprétation du schéma à l'aide des éléments finis

Le schéma boîte pour l'équation de la chaleur ne nécessite aucun décentrement. Soient P^1_c l' espace d'éléments finis P^1-Lagrange en dimension 1 et $P^1_{c,0}$, sa restriction aux fonctions s'annulant aux points frontières. Le schéma boîte pour l'équation de la chaleur s'écrit sous forme semi-discrète : chercher $(u_h(\cdot,t),(p_h(\cdot,t)) \in P^1_{c,0} \times P^1_c$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{d}{dt}\, u_h(.,t) + p_{h,x};\ v_h) = (f(.,t)\ ;\ v_h)\,, \quad \forall\, v_h \in P^0 \\ (p_h\,(.,t) + \varepsilon u_{h,x}, q_h) = 0\,, \quad \forall\, q_h \in P^0 \end{array} \right. \tag{1.62}$$

Vérifions que le schéma boîte (1.62) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dfrac{d}{dt}\,\Pi^0\, u_h(.,t);\ v_h) + (\varepsilon u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) = ((\Pi^0 f)(.,t)\ ;\ v_h)\,, \quad \forall v_h \in P^1_{c,0} \\ p_h\,(.,t)_{|K_{j-1/2}} = -\varepsilon u_{h,x|K_{j-1/2}} + ((\Pi^0\, f)\,(.,t)_{|K_{j-1/2}} - \dfrac{d}{dt}\,(\Pi^0\, u_h)_{K_{j-1/2}})(x - x_{j-1/2}) \end{array} \right. \tag{1.63}$$

En effet : l'équation $(1.62)_1$ implique que

$$(\Pi^0 f)_{|K_{j-1/2}} = \frac{d}{dt}\,\Pi^0\, u_h(.,t)_{|K_{j-1/2}} + p_{h,x|K_{j-1/2}} \tag{1.64}$$

Soit $v_h \in P^1_{c,0}$. Choisissons $q_h = v_{h,x} \in P^0$ dans l'équation $(1.62)_2$, on obtient

$$(\varepsilon u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) = -(p_h\ ;\ v_{h,x}) \tag{1.65}$$

En intégrant par partie cette expression, puisque $v_h(x_0) = v_h(x_J) = 0$, on obtient

$$(\varepsilon u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) = (p_{h,x}\ ;\ v_h) = -(\frac{d}{dt}\,\Pi^0\, u_h(.,t) - (\Pi^0 f)\ ;\ v_h) \tag{1.66}$$

d'après l'identité (1.64). Ce qui donne l'équation $(1.63)_1$. D'autre part, p_h s'écrit localement $p_{h|K_{j-1/2}} = (\Pi^0 p_h)_{|K_{j-1/2}} + p_{h,x|K_{j-1/2}}(x - x_{j-1/2})$, comme élément de P^1_c. D'après l'équation $(1.62)_2$, $(\Pi^0 p)_{|K_{j-1/2}} = (-\varepsilon\, u_{h,x})_{|K_{j-1/2}} \in P^0$ et $p_{h,x}$ est donné en fonction de u_h et de f par la relation (1.64). D'où on déduit l'écriture de p_h.

Soit l'énergie $E_h(t) = |\Pi^0\, u_h(.,t)|^2_{0,I}$. On a

$$\frac{1}{2}\, E_h'(t) + (\varepsilon u_{h,x}(.,t)\ ;\ u_{h,x}(.,t)) = ((\Pi^0 f)(.,t)\ ;\ u_h(.,t))\,. \tag{1.67}$$

En particulier, dans le cas homogène, on a

$$\frac{1}{2}\, E_h'(t) = -\varepsilon |u_{h,x}(.,t)|^2_{0,I} \tag{1.68}$$

L'inégalité de Poincaré discrète sur $P^1_{c,0}$ donne l'existence d'une constante C telle que pour tout $u \in P^1_{c,0}$, on a

$$|\Pi^0 u|_{0,I} \leq |u|_{0,I} \leq C\, |u_x|_{0,I} \tag{1.69}$$

En combinant les relations (1.68) et (1.69), on obtient l'inégalité

$$E_h'(t) \leq -\frac{2\varepsilon}{C^2} |\Pi^0 u_h|^2_{0,I} \tag{1.70}$$

En posant $B = \frac{2\varepsilon}{C^2}$, (1.70) s'écrit $\frac{d}{dt} E_h(t) \leq -B\, E_h(t)$, qui donne en intégrant sur $(0,t)$

$$E_h(t) \leq E_h(0)\, e^{-B\,t}\,, \quad B = \frac{2\varepsilon}{C^2}\,.$$

On obtient donc en utilisant (1.69)

$$|\Pi^0\, u_h(.,t)|_{0,I} \leq |u_{0,h}|_{0,I} e^{-\frac{\varepsilon}{C^2}\,t}\,. \tag{1.71}$$

D'où l'unicité de la solution. Mais l'estimation de la stabilité de la solution en norme L^2 est

$$|u_h(.,t)|_{0,I} \leq \frac{1}{h} |u_{0,h}|_{0,I},\, e^{-C\varepsilon\, t} \tag{1.72}$$

non uniforme en h.

1.6 Une deuxième généralisation du schéma de Keller

1.6.1 Design du β-schéma

Les oscillations de la solution du schéma boîte ne sont constatées que dans le cas $\vartheta = \frac{1}{2}$. Pour des raisons de consistance et de convergence du schéma, on ne peut pas négliger la valeur $\vartheta = \frac{1}{2}$, pour laquelle, on a constaté l'apparition de modes oscillants. Pour cette valeur $\vartheta = \frac{1}{2}$, on propose un nouveau schéma boîte. On utilise la formule d'Euler-Mac Laurin plus précise que la formule des trapèzes, pour approcher la moyenne de u sur chaque boîte dans l'équation (1.29). Dans tout le paragraphe, on se place dans le cas de maillages équidistants de pas d'espace h. Reprenons la méthode boîte. La forme mixte de l'équation de la chaleur homogène est

$$\begin{cases} u_t + p_x = 0\,, & x \in]0,1[,\ t > 0 \\ p = -\varepsilon u_x\,, & x \in]0,1[,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x)\,, & x \in [0,1] \\ p(x,0) = -\varepsilon u_{0,x}\,, & x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, & t > 0 \end{cases} \tag{1.73}$$

Contrairement à la formulation boîte (1.43), on approche $\bar{u}_{i-1/2}$ sur la boîte $K_{i-1/2}$, par une formule plus précise que (1.29) :

$$\bar{u}_{i-1/2} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i-1}) - \frac{\beta h}{12}(p_i - p_{i-1}) \tag{1.74}$$

où β est un certain réel à déterminer.

Remarque :
Si $\beta = 0$, on retrouve le schéma boîte (1.43). Si $\beta = -\frac{1}{\varepsilon}$, on retrouve la formule de quadrature de Euler-Mac Laurin qui s'écrit (avec $h = x_i - x_{i-1}$) :

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u\,dx = \frac{1}{2}(u(x_i) + u(x_{i-1})) - \frac{h}{12}(u_x(x_i) - u_x(x_{i-1})) + \mathcal{O}(h^4) \tag{1.75}$$

On conserve la formule de quadrature (1.30) pour p :

$$\bar{p}_{j-1/2}(t) = \frac{1}{2}\left(p_j(t) + p_{j-1}(t)\right) \tag{1.76}$$

On obtient le système semi-discrétisé en espace, continu en temps : pour tout $1 \leq j \leq J$, $t > 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}u_j(t) + \frac{d}{dt}u_{j-1}(t)\right) - \frac{\beta h}{12}\left(\frac{d}{dt}p_j(t) - \frac{d}{dt}p_{j-1}(t)\right) + \frac{p_j(t) - p_{j-1}(t)}{h_{j-1/2}} = 0\,, & 1 \leq j \leq J \\ \frac{1}{2}\left(p_j(t) + p_{j-1}(t)\right) = -\frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\left(u_j(t) - u_{j-1}(t)\right), & 1 \leq j \leq J \\ u_j^0 = u^0(x_j)\,, \quad 0 \leq j \leq J & \\ p(x,0) = \varepsilon \frac{d}{dx}u^0(x)\,, \quad 0 \leq j \leq J & \\ u_0(t) = u_J(t) = 0\,, \quad t > 0 & \end{cases} \tag{1.77}$$

En discrétisant en temps l'équation (1.77) par un ϑ-schéma, on obtient le **β-schéma boîte** de paramètres β en espace, et ϑ en temps défini par

Définition 1.6.1 *Le β-schéma boîte (1.77) associé à l'équation de la chaleur (1.73) est :*

$$\begin{cases} (i)\ \frac{1}{2}(\delta^n u_j + \delta^n u_{j-1}) + \big(\frac{k\vartheta}{h} - \frac{\beta h}{12}\big)\delta^n p_j \\ \qquad -\big(\frac{k\vartheta}{h} - \frac{\beta h}{12}\big)\delta^n p_{j-1} + \frac{1}{h}(p_j^n - p_{j-1}^n) = 0\,, \qquad 1 \le j \le J,\ 0 \le n \le N-1 \\ (ii)_1\ \frac{1}{2}(\delta^n p_j + \delta^n p_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1}) = 0\,, 1 \le j \le J,\ 0 \le n \le N-1 \\ (ii)_2\ \frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,, \qquad 1 \le j \le J,\ 1 \le n \le N-1 \\ (iii)\ u_j^0 = u^0(x_j)\,, \qquad 0 \le j \le J \\ (iv)\ p_j^0 = p^0(x_j)\,, \qquad 0 \le j \le J \\ (v)\ u_0^n = u_J^n = 0\,, \qquad 1 \le n \le N \end{cases} \tag{1.78}$$

Puis en éliminant l'inconnue $\delta^n p_j$, en suivant les étapes de construction du schéma boîte (1.37), on obtient la formulation équivalente du β-**schéma boîte**

Lemme 1.6.1 *Le β-schéma boîte (1.78) associé à l'équation de la chaleur (1.73) est équivalent à :*
(i) la formulation en u

$$\begin{cases} u_{j+1}^{n+1}\Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2\vartheta\,\mu\Big) + 2u_j^{n+1}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2\vartheta\,\mu\Big) + u_{j-1}^{n+1}\Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2\vartheta\,\mu\Big) \\ \quad = u_{j+1}^n\Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2(1-\vartheta)\,\mu\Big) + 2u_j^n\Big(\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2(1-\vartheta)\,\mu\Big) \\ \qquad + u_{j-1}^n\Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2(1-\vartheta)\,\mu\Big)\,, 1 \le j \le J-1\,,\ 0 \le n \le N-1 \\ u_j^0 = u_0(x_j)\,, \qquad 0 \le j \le J \\ u_1^n = \ u_J^n = \ 0\,, \qquad 1 \le n \le N\,. \end{cases} \tag{1.79}$$

(ii) la reconstruction du flux p localement en fonction de u

$$\begin{cases} 2\delta p_j^{n+1}\Big(\frac{\vartheta\,k}{h} - \frac{h\beta}{12}\Big) = -\frac{1}{h}(p_j^n - p_{j-1}^n) \\ \quad + \Big(2\frac{\varepsilon}{h}\big(\frac{h\beta}{12} - \frac{\vartheta\,k}{h}\big) - \frac{1}{2}\Big)\delta^n u_j + \Big(-2\frac{\varepsilon}{h}\big(\frac{h\beta}{12} - \frac{\vartheta\,k}{h}\big) - \frac{1}{2}\Big)\delta^n u_{j-1}\,, \quad 1 \le j \le J-1\,,\ 0 \le n \le N-1 \\ 2\delta p_0^{n+1}\Big(-\frac{\vartheta\,k}{h} + \frac{h\beta}{12}\Big) = -\frac{1}{h}(p_1^n - p_0^n) \\ \quad + \Big(2\frac{\varepsilon}{h}\big(-\frac{h\beta}{12} + \frac{\vartheta\,k}{h}\big) - \frac{1}{2}\Big)\delta^n u_1 + \Big(-2\frac{\varepsilon}{h}\big(-\frac{h\beta}{12} + \frac{\vartheta\,k}{h}\big) - \frac{1}{2}\Big)\delta^n u_0 \\ \frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,, \quad 1 \le j \le J,\ 1 \le n \le N-1 \\ p_j^0 = p^0(x_j)\,, \qquad 0 \le j \le J \end{cases} \tag{1.80}$$

Définissons les coefficients A_1, A_0, A_{-1} et B_1, B_0, B_{-1} en fonction des coefficients a_1, a_0, a_{-1}

et b_1, b_0, b_{-1} de la formulation en u (1.45) du schéma boîte (1.37)

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2\vartheta\,\mu\Big) = \frac{a_1}{h} + \frac{\beta\varepsilon}{6} \\
A_0 &= 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2\vartheta\,\mu\Big) = \frac{a_0}{h} - \frac{\beta\varepsilon}{3} \\
A_{-1} &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2\vartheta\,\mu\Big) = \frac{a_{-1}}{h} + \frac{\beta\varepsilon}{6} \\
B_1 &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2(1-\vartheta)\,\mu\Big) = \frac{b_1}{h} + \frac{\beta\varepsilon}{6} \\
B_0 &= 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2(1-\vartheta)\,\mu\Big) = \frac{b_0}{h} - \frac{\beta\varepsilon}{3} \\
B_{-1} &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2(1-\vartheta)\,\mu\Big) = \frac{b_{-1}}{h} + \frac{\beta\varepsilon}{6}
\end{aligned}
$$

L'équation en u du β-schéma s'écrit alors

$$
A_1\,u_{j+1}^{n+1} + A_0\,u_j^{n+1} + A_{-1}\,u_{j-1}^{n+1} = B_1\,u_{j+1}^{n} + B_0\,u_j^{n} + B_{-1}\,u_{j-1}^{n} \tag{1.81}
$$

Lemme 1.6.2 *Le schéma (1.78) admet une unique solution (u_j^n, p_j^n) à chaque pas de temps donnée en fonction de la condition initiale u^0, sous la condition $\beta\,\varepsilon < 12\,\vartheta\,\mu$.*

Preuve : On démontre ce résultat à l'aide du théorème de Gershgorin. C'est-à-dire on vérifie que $|A_1| + |A_{-1}| < |A_0|$. Or, $A_1 = A_{-1}$, donc on distingue les cas $(\,A_1 > 0,\ A_0 > 0\,)$, $(\,A_1 < 0,\ A_0 > 0\,)$, $(\,A_1 > 0,\ A_0 < 0\,)$ et $(\,A_1 < 0,\ A_0 < 0\,)$.

• le cas $(\,A_1 > 0,\ A_0 > 0\,)$ est équivalent à $12\,\vartheta\,\mu - 3 < \beta\,\varepsilon < 12\,\vartheta\,\mu + 3$ et

$$
|A_1| + |A_{-1}| < |A_0| \iff \beta\,\varepsilon < 12\,\vartheta\,\mu
$$

• le cas $(\,A_1 < 0,\ A_0 > 0\,)$ est équivalent à $12\,\vartheta\,\mu - 3 > \beta\,\varepsilon$, on vérifie que $|A_1|+|A_{-1}| < |A_0|$ est toujours vrai.

• le cas $(\,A_1 > 0,\ A_0 < 0\,)$ est impossible par définition de A_1 et A_0.

• le cas $(\,A_1 > 0,\ A_0 > 0\,)$ est équivalent à $\beta\,\varepsilon > 12\,\vartheta\,\mu{+}3$. Mais la relation $|A_1|+|A_{-1}| < |A_0|$ n'est jamais vérifiée.

Donc le β-schéma (1.78) admet une unique solution sous la condition $\beta\,\varepsilon < 12\,\vartheta\,\mu$. Ceci donne l'existence de la variable u qui est unique, puisque le système en u est carré. De plus le flux de diffusion p est donné de façon unique en fonction de u par les équations (1.46). Ce qui prouve l'existence et l'unicité de la solution (u_j^n, p_j^n) sous la condition $\beta\,\varepsilon < 12\,\vartheta\,\mu$. Si β est nul, on retrouve le résultat d'existence de la solution u du schéma boîte (1.43). ■

L'action du coefficient β est analogue à un décentrement de la variable ϑ. En posant $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \frac{\beta\,h^2}{12k}$, les coefficients A_i et B_i, $i = 1, 2, 3$ sont égaux à $A_1 = \frac{1}{2} - 2\,\tilde{\vartheta}\,\mu$, $A_0 = 2\big(\frac{1}{2} + 2\,\tilde{\vartheta}\,\mu\big)$, $A_1 = \frac{1}{2} - 2\,\tilde{\vartheta}\,\mu$, $B_1 = \frac{1}{2} + 2\,(1-\tilde{\vartheta})\,\mu$, $B_0 = 2\big(\frac{1}{2} - 2\,(1-\tilde{\vartheta})\,\mu\big)$ et $B_1 = \frac{1}{2} + 2\,(1-\tilde{\vartheta})\,\mu$. Puisque nous utilisons un coefficient $\beta \leq 0$, le coefficient $\tilde{\vartheta}$ correspond à un décentrement de ϑ par β. En augmentant $|\beta|$, on augmente la valeur de $\tilde{\vartheta}$; quand $\vartheta = 1/2$, $\tilde{\vartheta} \geq 1/2$, les oscillations disparaissent.

1.6.2 Etude du facteur d'amplification du β-schéma

Avant d'étudier la stabilité du schéma (1.78), on cherche sous quelles conditions sur le coefficient β, le schéma est non-oscillant (au sens du facteur d'amplification). Le facteur d'amplification de ce nouveau schéma (1.78) est donné par la formule :

$$g_\beta(\theta) = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2(1-\vartheta)\,\mu)\,\cos\theta + (\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2(1-\vartheta)\,\mu)}{(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2\vartheta\,\mu)\,\cos\theta + (\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2\vartheta\,\mu)} \tag{1.82}$$

Existe t-il des valeurs de β telles que $g_\beta(\theta) \neq -1$ pour tout $\theta \in [0,\pi[$?

$$g_\beta(\theta) = -1 \iff (1 + \tfrac{\beta\varepsilon}{3} + 2(1-2\vartheta)\,\mu)\,\cos\theta + (1 - \tfrac{\beta\varepsilon}{3} - 2(1-2\vartheta)\,\mu) = 0 \tag{1.83}$$

Soit l_β la fonction définie par

$$l_\beta(\theta) = (1 + \frac{\beta\varepsilon}{3} + 2(1-2\vartheta)\,\mu)\,\cos\theta + (1 - \frac{\beta\varepsilon}{3} - 2(1-2\vartheta)\,\mu).$$

L'étude de la fonction l_β permet de prouver que

$$g_\beta(\theta) \neq -1 \text{ si et seulement si } \beta\varepsilon < -6(1-2\vartheta)\mu$$

En particulier, si $\vartheta = 1/2$ il faut choisir $\beta < 0$ pour que $g_\beta(\theta) \neq -1$, pour tout $\theta \in [0,\pi]$. D'autre part, si $\beta = 0$, le schéma conserve les modes oscillants éventuels. De plus, d'après le Lemme 1.6.2 sous la condition

$$\beta\varepsilon < -6(1-2\vartheta)\mu \tag{1.84}$$

le β-schéma admet une unique solution. Prouvons la stabilité du schéma sous la condition (1.84).

Lemme 1.6.3 (Stabilité)
Le schéma (1.78) est stable au sens de Von Neumann sous la condition $\beta\varepsilon < -6(1-2\vartheta)\mu$.

Preuve :
On étudie le facteur d'amplification du schéma. Le facteur d'amplification (1.82) est encore égal à

$$g_\beta(\theta) = 1 + \frac{2\,\mu(\cos\theta - 1)}{(\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2\vartheta\,\mu)\,\cos\theta + (\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2\vartheta\,\mu)} \tag{1.85}$$

On note $D = (\frac{1}{2} + \frac{\beta\varepsilon}{6} - 2\vartheta\,\mu)\,\cos\theta + (\frac{1}{2} - \frac{\beta\varepsilon}{6} + 2\vartheta\,\mu)$ le dénominateur de g_β. A-t-on $|g_\beta(\theta)| \leq 1$ sous la condition (1.84) de non oscillation au sens du facteur d'amplification, $\beta\varepsilon < -6(1-2\vartheta)\mu$?

$$\begin{aligned} g_\beta(\theta) \leq 1 &\iff -1 \leq 1 + \tfrac{2\,\mu(\cos\theta-1)}{D} \leq 1 \\ &\iff \begin{cases} 0 \leq \frac{D+\mu(\cos\theta-1)}{D} \\ \\ D \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.86}$$

En utilisant la condition $\beta\varepsilon < -6(1-2\vartheta)\mu$, on prouve facilement les deux inégalités $D \geq 0$ et $\frac{D+\mu(\cos\theta-1)}{D} \geq 0$. Le β-schéma $(1.78)_1$ est inconditionnellement stable sous la condition (1.84). ■

En particulier, si $\vartheta = \frac{1}{2}$, le schéma est stable si $\beta < 0$.

Lemme 1.6.4 (Consistance)
Le schéma boîte (1.78) est consistant à l'ordre 2 en espace et en temps si $\vartheta = \frac{1}{2}$ et à l'ordre 2 en espace et 1 en temps si $\vartheta \neq \frac{1}{2}$. Donc, le schéma boîte est d'ordre 2 si $k = \mathcal{O}(h^2)$.

Preuve :
La preuve est analogue à la preuve du Lemme 1.4.2 de la consistance du schéma boîte (1.37). On suppose que les pas de temps et d'espace k et h tendent vers 0 et que le coefficient μ est borné par μ_1, $0 < \mu < \mu_1$ quand $k, h \to 0$. On cherche l'ordre en k et en h du terme [42] :

$$\frac{1}{k}\Big(e^{k\,q(\xi)} - g(h\,\xi)\Big) \tag{1.87}$$

$q(\xi) = -\varepsilon\,\xi^2$. En développant $e^{k\,q(\xi)}$ et g respectivement en k et en h, on obtient

$$e^{kq(\xi)} - g(h\xi) = \varepsilon^2\xi^4\,k^2(\frac{1}{2}-\vartheta) + h^2k\Big(\frac{\varepsilon\xi^4}{6} + \frac{\beta\,\varepsilon}{12}\Big) + \mathcal{O}(k^3) + \mathcal{O}(h^6) \tag{1.88}$$

Ce qui donne le résultat. ■

1.6.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous reprenons les tests réalisés sur le créneau dans le cas du premier schéma boîte (1.37), pour β-schéma boîte (1.78), à savoir la résolution du problème (1.23-1.24) donné par :

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad x \in]0,2[,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,2] \\ u(0,t) = 1,\ u(2,t) = 0\,, \quad t > 0. \end{cases} \tag{1.89}$$

où $\varepsilon = 1$ ou $1/8$ et la condition initiale est de type créneau :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < 0.5 \\ 0 \text{ si } 0.5 < x < 2 \end{cases} \tag{1.90}$$

Comme précédemment, la solution exacte est calculée numériquement par le schéma. Le paramètre β du β-schéma (1.78) est choisi $\beta = -0.5$ et satisfait les conditions d'existence, d'unicité et de stabilité de la solution du β-schéma (condition (1.84)). Nous voulons vérifier que le β-schéma boîte (1.78) atténue les modes oscillants présents dans la solution du schéma boîte (1.37) pour $\vartheta = \frac{1}{2}$ (voir les tests du Paragraphe 1.3). Nous observons la solution donnée par le β-schéma boîte (1.78) au temps $T = 2.10^{-3}$, puis $T = 2.10^{-2}$, avec un zoom sur la partie oscillante.

- $\mu = 1$: Les données sont $\vartheta = 1/2$ et $\mu = 1$, le pas d'espace est $h = 0.02$, le pas de temps est

$k = h^2 = 4.10^{-4}$. Les Figures 1.16 et 1.17 représentent simultanément la solution exacte du problème (1.23-1.24) en trait pointillé et la solution calculée par le β-schéma (1.78) en trait continu au temps $T = 2.10^{-3}$ (5 itérations en temps). Les Figures 1.18 et 1.19 représentent également les solutions exacte et calculée au temps $T = 2.10^{-2}$ (50 itérations en temps). Afin, de comparer la solution du schéma boîte (1.37) et du β-schéma boîte (1.78), nous représentons simultanément sur la Figure 1.20 un zoom sur le segment $[0.3, 0.8]$ de ces deux solutions boîte et de la solution exacte au temps $T = 2.10^{-3}$ et sur la Figure 1.21 au temps $T = 2.10^{-2}$. Sur ces deux figures, la solution exacte est toujours représentée en pointillé, la solution du schéma boîte (1.37) en trait continu et la la solution du β-schéma boîte (1.78), par des petits cercles.

• $\mu = 1/8$: De façon analogue, nous présentons les résultats obtenus pour $\mu = 1/8$. Les données restent inchangés : $\vartheta = 1/2$, $h = 0.02$ et $k = 4.10^{-4}$. On conserve $\beta = -0.5$.
La solution exacte et la solution du β-schéma sont représentées respectivement en trait pointillé et en trait continu sur les Figures 1.22 et 1.23 au temps $T = 2.10^{-3}$ et sur les Figures 1.24 et 1.25 au temps $T = 2.10^{-2}$. Les deux Figures 1.26 et 1.27 offrent une comparaison visuelle entre la solution exacte (trait pointillé), la solution du schéma boîte (1.37) (trait continu) et la solution du β-schéma boîte (petits cercles) aux temps respectifs $T = 2.10^{-3}$ et $T = 2.10^{-2}$.

Pour ces deux valeurs de μ, on constate que les oscillations sont immédiatement réduites, sans perte de précision. Ici le coefficient β prend la valeur $\beta = -0.5$ pour les deux valeurs de μ, 1 et 1/8. Néanmoins, on pourrait choisir $|\beta|$ proportionnel à la valeur de ε. De plus, rappelons, que le décentrement en β n'est nécessaire que pour $\vartheta = \frac{1}{2}$.

• Evolution des oscillations pour $\varepsilon = 1$:

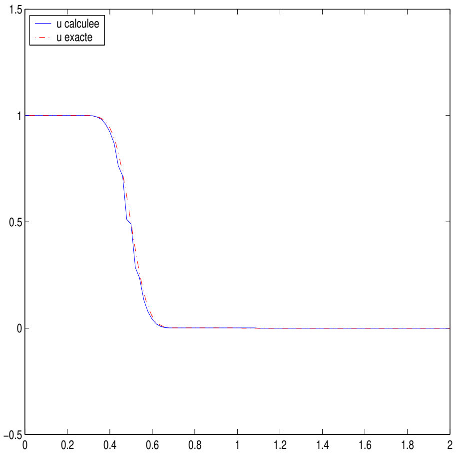

FIG. 1.16 – β-schéma (1.78), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-3}$, $\beta = -0.5$.

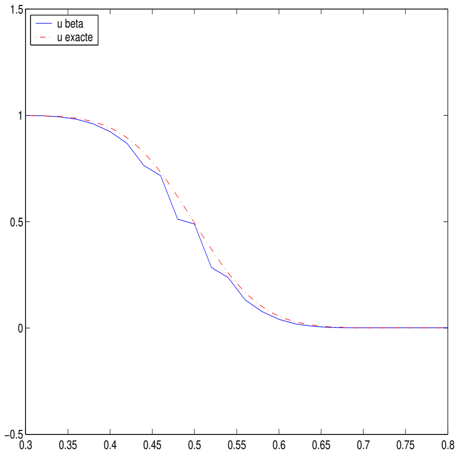

FIG. 1.17 – β-schéma (1.78), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-3}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

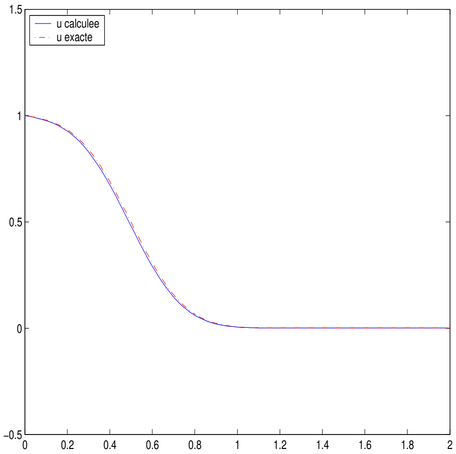

FIG. 1.18 – β-schéma (1.78), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-2}$, $\beta = -0.5$.

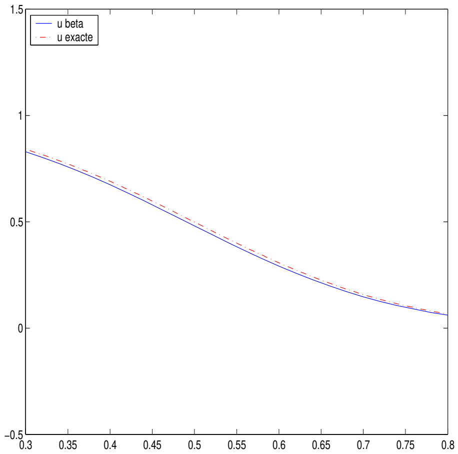

FIG. 1.19 – β-schéma (1.78), $\mu = 1$, $T = 2.10^{-2}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

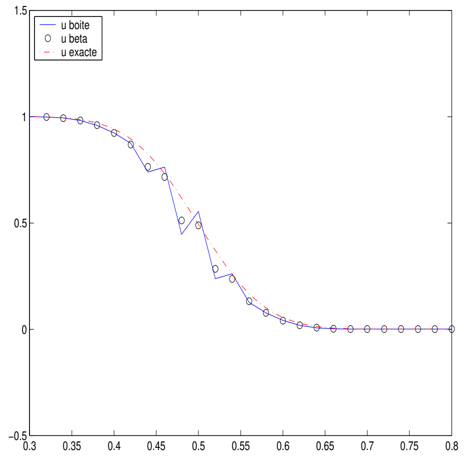

FIG. 1.20 – comparaison schéma boîte (1.37) et β-schéma boîte (1.78) $\mu = 1$, $T = 2.10^{-3}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

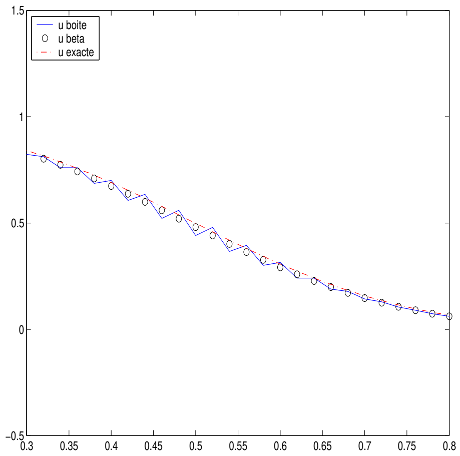

FIG. 1.21 – comparaison schéma boîte (1.37) et β-schéma boîte (1.78) $\mu = 1$, $T = 2.10^{-2}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

• Evolution des oscillations pour $\varepsilon = 1/8$:

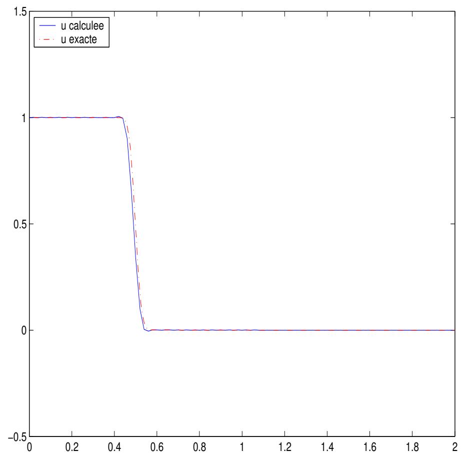

FIG. 1.22 – β-schéma (1.78), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-3}$, $\beta = -0.5$.

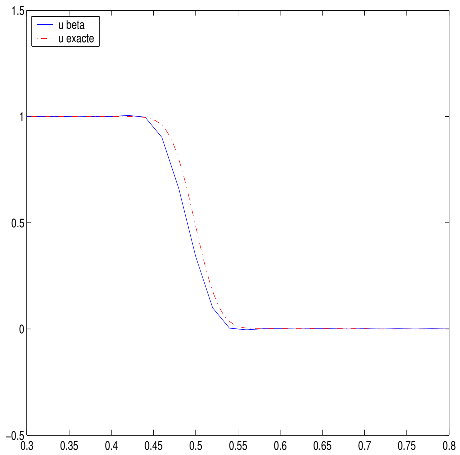

FIG. 1.23 – β-schéma (1.78), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-3}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

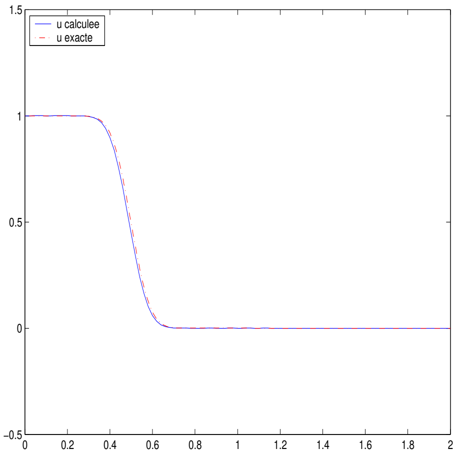

FIG. 1.24 – β-schéma (1.78), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-2}$, $\beta = -0.5$.

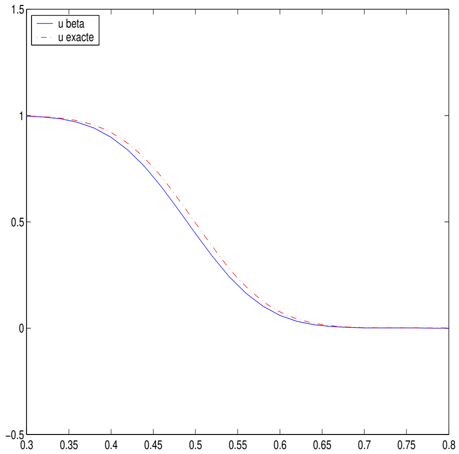

FIG. 1.25 – β-schéma (1.78), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-2}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

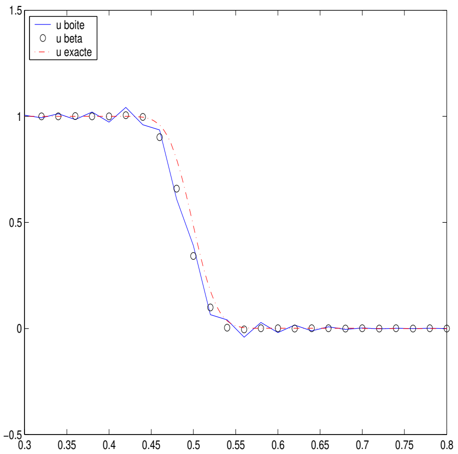

FIG. 1.26 – comparaison schéma boîte (1.37) et β-schéma boîte (1.78), $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-3}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

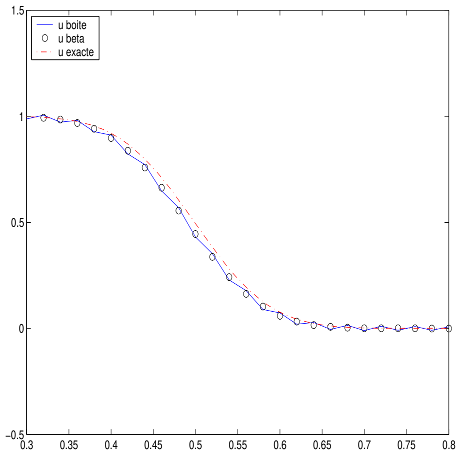

FIG. 1.27 – comparaison schéma boîte (1.37) et β-schéma boîte (1.78) $\mu = 1/8$, $T = 2.10^{-2}$, $\beta = -0.5$. Zoom sur $[0.3, 0.8]$.

CHAPITRE 2

Quelques schémas boîte sur maillages en triangles

2.1 Introduction

Les schémas boîte ont été introduits par H.B. Keller en 1971, pour des problèmes paraboliques [31]. Aprés l'étude au Chapitre 1, de schémas boîte associés à l'équation de la chaleur en dimension 1, nous souhaitons généraliser cette étude en dimension 2 pour un domaine muni d'un maillage en triangles. Sur le principe de discrétisation introduit par B. Courbet dans [14] pour le problème de la chaleur sur des maillages en triangles, B. Courbet et J.-P. Croisille ont introduit un schéma boîte de type volumes finis pour l'équation $-\Delta u = f$ sur un domaine Ω maillé par des triangles [15].
Dans ce chapitre, nous rappelons la construction et le principe du schéma boîte Courbet-Croisille et son lien avec la méthode des éléments finis mixte. Puis nous introduisons des schémas boîte d'ordre plus élevé basés sur les mêmes principes, pour lesquels nous prouvons des estimations d'erreurs par rapport à la solution exacte du problème de Poisson. La partie analyse numérique de ce travail a été publiée dans [19]. Quelques applications numériques illustrent les résultats théoriques obtenus. Par ailleurs, signalons que la généralisation au problème de Poisson avec tenseur de [15] a été établie par Chou et Co., [10].

2.2 Rappels sur les méthodes mixtes

2.2.1 Formes mixtes du problème de Poisson

Nous considérons un domaine polygonal $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Le problème de Poisson défini sur Ω est : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.1}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est un domaine convexe, le problème (2.1) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telle que $\|u\|_{2,\Omega} \leq C|f|_{0,\Omega}$. Nous utilisons dans la suite les deux

formes mixtes suivantes du problème de Poisson
(i) La formulation mixte primale : trouver $(u,p) \ \in H_0^1(\Omega)\times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}(\operatorname{div} p+f,v)_{0,\Omega}=0\ ,\ \forall v\in L^2(\Omega)\\ (p-\nabla u,q)_{0,\Omega}=0\ ,\ \forall q\in (L^2(\Omega))^2\end{array}\right. \tag{2.2}$$

(ii) La formulation mixte duale : trouver $(v,q) \ \in L^2(\Omega)\times (L^2(\Omega))^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}-(\nabla u,q)_{0,\Omega}=-(f,u)_{0,\Omega}\ ,\ \forall u\in H_0^1(\Omega)\\ (p,q)_{0,\Omega}+(\operatorname{div} p,v)_{0,\Omega}=0\ ,\ \forall p\in H_{\mathrm{div}}(\Omega)\end{array}\right. \tag{2.3}$$

Rappelons également les deux formes mixtes usuelles
(iii) La formulation mixte : trouver $(u,p) \ \in H_0^1(\Omega)\times (L^2(\Omega))^2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}-(p,\nabla v)_{0,\Omega}=-(f,v)_{0,\Omega}\ ,\ \forall v\in H_0^1(\Omega)\\ (p-\nabla u,q)_{0,\Omega}=0\ ,\ \forall q\in (L^2(\Omega))^2\end{array}\right. \tag{2.4}$$

équivalente à la forme variationnelle usuelle : $(\nabla u,\nabla v)_{0,\Omega}=(f,v)_{0,\Omega}$ avec $p=\nabla u$.
(iv) La formulation mixte variationnelle : trouver $(u,p) \ \in L^2(\Omega)\times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}(\operatorname{div} p+f,v)_{0,\Omega}=0\ ,\ \forall v\in L^2(\Omega)\\ (p,q)_{0,\Omega}+(u,\operatorname{div} q)_{0,\Omega}=0\ ,\ \forall q\in H_{\mathrm{div}}(\Omega)\end{array}\right. \tag{2.5}$$

La solution $(u,p) \ \in L^2(\Omega)\times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ de la formulation (2.5) est caractérisée comme étant l'unique point selle sur $V=L^2(\Omega)\times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ de la fonctionnelle J

$$J(v,q)=\frac{1}{2}|q|^2_{0,\Omega}+(\operatorname{div} q+f,v)_{0,\Omega}\,. \tag{2.6}$$

La forme bilinéaire B définie sur $V\times V$ par

$$B((u,p);(v,q))=(p,q)_{0,\Omega}+(u,\operatorname{div} q)_{0,\Omega}+(\operatorname{div} p,v)_{0,\Omega} \tag{2.7}$$

est symétrique, continue, V-elliptique ([16]), donc le problème (2.5) admet une solution unique $(u,p)\in V$ qui est la solution de

$$B((u,p);(v,q))=(f,v)_{0,\Omega}\,. \tag{2.8}$$

Ces quatre problèmes mixtes ont pour unique solution $(u,\nabla u)$, où $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ est l'unique solution de (2.1).
Pour la preuve, on peut utiliser le théorème de Babuška-Brezzi, que nous rappelons.

2.2.2 Le théorème de Babuška-Brezzi

Le lemme de Babuška

Soient $(H_1,\,(.,.)_1)$, $(H_2,\,(.,.)_2)$ deux espaces de Hilbert et $B(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $H_1\times H_2$. Soient $J:H_1\to H_2'$ et $J^*:H_2\to H_1'$ les deux opérateurs linéaires continus associés à la forme B par

$$B(u,v)\ =<J\,u,v>_{H_2',H_2}=<J^*\,v,u>_{H_1',H_1} \tag{2.9}$$

On a

Théorème 2.2.1 (Lemme de Babuška, [2])
L'opérateur $J : H_1 \to H_2'$ est un isomorphisme si et seulement si les deux conditions (i) et (ii) sont satisfaites
(i) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{v \in H_2, \|v\|_2 \leq 1} B(u, v) \geq C \|u\|_1 \,, \ \forall u \in H_1$$

(ii) Si $v \in H_2$ est telle que $B(u, v) = 0$ pour tout $u \in H_1$, alors $v = 0$.
De plus, la constante de continuité de J est $1/C$.

Cas particulier où $H_1 = M_1 \times X_1$ et $H_2 = M_2 \times X_2$

Dans le cas particulier d'espaces de Hilbert produit, Brezzi [3], Nicolaides [35], Bernardi et al. [7] ont prouvé le Théorème 2.2.2 que l'on peut déduire du Lemme de Babuška. Soient $(M_1, (.,.)_{M_1})$, $(X_1, (.,.)_{X_1})$, $(M_2, (.,.)_{M_2})$, $(X_2, (.,.)_{X_2})$ quatre espaces de Hilbert. Définissons les espaces produits $H_1 = M_1 \times X_1$, et $H_2 = M_2 \times X_2$, munis des normes :

$$\begin{aligned} \|(p,u)\|_{H_1} &= \Big(\|p\|_{X_1} + \|u\|_{M_1}\Big)^{1/2}, \quad \forall (p,u) \in H_1 \\ \|(q,v)\|_{H_2} &= \Big(\|q\|_{X_2} + \|v\|_{M_2}\Big)^{1/2}, \quad \forall (q,v) \in H_2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Soit B la forme bilinéaire définie sur $H_1 \times H_2$ par

$$B((p, u); (q, v)) = a(p, q) + b_1(q, u) + b_2(p, v) \tag{2.11}$$

où
- a est une forme bilinéaire continue définie sur $X_1 \times X_2$,
- b_1 et b_2 sont des formes bilinéaires continues définies respectivement sur $M_1 \times X_2$ et $M_2 \times X_1$.

Définissons les espaces noyaux V_1, V_2 :

$$\begin{aligned} V_1 = \{p \in X_1 \mid b_2(p, \mu) &= 0\,, \quad \forall \mu \in M_2\}\,, \\ V_2 = \{q \in X_2 \mid b_1(q, \lambda) &= 0\,, \quad \forall \lambda \in M_1\}\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Soient l_2, m_2, des formes linéaires continues définies respectivement sur X_2 et M_2. On considère le problème : chercher $(p, u) \in X_1 \times M_1$ solution de

$$\left\{ \begin{aligned} a(p,q) + b_1(q,u) &= < l_2, q > \quad , \forall q \in X_2 \\ b_2(p,v) &= < m_2, v > \quad , \forall v \in M_2 \end{aligned} \right. \tag{2.13}$$

Théorème 2.2.2 *Le problème (2.13) admet une unique solution (p, u) qui dépend continûment des données $(l_2, m_2) \in X_2' \times M_2'$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*
(i) il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\forall q \in V_2$,

$$\sup_{p \in V_1, \|p\|_{X_1} \leq 1} a(p, q) \geq \alpha \|q\|_{X_2},$$

(ii) *pour tout* $p \in V_1$,

$$\forall q \in V_2, \quad a(p,q) = 0 \Rightarrow p = 0,$$

(iii) *il existe une constante* $\beta_1 > 0$ *telle que*

$$\sup_{q \in X_2, \|q\|_{X_2} \leq 1} b_1(q,u) \geq \beta_1 \|u\|_{M_1}, \quad \forall u \in M_1,$$

(iv) *il existe une constante* $\beta_2 > 0$ *telle que*

$$\sup_{p \in X_1, \|p\|_{X_1} \leq 1} b_2(p,v) \geq \beta_2 \|v\|_{M_2}, \quad \forall v \in M_2.$$

Les deux formes mixtes (2.2), (2.3) entrent dans ce cadre :
(1) Soient les espaces de Hilbert $X_1 = H_{\text{div}}(\Omega)$, $M_1 = H_0^1(\Omega)$, $X_2 = (L^2(\Omega))^2$ et $M_2 = L^2(\Omega)$. Le problème (2.13) associé à la forme mixte (2.2) est : chercher $(p,u) \in X_1 \times M_1$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} (p,q)_{0,\Omega} - (\nabla u, q)_{0,\Omega} \ = \ 0 \quad , \forall q \in X_2 \\ (\operatorname{div} p, v)_{0,\Omega} = \ -(f,v)_{0,\Omega} \quad , \forall v \in M_2 \end{array} \right. \tag{2.14}$$

équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} a(p,q) + b_1(q,u) \ = \ 0 \quad , \forall q \in X_2 \\ b_2(p,v) \ = \ -(f,v)_{0,\Omega} \quad , \forall v \in M_2 \end{array} \right. \tag{2.15}$$

pour les formes bilinéaires continues $a(p,q) = (p,q)_{0,\Omega}$, $b_1(q,u) = -(\nabla u, q)_{0,\Omega}$ et $b_2(p,v) = (\operatorname{div} p, v)_{0,\Omega}$. Les hypothèses du Théorème 2.2.2 sont vérifiées, [16], en effet :
Les espaces V_1 et V_2 définis par

$$\begin{array}{c} V_1 = \{p \in H_{\text{div}}(\Omega) \mid (\operatorname{div} p, v)_{0,\Omega} \ = \ 0 \ , \quad \forall v \in L^2(\Omega)\} \\ V_2 = \{q \in (L^2(\Omega))^2 \mid \ -(\nabla u, q)_{0,\Omega} \ = \ 0 \ , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)\} \end{array} \tag{2.16}$$

satisfont $V_1 = V_2 = V$. Donc pour tout $q \in V$, on a l'égalité

$$\sup_{p \in V, \|p\|_{0,\Omega} \leq 1} a(p,q) = \|q\|_{0,\Omega}$$

Ainsi, les hypothèses *(i)* et *(ii)* du Théorème 2.2.2 sont vérifiées. D'autre part les hypothèses *(iii)* et *(iv)* du Théorème 2.2.2 sont les conditions "inf-sup" associées aux problèmes mixtes standards (2.4) et (2.5) pour les couples d'espaces $(M,X) = (H_0^1(\Omega), (L^2(\Omega))^2)$ et $(M,X) = (H_{\text{div}}(\Omega), L^2(\Omega))$.
(2) Soient les espaces de Hilbert $X_1 = (L^2(\Omega))^2$, $M_1 = L^2(\Omega)$, $X_2 = H_{\text{div}}(\Omega)$ et $M_2 = H_0^1(\Omega)$. Le problème (2.13) associé à la forme mixte (2.3) est : chercher $(p,u) \in X_1 \times M_1$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} (p,q)_{0,\Omega} + (\operatorname{div} q, u)_{0,\Omega} \ = \ 0 \quad , \forall q \in X_2 \\ -(\nabla v, p)_{0,\Omega} = \ -(f,v)_{0,\Omega} \quad , \forall v \in M_2 \end{array} \right. \tag{2.17}$$

équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} a(p,q) + b_1(q,u) \ = \ 0 \quad , \forall q \in X_2 \\ b_2(p,v) \ = \ -(f,v)_{0,\Omega} \quad , \forall v \in M_2 \end{array} \right. \tag{2.18}$$

pour les formes bilinéaires continues $a(p,q) = (p,q)_{0,\Omega}$, $b_1(q,u) = (\operatorname{div} q, u)_{0,\Omega}$ et $b_2(p,v) = -(\nabla v, p)_{0,\Omega}$. On montre de facçon analogue que les formes a, b et b_2 ainsi définies vérifient les hypothèses du Théorème 2.2.2.

2.2.3 Notations géométriques

Dans toute la suite, on suppose que le domaine Ω est connexe et convexe K désigne un triangle quelconque, d'aire notée $|K|$. La Figure 2.1 représente les données d'un triangle K. Soient :
- h_K : diamètre du cercle circonscrit à K.
- ρ_K : diamètre du cercle inscrit dans K.
- $\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} > 1$: mesure de la non dégénérescence de K.

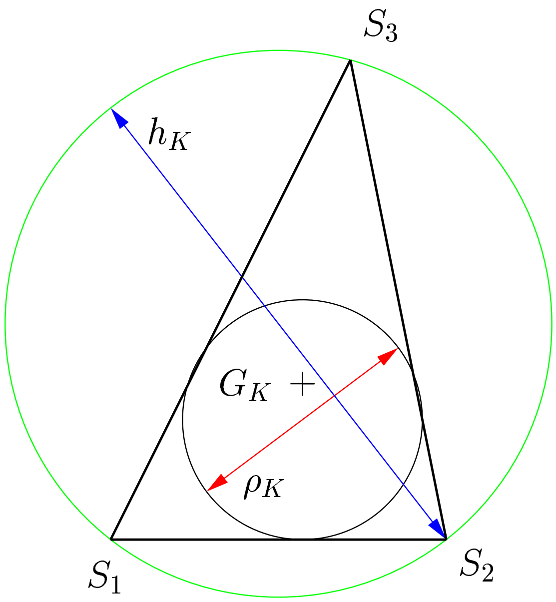

FIG. 2.1 – Données géométriques d'un triangle K

Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage en triangles du domaine Ω de paramètre de discrétisation

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

$\mathcal{T}_h$ est défini tel que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. Nous supposons que le maillage est uniformément régulier c'est-à-dire :
- $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \ \rightarrow 0$
- il existe deux constantes $\sigma > 0$ et $\tau > 0$ indépendantes de h, telles que

$$\tau\, h \leq h_K \leq \sigma\, \rho_K.$$

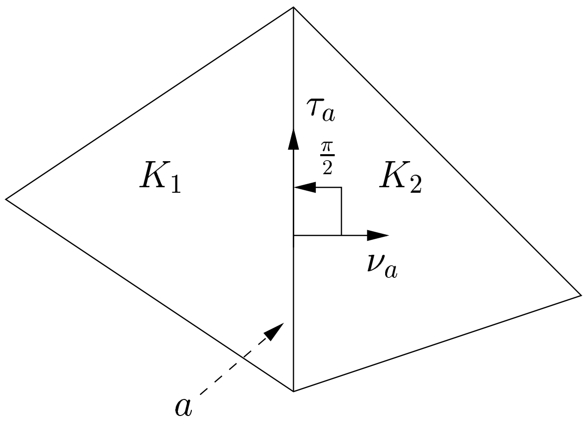

FIG. 2.2 – Vecteur normal à l'arête a

Le vecteur normal unitaire à une arête a de K orienté vers l'extérieur est noté ν_a, le vecteur tangent est noté τ_a (Figure 2.2), tels que $(\nu_a,\, \tau_a)$ forment une base orthonormée directe. Soient K_1 et K_2 deux triangles d'arête commune a. Le saut d'une fonction v à travers l'arête a est $[v] = v_{K_2,a} - v_{K_1,a}$, où $v_{K_i,a}$ est la valeur de v le long de l'arête a dans le triangle K_i, $i = 1, 2$. Le gradient d'une fonction $f \in H^1(\Omega)$ est $\nabla f = (\partial_x f\,,\, \partial_y f\,)$, son rotationnel est $\mathrm{rot}\, f = (\partial_y f\,, -\partial_x f\,)$. Le rotationnel scalaire d'une fonction vectorielle (f_1, f_2) est noté de façon identique, défini par $\mathrm{rot}(f_1, f_2) = \partial_y f_1 \;-\; \partial_x f_2$.
L'ensemble des arêtes du maillage noté $\mathcal{A} = \mathcal{A}_b \cup \mathcal{A}_i$ est constitué des arêtes frontières $\mathcal{A}_b$ et des arêtes internes $\mathcal{A}_i$. Nous notons NA, le nombre total d'arêtes, NA_b le nombre d'arêtes frontières et NA_i le nombre d'arêtes internes, NP, le nombre total de noeuds du maillage, NP_i le nombre de noeuds internes du maillage. NE désigne le nombre de mailles de la triangulation $\mathcal{T}_h$. Les relations d'Euler pour le maillage sont :

$$NE - NA + NP = 1 \quad \text{et} \quad 3NE = NA + NA_i\,. \tag{2.19}$$

2.2.4 Quelques Lemmes et Définitions

Les espaces de polynômes de degré total k sur K sont notés $P^k(K)$. Pour $v \in L^2(K)$, $\Pi^k v$ désigne la projection orthogonale de v sur $P^k(K)$ tel que

$$\int_K (\Pi^k v - v)\, q\, dx = 0\,, \quad \forall q \in P^k(K).$$

Lemme 2.2.1 (Interpolation, [23], [30])
Il existe une constante $C > 0$ indépendante du triangle K telle que
(i) si $v \in H^{k+1}(K)$,

$$|v - \Pi^k v|_{m,K} \leq C\, \sigma_K^m\, h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,K}\,, \quad 0 \leq m \leq k+1 \tag{2.20}$$

(ii) si $v \in H^{l+1}(K)$, $1 \leq l < k$

$$|v - \Pi^k v|_{m,K} \leq C\, \sigma_K^m\, h_K^{l+1-m} |v|_{l+1,K}\,, \quad 0 \leq m \leq l+1 \tag{2.21}$$

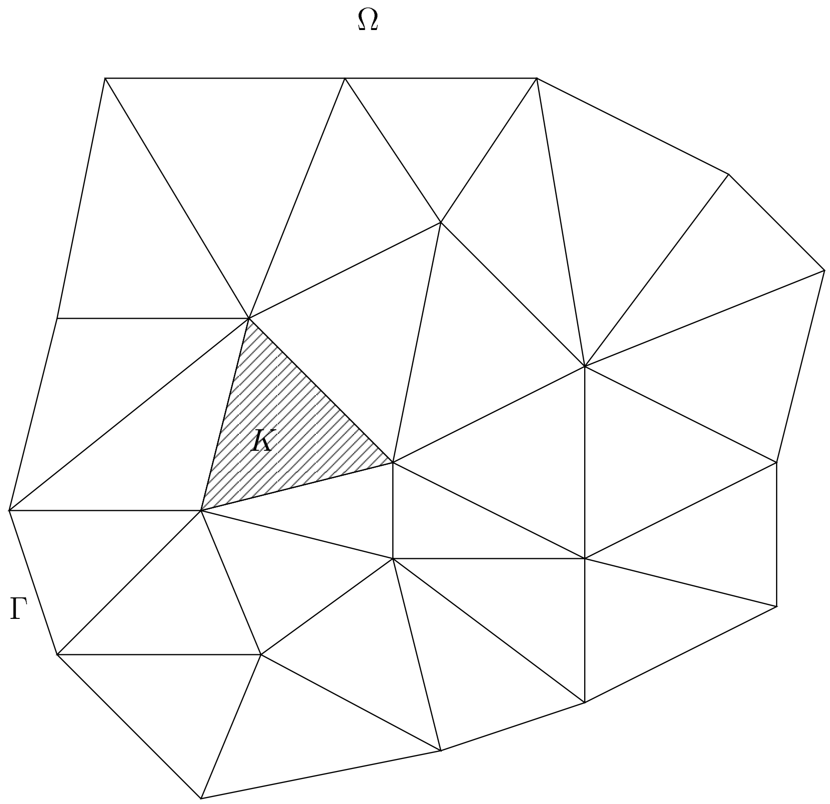

FIG. 2.3 – Maillage du domaine Ω

Soit $P^k(e)$ la restriction à l'arête e des polynômes de degré k. Π_e^k désigne la projection de $L^2(e)$ sur $P^k(e)$. Rappelons le lemme suivant

Lemme 2.2.2 (Interpolation d'arête de Crouzeix-Raviart [22])
Soit $k \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ tel que, $0 \leq m \leq k$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de K telle que pour tout $\phi \in H^1(K)$, $v \in H^{m+1}(K)$,

$$|\int_e \phi(v - \Pi_e^k v) d\sigma| \leq C \sigma_K \, h_K^{m+1} |\phi|_{1,K} |v|_{m+1,K}.$$

Rappelons le patch-test au sens de Irons et Razzaque [22], [32], [43]. Il s'agit d'une condition de recollement des espaces de polynômes totalement discontinus au niveau des arêtes du maillage.

Lemme 2.2.3 (Patch-test d'Irons et Razzaque, [22], [32], [43])
Un espace d'éléments finis V_h, sous espace vectoriel local de P^k satisfait le patch-test au sens de Irons et Razzaque si : pour tout $v_h \in V_h$, on a

$$(i) \; \forall a \in \mathcal{A}_i, \quad \int_a [v_h] \, p \, d\sigma = 0 \,, \quad \forall p \in P^{k-1}(a)$$

$$(ii) \; \forall a \in \mathcal{A}_b, \quad \int_a v_h \, p \, d\sigma = 0 \,, \quad \forall p \in P^{k-1}(a).$$

Rappelons le théorème suivant, que l'on retrouve par exemple dans [16], [34], qui est la version discrète du Théorème 2.2.2 de Babuška-Brezzi. On définit les espaces de Hilbert discrets $K_{i,h} = X_{i,h} \times M_{i,h}$ et $H_{i,h} = H_i + K_{i,h}$, où H_i est l'espace de Hilbert produit $H_i = X_i \times M_i$. L'approximation du problème (2.13) est :
chercher $(p_h, u_h) \in X_{1,h} \times M_{1,h}$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} a_h(p_h, q_h) + b_{1,h}(q_h, u_h) \ = < l_{2,h},\, q_h >, \quad \forall\, q_h \in X_{2,h} \\ b_{2,h}(p_h, v_h) \ = < m_{2,h},\, v_h >, \quad \forall\, v_h \in M_{2,h} \end{array} \right. \tag{2.22}$$

où
- a_h, $b_{1,h}$ et $b_{2,h}$ sont des approximations des formes bilinéaires a, b_1 et b_2 de la Section 2.2.2.
- $l_{2,h}$ et $m_{2,h}$ des approximations des formes linéaires l_2, m_2.

Soit B_h la forme bilinéaire discrète définie sur $H_{1,h} \times H_{2,h}$ par

$$B_h((p_h, u_h); (q_h, v_h)) = a_h(p_h, q_h) + b_{1,h}(q_h, u_h) + b_{2,h}(p_h, v_h). \tag{2.23}$$

Résoudre le problème (2.22) est équivalent à trouver $(p_h, u_h) \in X_{1,h} \times M_{1,h}$ tel que

$$B_h((p_h, u_h); (q_h, v_h)) =< l_{2,h}\,, q_h > \ + \ < m_{2,h}\,, v_h >\,, \quad \forall\,(q_h, v_h) \in X_{2,h} \times M_{2,h}\,. \tag{2.24}$$

Soient les espaces noyaux discrets de dimension finie :

$$\begin{array}{l} V_{1,h} = \{p_h \in X_{1,h};\ b_{2,h}(v_h, p_h) = 0\,, \quad \forall\, v_h \in M_{2,h}\}\,, \\ V_{2,h} = \{q_h \in X_{2,h};\ b_{1,h}(u_h, q_h) = 0\,, \quad \forall\, u_h \in M_{1,h}\}\,. \end{array} \tag{2.25}$$

Théorème 2.2.3 (Babuška-Brezzi discret - Condition "$\inf - \sup$")
Le problème (2.22) admet une unique solution (p_h, u_h) continûment dépendante des données $(l_{2,h}, m_{2,h}) \in X'_{2,h} \times M'_{2,h}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :
(i) il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de h telle que,

$$\sup_{p_h \in V_{1,h}, \|p_h\|_{X_{1,h}} \leq 1} a_h(p_h, q_h) \geq \alpha \|q_h\|_{X_{2,h}}$$

(ii) $\dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} = \dim M_{2,h} + \dim X_{2,h}$
(iii) il existe une constante $\beta_1 > 0$ telle que

$$\sup_{q_h \in X_{2,h}, \|q_h\|_{X_{2,h}} \leq 1} b_{1,h}(q_h, u_h) \geq \beta_1 \|u_h\|_{M_{1,h}}, \quad \forall u_h \in M_{1,h}$$

(iv) il existe une constante $\beta_2 > 0$ telle que

$$\sup_{p_h \in X_{1,h}, \|p_h\|_{X_{1,h}} \leq 1} b_{2,h}(p_h, v_h) \geq \beta_2 \|v_h\|_{M_{2,h}}, \quad \forall v_h \in M_{2,h}$$

2.3 Principe des schémas boîte

2.3.1 Introduction

Dans le cadre de l'équation de la chaleur, B. Courbet introduit un schéma boîte sur maillage triangulaire [14]. L'idée principale consiste à évaluer la moyenne par maille de la quantité conservée p en fonction de ses valeurs à l'interface de la maille. On obtient ainsi une formulation compacte du schéma : la moyenne ne dépend que des valeurs de u et p prises sur la boîte. La discrétisation des équations ne se fait que sur une maille, ce qui est particulièrement intéressant pour imposer les conditions limites sur la frontière. Sur cette idée, B. Courbet et J.-P. Croisille ont introduit le schéma boîte [15]. Ce schéma fait le lien entre le schéma boîte algébrique de B. Courbet [14] et les schémas de type éléments finis.
Dans un premier temps, nous définissons les espaces d'éléments finis dont nous aurons besoin. Nous rappelons ensuite le schéma boîte de B. Courbet et J.-P. Croisille [15]. Nous décrivons enfin quelques principes généraux de construction de schémas boîte.

2.3.2 L'espace $P1$ non-conforme de Crouzeix-Raviart

L'espace $P1$ non-conforme de Crouzeix-Raviart, [22], est l'espace des fonctions affines par morceaux, continues aux milieux des arêtes internes et nulles aux milieux des arêtes frontières. Il est noté :

$$\begin{aligned} P^1_{nc,0} = \Big\{ & v_h \in L^2(\Omega),\, v_{h|K} \in P^1(K),\ \forall\, K \in \mathcal{T}_h, \textstyle\int_a v_h \, d\sigma = 0,\ \forall\, a \in \mathcal{A}_i, \\ & \textstyle\int_a [v_h] \, d\sigma = 0,\ \forall\, a \in \mathcal{A}_b \Big\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Lemme 2.3.1 (Fonctions de base de l'espace $P^1_{nc,0}$)
(i) Les degrés de liberté de l'espace $P^1_{nc,0}$ sont les formes linéaires $\{l_a\}_{a\in\mathcal{A}_i}$, où l_a est défini par :

$$l_a(v_h) = \frac{1}{|a|} \int_a v_h \, d\sigma = v_h(M_a), \quad \forall\, v_h \in P^1_{nc,0}, \tag{2.27}$$

où M_a est le milieu de l'arête a.
(ii) La base globale de l'espace $P^1_{nc,0}$ est $(p_a)_{a\in\mathcal{A}_i}$ où $p_a = 1 - 2\lambda_S$, $\lambda_S(x,y)$ désigne les coordonnées barycentriques du point (x,y) par rapport au sommet S opposé à l'arête a (Figure 2.4).
(iii) En particulier, l'espace $P^1_{nc,0}$ est de dimension NA_i.

Par définition l'espace $P^1_{nc,0}$ satisfait le lemme suivant :

Lemme 2.3.2 (Patch test pour $P^1_{nc,0}$)
L'espace $P^1_{nc,0}$ satisfait le patch-test d'Irons et Razzaque : pour tout $v_h \in P^1_{nc,0}$, on a les relations

$$\begin{aligned} (i)\ \forall a \in \mathcal{A}_i, \quad & \int_a [v_h]\, p \, d\sigma = 0\,,\ p \in P^1(a)\,, \\ (ii)\ \forall a \in \mathcal{A}_b, \quad & \int_a v_h\, p \, d\sigma = 0\,,\ p \in P^1(a)\,. \end{aligned}$$

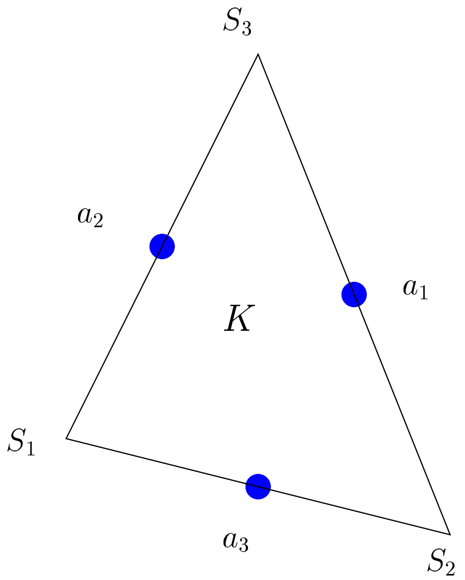

FIG. 2.4 – Degrés de liberté de P^1_{nc}

Soit la semi-norme $|\cdot|_h$ définie sur $H^1_0(\Omega) + P^1_{nc,0}$ par

$$|u|^2_{1,h} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla u|^2_{1,K}$$

où $|\cdot|_{1,K}$ est la semi-norme 1 sur un triangle K.

Lemme 2.3.3 (Inégalité de Poincaré discrète pour $H^1_0(\Omega) + P^1_{nc,0}$, [30])
Il existe une constante C qui ne dépend que de Ω telle que

$$|u|_{0,h} \leq C|u|_{1,h}\ ,\ \forall u \in H^1_0(\Omega) + P^1_{nc,0}. \tag{2.28}$$

Preuve :
Soit $u \in H^1_0(\Omega) + P^1_{nc,0}$. Alors,

$$|u|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(u,g)_{0,\Omega}|}{|g|_{0,\Omega}} \tag{2.29}$$

Soit $g \in L^2(\Omega)$, $\exists\ p\ \in H^1(\Omega)^2$ tel que $\operatorname{div} p = g$ et $\|p\|_{1,\Omega} \leq C|g|_{0,\Omega}$. En remplaçant g par sa valeur, puis en intégrant par parties, on obtient

$$(u,g)_{0,\Omega} = (u, \operatorname{div} p)_{0,\Omega} = \underbrace{-\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\, dx}_{(I)} + \underbrace{\sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma}_{(II)} \tag{2.30}$$

(i) L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'estimer $|(I)|$:

$$|\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\, dx\,| \leq |u|_{1,h}\, |p|_{0,\Omega}\,.$$

(ii) Puisque $p \in H^1(\Omega)^2 \cap H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, sa composante normale le long d'une arête interne a est continue, (II) devient donc :

$$(II) = \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma = \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a p \cdot \nu_a\, u\, d\sigma \; - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a p \cdot \nu_a\, [u]\, d\sigma \tag{2.31}$$

Soit $\overline{p \cdot \nu_a} = \frac{1}{|a|} \int_a p \cdot \nu_a\, d\sigma \in P^0(a)$ la moyenne de $p \cdot \nu_a$ le long de l'arête a. L'espace $H^1_0(\Omega) + P^1_{nc,0}$ satisfait le patch-test (Lemme 2.3.2), donc

$$\begin{array}{rcll} \int_a \overline{p \cdot \nu_a}\, u\, d\sigma & = & 0\,, & \forall\, a \in \mathcal{A}_b \\ \int_a \overline{p \cdot \nu_a}\, [u]\, d\sigma & = & 0\,, & \forall\, a \in \mathcal{A}_i\,. \end{array} \tag{2.32}$$

L'égalité (2.31) devient :

$$\begin{aligned} \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma &= \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a})\, u\, d\sigma - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a})\, [u] d\sigma \\ &= \sum_K \sum_{e \in \partial K} \int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e})\, u\, d\sigma \end{aligned}$$

Le Lemme 2.2.2 donne l'estimation

$$\left| \int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e})\, u\, d\sigma \right| \le C\, h_K\, |u|_{1,K}\, |p|_{1,K}$$

Ainsi,

$$|(II)| = \left| \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma \right| \le 3\, C\, h\, |u|_{1,h}\, |p|_{1,\Omega}$$

Finalement,

$$|(u,g)_{0,\Omega}| \le (C\, h |p|_{1,\Omega} + |p|_{0,\Omega}) |u|_{1,h} \le C |u|_{1,h}\, \|p\|_{1,\Omega}$$

Or, $\|p\|_{1,\Omega} \le C(\Omega) |g|_{0,\Omega}$, d'où le résultat annoncé. ■

En particulier, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.4 *La semi-norme d'energie $|\cdot|_{1,h}$ est une norme sur l'espace $H^1_0(\Omega) + P^1_{nc,0}$.*

2.3.3 L'espace RT^0 de Raviart-Thomas

L'espace RT^0 est l'espace de Raviart-Thomas [39] de plus bas degré. Il est défini par

$$RT^0 = \left\{ q_h \in H_{\mathrm{div}}(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|K} \in (P^0(K))^2 + P^0(K) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.33}$$

La composante normale d'un élément q de RT^0 est constante par arête. De plus $RT^0 \subseteq H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, on a en particulier la continuité le long d'une arête interne de la composante normale d'un élément de RT^0. C'est-à-dire, si $a = \partial K_1 \cap \partial K_2$ est une arête interne du maillage, des triangles K_1 et K_2

$$p_{h,K_1}(x) \cdot \nu_a + p_{h,K_2}(x) \cdot \nu_a = 0\,, \quad \forall x \in a\,. \tag{2.34}$$

On en déduit

Lemme 2.3.5 (Fonctions de base)
(i) RT^0 est un espace vectoriel de dimension NA, dont les degrés de liberté sont les formes linéaires $\{L_a\}_{a\in\mathcal{A}}$, où L_a est défini par :

$$L_a(q_h) = \frac{1}{|a|}\int_a q_h \cdot \nu_a \, d\sigma, \quad \forall q_h \in RT^0. \tag{2.35}$$

(ii) La base globale de l'espace RT^0 est $(P_a)_{a\in\mathcal{A}}$, où P_a est défini par :

$$P_a(x,y) = P_{K_1,a}(x,y)\mathbb{1}_{K_1} - P_{K_2,a}(x,y)\mathbb{1}_{K_2}, \tag{2.36}$$

et sur chaque triangle K, $P_{K,a}$ est défini par :

$$P_{K,a}(x,y) = \frac{1}{2|K|}\begin{pmatrix} x - x_S \\ y - y_S \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

où S désigne toujours le sommet opposé à l'arête a (Figure 2.5).

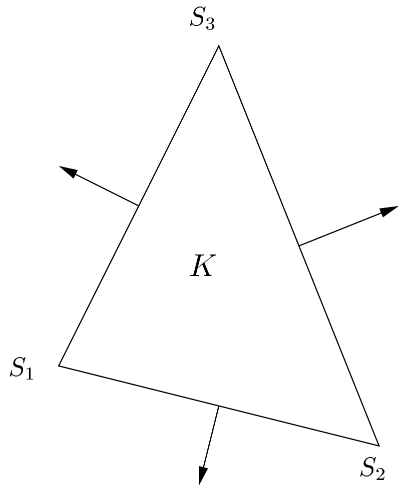

FIG. 2.5 – Degrés de liberté de $RT^0(K)$

2.3.4 Le schéma boîte de Courbet et Croisille

Illustrons la méthode boîte, dans le cas du schéma boîte de Courbet et Croisille, [15]. Après introduction d'une variable auxilliaire $p = \nabla u$, le problème de Poisson homogène (2.1) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} p + f \ = 0 \ , \ \text{sur } \Omega \\ p - \nabla u \ = 0 \ , \ \text{sur } \Omega \\ u = 0 \ , \ \text{sur } \Gamma \, . \end{array}\right. \tag{2.38}$$

On intègre les équations (2.38) sur chaque cellule K du maillage. On obtient le système (2.39), dont la solution continue (u, p) de (2.38) est solution

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_K (\operatorname{div} p + f)\, dx = 0\,, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ \displaystyle\int_K (p - \nabla u)\, dx = 0\,, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ u_{|\Gamma} = 0\,. \end{array} \right. \tag{2.39}$$

Approchons les inconnues du problème continu u et p respectivement par les inconnues discrètes $u_h \in M_{1,h}$ et $p_h \in X_{1,h}$, où $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ sont des espaces d'éléments finis approchant les espaces continus $H_0^1(\Omega)$ et $H_{\text{div}}(\Omega)$. Considérons le problème approché : chercher $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \displaystyle\int_K (\operatorname{div} p_h + f)\, dx &=& 0\,, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ \displaystyle\int_K (p_h - \nabla u_h)\, dx &=& 0\,, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ u_{|\Gamma} &=& 0\,. \end{array} \right. \tag{2.40}$$

En appliquant la formule de Green sur un triangle K, l'équation (2.40) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{e \in \partial K} \int_e p_h \cdot \nu_e\, d\sigma + |K| \Pi^0 f = 0\,, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ \displaystyle |K| (\Pi^0 p_h)_K - \sum_{e \in \partial K} \left(\int_e u_h\, d\sigma \right) \nu_e = 0\,, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ u_{h|\Gamma} = 0. \end{array} \right. \tag{2.41}$$

Cette réécriture du problème fait apparaître un choix naturel de degrés de liberté pour u_h et p_h donnés par les moyennes d'arêtes :

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_e u_h\, d\sigma, \quad \forall e \in \mathcal{A} \\ \displaystyle\int_e p_h \cdot \nu_e\, d\sigma, \quad \forall e \in \mathcal{A} \end{array} \tag{2.42}$$

Pour que le problème discret soit bien posé, il est nécessaire de choisir des espaces d'inconnues $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ tels que le nombre global d'inconnues soit égal au nombre d'équations du système (2.41). C'est-à-dire $3NE + NA_b$ équations, ou encore $2NA$ équations (en utilisant la deuxième relation d'Euler). Le choix de $2NA$ inconnues suggéré par (2.42) satisfait donc la relation

nombre d'équations discrètes = nombre d'inconnues discrètes.

D'autre part, les degrés de liberté donnés par (2.42), correspondent aux degrés de liberté des espaces $P^1_{nc,0}$ de Crouzeix-Raviart défini au paragraphe 2.3.2 et RT^0, l'espace de Raviart-Thomas de plus bas degré défini au paragraphe 2.3.3. Choisissons donc $M_{1,h} = P^1_{nc,0}$ et

$X_{1,h} = RT^0$. Revenons à la formulation (2.40). Elle est encore équivalente à chercher $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_K \int_K (\operatorname{div} p_h + f)\, v_h \, dx = 0 \;, \quad v_h \in P^0 \\ \displaystyle\sum_K \int_K (p_h - \nabla u_h) \cdot q_h \, dx = 0 \;, \quad q_h \in (P^0)^2. \end{array} \right. \tag{2.43}$$

Notons :

$$X_{2,h} = \Big\{ q_h \in (L^2(\Omega))^2 \;;\; q_{h|K} \in (P^0(K))^2 \;, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\} \tag{2.44}$$

le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, des polynômes constants par triangle, totalement discontinus, de dimension $\dim X_{2,h} = 2NE$ et

$$M_{2,h} = \Big\{ v_h \in L^2(\Omega) \;;\; v_{h|K} \in P^0(K) \;, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\} \tag{2.45}$$

l'espace des polynômes constants par triangle totalement discontinus, de dimension $\dim M_{2,h} = NE$. On note aussi ces espaces $(P^0)^2$ et P^0. Le problème (2.43) se réécrit : chercher $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_K \int_K (\operatorname{div} p_h + f)\, v_h \, dx = 0 \;, \quad v_h \in M_{2,h} \\ \displaystyle\sum_K \int_K (p_h - \nabla u_h) \cdot q_h \, dx = 0 \;, \quad q_h \in X_{2,h}. \end{array} \right. \tag{2.46}$$

Définition 2.3.1 (Le schéma boîte de Courbet et Croisille)
On définit le schéma boîte suivant associé au problème de Poisson (2.1) comme étant le problème discret : chercher $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_K \int_K (\operatorname{div} p_h + f)\, v_h \, dx = 0 \;, \quad \forall v_h \in P^0 \\ \displaystyle\sum_K \int_K (p_h - \nabla u_h) \cdot q_h \, dx = 0 \;, \quad \forall q_h \in (P^0)^2 \,. \end{array} \right. \tag{2.47}$$

C'est une formulation mixte de type "Petrov-Galerkin", c'est-à-dire que les espaces d'approximation $M_{1,h} = P^1_{nc,0}$ et $X_{1,h} = RT^0$ sont des espaces d'éléments finis, distincts des espaces test $M_{2,h} = P^0$ et $X_{2,h} = (P^0)^2$. L'espace discret $X_{1,h}$ est un espace d'éléments finis de type conforme ($X_{1,h} \subseteq H_{\mathrm{div}}(\Omega)$) mais l'espace $M_{1,h}$ est de type non-conforme ($M_{1,h} \not\subseteq H^1_0(\Omega)$).

Lemme 2.3.6 *Les espaces d'inconnues et les espaces de fonctions test satisfont la relation d'égalité des dimensions :*

$$\dim P^1_{nc,0} + \dim RT^0 = \dim P^0 + \dim (P^0)^2 \,. \tag{2.48}$$

Par la suite pour définir des schémas d'ordre plus élevé, nous veillerons à choisir des espaces $M_{1,h}$, $X_{1,h}$, $M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ satisfaisant la relation d'égalité des dimensions des espaces

$$\dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} = \dim M_{2,h} + \dim X_{2,h} \tag{2.49}$$

Lemme 2.3.7 *Le schéma boîte (2.47) a une unique solution* $(u_h,\, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$.

Preuve :
Rappelons brièvement la preuve, [15]. Le problème (2.47) est linéaire avec autant d'équations que d'inconnues, il suffit donc de prouver que $f \equiv 0$ implique $u_h = 0$ et $p_h = 0$. D'après la définition de RT^0, $f = 0$ dans l'équation $(2.47)_1$ entraîne que $\operatorname{div} p_{h|K} = 0$, sur chaque triangle K, donc localement, $p_{h|K} \in (P^0(K))^2$. Le choix $q_h = p_h$ dans l'équation $(2.47)_2$ donne $\sum_K |p_h|^2_{0,K} = 0$, c'est-à-dire $p_h \equiv 0$. D'autre part, $\nabla u_{h|K} \in (P^0(K))^2$, donc le choix $q_h = \nabla u_h$ dans l'équation $(2.47)_2$ donne $\nabla u_h = 0$. Donc u_h est constante par triangle, on conclut que $u_h = 0$ en utilisant la continuité de u_h au milieu des arêtes internes et la nullité de u_h au milieu des arêtes frontières. ■

Proposition 2.3.1 *Le problème (2.47) est équivalent à chercher* $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$ *tel que :*
(i) $u_h \in P^1_{nc,0}$ *est solution du problème :*

$$\sum_K (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f_{|K}, v_h)_{0,K}\ , \quad \forall v_h \in P^1_{nc,0} \tag{2.50}$$

(ii) p_h *est donné localement par*

$$p_{h|K}(x) = \nabla u_{h|K}(x) - \frac{(\Pi^0 f)_K}{2}\overrightarrow{G_K x} \tag{2.51}$$

où $G_K(x_K, y_K)$ *est le centre de gravité du triangle* K.

Preuve :
(i) Soit $v_h \in P^1_{nc,0}$, en prenant $q_h = \nabla v_h \in (P^0)^2$ dans l'équation $(2.47)_2$, puis en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_K (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} &= \sum_K (p_h, \nabla v_h)_{0,K} \\ &= -\sum_K (\operatorname{div} p_h, v_h)_{0,K} + \sum_K \int_{\partial K} p_h \cdot \nu\, v_h\, d\sigma \end{aligned} \tag{2.52}$$

Puisque $p_h \in RT^0(K)$, sa divergence est constante par triangle. Donc l'équation $(2.47)_1$ implique que $\operatorname{div} p_{h|K} = -(\Pi^0 f)_{|K}$. D'autre part, p_h vérifie la relation (2.34) de continuité de la composante normale de p_h, donc (2.52) est équivalente à

$$\sum_K (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f, v_h)_{0,K} + \sum_{a\in\mathcal{A}_b} \int_a p_h \cdot \nu_a\, v_h\, d\sigma - \sum_{a\in\mathcal{A}_i} \int_a p_h \cdot \nu_a\, [v_h]\, d\sigma$$

Or, $p_h \cdot \nu_a \in P^0(a)$ et $v_h \in P^1_{nc,0}$, en particulier $\int_a p_h \cdot \nu_a \, v_h \, d\sigma = 0$ si a est une arête frontière et $\int_a p_h \cdot \nu_a \, [v_h] \, d\sigma = 0$ si a est une arête interne. Donc

$$\sum_K (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} \; = \; \sum_K (\Pi^0 f, v_h)_{0,K}$$

(ii) Le flux discret $p_h \in RT^0(K)$, est donné localement par

$$p_{h|K} = (\Pi^0 p_h)_{|K} + \frac{\operatorname{div} p_{h|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix}$$

Nous avons vu précédemment que $\operatorname{div} p_{h|K} = -(\Pi^0 f)_{|K}$. L'équation $(2.47)_2$ implique que $(\Pi^0 p_h)_{|K} = (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} = \nabla u_{h|K}$, puisque $\nabla u_{h|K} \in P^0(K)$. D'où on déduit le résultat. ■

Proposition 2.3.2 (Stabilité)
La solution $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$ du schéma (2.47) vérifie

$$\|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\text{div},\Omega} \leq C |f|_{0,\Omega}$$

Preuve :
D'après la formulation équivalente de la Proposition 2.3.1, le choix $v_h = u_h$ dans l'équation (2.50) donne

$$|u_h|_{1,h} \leq C \, |f|_{0,\Omega}. \tag{2.53}$$

En utilisant le Lemme de Poincaré 2.3.3, on déduit que

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C \, |f|_{0,\Omega}. \tag{2.54}$$

De plus l'écriture locale de p_h (2.51) donne $|p_h|_{0,\Omega} \leq |u_h|_{1,h} + C \, h \, |f|_{0,\Omega}$. Ce qui donne en combinant avec (2.53)

$$|p_h|_{0,\Omega} \leq C \, |f|_{0,\Omega}.$$

De plus, $\operatorname{div} p_{h|K} = -(\Pi^0 f)_{|K}$, on en déduit donc que

$$\|p_h\|_{\text{div},\Omega} \leq C \, |f|_{0,\Omega}.$$

D'où le résultat. ■

Cette combinaison des espaces $P^1_{nc,0}$ et RT^0 dans le schéma boîte (2.47) donne une bonne approximation à la fois de l'inconnue scalaire u et de l'inconnue de gradient ∇u. En effet :

Proposition 2.3.3 (Estimations d'erreur *a priori***)**
Soit $(u, p) \in H^1_0(\Omega) \times H_{\text{div}}(\Omega)$ la solution du problème continu (2.2). Soit $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$, la solution du schéma boîte (2.47). Si $u \in H^2(\Omega)$ et $f \in H^1(\Omega)$, alors on a les estimations d'erreur suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (i) \; |u - u_h|_{1,h} \leq C \, h \, |f|_{0,\Omega} & ; & (ii) \; |u - u_h|_{0,\Omega} \leq C \, h^2 \, |f|_{0,\Omega} \\ (iii) \; |p - p_h|_{0,\Omega} \leq C \, h |f|_{0,\Omega} & ; & (iv) \; |p - p_h|_{\text{div},\Omega} \leq C \, h \, |f|_{1,\Omega} \end{array} \tag{2.55}$$

Preuve :
Rappelons la démonstration de [15]. Nous supposons que $u \in H^2(\Omega)$.
(i) Notons a_h la forme bilinéaire définie sur l'espace $H_0^1(\Omega) + P_{nc,0}^1$ par

$$a_h(u,v) = \sum_K (\nabla u, \nabla v)_{0,K}, \quad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega) + P_{nc,0}^1.$$

Pour tout $v_h \in P_{nc,0}^1$, on a

$$|u - u_h|_{1,h} \leq |u - v_h|_{1,h} + |u_h - v_h|_{1,h}$$

Or, par définition de a_h,

$$\begin{aligned} |u_h - v_h|_{1,h}^2 &= a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) \\ &= a_h(u_h - u, u_h - v_h) + a_h(u - v_h, u_h - v_h) \end{aligned} \tag{2.56}$$

Donc

$$|u_h - v_h|_{1,h} \leq \sup_{v_h \in P_{nc,0}^1} \frac{|a_h(u_h - u, u_h - v_h)|}{|u_h - v_h|_{1,h}} + |u - v_h|_{1,h} \tag{2.57}$$

ce qui donne :

$$|u - u_h|_{1,h} \leq 2 \underbrace{\inf_{w_h \in P_{nc,0}^1} |u - w_h|_{1,h}}_{(I)} + \underbrace{\sup_{w_h \in P_{nc,0}^1} \frac{|a_h(u_h - u, w_h)|}{|w_h|_{1,h}}}_{(II)} \tag{2.58}$$

• Estimons l'erreur de consistance (II). Soit $w_h \in P_{nc,0}^1$,

$$\begin{aligned} a_h(u_h - u, w_h) &= \sum_K \int_K \nabla(u_h - u) \cdot \nabla w_h \, dx \\ &= \sum_K \int_K \nabla u_h \cdot \nabla w_h \, dx - \sum_K \int_K \nabla u \cdot \nabla w_h \, dx \end{aligned}$$

Soit encore, puisque u_h est solution de la formulation variationnelle (2.50)

$$a_h(u_h - u, w_h) = \sum_K (\Pi^0 f, w_h)_{0,K} + \sum_K \int_K \Delta u \, w_h \, dx - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu)\, w_h \, d\sigma \tag{2.59}$$

Or, $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$, donc

$$a_h(u_h - u, w_h) = \sum_K \int_K (\Pi^0 f - f)\, w_h \, dx - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu)\, w_h \, d\sigma \tag{2.60}$$

Notons L_u la forme linéaire définie sur l'espace $H_0^1(\Omega) + P_{nc,0}^1$ par :

$$L_u(w_h) = \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu)\, w_h \, d\sigma\ , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Estimons le terme $L_u(w_h)$ pour $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$:

$$L_u(w_h) = \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu)\, w_h \, d\sigma = - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a \nabla u \cdot \nu_a [w_h] \, d\sigma + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a \nabla u \cdot \nu_a w_h \, d\sigma \quad (2.61)$$

Soit $P^0(a)$ la restriction à l'arête a des polynômes constants. On définit la moyenne de v sur l'arête a par $\overline{v} = \frac{1}{a} \int_a v \, d\sigma \in P^0(a)$. Or, $P^1_{nc,0}$ satisfait le patch-test (Lemme 2.3.2), $w_h \in P^1_{nc,0}$ et $\overline{\nabla u \cdot \nu_a} \in P^0(a)$, ce qui donne

$$\int_a \nabla u \cdot \nu_a [w_h] \, d\sigma = \int_a \left(\nabla u \cdot \nu_a - \overline{\nabla u \cdot \nu_a} \right) [w_h] \, d\sigma, \quad a \in \mathcal{A}_i$$

et

$$\int_a \nabla u \cdot \nu_a \, w_h \, d\sigma = \int_a \left(\nabla u \cdot \nu_a - \overline{\nabla u \cdot \nu_a} \right) w_h \, d\sigma, \quad a \in \mathcal{A}_b \, .$$

Ainsi, l'équation (2.61) est équvalente à :

$$\begin{aligned} L_u(w_h) &= - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a \left(\nabla u \cdot \nu_a - \overline{\nabla u \cdot \nu_a} \right) [w_h] \, d\sigma \\ &\quad + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a \left(\nabla u \cdot \nu_a - \overline{\nabla u \cdot \nu_a} \right) w_h \, d\sigma \\ &= \sum_{K \in} \sum_{e \in \partial K} \int_e \left(\nabla u \cdot \nu_e - \overline{\nabla u \cdot \nu_e} \right) w_h \, d\sigma \end{aligned} \quad (2.62)$$

En appliquant le Lemme 2.2.2 ($k = 0, \ m = 0$), on obtient l'estimation

$$\left| \int_e \left(\nabla u \cdot \nu_e - \overline{\nabla u \cdot \nu_e} \right) w_h \, d\sigma \right| \leq C \, \sigma_K \, h_K |w_h|_{1,K} |\nabla u|_{1,K}$$

$L_u(w_h)$ est donc majoré par :

$$|L_u(w_h)| \leq C_1 \, h \, |w_h|_{1,h} \, |u|_{2,\Omega}. \quad (2.63)$$

Estimons maintenant le terme $\sum_K \int_K (\Pi^0 f - f) w_h \, dx$.

Par définition de Π^0, opérateur de projection sur les polynômes constants,

$$\sum_K \int_K (\Pi^0 f - f) \, w_h \, dx = - \sum_K \int_K f \, (w_h - \Pi^0 w_h) \, dx \, .$$

Ainsi, nous obtenons en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.20) :

$$\begin{aligned} \left| \sum_K \int_K (\Pi^0 f - f) \, w_h \, dx \right| &\leq \sum_K |f|_{0,K} \, |w_h - \Pi^0 w_h|_{0,K} \\ &\leq \sum_K |f|_{0,K} \, (C_2 \, h_K |w_h|_{1,K}) \\ &\leq C_2 \, h |f|_{0,\Omega} |w_h|_{1,h}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Donc en remplaçant (2.63) et (2.64) dans (2.60), on a l'estimation de $a_h(u_h - u, w_h)$: pour tout $w_h \in P^1_{nc,0}$

$$\begin{aligned} |a_h(u_h - u, w_h)| &\leq C_1\, h |w_h|_{1,h} |u|_{2,\Omega} + C_2\, h |f|_{0,\Omega} |w_h|_{1,h} \\ &\leq C\, h\, |w_h|_{1,h}\, |f|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

Donc $(II) \leq C\, h\, |f|_{0,\Omega}$.

• D'autre part, en notant Π^1_h l'opérateur de projection P^2-Lagrange des fonctions de $L^2(\Omega)$ sur l'espace $P^1_{c,0}$ et par inclusion de $P^1_{c,0}$ dans $P^1_{nc,0}$, on obtient l'estimation de l'erreur d'approximation (I), donnée par le Lemme 2.2.1,

$$(I) = \inf_{w_h \in P^1_{nc,0}} |u - w_h|_{1,h} \leq |u - \Pi^1_h u|_{1,h} \leq C_3\, h |u|_{2,\Omega} \leq C_3\, h |f|_{0,\Omega}$$

Ceci nous permet de conclure en regroupant les termes (I) et (II) dans (2.58) que

$$|u - u_h|_{1,h} \leq C\, h\, |f|_{0,\Omega}$$

Nous avons ainsi démontré l'assertion *(i)*.

(ii) Ce résultat se démontre par un argument de type Aubin-Nitsche. Nous ne démontrons pas ce résultat dans l'immédiat. Cette démonstration est analogue à celle réalisée dans la preuve de la Proposition 2.5.2, que nous détaillerons au Paragraphe 2.5.

(iii) En utilisant l'écriture locale (2.51) de p_h et la définition de p, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} |p - p_h|^2_{0,\Omega} &\leq \sum_K |\nabla u - \nabla u_{h|K}|^2_{0,K} + \sum_K |\frac{(\Pi^0 f)_K}{2} \overrightarrow{G_K x}|^2_{0,K} \\ &\leq |u - u_h|^2_{1,h} + C\, h |f|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

En utilisant *(i)*, on déduit l'assertion *(iii)*.

(iv) $|p - p_h|^2_{\mathrm{div},\Omega} = \sum_K |\operatorname{div} p - \operatorname{div} p_h|^2_{0,K}$. Or, nous savons que le flux du problème continu vérifie $\operatorname{div} p = -f$, d'autre part, nous avons vu précedemment que $\operatorname{div} p_{h|K} = -(\Pi^0 f)_{|K}$. On obtient donc $|p - p_h|^2_{\mathrm{div},\Omega} = \sum_K |f - \Pi^0 f|^2_{0,K}$. Le Lemme 2.2.1 *(i)* permet de conclure. ■

De plus, la solution du schéma boîte (2.47) est donnée en fonction de la solution du problème classique de Raviart-Thomas : chercher $(\bar{u}_h, \bar{p}_h) \in P^0 \times RT^0$ tel que

$$\begin{cases} (\operatorname{div} \bar{p}_h + f, \bar{v}_h)_{0,\Omega} = 0\ , \quad \forall \bar{v}_h \in P^0 \\ (\bar{p}_h, \bar{q}_h)_{0,\Omega} - (\bar{u}_h, \nabla \cdot \bar{q}_h)_{0,\Omega} = 0\ , \quad \forall \bar{q}_h \in RT^0 \end{cases} \tag{2.65}$$

Proposition 2.3.4 (Lien avec le problème mixte classique de Raviart-Thomas) *Soit $(\bar{u}_h, \bar{p}_h)$ la solution du problème mixte classique de Raviart-Thomas (2.65), alors la solution (u_h, p_h) du schéma boîte (2.47) est telle que :*

$$p_h = \bar{p}_h \quad \text{et} \quad \bar{u}_h = \Pi^0 u_h + \frac{1}{4} \sum_K (\Pi^0 f)_K\, R^2_K \mathbb{1}_K$$

où R_K est le rayon de giration du triangle K, c'est-à dire $R^2_K = \frac{1}{|K|} \int_K \|\overrightarrow{G}_K x\|^2\, dx$, G_K étant le centre du triangle K.

La preuve de ce résultat est donnée dans [16].

Dans le cas plus général du problème de Poisson avec tenseur de diffusion, Chou et al. [10] ont généralisé le schéma boîte (2.47) pour le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla u) = f \ , \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \ , \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.66}$$

Ils proposent le schéma suivant : chercher $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$ solution de

$$\begin{cases} \sum_K (\operatorname{div} p_h + f, v_h)_{0,K} = 0 \ , \ \forall\, v_h \in P^0 \\ \sum_K (p_h - \mathcal{K}\nabla u_h, q_h)_{0,K} = 0 \ , \ \forall\, q_h \in (P^0)^2 \end{cases} \tag{2.67}$$

qui admet une unique solution. telle que

$$\sum_K (\mathcal{K}\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f_{|K}, v_h)_{0,K} \ , \quad \forall v_h \in P^1_{nc,0}$$

$$p_{h|K}(x) = \Pi^0 \mathcal{K}_{|K}\, \nabla u_{h|K}(x) - \frac{(\Pi^0 f)_K}{2} \overrightarrow{G_K x}$$

Grâce à cette formulation, ils obtiennent des estimations d'erreur similaires à celles obtenues dans la Proposition 2.3.3, mais dépendantes de $\|\mathcal{K}\|_\infty$.

2.3.5 Principe général des schémas boîte

Soient $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ des espaces d'éléments finis pour les espaces de fonctions inconnues u_h et p_h, approximations de la variable primale u et du flux p du problème (2.2). Dans la suite, les espaces $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ d'approximation des espaces $H^1_0(\Omega)$ et $H_{\text{div}}(\Omega)$ seront de type non-conforme, puisque $X_{1,h} \not\subseteq H_{\text{div}}(\Omega)$ ou $M_{1,h} \not\subseteq H^1_0(\Omega)$.
Soient les espaces $H^1_0(\Omega) + M_{1,h}$ et $H_{\text{div}}(\Omega) + X_{1,h}$, munis respectivement des normes dépendantes du maillage :

$$|u|_{1,h} = \Big(\sum_K |\nabla\, u|^2_{0,K}\Big)^{1/2} \ ; \ \|u\|_{1,h} = \Big(\, |u|^2_{0,\Omega} + |u|^2_{1,h}\Big)^{1/2} \ , \quad \forall\, u \in H^1_0(\Omega) + M_{1,h}. \tag{2.68}$$

$$|p|_{\text{div},h} = \Big(\sum_K |\operatorname{div}\, p|^2_{0,K}\Big)^{1/2} \ ; \ \|p\|_{\text{div},h} = \Big(\, |p|^2_{0,\Omega} + |p|^2_{\text{div},h}\Big)^{1/2} \ , \ \forall\, p \in H_{\text{div}}(\Omega) + X_{1,h}. \tag{2.69}$$

Les espaces de fonctions test, notés $M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ sont des espaces de polynômes totalement discontinus par triangle.

Définition 2.3.2 *Le schéma boîte associé à la formulation mixte de type Petrov-Galerkin (2.2) s'écrit : chercher $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ tel que*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_K \int_K (\operatorname{div} p_h + f)\, v_h \, dx = 0 \ , \quad \forall v_h \in M_{2,h} \\ \displaystyle\sum_K \int_K (p_h - \nabla u_h) \cdot q_h \, dx = 0 \ , \quad \forall q_h \in X_{2,h} \end{cases} \tag{2.70}$$

Pour que le problème (2.70) soit bien posé, les espaces $M_{1,h}$, $X_{1,h}$, $M_{2,h}$, $X_{2,h}$ doivent satisfaire la condition nécessaire (2.49) donnée par :

$$\dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} = \dim M_{2,h} + \dim X_{2,h}$$

Une des difficultés réside dans le choix des espaces $M_{1,h}$, $X_{1,h}$, $M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ satisfaisant cette relation. Les espaces produits $M_{1,h} \times X_{1,h}$ et $M_{2,h} \times X_{2,h}$ doivent vérifier les conditions de compatibilité du Théorème 2.2.3 de Babuška-Brezzi discret qui assure l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa stabilité. Dans la suite, nous allons construire plusieurs schémas boîte satisfaisant à ces principes.

2.4 Schémas boîte quadratiques

Nous cherchons maintenant à construire des schémas boîte d'ordre plus élevé sur le principe du schéma de Courbet et Croisille. De façon naturelle nous considérons l'espace P^2 non-conforme des polynômes quadratiques, [28]. Nous utilisons dans la suite $M_{1,h} = P^2_{nc,0}$ pour approcher u. Avant d'aborder la description de quelques schémas boîte du type (2.70) aux Paragraphes 2.5 et 2.6, nous rappelons dans cette section les propriétés des espaces d'approximation pour u et son gradient.

2.4.1 L'espace d'éléments finis $P^2_{c,0}$

L'espace d'éléments finis P^2_c est l'espace des polynômes quadratiques sur chaque triangle ($P^2(K)$), continus sur le domaine Ω. C'est l'espace P^2-Lagrange [30], [40], défini par

$$P^2_c \quad = \quad \Big\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega});\ v_{h|K} \in P^2(K),\ \forall K \in \mathcal{T}_h \Big\}.$$

La restriction de l'espace P^2_c aux fonctions nulles sur la frontière est noté $P^2_{c,0}$.

$$P^2_{c,0} \quad = \quad \Big\{ v_h \in P^2_c;\ v_{h|\Gamma} = 0 \Big\}.$$

En particulier, les espaces P^2_c et $P^2_{c,0}$ sont des espaces conformes dans $H^1(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$.

Lemme 2.4.1 (Fonctions de base de P^2_c)
(i) Les degrés de liberté de l'espace P^2_c sont les fonctions

$$\{l_i\}_{1 \le i \le NP} \cup \{l_{ij}\}_{1 \le ij \le NA}, \tag{2.71}$$

où $l_i(v) = v(S_i)$ et $l_{ij}(v) = \frac{1}{|a|} \int_a v \, d\sigma$.
(ii) La base globale de l'espace P^2_c est

$$\{p_i\}_{1 \le i \le NP} \cup \{p_{ij}\}_{1 \le ij \le NA}, \tag{2.72}$$

où $p_i = \lambda_i$ et $p_{ij} = 4\, \lambda_i\, \lambda_j$.

Les espaces P^2_c et $P^2_{c,0}$ sont respectivement de dimension $NA+NP$ et NA_i+NP_i. Les degrés de liberté sont situées aux noeuds et au milieu des arêtes du maillage (Figure 2.6).

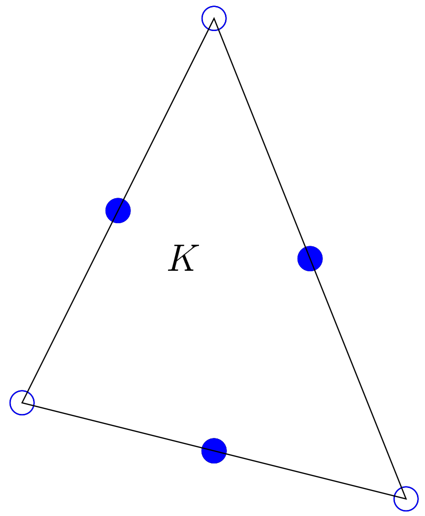

FIG. 2.6 – Degrés de liberté de l'espace P_c^2

2.4.2 L'espace d'éléments finis P_{nc}^2

La formule de quadrature de Gauss à deux points permet d'intégrer exactement les polynômes de degré 3 sur un segment. Soit f un polynôme de degré 3 sur le segment $[0,1]$. On note g_1 et g_2 les abscisses des deux points de Gauss du segment $[0,1]$ définies par

$$g_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}) \quad \text{et} \quad g_2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Alors, la formule d'intégration exacte aux deux points de Gauss est

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(g_1) + f(g_2))\,. \tag{2.73}$$

Fortin et Soulie [28] ont défini l'espace d'éléments finis P^2 non-conforme, noté P_{nc}^2, des polynômes quadratiques sur chaque triangle continus aux deux points de Gauss des arêtes internes du maillage :

$$P_{nc}^2 \quad = \quad \left\{ v_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|K} \in P^2(K), \forall a \in \mathcal{A}_i,\ \int_a [v_h]\,d\sigma = 0 \right\}.$$

L'espace P_{nc}^2 est non-conforme dans $H^1(\Omega)$, puisqu'il n'y a pas existence de la trace d'une fonction de P_{nc}^2 au niveau des arêtes internes du maillage.
Soient g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 et g_6 les six points de Gauss des trois arêtes du triangle K, représentés sur la Figure 2.7. La définition de l'espace P_{nc}^2 suggère de choisir comme degrés de liberté les valeurs des fonctions $v_h \in P_{nc}^2$ aux six points de Gauss par triangle. Mais ces valeurs ne forment pas un ensemble unisolvant puisque, sur chaque triangle K, il existe une relation linéaire (2.74) qui lie ces six points [28] :

$$v(g_1) - v(g_2) + v(g_3) - v(g_4) + v(g_5) - v(g_6) = 0\,, \quad \forall v \in P^2(K). \tag{2.74}$$

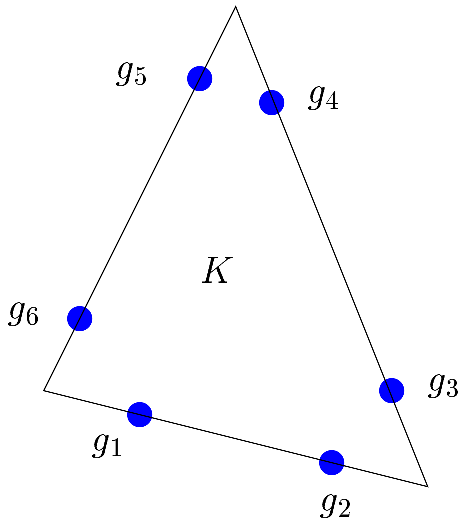

FIG. 2.7 – Points de Gauss d'un triangle K

Lemme 2.4.2 (Bulle non-conforme de P^2)
Soit μ l'application linéaire définie par

$$\begin{array}{rcl} \mu \; : \; P^2(K) & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ v & \longmapsto & (v(g_i))_{1\leq i\leq 6} \end{array}$$

où g_i désigne le i^epoint de Gauss du triangle K (Figure 2.7). Alors, le noyau de μ, $\operatorname{Ker}\mu$, est de dimension 1 et est engendré par la bulle non-conforme quadratique notée b_K, où

$$b_K = 2 - 3({\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + {\lambda_3}^2),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ désignent les coordonnées barycentriques associées aux sommets respectifs du triangle K.

Preuve :
La bulle non-conforme b_K est définie comme l'unique fonction quadratique (à une constante multiplicative près) s'annulant aux six points de Gauss du triangle K. Elle est donnée explicitement sur le triangle de référence $\hat{K}$. La conservation des coordonnées barycentriques par l'application affine φ_K qui transforme le triangle de référence $\hat{K}$ en triangle physique K donne donc la formule de b_K. ■

La Figure 2.8 représente la bulle non-conforme associée au triangle de référence. La bulle s'annule aux points de Gauss des arêtes et prend la valeur -1 aux sommets et 1/2 aux milieux des arêtes. Rappelons quelques propriétés de la fonction “bulle non-conforme” b_K, [28].

Lemme 2.4.3 (Propriétés de la bulle b_K)
Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et tout $v \in P^2(K)$, la bulle non-conforme b_K satisfait :

$$(i) \int_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nabla v \, dx = 0$$

$$(ii) \int_{\partial K} (\operatorname{rot} b_K \cdot \nu) \, v \, d\sigma = 0.$$

Preuve :
(i) En utilisant une intégration par partie,

$$\int_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nabla v \, dx = \underbrace{\int_{\partial K} b_K (\nabla v \cdot \tau) d\sigma}_{(I)} - \underbrace{\int_K b_K \operatorname{rot}(\nabla v) dx}_{(II)}$$

Le terme $\operatorname{rot}(\nabla v) = 0$ pour toute fonction v, donc $(II) = 0$. D'autre part, $b_K(\nabla v \cdot \tau)$ est un polynôme de degré 3 qui s'annule en chacun des deux points de Gauss des arêtes du triangle K. Donc (I) est nul.
(ii) Par la formule de Green, on a

$$\int_{\partial K} \operatorname{rot} b_K \cdot \nu \; v \, d\sigma = \underbrace{\int_K \operatorname{div}(\operatorname{rot} b_K) \, v \, dx}_{(I)} + \underbrace{\int_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nabla v \, dx}_{(II)} \tag{2.75}$$

Le terme $\operatorname{div}(\operatorname{rot} b_K)$ est nul, donc l'intégrale (I) est nulle. Et (II) est nulle par *(i)*. D'où le résultat. ∎

Définition 2.4.1 (Espace Ψ des bulles non-conformes)
Soit Ψ l'espace vectoriel engendré par la bulle non-conforme b_K sur chaque triangle K.

$$\Psi = \{v = \sum_K \alpha_K b_K, \; \alpha_K \in \mathbb{R}\}. \tag{2.76}$$

Alors $\dim \Psi = NE$ *et* $\Psi \subseteq P^2_{nc,0}$.

Lemme 2.4.4 (Propriétés de l'espace Ψ)
On a

$$\Psi \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) = \operatorname{Vect}\Big(\sum_K b_K\Big) \tag{2.77}$$

En particulier, puisque sur chaque triangle K, $b_K \in P^2(K)$, on a aussi

$$P^2_c \cap \Psi = \operatorname{Vect}\Big(\sum_K b_K\Big) \quad et \quad P^2_{c,0} \cap \Psi = \{0\}. \tag{2.78}$$

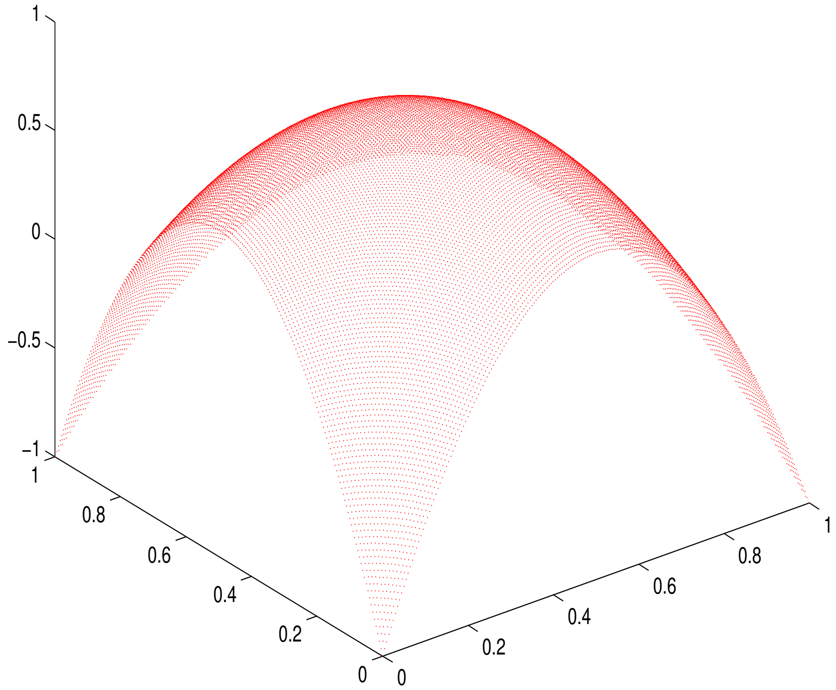

FIG. 2.8 – Bulle quadratique non-conforme b_K sur le triangle de référence $\hat{K}$.

Preuve :
Soit $\psi = \sum_K \alpha_K b_K$ un élément de Ψ, continu par triangle. La continuité de ψ le long de chaque arête interne implique que $\alpha_K = \alpha$, $\forall K$. C'est-à-dire $\psi = \alpha \sum_K b_K$. ■

La restriction de l'espace P^2_{nc} aux fonctions s'annulant aux points de Gauss des arêtes frontières est notée $P^2_{nc,0}$, définie par :

$$P^2_{nc,0} \quad = \quad \left\{ v_h \in P^2_{nc}; \forall a \in \mathcal{A}_b, \ \int_a v_h \, d\sigma = 0 \right\}.$$

Fortin et Soulie [28] ont prouvé que l'espace $P^2_{nc,0}$ est la somme directe de l'espace d'éléments finis $P^2_{c,0}$ et de l'espace vectoriel Ψ engendré par la bulle non-conforme b_K. Ce résultat est rappelé dans le lemme suivant :

Lemme 2.4.5 (Caractérisation de l'espace $P^2_{nc,0}$)

$$\begin{array}{ll} (i) & P^2_{nc} = P^2_c + \Psi \\ (ii) & P^2_{nc,0} = P^2_{c,0} \oplus \Psi \end{array} \tag{2.79}$$

Preuve :
(i) Par définition des espaces, nous déduisons l'inclusion $P^2_c + \Psi \subseteq P^2_{nc}$. Prouvons l'égalité

des dimensions $\dim P^2_{nc} = \dim(P^2_c + \Psi)$.
Soit $M = P^2_c + \Psi$. Alors, $\dim M = \dim P^2_c + \dim \Psi - \dim(P^2_c \cap \Psi)$. Or, par le Lemme 2.4.4, $\dim(P^2_c \cap \Psi) = 1$, la dimension de M est donc (en utilisant $NP - NA + NE = 1$)

$$\begin{aligned}\dim M &= \dim(P^2_c + \Psi) = \dim P^2_c + \dim \Psi - \dim(P^2_c \cap \Psi)\\ &= (NA + NP) + NE - 1\\ &= 2NA\end{aligned}$$

L'inclusion $M \subseteq P^2_{nc}$ donne l'inégalité

$$2NA \leq \dim P^2_{nc}. \tag{2.80}$$

Considérons maintenant l'application linéaire

$$\begin{aligned} J \ : \ P^2_{nc} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2NA}\\ v &\longmapsto (v(g_i))_{1\leq i\leq 2NA}\end{aligned}$$

où $(g_i)_{1\leq i\leq 2NA}$ représente l'ensemble des points de Gauss des arêtes du maillage. Par définition de la bulle non-conforme b_K et de l'espace Ψ, le noyau de l'application J est l'espace Ψ. Donc, $\dim \mathrm{Ker}\, J = NE$. D'autre part, par la relation (2.74), l'image de l'application J est telle que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, J \ \subseteq \ &\Big\{(v(g_i))_{1\leq i\leq 2NA},\ v \in P^2_{nc},\ \text{tels que} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,\\ &v(g_{1_K}) - v(g_{2_K}) + v(g_{3_K}) - v(g_{4_K}) + v(g_{5_K}) - v(g_{6_K}) = 0\Big\}\end{aligned} \tag{2.81}$$

et donc, puisque les relations (2.74) sont indépendantes les unes des autres, $\dim \mathrm{Im}\, J \leq 2NA - NE$. D'après le théorème du rang

$$\dim P^2_{nc} = NE + \dim \mathrm{Im}\, J. \tag{2.82}$$

De l'inégalité (2.80) et de l'égalité (2.82), on déduit l'égalité des dimensions $\dim P^2_{nc} = 2NA$, d'où l'identité des espaces

$$P^2_c + \Psi = P^2_{nc}.$$

(ii) Or, nous avons vu que $P^2_c \cap \Psi = \mathrm{Vect}\Big(\sum_K b_K\Big)$. Donc un élément de $P^2_c \cap \Psi$ nul sur la frontière est identiquement nul. Ceci conclut le lemme. ■

Le Lemme 2.4.5 nous permet d'obtenir une base de l'espace vectoriel $P^2_{nc,0}$, vu comme somme directe des espaces vectoriels $P^2_{c,0}$ et Ψ. La base de $P^2_{c,0}$ est explicitée par le Lemme 2.4.1. La base de l'espace Ψ est donnée par sa définition 2.4.1.

Lemme 2.4.6 (Base de l'espace $P^2_{nc,0}$)
L'espace $P^2_{nc,0}$ est de dimension $2NA_i + 1$, de base globale

$$\{p_i\}_{1\leq i\leq NP_i} \cup \{p_{ij}\}_{1\leq ij\leq NA_i} \cup \{b_K\}_{K\in\mathcal{T}_h} \tag{2.83}$$

où $\{p_i\}_{1\leq i\leq NP_i} \cup \{p_{ij}\}_{1\leq ij\leq NA_i}$ est la base globale de $P^2_{c,0}$ (Lemme 2.4.1) et b_K est la fonction bulle non-conforme par triangle K.

Tout comme l'espace de Crouzeix-Raviart $P^1_{nc,0}$, l'espace non-conforme d'ordre 2, $P^2_{nc,0}$ satisfait le patch-test au sens de Irons et Razzaque [22], [32], [43] :

Lemme 2.4.7 (Patch test pour l'espace $P^2_{nc,0}$)
Pour toute fonction $v_h \in P^2_{nc,0}$

$$(i)\ \forall a \in \mathcal{A}_i, \quad \int_a [v_h]\, p\, d\sigma = 0\,, \quad \forall p \in P^1(a)$$
$$(ii)\ \forall a \in \mathcal{A}_b, \quad \int_a v_h\, p\, d\sigma = 0\,, \quad \forall p \in P^1(a)\,.$$

Preuve :
Soit $v_h \in P^2_{nc,0}$. Sur une arête a, $[v_h]\,p$ est un polynôme de degré 3 qui s'annule aux deux points de Gauss de l'arête a (par continuité de v_h aux deux points de Gauss de l'arête a). Puisque les polynômes de degré 3 sont intégrés de façon exacte par la formule de Gauss aux deux points de Gauss d'une arête, on en déduit (i). De même, $v_h\, p$ est un polynôme de degré 3 qui s'annule aux deux points de Gauss d'une arête frontière. D'où on déduit (ii). ■

Lemme 2.4.8 (Inégalité de Poincaré discrète pour $H^1_0(\Omega) + P^2_{nc,0}$)
Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que

$$|u|_{0,h} \leq C|u|_{1,h}\ ,\ \forall u \in H^1_0(\Omega) + P^2_{nc,0}\,. \tag{2.84}$$

Preuve :
La démonstration est analogue à celle du lemme de Poincaré discret sur $H^1_0(\Omega) + P^1_{nc,0}$. Soit $u \in H^1_0(\Omega) + P^2_{nc,0}$. Alors

$$|u|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(u,g)_{0,\Omega}|}{|u|_{0,\Omega}} \tag{2.85}$$

Soit $g \in L^2(\Omega)$, $\exists\ p \ \in H^1(\Omega)^2$ tel que $\operatorname{div} p = g$ et $\|p\|_{1,\Omega} \leq C|g|_{0,\Omega}$. En intégrant par parties, on obtient

$$(u,g)_{0,\Omega} = (u, \operatorname{div} p)_{0,\Omega} = \underbrace{-\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\, dx}_{(I)} + \underbrace{\sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma}_{(II)} \tag{2.86}$$

(i) Majorons (I) en valeur absolue :

$$|\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\, dx\,| \leq |u|_{1,h}\, |p|_{0,\Omega}$$

(ii) Evaluons (II) :
$p \in H^1(\Omega)^2 \cap H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ implique que sa composante normale le long de chaque arête interne est continue et (II) se réécrit

$$\sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma = \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a p \cdot \nu_a\, u\, d\sigma \ - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a p \cdot \nu_a\, [u]\, d\sigma\,. \tag{2.87}$$

Soit $\overline{p \cdot \nu_a} = \frac{1}{|a|} \int_a p \cdot \nu_a \, d\sigma$ la moyenne de $p \cdot \nu_a$ le long de l'arête a. Puisque $u \in H_0^1 + P_{nc,0}^2$ et que l'espace $H_0^1 + P_{nc,0}^2$ satisfait le patch-test, on a :

$$\int_a \overline{p \cdot \nu_a} \, u \, d\sigma = 0 \, , \quad \forall a \in \mathcal{A}_b \quad \text{et} \quad \int_a \overline{p \cdot \nu_a} \, [u] \, d\sigma = 0 \, , \quad \forall a \in \mathcal{A}_i \, . \tag{2.88}$$

L'égalité (2.87) devient :

$$\begin{aligned} \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu \, u \, d\sigma &= \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a}) \, u \, d\sigma - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a}) \, [u] d\sigma \\ &= \sum_K \sum_{e \in \partial K} \int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e}) \, u \, d\sigma \end{aligned}$$

Le Lemme 2.2.2 donne l'estimation

$$| \int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e}) \, u \, d\sigma | \leq C \, h_K |u|_{1,K} \, |p|_{1,K} \, .$$

Ainsi,

$$|(II)| = | \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu \, u \, d\sigma | \leq 3 \, C \, h \, |u|_{1,h} \, |p|_{1,\Omega}$$

Finalement, on obtient

$$|(u,g)_{0,\Omega}| \leq (C \, h |p|_{1,\Omega} + |p|_{0,\Omega}) |u|_{1,h} \leq C |u|_{1,h} \underbrace{\|p\|_{1,\Omega}}_{\leq C(\Omega) |g|_{0,\Omega}}$$

d'où le résultat annoncé. ∎

On en déduit

Lemme 2.4.9 *La semi-norme $| \cdot |_{1,h}$ définit une norme sur l'espace $H_0^1 + P_{nc,0}^2$.*

2.4.3 Les espaces pour le flux ∇u

Avant d'aborder les schémas boîte construits à l'aide de l'espace $P_{nc,0}^2$ pour l'inconnue scalaire u, nous rappelons les espaces d'éléments finis utilisés pour approcher le flux p.

L'espace BDM_1

Soit l'espace de Brezzi-Douglas-Marini [5] d'ordre 1, noté BDM_1

$$BDM_1 = \{ p_h \in H_{\mathrm{div}}(\Omega) \; ; \; p_h \in (P_1(K))^2 \, , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \tag{2.89}$$

Lemme 2.4.10 *L'espace BDM_1 est de dimension $2NA$, ses degrés de liberté sont situés au niveau des arêtes (Figure 2.9) et donnés par les formes linéaires $L_{a,1}$, $L_{a,2}$, pour toute arête $a \in \mathcal{A}$, par*

$$\begin{aligned} L_{a,1}(p) &= \int_a p \cdot \nu_a \, d\sigma \, , \quad \forall p \in BDM_1 \\ L_{a,2}(p) &= \int_a p \cdot \nu_a \, s \, d\sigma(s) \, , \quad \forall p \in BDM_1 \end{aligned}$$

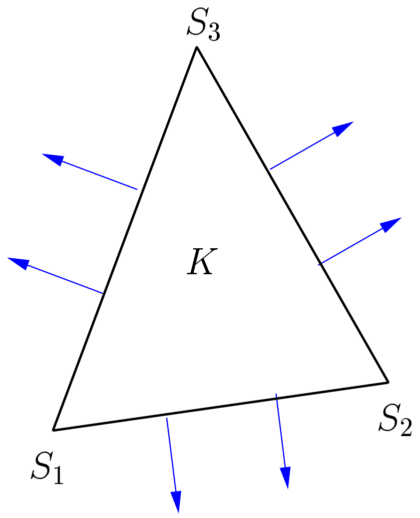

FIG. 2.9 – Représentation des degrés de liberté de l'espace BDM_1

L'espace RT^1

RT^1 désigne l'espace de Raviart-Thomas d'ordre 1, [39], défini par

$$RT^1 = \left\{ p_h \in H_{\mathrm{div}}(\Omega) \;;\; p_{h|K} \in RT_1\left(K\right) \,, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\} \tag{2.90}$$

avec pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$, $RT^1\left(K\right) = P_1\left(K\right)^2 + P_1\left(K\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Lemme 2.4.11 *L'espace de Raviart-Thomas RT^1 est de dimension $2NE+2NA$. Il possède deux degrés de liberté par arête et deux par mailles (Figure 2.10). Ses degrés de liberté sont donnés par les formes linéaires L_a et L_K définies par*

$$\begin{array}{l} L_a(p) = \frac{1}{|a|}\int_a \varphi\, p\cdot\nu_a \, d\sigma \,, \quad \forall p \in RT^1, \forall \varphi \in P_1 \\ L_K(p) = \frac{1}{|K|}\int_K p \, dx \,, \quad \forall p \in RT^1 \,. \end{array} \tag{2.91}$$

RT^1 est un espace de dimension $\dim RT^1 = 2NA + 2NE$.

L'espace des rotationnels de bulle

Définissons Φ, l'espace des rotationnels de la bulle quadratique non-conforme, engendré par $\mathrm{rot}\, b_K$ sur chaque triangle K

$$\Phi = \mathrm{rot}\, \Psi = \left\{ p_{|K} = \alpha_K \,\mathrm{rot}\, b_K \,,\; \alpha_K \in \mathbb{R} \quad , \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\} \tag{2.92}$$

où Ψ est l'espace vectoriel donné par la Définition 2.4.1. Voici quelques propriétés liant les espaces vectoriels Φ, BDM_1 et RT^1 :

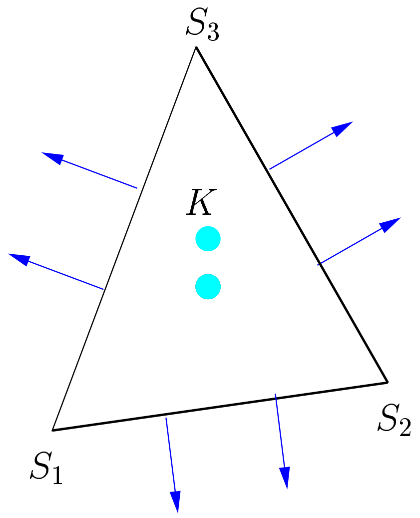

FIG. 2.10 – Représentation des degrés de liberté de l'espace RT^1

Lemme 2.4.12

$$\Phi \cap H_{\text{div}}(\Omega) = \text{Vect}(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{rot}\, b_K) \tag{2.93}$$

En particulier, puisque $\text{rot}\, b_K \in (P^1(K))^2,\ RT^1(K)$, nous avons les égalités suivantes

$$\Phi \cap BDM_1 = \text{Vect}(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{rot}\, b_K)\,,$$

$$\Phi \cap RT^1 = \text{Vect}(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{rot}\, b_K)\,.$$

Preuve :
Soit $\phi \in \Phi \cap H_{\text{div}}(\Omega)$, alors $\phi = \sum_K \alpha_K \,\text{rot}\, b_K$. Or, $\phi \in H_{\text{div}}(\Omega)$ si et seulement si la composante normale de ϕ est continue le long de chaque arête interne. C'est-à-dire

$$\phi(x) \cdot \nu_{a,K_1} + \phi(x) \cdot \nu_{a,K_2} = 0\,, \quad \forall a \in \mathcal{A}_i\,,\ a = \partial K_1 \cap \partial K_2\,,\ \forall x \in a \tag{2.94}$$

qui est équivalent à

$$\alpha_{K_1} \text{rot}\, b_{K_1} \cdot \nu_{a,K_1} + \alpha_{K_2} \text{rot}\, b_{K_2} \cdot \nu_{a,K_2} = 0\,, \quad \forall a \in \mathcal{A}_i\,,\ a = \partial K_1 \cap \partial K_2 \tag{2.95}$$

D'autre part, la bulle b_K satisfait $\text{rot}\, b_{K_1} \cdot \nu_{a,K_1} + \text{rot}\, b_{K_2} \cdot \nu_{a,K_2} = 0$. Donc $\alpha_{K_1} = \alpha_{K_2}$, ce qui impose que ϕ doit s'écrire $\phi = \alpha \sum_K \text{rot}\, b_K$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ce qui prouve le lemme. ∎

Nous concluons les rappels sur les espaces d'approximation. Nous proposons maintenant, deux nouveaux schémas boîte pour le problème de Poisson, où l'inconnue scalaire u est approchée par u_h choisie dans l'espace $P^2_{nc,0}$ et le gradient p est approché par p_h dans les espaces d'éléments finis de Brezzi-Douglas-Marini ou de Raviart-Thomas enrichis tous deux par l'espace Φ des rotationnels de la bulle quadratique non-conforme.

2.5 Schéma $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$

2.5.1 Présentation du schéma

Dans cette partie, nous construisons un schéma boîte de type (2.70), d'ordre plus élevé pour les inconnues u_h et p_h. L'espace d'approximation de l'inconnue u est l'espace quadratique non-conforme de Fortin et Soulie $M_{1,h} = P^2_{nc,0}$. Pour approcher le flux, nous utilisons $X_{1,h}$, l'espace introduit par Fahrloul et Fortin [29] :

$$X_{1,h} = BDM_1 + \Phi$$

où BDM_1 désigne l'espace de Brezzi-Douglas-Marini défini au Paragraphe 2.4.3 et Φ l'espace défini par (2.92) :

$$\Phi = \{p_{|K} = \alpha_K \operatorname{rot} b_K \, , \; \alpha_K \in \mathbb{R} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} = \operatorname{rot} \Psi \tag{2.96}$$

L'espace $X_{1,h} = BDM_1 + \Phi$ coïncide avec l'espace des fonctions affines satisfaisant les conditions suivantes, [29], de div-conformité d'arête et div-conformité ponctuelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \int_e (p_{h|K_1} \cdot \nu_{e,K_1} + p_{h|K_2} \cdot \nu_{e,K_2}) \, d\sigma = 0 \, , \quad \forall e = \partial K_1 \cup \partial K_2 \\ (ii) \text{ Pour tout sommet interne } M, \quad \sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu) \psi_M = 0, \text{ où } \psi_M \\ \text{ est la fonction } P^1\text{-Lagrange correspondante à } M \, . \end{array} \right. \tag{2.97}$$

En appliquant le Lemme 2.4.12 et en utilisant les dimensions des espaces BDM_1 et Φ, on constate que la dimension de $X_{1,h}$ est

$$\dim X_{1,h} \; = \; \dim BDM_1 + \, \dim \Phi - \dim(BDM_1 \, \cap \, \Phi) = 2NA + NE - 1$$

Les espaces de fonctions test associés aux espaces d'approximation $M_{1,h} = P^2_{nc,0}$ et $X_{1,h} = BDM_1 + \Phi$ sont :

$$M_{2,h} = \Big\{ v_h \in L^2(\Omega) \; ; \; v_{h|K} \in P^0(K) \; , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \Big\} , \tag{2.98}$$

l'espace des polynômes constants par triangle totalement discontinus, de dimension $\dim M_{2,h} = NE$ et

$$X_{2,h} = \Big\{ q_h \in (L^2(\Omega))^2 \; ; \; q_{h|_K} \in (P^1(K))^2 \; , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \Big\} , \tag{2.99}$$

le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, des polynômes affines par triangle, totalement discontinus, de dimension $\dim X_{2,h} = 6NE$. Par simplicité, on notera aussi ces espaces $M_{2,h} = P^0$ et $X_{2,h} = (P^1)^2$.

Définition 2.5.1 *Soit le schéma boîte : chercher* $(u_h\,,\,p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$ *tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\operatorname{div} p_h + f, v_h)_{0,K} = 0\ , \quad \forall v_h \in P^0 \\ \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (p_h - \nabla u_h, q_h)_{0,K} = 0\ , \quad \forall q_h \in (P^1)^2 \end{array} \right. \tag{2.100}$$

Lemme 2.5.1 *Ce choix d'espaces d'inconnues* $M_{1,h}$ *et* $X_{1,h}$ *et d'espaces de test* $M_{2,h}$ *et* $X_{2,h}$ *satisfait l'égalité des dimensions (2.49) :*

$$\dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} = 7NE = \dim M_{2,h} + \dim X_{2,h} \tag{2.101}$$

Preuve :
En utilisant la première relation d'Euler, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} &= (2NA_i + 1) + (2NA + NE - 1) = 7NE \\ &= \dim M_{2,h} + \dim X_{2,h} \end{aligned} \tag{2.102}$$

■

Maintenant, prouvons l'existence et l'unicité de la solution discrète du problème (2.100).

Proposition 2.5.1 *Le problème (2.100) admet une unique solution* $(u_h\,,\,p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$, *définie par*
(i) $u_h \in P^2_{nc,0}$ *est solution du problème variationnel :*

$$\sum_K (\nabla u_h\,,\,\nabla\,w_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f\,,\,w_h)_{0,K}\ , \quad \forall\,w_h \in P^2_{nc,0} \tag{2.103}$$

(ii) $p_h \in (BDM_1 + \Phi)$ *est donné sur chaque triangle* K *du maillage par*

$$p_{h|K} = \nabla\,u_{h|K}\,. \tag{2.104}$$

Notons que la formulation variationnelle (2.103) est la formulation non-conforme pour l'espace $P^2_{nc,0}$ introduite par Fortin et Soulie [28], dans le cas d'un terme source constant par triangle.

Preuve :
Nous prouvons que $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ est solution de (2.100) si et seulement si il est solution de (2.103 - 2.104). Soit $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$ une solution de (2.100). Commençons par prouver *(ii)*.
(ii) En prenant $q_h = p_h - \nabla\,u_h \in (P^1)^2$ dans l'équation $(2.100)_2$, nous avons clairement $p_h = \nabla\,u_h$.
(i) Soit $w_h \in P^2_{nc,0}$. En prenant $q_h = \nabla w_h$ dans l'équation $(2.100)_2$, la formule de Green donne

$$\sum_K (\nabla\,u_h\,,\,\nabla\,w_h)_{0,K} = -\sum_K \int_K \operatorname{div}\,p_h\,w_h\,dx + \sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu)\ w_h\,d\sigma \tag{2.105}$$

• L'équation $(2.100)_1$ implique que $\operatorname{div} p_{h|K} = -\Pi^0 f_{|K}$. Donc

$$\sum_K \int_K \operatorname{div}\, p_h \, w_h \, dx = -\sum_K \int_K \Pi^0 f_{|K} \, w_h \, dx$$

• $p_h \in X_{1,h}$, donc il s'écrit $p_h = p_{1,h} + p_{2,h}$ avec $p_{1,h} \in BDM_1$ et $p_{2,h} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \alpha_K \operatorname{rot} b_K$. En utilisant l'inclusion $BDM_1 \subseteq H_{\operatorname{div}}(\Omega)$, l'intégrale de bord du terme (2.105) se réécrit

$$\begin{aligned}
\sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu) \, w_h \, d\sigma &= \sum_K \int_{\partial K} p_{1,h} \cdot \nu \, w_h \, d\sigma + \sum_K \alpha_K \int_{\partial K} \operatorname{rot} b_K \cdot \nu \, w_h \, d\sigma \\
&= \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a p_{1,h} \cdot \nu_a \, w_h \, d\sigma - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a p_{1,h} \cdot \nu_a \, [w_h] \, d\sigma \qquad (2.106) \\
&\quad + \sum_K \alpha_K \int_{\partial K} \frac{\partial b_K}{\partial \tau_K} \, w_h \, d\sigma
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.4.3, le terme $\sum_K \alpha_K \int_{\partial K} \frac{\partial b_K}{\partial \tau_K} w_h \, d\sigma$ s'annule. De plus, puisque $[w_h]$ (respectivement w_h) s'annule aux points de Gauss de chaque arête interne (respectivement frontière), que $w_h \in P^2$ et que $p_{1,h} \cdot \nu_a \in P^1(a)$, l'intégrale $\int_a p_{1,h} \cdot \nu_a \, [w_h] \, d\sigma$ (respectivement $\int_a p_{1,h} \cdot \nu_a \, w_h \, d\sigma$) est nulle. On obtient donc la formulation variationnelle (2.103).
Ainsi, toute solution de (2.100) est solution de (2.103-2.104), qui admet une unique solution. Ceci prouve l'unicité de la solution du schéma (2.100). L'existence de la solution de (2.100) provient de la linéarité du problème (2.100) et de l'égalité (2.101). ■

Remarque : Existence et unicité par le lemme de Babuška-Brezzi discret
Il est intéressant de voir comment se prouve directement l'existence et l'unicité de la solution du schéma boîte (2.100) en appliquant directement le théorème de Babuška-Brezzi. Les formes bilinéaires associées sont définies pour $p_h \in X_{1,h} = BDM_1 + \Phi$, $u_h \in M_{1,h} = P^2_{nc,0}$, $q_h \in X_{2,h}$ et $v_h \in M_{2,h}$:

$$\begin{cases}
a_h(p_h, q_h) = (p_h, q_h)_{0,\Omega} = \sum_K \int_K p_h \cdot q_h \, dx \\
b_{1,h}(u_h, q_h) = -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot q_h \, dx \\
b_{2,h}(v_h, p_h) = \sum_K \int_K \operatorname{div} p_h \, v_h \, dx
\end{cases} \qquad (2.107)$$

Soit $l_{2,h}$ l'application nulle et $m_{2,h}$ la forme linéaire continue définie sur $M_{2,h}$ par

$$< m_{2,h}, \, v_h >= \sum_K \int_K f \, v_h \, dx$$

Vérifions les hypothèses du Théorème 2.2.3 de Babuška-Brezzi discret .
(i) Montrons que $V_{1,h} = V_{2,h}$ où

$$\begin{aligned} V_{1,h} &= \{p_h \in X_{1,h};\ \sum_K \int_K \operatorname{div} p_h\, v_h\, dx = 0\,,\ \forall v_h \in M_{2,h}\}, \\ V_{2,h} &= \{q_h \in X_{2,h};\ -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot q_h dx = 0\,,\ \forall u_h \in M_{1,h}\}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

L'égalité (2.101) des dimensions entre espaces d'inconnues et espaces de test donne :

$$\dim V_{1,h} = \dim X_{1,h} - \dim M_{2,h} = \dim X_{2,h} - \dim M_{1,h} = \dim V_{2,h}.$$

Il reste à prouver l'inclusion : $V_{1,h} \subseteq V_{2,h}$.
Soit $p_h \in V_{1,h}$. Puisque $BDM_1 \subseteq X_{2,h}$ et $\operatorname{rot} b_K \in X_{2,h}$, alors $p_h \in X_{2,h}$. Vérifions donc que $b_{1,h}(u_h, p_h) = 0$, pour tout $u_h \in M_{1,h}$.
$p_h \in V_{1,h}$ implique que $\operatorname{div} p_{h|K} = 0\,, \forall K$ (puisque $p_h \in X_{1,h} = BDM_1 + \Phi$, donc $\operatorname{div} p_{h|K} \in P^0(K)$). Soit $u_h \in M_{1,h}$. En utilisant la formule de Green,

$$b_{1,h}(u_h, p_h) = -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot p_h\, dx = \sum_K \int_K u_h \underbrace{\operatorname{div} p_h}_{=0}\, dx - \sum_K \int_{\partial K} u_h\, p_h \cdot \nu\, d\sigma \tag{2.109}$$

D'autre part, p_h s'écrit localement $p_{h|K} = p_{1,h|K} + \alpha_K \operatorname{rot} b_K$, où $p_{1,h}$ est la composante selon $BDM_1 \subseteq H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ et α_K une constante de $\mathbb{R}$. L'équation (2.109) est équivalente à :

$$\begin{aligned} b_{1,h}(u_h, p_h) &= \sum_K \int_{\partial K} u_h\, p_h \cdot \nu\, d\sigma \\ &= \sum_K \int_{\partial K} u_h\, p_{1,h} \cdot \nu\, d\sigma + \sum_K \int_{\partial K} u_h\, (\alpha_K \operatorname{rot} b_K) \cdot \nu\, d\sigma \\ &= \sum_{a \in A_b} \int_a u_h\, p_{1,h} \cdot \nu_a\, d\sigma - \sum_{a \in A_i} \int_a [u_h]\, p_{1,h} \cdot \nu_a\, d\sigma \\ &\quad + \sum_K \alpha_K \int_{\partial K} u_h\, \frac{\partial b_K}{\partial \tau} d\sigma \end{aligned} \tag{2.110}$$

Par le Lemme 2.4.3, $\int_{\partial K} u_h\, \frac{\partial b_K}{\partial \tau}\, d\sigma = 0$, puisque $u_h \in P^2$. D'autre part, $p_{1,h} \in (P^1(K))^2$ et u_h, $[u_h] \in P^2_{nc,0}$. Donc l'intégration de $u_h\, p_{1,h} \cdot \nu_a$ (respectivement $[u_h]\, p_{1,h} \cdot \nu_a$) le long d'une arête $a \in A$ est exacte aux deux points de Gauss de a. Les fonctions u_h et $[u_h]$ s'annulent en ces deux points de Gauss. Donc,

$$\sum_{a \in A_i} \int_a [u_h]\, p_{1,h} \cdot \nu_a\, d\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{a \in A_b} \int_a u_h\, p_{1,h} \cdot \nu_a\, d\sigma = 0.$$

Finalement, tous les termes de l'équation (2.110) sont nuls, donc $b_{1,h}(u_h, p_h) = 0$. Ce qui prouve l'égalité $V_{1,h} = V_{2,h} = V_h$. On a donc,

$$\sup_{p_h \in V_{1,h}, \|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq 1} a_h(p_h, q_h) = \sup_{p_h \in V_h, \|p_h\|_{0,h} \leq 1} a_h(p_h, q_h) = \|q_h\|_{0,h}\,, \tag{2.111}$$

puisque les normes $\|\cdot\|_{0,h}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{div},h}$ sont équivalentes .
Ceci valide la condition *(i)*.

(ii) cette égalité est automatiquement vérifiée par tout choix des espaces $M_{1,h}, X_{1,h}, M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ qui satisfont l'égalité (2.101).

(iii) Nous allons prouver qu'il existe une constante $\beta_1 > 0$ telle que

$$\sup_{q_h \in X_{2,h}, |q_h|_{0,h} \leq 1} b_{1,h}(u_h, q_h) \geq \beta_1 |u_h|_{1,h}, \quad \forall u_h \in M_{1,h}$$

Soit $u_h \in M_{1,h}$. Soit $q_{h|K} = \frac{-\nabla u_{h|K}}{|u_h|_{1,h}}$, alors $q_h \in X_{2,h} = (P^1)^2$ et $|q_h|_{1,h} = 1$. Donc,

$$b_{1,h}(u_h, q_h) = -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot q_h \, dx = +\sum_K \int_K \frac{|\nabla u_h|^2}{|u_h|_{1,h}} dx = |u_h|_{1,h} \tag{2.112}$$

Donc $\beta_1 = 1$ convient dans *(iii)*.

(iv) Nous cherchons une constante $\beta_2 > 0$ telle que

$$\sup_{p_h \in X_{1,h}, \|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq 1} b_{2,h}(v_h, p_h) \geq \beta_2 |v_h|_{0,\Omega}, \quad \forall v_h \in M_{2,h}$$

Soit $v_h \in M_{2,h} = P^0$, d'après [39], il existe $q_h \in RT^0$ tel que

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, q_h = v_h \\ \|q_h\|_{\mathrm{div},\Omega} \leq c\, |v_h|_{0,\Omega} \end{cases} \tag{2.113}$$

Posons $\tilde{q}_h = \frac{q_h}{\|q_h\|_{\mathrm{div},h}}$, alors $\tilde{q}_h \in RT^0 \subseteq X_{1,h}$ et $\|\tilde{q}_h\|_{\mathrm{div},h} = 1$. Ainsi,

$$b_{2,h}(v_h, \tilde{q}_h) = \sum_K \int_K \mathrm{div}\, \tilde{q}_h v_h \, dx = \sum_K \int_K \frac{\mathrm{div}\, q_h v_h}{\|q_h\|_{\mathrm{div},h}} dx = \sum_K \int_K \frac{|v_h|^2_{0,K}}{\|q_h\|_{\mathrm{div},h}} dx = \frac{|v_h|^2_{0,\Omega}}{\|q_h\|_{\mathrm{div},\Omega}} \tag{2.114}$$

Donc $b_{2,h}(v_h, \tilde{q}_h) \geq \frac{1}{c} |v_h|_{0,\Omega}$, c'est-à-dire $\beta_2 = \frac{1}{c}$ convient pour satisfaire la condition *(iv)*.

Les hypothèses du théorème de Babuška-Brezzi discret sont vérifiées, ce qui assure l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution du schéma boîte (2.100)

$$\|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C |f|_{0,\Omega}$$

■

La stabilité du schéma boîte (2.100) se démontre également de façon directe, en utilisant les résultats de la Proposition 2.5.1 :

Lemme 2.5.2 (Stabilité)
Il existe une constante C indépendante de h telle que la solution $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$ du schéma boîte (2.100), satisfait

$$\|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C |f|_{0,\Omega} \tag{2.115}$$

Preuve :
On déduit de la Proposition 2.5.1, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} |u_h|_{1,h} &\leq C_1|f|_{0,\Omega} \\ |p_h|_{0,\Omega} &= |u_h|_{1,h} \end{aligned}$$

On déduit du Lemme de Poincaré discret 2.4.8 que

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C_2|f|_{0,\Omega} \tag{2.116}$$

De plus, $\operatorname{div} p_h = -\Pi^0 f$ par l'équation $(2.100)_1$, donc ceci nous permet de conclure que

$$\|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq |u_h|_{1,h} + |\Pi^0 f|_{0,h}$$

Puisque $|u_h|_{1,h} \leq C_1 \, |f|_{0,\Omega}$, on déduit que

$$\|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C_3 \, |f|_{0,\Omega}$$

On conclut la stabilité du schéma, en combinant cette inégalité avec (2.116). ■

De plus, la solution du schéma (2.100) satisfait les estimations d'erreur *a priori* suivantes.

Proposition 2.5.2 (Estimations d'erreur *a priori*)
Soit $(u,p) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ *la solution du problème mixte de type Petrov-Galerkin (2.2). Soit* $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$ *la solution du schéma boîte (2.100). On suppose de plus que* $u \in H^3(\Omega)$*, on a alors :*

$$\begin{array}{ll} (i) & |u-u_h|_{1,h} \leq C\,h^2\,(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \\ (ii) & |u-u_h|_{0,\Omega} \leq C\,h^2(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \\ (iii) & |p-p_h|_{\mathrm{div},h} \leq C\,h\,|f|_{1,\Omega} \\ (iv) & |p-p_h|_{0,\Omega} \leq C\,h^2(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \end{array} \tag{2.117}$$

Preuve :
Dans la suite, on suppose que $u \in H^3(\Omega)$. *(i)* Notons a_h la forme bilinéaire définie sur l'espace $H_0^1(\Omega) + P^2_{nc,0}$ par

$$a_h(u,v) = \sum_K (\nabla u, \nabla v)_{0,K}, \quad \forall u,\, v \in H_0^1(\Omega) + P^2_{nc,0}.$$

On utilise un argument classique. Pour tout $v_h \in P^2_{nc,0}$, on a

$$|u-u_h|_{1,h} \leq |u-v_h|_{1,h} + |u_h - v_h|_{1,h}$$

Or, par définition de a_h,

$$\begin{aligned} |u_h - v_h|^2_{1,h} &= a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) \\ &= a_h(u_h - u, u_h - v_h) + a_h(u - v_h, u_h - v_h) \end{aligned} \tag{2.118}$$

Donc

$$|u_h - v_h|_{1,h} \quad \leq \quad \sup_{v_h \in P^2_{nc,0}} \frac{|a_h(u_h - u, u_h - v_h)|}{|u_h - v_h|_{1,h}} + |u - v_h|_{1,h} \tag{2.119}$$

ce qui donne :

$$|u - u_h|_{1,h} \leq 2 \underbrace{\inf_{w_h \in P^2_{nc,0}} |u - w_h|_{1,h}}_{(I)} + \underbrace{\sup_{w_h \in P^2_{nc,0}} \frac{|a_h(u_h - u, w_h)|}{|w_h|_{1,h}}}_{(II)} \tag{2.120}$$

• Estimons l'erreur de consistance (II). Soit $w_h \in P^2_{nc,0}$,

$$\begin{aligned} a_h(u_h - u, w_h) &= \sum_K \int_K \nabla(u_h - u) \cdot \nabla w_h \, dx \\ &= \sum_K \int_K \nabla u_h \cdot \nabla w_h \, dx - \sum_K \int_K \nabla u \cdot \nabla w_h \, dx \end{aligned}$$

Soit encore, puisque u_h est solution du problème équivalent (2.103)

$$a_h(u_h - u, w_h) \quad = \quad \sum_K (\Pi^0 f, w_h)_{0,K} + \sum_K \int_K \Delta u \, w_h \, dx - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu) \, w_h \, d\sigma \,.$$

Or, $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$, donc

$$a_h(u_h - u, w_h) \quad = \quad \sum_K \int_K (\Pi^0 f - f) \, w_h \, dx - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu) \, w_h \, d\sigma$$

Notons L_u la forme linéaire définie sur l'espace $H^1_0(\Omega) + P^2_{nc,0}$ par :

$$L_u(w_h) = \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu) \, w_h \, d\sigma \;, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \,.$$

Estimons le terme $L_u(w_h)$ pour $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$:

$$L_u(w_h) = \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu) \, w_h \, d\sigma = - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a \nabla u \cdot \nu_a [w_h] \, d\sigma + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a \nabla u \cdot \nu_a w_h \, d\sigma \tag{2.121}$$

Soit $P^1(a)$ la restriction à l'arête a des polynômes de degré 1. Π^1_a désigne la projection de $L^2(a)$ sur $P^1(a)$. $P^2_{nc,0}$ satisfait le patch-test (Lemme 2.4.7), $w_h \in P^2_{nc,0}$ et $\Pi^1_a(\nabla u \cdot \nu_a) \in P^1(a)$, donc

$$\int_a \nabla u \cdot \nu_a [w_h] \, d\sigma = \int_a \big(\nabla u \cdot \nu_a - \Pi^1_a(\nabla u \cdot \nu_a) \big) \, [w_h] \, d\sigma, \quad a \in \mathcal{A}_i$$

De même,

$$\int_a \nabla u \cdot \nu_a \, w_h \, d\sigma = \int_a \big(\nabla u \cdot \nu_a \; - \Pi^1_a(\nabla u \cdot \nu_a) \, \big) \, w_h \, d\sigma, \quad a \in \mathcal{A}_b \,.$$

Ainsi, l'équation (2.121) devient :

$$\begin{aligned} L_u(w_h) &= -\sum_{a\in\mathcal{A}_i}\int_a \big(\nabla u\cdot\nu_a - \Pi_a^1(\nabla u\cdot\nu_a)\big)\,[w_h]\,d\sigma \\ &\quad+\sum_{a\in\mathcal{A}_b}\int_a \big(\nabla u\cdot\nu_a - \Pi_a^1(\nabla u\cdot\nu_a)\big)\,w_h\,d\sigma \\ &= \sum_{K\in}\sum_{e\in\partial K}\int_e \big(\nabla u\cdot\nu_e - \Pi_a^1(\nabla u\cdot\nu_e)\big)\,w_h\,d\sigma \end{aligned} \tag{2.122}$$

En appliquant le Lemme 2.2.2 ($k=1,\ m=1$), on obtient l'estimation

$$|\int_e \big(\nabla u\cdot\nu_e - \Pi_a^1(\nabla u\cdot\nu_e)\big)\,w_h\,d\sigma| \leq C\,\sigma_K\,h_K^2|w_h|_{1,K}|\nabla u|_{2,K}$$

$L_u(w_h)$ est donc majoré par :

$$|L_u(w_h)| \leq C_1\,h^2\,|w_h|_{1,h}\,|u|_{3,\Omega}. \tag{2.123}$$

Estimons maintenant le terme $\displaystyle\sum_K\int_K(\Pi^0 f - f)\,w_h\,dx$.

Par définition de Π^0, opérateur de projection sur les polynômes constants,

$$\sum_K\int_K(\Pi^0 f - f)\,w_h\,dx = \sum_K\int_K(\Pi^0 f - f)\,(w_h - \Pi^0 w_h)\,dx\,.$$

Ainsi, nous obtenons en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.20) :

$$\begin{aligned} |\sum_K\int_K(\Pi^0 f - f)w_h\,dx| &\leq \sum_K|\Pi^0 f - f|_{0,K}|w_h - \Pi^0 w_h|_{0,K} \\ &\leq \sum_K(c_1\,h_K|f|_{1,K})\,(c_2\,h_K|w_h|_{1,K}) \\ &\leq C_2\,h^2|f|_{1,\Omega}|w_h|_{1,h}. \end{aligned}$$

Ceci donne l'estimation de $a_h(u_h-u,w_h) = \sum_K\int_K(\Pi^0 f - f)\,w_h\,dx - L_u(w_h)$:

$$\begin{aligned} |a_h(u_h-u,w_h)| &\leq C_1\,h^2|w_h|_{1,h}|u|_{3,\Omega} + C_2\,h^2|f|_{1,\Omega}|w_h|_{1,h} \\ &\leq C\,h^2\,|w_h|_{1,h}\,(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \end{aligned}$$

On en déduit que $(II) \leq C\,h^2\,(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega})$.

• D'autre part, en notant Π_h^2 l'opérateur de projection P^2-Lagrange : $\Pi_h^2\ :\ L^2(\Omega)\to P_{c,0}^2$ sur $P_{c,0}^2$, et par inclusion de $P_{c,0}^2$ dans $P_{nc,0}^2$, on obtient l'estimation de l'erreur d'approximation

$$\inf_{w_h\in P_{nc,0}^2}|u-w_h|_{1,h} \leq |u-\Pi_h^2 u|_{1,h}$$

En utilisant le Lemme 2.2.1,

$$(I) = \inf_{w_h\in P_{nc,0}^2}|u-w_h|_{1,h} \leq C_3\,h^2|u|_{3,\Omega}$$

Ceci nous permet de conclure d'après (2.120) que :

$$|u - u_h|_{1,h} \leq C\, h^2 \big(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}\big)$$

Nous avons ainsi démontré l'assertion *(i)*.
(ii) Utilisons un argument de type Aubin-Nitsche pour évaluer la norme L^2 de l'erreur (comme le suggère D. Braess [4]) :

$$|u - u_h|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{(u - u_h, g)_{0,\Omega}}{|g|_{0,\Omega}}$$

Soit g une fonction de $L^2(\Omega)$. Définissons ϕ_g (respectivement ϕ_h) la solution du problème continu (2.2) (respectivement discret (2.100)) de terme source $g \in L^2(\Omega)$:
$\phi_g \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ solution de

$$(\nabla\phi_g, \nabla v)_{0,\Omega} = (g, v)_{0,\Omega}\,, \quad v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{2.124}$$

$\phi_h \in P^2_{nc,0}$ solution de

$$\sum_K (\nabla\phi_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 g, v_h)_{0,K}\,, \quad v_h \in P^2_{nc,0}\,. \tag{2.125}$$

Alors $(u - u_h, g)_{0,\Omega}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(u - u_h, g)_{0,\Omega} \;&=\; a_h(u - u_h, \phi_g - \phi_h) - \big(a_h(u - u_h, \phi_g) - (u - u_h, g)\big)\\ &\quad -\big(a_h(u, \phi_g - \phi_h) - (f, \phi_g) + (\Pi^0 f, \phi_h)\big)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|(u - u_h, g)_{0,\Omega}| \leq \underbrace{|a_h(u - u_h, \phi_g - \phi_h)|}_{(I)} &+ \underbrace{|a_h(u - u_h, \phi_g) - (u - u_h, g)|}_{(II)}\\ &+ \underbrace{|a_h(u, \phi_g - \phi_h) - (f, \phi_g) + (\Pi^0 f, \phi_h)|}_{(III)}\end{aligned}$$

• Evaluons le terme $(I) = |a_h(u - u_h, \phi_g - \phi_h)|$. Par définition de la forme bilinéaire a_h, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|a_h(u - u_h, \phi_g - \phi_h)| \leq |u - u_h|_{1,h}\, |\phi_g - \phi_h|_{1,h}$$

Par le résultat précédent :

$$|u - u_h|_{1,h} \leq Ch^2\,(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega})$$

En procédant de la même façon qu'au *(i)*, on prouve l'estimation

$$|L_{\phi_g}(w_h)| \leq C\, h\, |w_h|_{1,h}\, |\phi_g|_{2,\Omega}. \tag{2.126}$$

En appliquant le Lemme 2.2.2 pour $m = 0$, $k = 1$, le terme

$$|\sum_K \int_K (\Pi^0 f - f)\, w_h\, dx| = |\sum_K \int_K f\,(\Pi^0 w_h - w_h)\, dx| \leq C\, h\, |f|_{0,\Omega}\, |w_h|_{1,h} \tag{2.127}$$

ce qui donne en regroupant,

$$|\phi_g - \phi_h|_{1,h} \leq \tilde{C} h |\phi_g|_{2,\Omega}. \tag{2.128}$$

Puisque $|\phi_g|_{2,\Omega} \leq C|g|_{0,\Omega}$, on obtient

$$|(I)| = |a_h(u - u_h, \phi_g - \phi_h)| \leq C_1 h^3\,(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega})\,|g|_{0,\Omega}\,. \tag{2.129}$$

- Posons $w_h = u - u_h$, en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} |a_h(u - u_h, \phi_g) - (u - u_h, g)| &= |a_h(w_h, \phi_g) - (w_h, g)_{0,\Omega}| \\ &= |\sum_K \int_{\partial K} \nabla \phi_g \cdot \nu\, w_h\, d\sigma| = |L_{\phi_g}(w_h)| \end{aligned}$$

Grâce à l'estimation (2.126) et l'inégalité $|\phi_g|_{2,\Omega} \leq C|g|_{0,\Omega}$, on a

$$|a_h(u - u_h, \phi_g) - (u - u_h, g)| \leq C\, h\, |g|_{0,\Omega}\, |u - u_h|_{1,h} \tag{2.130}$$

Finalement, en utilisant l'estimation *(i)*, on trouve

$$|(II)| = |a_h(u - u_h, \phi_g) - (u - u_h, g)| \leq C_2\, h^3\, |g|_{0,\Omega} \big(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}\big) \tag{2.131}$$

- Estimons le terme (III). Posons $w_h = \phi_g - \phi_h$

$$\begin{aligned} |a_h(u, \phi_g - \phi_h) - (f, \phi_g) + (\Pi^0 f, \phi_h)| &= |a_h(u, w_h) - (f, w_h) - (f, \phi_h) + (\Pi^0 f, \phi_h)| \\ &= |L_u(w_h) - (f - \Pi^0 f, \phi_h)| \\ &\leq |L_u(w_h)| + |(f - \Pi^0 f, \phi_h)| \\ &\leq |L_u(w_h)| + |(f - \Pi^0 f, \phi_h - \Pi^0 \phi_h)| \\ &\leq Ch^2 |w_h|_{1,h} (|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \\ &\quad + |f - \Pi^0 f|_{0,\Omega} |\phi_h - \Pi^0 \phi_h|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

Or, $|\phi_h - \Pi^0 \phi_h|_{0,\Omega} \leq C\, h |\phi_h|_{1,h} \leq C\, h\, |g|_{0,\Omega}$. Donc,

$$\begin{aligned} |(III)| = |a_h(u, \phi_g - \phi_h) - (f, \phi_g) + (\Pi^0 f, \phi_h)| &\leq C\, h^3 |g|_{0,\Omega} (|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \\ &\quad + C\, h^2 |f|_{1,\Omega} |g|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les termes, nous obtenons une estimation de $|u - u_h|_{0,\Omega}$:

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{0,\Omega} &\leq \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{1}{|g|_{0,\Omega}} \Big[C_1 h^3 (|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) |g|_{0,\Omega} + C_2 h^3 (|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) |g|_{0,\Omega} \\ &\qquad + C_3\, h^2 \big(h|u|_{3,\Omega} + (1 + h)|f|_{1,\Omega}\big) |g|_{0,\Omega} \Big] \\ &\leq Ch^2 (|f|_{1,\Omega} + |u|_{3,\Omega}) \end{aligned}$$

On ne peut obtenir une meilleure estimation de l'erreur $|u - u_h|_{0,\Omega}$ en raison de l'estimation du terme $|f - \Pi^0 f|_{0,\Omega}$.
(iii) Nous avons vu que $\operatorname{div} p_{h|K} = -\Pi^0 f_{|K}$, donc

$$|p - p_h|^2_{\mathrm{div},h} = \sum_K |p - p_h|^2_{\mathrm{div},K} = \sum_K |\operatorname{div} p - \operatorname{div} p_h|^2_{0,K} = \sum_K |f - \Pi^0 f|^2_{0,K} \tag{2.132}$$

on prouve *(iii)* grâce au Lemme 2.2.1.
(iv) L'estimation d'erreur en p se déduit de l'écriture (2.104) :

$$|p - p_h|^2_{0,\Omega} = \sum_K |p - p_h|^2_{0,K} = \sum_K |\nabla u - \nabla u_h|^2_{0,K} = \sum_K |u - u_h|^2_{1,K} = |u - u_h|^2_{1,h} \tag{2.133}$$

On conclut en utilisant l'estimation *(i)*. ■

Remarque : Tenseur de diffusion :
Sous la condition d'existence de deux constantes c_1, c_2 telles que

$$c_2 \xi^t \xi \le \xi^t \mathcal{K}(x)\, \xi \le c_1 \xi^t \xi\,,\ \forall\, x \in \Omega\,,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2\,,$$

on prouve (comme dans la Proposition 2.5.1 pour le schéma boîte (2.100)), que le schéma boîte associé au problème de Poisson avec tenseur (2.66) : chercher $(u_h\,,\,p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\operatorname{div} p_h + f, v_h) = 0\ ,\quad \forall v_h \in P^0 \\ \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (p_h - \mathcal{K}\nabla u_h, q_h) = 0\ ,\quad \forall q_h \in (P^1)^2 \end{array}\right. \tag{2.134}$$

admet une unique solution donnée par
(i) $u_h \in P^2_{nc,0}$ solution du problème variationnel :

$$\sum_K (\mathcal{K}\nabla u_h\,,\,\nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f\,,\,v_h)_{0,K}, \quad \forall\, v_h \in P^2_{nc,0} \tag{2.135}$$

(ii) $p_h \in (BDM_1 + \Phi)$ est donné sur chaque triangle K :

$$p_{h|K} = \Pi^1(\mathcal{K}\nabla\, u_{h|K}). \tag{2.136}$$

L'étude de ce schéma boîte pour le problème de Poisson avec tenseur de diffusion n'a pas été plus approfondie.

2.5.2 Comparaison avec la méthode mixte de Farhloul et Fortin

Dans [29], Farhloul et Fortin ont introduit la forme mixte suivante :
chercher $(u'_h, p'_h) \in M_{2,h} \times X_{1,h}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\operatorname{div}\, p'_h + f\,,\,v_h)_{0,K} = 0\ ,\quad \forall v_h \in M_{2,h} \\ \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \{(p'_h\,,\,q_h)_{0,K} + (\operatorname{div}\, q_h\,,\,u'_h)_{0,K}\} = 0\ ,\quad \forall q_h \in X_{1,h} \end{array}\right. \tag{2.137}$$

Ce problème a une unique solution $(u'_h\,,\,p'_h) \in M_{2,h} \times X_{1,h}$ qui satisfait

$$\|u'_h\|_{1,h} + \|p'_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C|f|_{0,\Omega}.$$

La forme hybridée de (2.137) est : chercher $(u_h\,,\,p_h\,,\,\lambda_h) \in M_{2,h} \times X_{2,h} \times \Lambda_h$ tel que pour $(v_h\,,\,q_h\,,\,\mu_h) \in M_{2,h} \times X_{2,h} \times \Lambda_h$, on ait

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{(p_h\,,\,q_h)_{0,K} + \int_K \operatorname{div}\, q_h\, u_h\, dx - \int_{\partial K} q_h\cdot\nu\,\lambda_h\, d\sigma\Big\} = 0 \\ &\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}\, p_h\, v_h\, dx + (f\,,\,v_h)_{0,K} = 0 \\ &\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} p_h\cdot\nu\;\mu_h\, d\sigma = 0 \end{aligned}\right. \tag{2.138}$$

L'espace Λ_h des multiplicateurs de Lagrange est défini par $\Lambda_h = \Lambda_{1,h} \oplus \Lambda_{2,h}$ où

$$\Lambda_{1,h} = \Big\{\mu_h \in L^2(\mathcal{A})\;;\; \mu_{h|_e} \in P^0\,(e)\,,\;\forall\, e \in \mathcal{A}_i\;,\;\mu_{h|_e} = 0 \quad \forall\, e \in \mathcal{A}_b\Big\} \tag{2.139}$$

$$\Lambda_{2,h} = \Big\{\mu_h = \psi|_{\mathcal{A}}\;;\; \psi \in C^0(\overline{\Omega})\,,\, \psi|_K \in P^1(K)\,,\,\forall\, K \in \mathcal{T}_h\,,\, \psi|_\Gamma = 0\Big\} \tag{2.140}$$

Le lien entre le schéma boîte (2.100) et la forme hybridée (2.138) de la méthode mixte (P'_h) est donné par

Proposition 2.5.3 (Lien avec la méthode mixte de Farhloul et Fortin)
Soit $(u_h\,,\,p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ la solution du schéma boîte (2.100). Soit $\lambda_h \in \Lambda_h = \Lambda_h^1 \otimes \Lambda_h^2$ défini par $\lambda_h = \lambda_h^1 + \lambda_h^2$ où $\lambda_h^1 \in \Lambda_h^1$ est défini pour $a = [S', S''] \in \mathcal{A}_i$ par

(i) $\lambda^1_{h|a} = \frac{1}{3}[2u_h\,(x_a) - (u_h\,(S') + u_h\,(S''))]\,,\quad \forall\, a \in \mathcal{A}_i$

(ii) $\lambda_h^2 \in \Lambda_h^2$ *est la fonction affine continue définie par les valeurs de u_h aux sommets du maillage. Alors,*

(a) $(\Pi^0\, u_h\,,\,p_h)$ *est la solution du schéma mixte (2.137).*

(b) $(\Pi^0\, u_h\,,\,p_h\,,\,\lambda_h)$ *est la solution de (2.138).*

Preuve :
(a) Soit $(u_h\,,\,p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ la solution du schéma boîte (2.100). Puisque $(2.100)_1$ et $(2.137)_1$ sont identiques, nous allons montrer que $(p_h\,,\,\Pi^0\, u_h)$ est solution de l'équation $(2.137)_2$. Pour q_h dans $X_{1,h}$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_K (p_h\,,\,q_h)_{0,K} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla\, u_h\,,\,q_h)_{0,K} \\ &= -\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (u_h\,,\,\operatorname{div}\, q_h)_{0,K} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_{\partial K} u_h\,(q_h\cdot\nu)\, d\sigma \end{aligned} \tag{2.141}$$

Nous avons déjà vu qu'il résulte des propriétés des espaces $P^2_{nc,0}$ et $BDM_1 + \Phi$, que la seconde somme dans l'équation (2.141) est nulle. Puisque $\operatorname{div} q_h \in P^0$ nous concluons que $(p_h\,,\,q_h) = -\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\Pi^0 u_h, \operatorname{div} q_h)_{0,K}$, qui est l'identité $(2.137)_2$ pour $p'_h = p_h$ et $u'_h = \Pi^0 u_h$.

(b) Par unicité de la solution de (2.138), il est suffisant de prouver que $(\Pi^0 u_h, p_h, \lambda_h) \in M_{2,h} \times X_{2,h} \times \Lambda_h$ est solution de (2.138), avec $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ défini par la Proposition 2.5.3 *(i), (ii)*. Pour $q_h \in X_{2,h}$, nous avons encore (2.141). Nous déduisons en utilisant la formule de quadrature de Simpson que pour tout $e \in \partial K$,

$$\int_e (q_h \cdot \nu) u_h \, d\sigma = \int_e (q_h \cdot \nu) \lambda \, d\sigma \tag{2.142}$$

Ainsi, $(\Pi^0 u_h, p_h, \lambda_h) \in M_{2,h} \times X_{2,h} \times \Lambda_h$ est solution de (2.138). ∎

2.6 Schéma $(u_h\,,\, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$

Pour ce dernier schéma, nous introduisons l'espace $X_{1,h} = RT^1 + \Phi$, où RT^1 désigne l'espace de Raviart-Thomas d'ordre 1, [39], et l'espace Φ est l'espace engendré par les rotationnels de la bulle quadratique non-conforme, définis tous deux au paragraphe 2.4.3. Les degrés de liberté de l'espace $X_{1,h}$ sont donc situés au niveau des mailles et des arêtes du maillage. L'espace $X_{1,h}$ est de dimension :

$$\begin{aligned} \dim X_{1,h} &= \dim RT^1 + \dim \Phi - \dim(RT^1 \cap \Phi) \\ &= 2NE + 2NA + NE - 1 = 3NE + 2NA - 1 \end{aligned} \tag{2.143}$$

Nous gardons $M_{1,h} = P^2_{nc,0}$ pour l'inconnue scalaire u_h. Nous cherchons des espaces de fonctions test de type discontinus satisfaisant la relation (2.49) d'égalité des dimensions

$$\dim X_{1,h} + \dim M_{1,h} = \dim X_{2,h} + \dim M_{2,h}. \tag{2.144}$$

Or, $\dim X_{1,h} + \dim M_{1,h} = 3NE + 2(NA + NA_i) = 9NE$, ce qui suggère de choisir comme espaces de fonctions test, les espaces :

$$X_{2,h} = \left\{ q_h \in (L^2(\Omega))^2 \;;\; q_{h|K} \in (P^1(K))^2, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\}, \tag{2.145}$$

$$M_{2,h} = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \;;\; v_{h|K} \in P^1(K), \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\}, \tag{2.146}$$

totalement discontinus, de dimensions respectives $\dim X_{2,h} = 6NE$ et $\dim M_{2,h} = 3NE$. On notera aussi ces espaces $(P^1)^2$ et P^1. La relation (2.49) est donc vérifiée avec ce choix d'espaces. Définissons maintenant le schéma boîte associé :

Définition 2.6.1 (Schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$)
Soit le schéma boîte : chercher $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$ tel que

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_K \int_K (\operatorname{div} p_h + f)\, v_h \, dx = 0\,, \quad \forall v_h \in P^1 \\ &\sum_K \int_K (p_h - \nabla u_h) \cdot q_h \, dx = 0\,, \quad \forall q_h \in (P^1)^2 \end{aligned} \right. \tag{2.147}$$

Proposition 2.6.1 *Le schéma boîte (2.147) admet une unique solution* $(u_h\,,\,p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$*, donnée par*
(i) $u_h \in P^2_{nc,0}$ *est solution de*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla\, u_h\,,\,\nabla\, w_h)_{0,K} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\Pi^1\, f\,,\,w_h)_{0,K}\;, \quad \forall w_h \in P^2_{nc,0} \tag{2.148}$$

(ii) p_h *est donné sur chaque triangle* K *par :*

$$p_{h|K}(x) = \nabla u_{h|K}(x) - \frac{1}{3}\Big\{\Pi^1 f\, \overrightarrow{G_K x} - \Pi^1[\Pi^1 f\, \overrightarrow{G_K x}]\Big\} \tag{2.149}$$

où G_K *est le centre de gravité du triangle* K

Remarquons que la solution u_h du schéma boîte (2.147) est la solution du problème standard non-conforme de Fortin-Soulie dans le cas d'un terme source affine par morceau.

Preuve :
Le problème (2.147) est linéaire avec autant d'inconnues que d'équations. Donc prouver l'unicité de la solution du problème (2.147) suffit à prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.147). L'unicité du problème (2.147) est donnée par l'unicité de (2.148-2.149). Soit $(u_h\,,\,p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ solution du problème (2.147). Montrons que $(u_h\,,\,p_h)$ est solution de (2.148-2.149).
(i) Soit $w_h \in P^2_{nc,0}$, $\nabla\, w_h \in X_{2,h}$. Ainsi en appliquant la formule de Green dans l'équation $(2.147)_2$ pour $q_h = \nabla w_h$, on a

$$\sum_K (\nabla\, u_h\,,\,\nabla\, w_h)_{0,K} = -\sum_K (\mathrm{div}\; p_h\,,\,w_h)_{0,K} + \sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu)\, w_h\, d\sigma \tag{2.150}$$

La décomposition de $p_{h|K} \in X_{1,h} = RT^1 + \Phi$ est localement $p_{h|K} = \hat{p}_{h|K} + \alpha_K\, \mathrm{rot}\, b_K$. Donc,

$$\sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu)\, w_h\, d\sigma = \sum_K \int_{\partial K} \hat{p}_h \cdot \nu\;\, w_h\, d\sigma + \sum_K \alpha_K \int_{\partial K} \frac{\partial b_K}{\partial \tau} w_h\, d\sigma \tag{2.151}$$

Le dernier terme du membre de droite de l'équation (2.151) s'annule en vertu du Lemme 2.4.3. La continuité de $\hat{p}_h \cdot \nu$ le long de chaque arête interne et les propriétés de l'espace $P^2_{nc,0}$ impliquent que le terme

$$\sum_K \int_{\partial K} \hat{p}_h \cdot \nu\;\, w_h\, d\sigma = 0$$

(intégration exacte aux deux points de Gauss de chaque arête d'un polynôme de degré 3). D'autre part, puisque $M_{2,h}$ est un espace de polynômes de degré 1 par triangle, nous déduisons de $(2.147)_1$ que $\mathrm{div}\, p_{h|K} = -\Pi^1 f_K$, pour tout triangle K. Ceci démontre la première partie du résultat.

(ii) Considérons maintenant $p_h \in X_{1,h}$. Dans un triangle K, il s'écrit $p_{h|K} = \hat{p}_{h|K} + \alpha_K \operatorname{rot} b_K$. L'expression locale de $\hat{p}_{h|K} \in RT^1(K)$ est

$$\hat{p}_{h|K}(x) = \overline{p}_{h|K}(x) + [A_K \cdot \overrightarrow{G_K x}]\, \overrightarrow{G_K x}, \tag{2.152}$$

où $\overline{p}_h \in P_1(K)^2$ et A_K est un vecteur constant de K. De plus, $\forall K,\ \operatorname{div} p_{h|K} = -\Pi^1 f_{|K}$ par $(2.147)_1$. D'après (2.152), on a :

$$\text{div } p_h = \underbrace{\text{div } \bar{p}_h}_{\in P^0} + 3\,(A_K \cdot \overrightarrow{G_K x}) \tag{2.153}$$

En identifiant les deux valeurs de $\operatorname{div} p_h$, puis en prenant le gradient, on obtient $A_K = -\frac{1}{3}\nabla(\Pi^1 f)$. D'autre part, sur un triangle K, $(\Pi^1 f)_K$ s'écrit encore

$$(\Pi^1 f)_K = (\Pi^0 f)_K + \nabla(\Pi^1 f)_K \cdot \overrightarrow{G_K x}\,,$$

donc la composante quadratique de $p_{h|K}$ est égale à :

$$(A_K \cdot \overrightarrow{G_K x})\, \overrightarrow{G_K x} = -\frac{1}{3}[(\Pi^1 f_{|K} - \Pi^0 f_{|K})\overrightarrow{G_K x}]\,.$$

La partie linéaire de p_h est $\tilde{p}_{h|K} = \overline{p}_{h|K} + \alpha_K \operatorname{rot} b_K$. Elle se détermine par $(2.147)_2$:

$$(\tilde{p}_h - \nabla u_h; q_h) = -\frac{1}{3}((\Pi^1 f - \Pi^0 f)\overrightarrow{G_K x}, q_h)_{0,K}\,, \quad q_h \in (P^1)^2 \tag{2.154}$$

ce qui donne (2.149). ∎

Lemme 2.6.1 (Stabilité)
Il existe une constante C indépendante de h telle que la solution $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$ du schéma boîte (2.147) satisfait

$$\|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\text{div},h} \leq C|f|_{0,\Omega} \tag{2.155}$$

Preuve :
On déduit de la Proposition 2.6.1 et de l'écriture locale de $\operatorname{div} p_h$, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} |u_h|_{1,h} &\leq C_1\,|f|_{0,\Omega} \\ \|p_h\|_{\text{div},h} &\leq |u_h|_{1,h} + C_2\,|f|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

On conclut, en combinant ces relations et en utilisant l'inégalité de Poincaré discret (Lemme 2.4.8). ∎

Remarque :
L'existence et l'unicité de la solution du schéma (2.147) peuvent aussi se démontrer en vérifiant les conditions inf-sup du théorème de Babuška-Brezzi discret.

Tout comme pour le schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$ les formes bilinéaires sont définies pour $p_h \in X_{1,h},\ u_h \in M_{1,h},\ q_h \in X_{2,h}$ et $v_h \in M_{2,h}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} a_h(p_h, q_h) = (p_h, q_h)_{0,\Omega} = \sum\limits_K \int_K p_h \cdot q_h \, dx \\ b_{1,h}(u_h, q_h) = -\sum\limits_K \int_K \nabla u_h \cdot q_h \, dx \\ b_{2,h}(v_h, p_h) = \sum\limits_K \int_K \operatorname{div} p_h \, v_h \, dx \end{array}\right. \tag{2.156}$$

Soit $l_{2,h}$ l'application nulle et $m_{2,h}$ la forme linéaire continue définie sur $M_{2,h}$ par

$$< m_{2,h},\ v_h >= \sum_K \int_K \Pi^1 f \ v_h dx$$

Nous donnons aussi la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution du schéma boîte (2.147) par le théorème de Babuška-Brezzi discret. Vérifions les hypothèses du théorème de Babuška-Brezzi discret.
(i). • Montrons que $V_{1,h} = V_{2,h}$ avec :

$$\begin{aligned} V_{1,h} &= \{p_h \in X_{1,h}; \sum_K \int_K \operatorname{div} p_h \, v_h \, dx = 0, \quad \forall v_h \in M_{2,h}\}, \\ V_{2,h} &= \{q_h \in X_{2,h}; -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot q_h dx = 0, \quad \forall u_h \in M_{1,h}\}. \end{aligned} \tag{2.157}$$

L'égalité (2.49) des dimensions entre espaces d'inconnues et espaces de test donne :

$$\dim V_{1,h} = \dim X_{1,h} - \dim M_{2,h} = \dim X_{2,h} - \dim M_{1,h} = \dim V_{2,h}.$$

Il reste à prouver l'inclusion : $V_{1,h} \subseteq V_{2,h}$. Soit $p_h \in V_{1,h}$, alors, $p_h \in X_{2,h}$ (les éléments de RT^1, à divergence nulle sont dans $(P^1)^2$ et $\operatorname{rot} b_K \in (P^1)^2$). Vérifions donc que $b_{1,h}(u_h, p_h) = 0$, pour tout $u_h \in M_{1,h}$. $p_h \in X_{1,h} = RT^1 + \Phi$, donc $\operatorname{div} p_{h|K} \in P^1(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$. Or $p_h \in V_{1,h}$. D'où on déduit que $\operatorname{div} p_{h|K} = 0$. Soit $u_h \in M_{1,h}$. En utilisant la formule de Green,

$$b_{1,h}(u_h, p_h) = -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot p_h dx = \sum_K \int_K u_h \underbrace{\operatorname{div} p_h}_{=0} + \sum_K \int_{\partial K} u_h \, p_h \cdot \nu \, d\sigma \tag{2.158}$$

D'autre part, p_h s'écrit localement $p_{h|K} = \hat{p}_h + \alpha_K \operatorname{rot} b_K$, où $\hat{p}_h$ est la composante selon $RT^1 \subseteq H_{\operatorname{div}}(\Omega)$ et α_K est une constante de $\mathbb{R}$. L'équation (2.158) est équivalente à :

$$\begin{aligned} b_{1,h}(u_h, p_h) &= \sum_K \int_{\partial K} u_h \, p_h \cdot \nu \, d\sigma \\ &= \sum_K \int_{\partial K} u_h \, \hat{p}_h \cdot \nu \, d\sigma + \sum_K \int_{\partial K} u_h \, (\alpha_K \operatorname{rot} b_K) \cdot \nu \, d\sigma \\ &= \sum_{a \in A_b} \int_a u_h \, \hat{p}_h \cdot \nu_a \, d\sigma - \sum_{a \in A_i} \int_a [u_h] \, \hat{p}_h \cdot \nu_a \, d\sigma + \sum_K \alpha_K \int_{\partial K} u_h \frac{\partial b_K}{\partial \tau} d\sigma \end{aligned} \tag{2.159}$$

Par le Lemme 2.4.3, $\int_{\partial K} u_h \frac{\partial b_K}{\partial \tau} d\sigma = 0 \,, \forall u_h \in P^2$.
D'autre part, $p_h^1 \in (P^1(K))^2$ et $u_h \in P^2_{nc,0}$. L'intégration aux deux points de Gauss de l'arête $a \in A_i$ de l'expression $[u_h]\, p_h^1 \cdot \nu_a$ est exacte. Or u_h, est continue aux points de Gauss d'une arête interne a, donc $[u_h]$ est nul aux points de Gauss de a. On en déduit

$$\sum_{a\in A_i} \int_a [u_h]\, p_h^1 \cdot \nu_a \, d\sigma = 0.$$

De même, l'intégration sur une arête frontière $a \in A_b$ de $\int_a u_h \, p_h^1 \cdot \nu_a$ est exacte aux points de Gauss de l'arête a. Ainsi :

$$\sum_{a\in A_b} \int_a u_h \, p_h^1 \cdot \nu_a \, d\sigma = 0.$$

Finalement, nous venons de prouver que chaque terme de l'équation (2.159) est nul, c'est-à-dire $b_{1,h}(u_h, p_h) = 0 \,,\ \forall u_h \in M_{1,h}$. Alors $V_{1,h} = V_{2,h} = V_h$,

$$\sup_{p_h\in V_{1,h} \|p_h\|_{\mathrm{div},h}} a_h(p_h, q_h) = \sup_{p_h\in V_h \|p_h\|_{0,h}} a_h(p_h, q_h) = \|q_h\|_{0,h} \,, \tag{2.160}$$

puisque les normes $\|\cdot\|_{0,h}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{div},h}$ sont équivalentes.
Ceci conclut la condition *(i)*.
(ii) est vérifié par le choix des espaces $M_{1,h}$, $X_{1,h}$, $M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ qui satisfont la relation (2.144).
(iii) Prouvons qu'il existe une constante $\beta_1 > 0$ telle que

$$\sup_{q_h\in X_{2,h}, |q_h|_{0,h}\leq 1} b_{1,h}(u_h, q_h) \geq \beta_1 |u_h|_{1,h}, \quad \forall u_h \in M_{1,h}$$

Soit $u_h \in M_{1,h}$. Soit $q_{h|K} = \frac{-\nabla u_{h|K}}{|u_h|_{1,h}}$, alors $q_h \in X_{2,h} = (P^1)^2$ par définition de l'espace $M_{1,h} = P^2_{nc,0}$ et $|q_h|_{1,h} = 1$. Ainsi

$$b_{1,h}(u_h, q_h) = -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot q_h \, dx = -\sum_K \int_K \frac{|\nabla u_h|^2}{|u_h|_{1,h}} dx = |u_h|_{1,h} \tag{2.161}$$

$\beta_1 = 1$ convient pour prouver *(iii)*.
(iv) Nous cherchons $\beta_2 > 0$ constante telle que

$$\sup_{p_h\in X_{1,h}, \|p_h\|_{\mathrm{div},h}\leq 1} b_{2,h}(v_h, p_h) \geq \beta_2 |v_h|_{0,h}, \quad \forall v_h \in M_{2,h}$$

Soit $v_h \in M_{2,h} = P^1$, d'après [39], il existe $q_h \in RT^1$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div} q_h = v_h \\ \|q_h\|_{\mathrm{div},\Omega} \leq c |v_h|_{0,h} \end{cases} \tag{2.162}$$

Posons $\tilde{q}_h = \frac{q_h}{\|q_h\|_{\mathrm{div},\Omega}}$, alors $\tilde{q}_h \in X_{1,h}$ et $\|\tilde{q}_h\|_{\mathrm{div},\Omega} = 1$.

$$b_{2,h}(v_h, \tilde{q}_h) = \sum_K \int_K \operatorname{div} \tilde{q}_h v_h \, dx \;= \sum_K \int_K \frac{\operatorname{div} q_h v_h}{\|q_h\|_{\mathrm{div},\Omega}} dx = \sum_K \int_K \frac{|v_h|^2_{0,K}}{\|q_h\|_{\mathrm{div},\Omega}} dx \;= \frac{|v_h|^2_{0,h}}{\|q_h\|_{\mathrm{div},\Omega}} \tag{2.163}$$

Donc $b_{2,h}(v_h, \tilde{q}_h) \geq \frac{1}{c}|v_h|_{0,\Omega}$, c'est-à-dire $\beta_2 = \frac{1}{c}$ convient. La condition *(iv)* est en fait la condition inf-sup du problème mixte standard de Raviart-Thomas pour l'espace RT^1.

Finalement, les hypothèses du théorème de Babuška-Brezzi sont vérifiées, ce qui prouve l'existence et l'unicité du du schéma boîte (2.147), ainsi que sa stabilité :

$$\|(u_h, p_h)\|_{M_{1,h}\times X_{1,h}} = \|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\mathrm{div},\Omega} \leq C\,|f|_{0,\Omega}$$

■

Nous déduisons de la formulation de la Proposition 2.6.1, les estimations d'erreur *a priori* de la solution du schéma boîte (2.147).

Proposition 2.6.2 (Estimation d'erreur *a priori*)
Soient $(u,p) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ la solution du problème mixte de Petrov-Galerkin (2.2) et $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$ la solution du schéma boîte (2.147). Si de plus, $u \in H^3(\Omega)$ et $f \in H^2(\Omega)$, alors

$$\begin{array}{ll} (i) & |u-u_h|_{1,h} \leq Ch^2(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \\ (ii) & |u-u_h|_{0,h} \leq Ch^3(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega} + |f|_{2,\Omega}) \\ (iii) & |p-p_h|_{\mathrm{div},h} \leq Ch^2|f|_{2,\Omega} \\ (iv) & |p-p_h|_{0,\Omega} \leq Ch^2(|u|_{3,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \end{array} \tag{2.164}$$

Preuve :
La preuve du *(i)* est identique à l'estimation d'erreur de $|u-u_h|_{1,h}$ du schéma (2.100) (Proposition 2.5.2).
La preuve du *(ii)* est analogue au calcul réalisé dans la Proposition 2.5.2, en effet :

$$|u-u_h|_{0,\Omega} = \sup_{g\in L^2(\Omega)} \frac{(u-u_h, g)_{0,\Omega}}{|g|_{0,\Omega}}$$

Soit g une fonction de $L^2(\Omega)$. On définit ϕ_g (respectivement ϕ_h) la solution du problème continu (2.2) (respectivement discret (2.147)) pour la fonction g de $L^2(\Omega)$.
$\phi_g \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$(\nabla\phi_g, \nabla v)_{0,\Omega} = (g, v)_{0,\Omega}\ ,\ v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.165}$$

$\phi_h \in P^2_{nc,0}$ solution de

$$\sum_K (\nabla\phi_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^1 g, v_h)_{0,K}\ ,\ v_h \in P^2_{nc,0} \tag{2.166}$$

Alors, de même on a la relation

$$\begin{aligned}(u-u_h, g)_{0,\Omega} &= a(u-u_h, \phi_g - \phi_h) - \big(a(u-u_h,\phi_g) - (u-u_h, g)\big) \\ &\quad -\big(a(u, \phi_g - \phi_h) - (f,\phi_g) + (\Pi^1 f, \phi_h)\big)\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
|(u-u_h,g)_{0,\Omega}| &= \underbrace{|a(u-u_h,\phi_g-\phi_h)|}_{(I)} - \underbrace{|a(u-u_h,\phi_g)-(u-u_h,g)|}_{(II)} \\
&\quad - \underbrace{|a(u,\phi_g-\phi_h)-(f,\phi_g)+(\Pi^1 f,\phi_h)|}_{(III)}
\end{aligned}
$$

Les évaluations de (I) et (II) sont identiques à celles réalisées dans la preuve de la Proposition 2.5.2 ((2.129) et (2.131)) :

$$
\begin{array}{l}
(I) = |a(u-u_h,\phi_g-\phi_h)| \leq Ch^3\left(|u|_{3,\Omega}+|f|_{1,\Omega}\right)|g|_{0,\Omega} \\
(II) = |a(u-u_h,\phi_g)-(u-u_h,g)| \leq Ch^3\left(|u|_{3,\Omega}+|f|_{1,\Omega}\right)|g|_{0,\Omega}
\end{array}
\tag{2.167}
$$

Pour (III), on pose $w_h = \phi_g - \phi_h$:

$$
\begin{aligned}
|a(u,\phi_g-\phi_h)-(f,\phi_g)+(\Pi^1 f,\phi_h)| &= |a(u,w_h)-(f,w_h)-(f,\phi_h)+(\Pi^1 f,\phi_h)| \\
&= |L_u(w_h)-(f-\Pi^1 f,\phi_h)| \\
&\leq |L_u(w_h)|+|(f-\Pi^1 f,\phi_h)| \\
&\leq |L_u(w_h)|+|(f-\Pi^1 f,\phi_h-\Pi^0\phi_h)| \\
&\leq Ch|w_h|_{1,h}|u|_{3,\Omega}+|f-\Pi^1 f|_{0,\Omega}|\phi_h-\Pi^0\phi_h|_{0,\Omega} \\
&\leq Ch^3|g|_{0,\Omega}|u|_{3,\Omega}+Ch^3|f|_{2,\Omega}|g|_{0,\Omega}
\end{aligned}
$$

Donc $|(III)| \leq C\,h^3|g|_{0,\Omega}(|u|_{3,\Omega}+|f|_{2,\Omega})$. En regroupant avec (2.167), on déduit l'estimation $|u-u_h|_{0,\Omega}$.

(iii) On a l'estimation d'erreur pour p en semi-norme $|\cdot|_{\mathrm{div},h}$:

$$
|p-p_h|^2_{\mathrm{div},h} = \sum_K |p-p_h|^2_{\mathrm{div},K} = \sum_K |\operatorname{div} p - \operatorname{div} p_h|^2_{0,K} = \sum_K |f-\Pi^1 f|^2_{0,K}
$$

Or, en appliquant le Lemme 2.2.1, $|f-\Pi^1 f|_{0,K} \leq C\,h_K^2|f|_{2,K}$. Ce qui donne le résultat.

(iv) En utilisant l'écriture locale de p_h, on obtient

$$
\begin{aligned}
|p-p_h|^2_{0,\Omega} &= \sum_K |p-p_h|^2_{0,K} \\
&= \sum_K |\nabla u - \nabla u_h + \frac{1}{3}\Big\{(\Pi^1 f)\overrightarrow{G_K\,x} - \Pi^1[(\Pi^1 f)\overrightarrow{G_K\,x}]\Big\}|^2_{0,K} \\
&\leq |u-u_h|^2_{1,h} + C\,h^2 \sum_K |\Pi^1 f|^2_{0,K}|K|R_K^2
\end{aligned}
$$

Si $R_K^2 = \frac{1}{|K|}\int_K \|\overrightarrow{G}_K x\|^2\,dx$, il existe une constante C telle que $R_K^2 \leq C|K|$. On obtient donc le résultat annoncé. ■

Remarque :

On suppose que le tenseur $\mathcal{K}$ est une matrice symétrique définie positive ; c'est-à-dire que $\mathcal{K}$

satisfait la condition de coercivité suivante : il existe deux constantes $c_1,\ c_2$ telles que pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$c_2 \xi^t \xi \le \xi^t \mathcal{K}(x)\, \xi \le c_1 \xi^t \xi\,.$$

Le schéma boîte associé au problème de Poisson avec tenseur $-\operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla u) = f$, est par exemple : chercher $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_K \int_K (\operatorname{div} p_h + f) v_h dx = 0\ , \quad \forall v_h \in P^1 \\ \displaystyle\sum_K \int_K (p_h - \mathcal{K}\nabla u_h) \cdot q_h = 0\ , \quad \forall q_h \in (P^1)^2 \end{array}\right. \tag{2.168}$$

Ce problème admet une unique solution donnée par
(i) $u_h \in M_{1,h}$ est solution de

$$\sum_K (\mathcal{K}\nabla\, u_h\, ;\, \nabla\, v_h)_{0,K} = (\Pi^1\, f\, ,\, v_h) \qquad \forall v_h \in M_{1,h} \tag{2.169}$$

(ii) p_h est donné sur chaque triangle K

$$p_{h|K}(x) = \Pi^1(\mathcal{K}\nabla u_h(x))_{|K} - \frac{1}{3}\Big\{\Pi^1 f \overrightarrow{G_K\, x} - \Pi^1[\Pi^1 f \overrightarrow{G_K\, x}]\Big\} \tag{2.170}$$

Ce résultat se démontre comme dans la Proposition 2.6.1, où le tenseur de diffusion est l'identité $\mathcal{K} = I$.

2.7 Quelques applications numériques

2.7.1 Introduction

Soit le domaine $\Omega = [0,1]^2$, on considère le problème de Poisson de conditions à la frontière de type Dirichlet :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = f\,, & \text{sur } \Omega = [0,1]^2 \\ u = g\,, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2.171}$$

Les conditions sur la frontière sont données par la solution exacte. Nous donnons quelques résultats numériques obtenus pour les schémas boîte des sections 2.3.4, 2.5 et 2.6. Les programmes sont écrits en Matlab. La programmation est réalisée grâce à l'équivalence des schémas boîte (2.47), (2.100) (respectivement (2.147)) avec les problèmes découplés en u_h et p_h donnés par les propositions 2.3.1, 2.5.1 (respectivement 2.6.1). Dans un premier temps, on calcule l'inconnue scalaire $u \in M_{1,h}$ solution du problème variationnel

$$\sum_K (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^i f, v_h)_{0,K}\ , \quad v_h \in M_{1,h}\ i = 0,\, 1.$$

Le flux discret p_h est donné par la formule de reconstruction locale en fonction de u_h et f. Si $M_{1,h}$ est l'espace $P^2_{nc,0}$, on utilise la décomposition de $P^2_{nc,0}$ comme somme directe de $P^2_{c,0}$

et Ψ. Les conditions limites sont données par la solution exacte aux deux points de Gauss de chaque arête frontière. Nous représentons les différents types de maillages du domaine Ω utilisés pour les tests.
• des maillages en triangles de type 1 composés de 100 ou 400 triangles (Figure 2.11).
• des maillages en triangles de type 2 composés de 50 ou 200 triangles (Figure 2.12).

Pour chaque test numérique proposé, nous calculons les taux de convergence de l'erreur entre la solution exacte et les solutions calculées par le schéma boîte de Courbet-Croisille et les deux schémas boîte quadratiques proposés dans ce chapitre. Nous représentons la solution $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$, calculée par le schéma boîte (2.147).

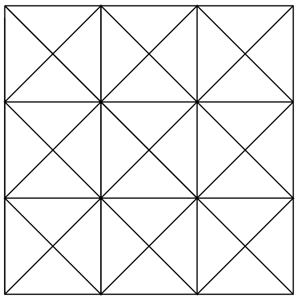

FIG. 2.11 – Maillage triangulaire de type 1

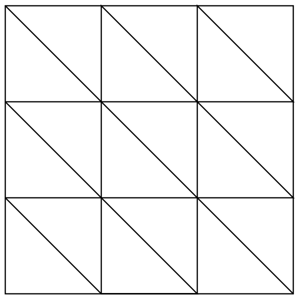

FIG. 2.12 – Maillage triangulaire de type 2

Nous proposons 4 tests, de conditions limites de type Dirichlet, données par la solution exacte u sur la frontière. Pour rappel, nous donnons quelques résultats numériques pour le schéma boîte $P^1_{nc,0} \times RT^0$ de B. Courbet et J-P. croisille rappelé au Paragraphe 2.3.4.

2.7.2 Test 1

Nous considérons la solution exacte du problème (2.171) :

$$u(x, y) = \cos(2\pi x)\,\sin(2\pi y)\,, \quad (x, y) \in [0, 1]^2\,,$$

de terme source $f(x, y) = 8\pi^2 \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$. La solution exacte donne les conditions de Dirichlet sur la frontière. On calcule pour les trois schémas boîte de ce Chapitre la solution $u_h \in M_{1,h}$ et le flux discret $p_h \in X_{1,h}$, pour des maillages de type 1, composés de 100 et 400 triangles. Les tableaux 2.1, 2.2 et 2.3 présentent les résultats numériques obtenus pour cette solution exacte pour les trois schémas boîte (2.47), (2.100) et (2.147). On calcule l'erreur en norme L^2 et en semi-norme $|\cdot|_{1,h}$ de la solution scalaire u et l'erreur en norme L^2 du flux p. Les résultats de convergence obtenus correspondent aux taux de convergence annoncés dans les Propositions 2.3.3, 2.5.2 et 2.6.2. Les Figures 2.13 et 2.14 représentent la solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$. Le flux discret $p_h \in (RT^1 + \Phi)$ est représenté sur la Figure 2.15.

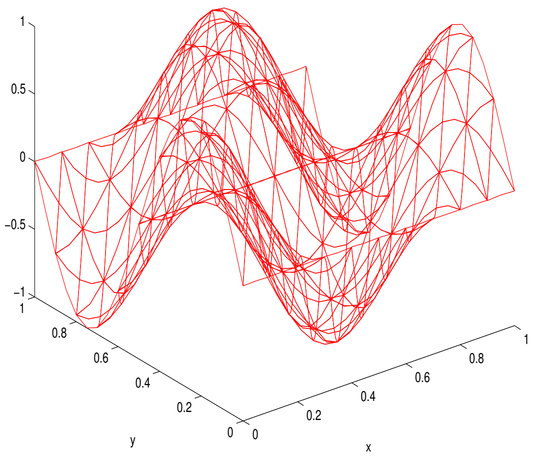

FIG. 2.13 – Test 1 : Solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

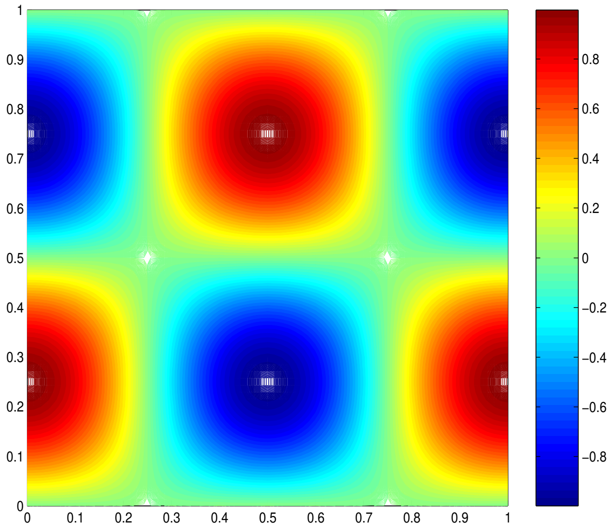

FIG. 2.14 – Test 1 : Isolignes de la solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

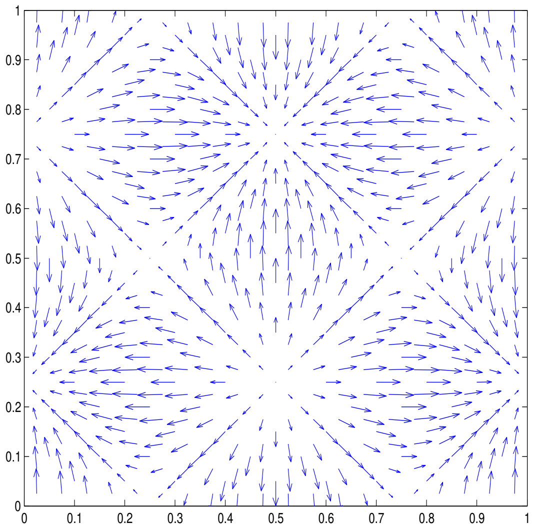

FIG. 2.15 – Test 1 : Flux $p_h \in (RT^1 + \Phi)$ calculé par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0074	0.3387	0.2203	0.2
400	$9.2712.10^{-4}$	0.0865	0.0557	0.1
taux conv.	2.9967	1.9692	1.9837	

TAB. 2.1 – Test 1 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0346	0.4622	0.4622	0.2
400	0.0090	0.1190	0.1190	0.1
taux conv.	1.9428	1.9576	1.9576	

TAB. 2.2 – Test 1 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM^1 + \Phi)$

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0013	0.0321	0.0276	0.2
400	$3.3487.10^{-4}$	0.0162	0.0139	0.1
taux conv.	1.9568	0.9866	0.9896	

TAB. 2.3 – Test 1 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$

2.7.3 Test 2

La fonction $u(x,y) = x\,y\,(1-x)\,(1-y)$, $(x,y) \in [0,1]^2$, est solution du problème (2.171) de terme source $f(x,y) = 2\,(y\,(1-y) + x\,(1-x))$ et de condition de Dirichlet $g = u_{|\partial\Omega}$. On calcule la solution discrète $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$, des trois schémas boîte (2.47), (2.100) et (2.147) pour des maillages de type 1 et 2. On compare ensuite l'erreur entre la solution exacte $(u, p = \nabla u)$ et la solution discrète (u_h, p_h) pour différentes normes. Ces résultats sont regroupés dans les tableaux 2.4, 2.5 et 2.6. Les taux de convergence de la solution (u_h, p_h) de chaque schéma boîte par rapport à la solution exacte $(u, p = \nabla u)$ correspondent aux taux annoncés dans les théorèmes d'estimation d'erreur *a priori* (voir les Propositions 2.3.3, 2.5.2 et 2.6.2). Sur les Figures 2.16 et 2.17, nous représentons la solution discrète $u_h \in P^2_{nc,0}$ du schéma boîte (2.147). La Figure 2.18 représente le flux discret $p_h \in (RT^1 + \Phi)$ du schéma boîte (2.147).

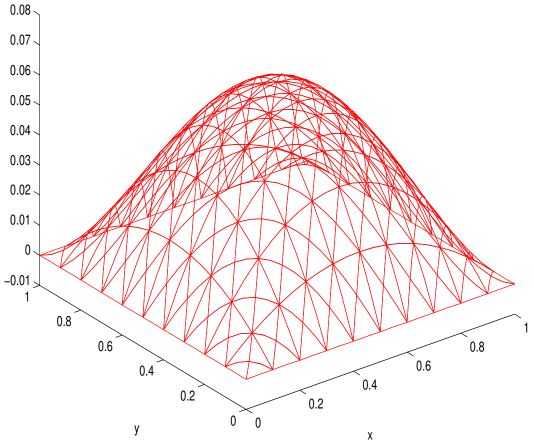

FIG. 2.16 – Test 2 : Solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

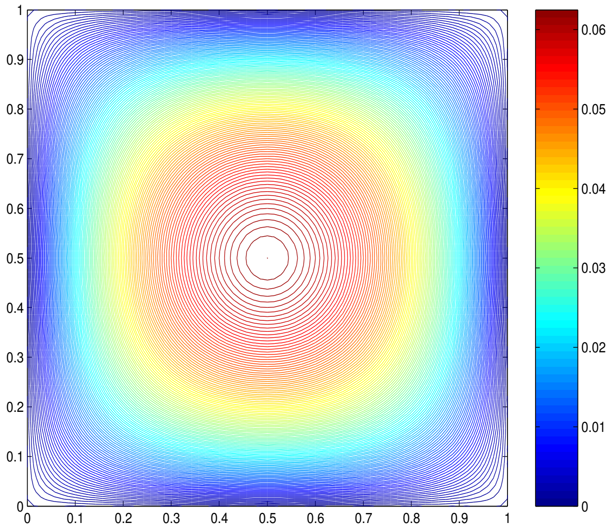

FIG. 2.17 – Test 2 : Isolignes de la solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

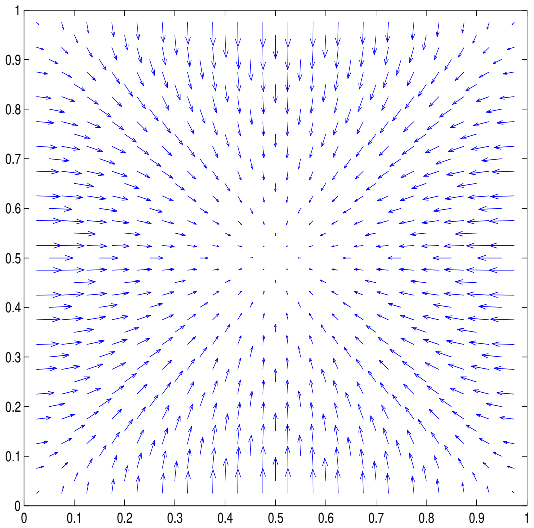

FIG. 2.18 – Test 2 : Flux $p_h \in (RT^1 + \Phi)$ calculé par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	$5.9441\,10^{-5}$	0.0027	0.0026	0.2
400	$7.2179\,10^{-6}$	$6.6904\,10^{-4}$	$6.3209\,10^{-4}$	0.1
taux conv.	3.0418	2.0128	2.0403	
50	$1.2415\,10^{-4}$	0.006094	0.005017	0.2828
200	$1.5473\,10^{-5}$	0.001535	0.001258	0.1414
taux conv.	3.0043	1.9892	1.9957	

TAB. 2.4 – Test 2 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	$3.5891\,10^{-4}$	0.003078	0.0031	0.2
400	$9.1182\,10^{-5}$	$7.6732\,10^{-4}$	$7.6732\,10^{-4}$	0.1
taux conv.	1.9768	2.0144	2.0144	
50	$7.2712\,10^{-4}$	0.0070	0.0070	0.2828
200	$1.8300\,10^{-4}$	0.0018	0.0018	0.1414
taux conv.	1.9903	1.9594	1.9594	

TAB. 2.5 – Test 2 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0728	1.8187	1.5945	0.2
400	0.0186	0.9252	0.8038	0.1
taux conv.	1.9686	0.9751	0.9882	

TAB. 2.6 – Test 2 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$

2.7.4 Test 3

Nous considérons la solution exacte du problème (2.171) :

$$u(x,y) = x\,y\,(1-x)\,(1-y)\,\exp(5x)$$

de terme source f :

$$f(x,y) = \exp(5x)\,\big(y\,(1-y)\,(25\,x\,(1-x) + 10\,(1-2x) - 2) - 2x\,(1-x)\big)\,.$$

Il s'agit d'un problème de type couche limite avec une forte variation du gradient le long de l'axe $x = x_0 = \frac{3+\sqrt{29}}{10}$. On représente la solution $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$ du schéma boîte (2.147) pour un maillage de type 1 composé de 400 triangles. Les Figures 2.19 et 2.20 représentent la solution $u_h \in P^2_{nc,0}$. Le flux discret $p_h \in RT^1 + \Phi$ est représenté sur la Figure 2.21. L'erreur entre la solution exacte u et la solution calculée u_h et représenté sur la Figure 2.22. Les calculs d'erreur pour les schémas boîte (2.47) (2.100) et (2.147) sont regroupés, respectivement dans les tableaux 2.9, 2.7 et 2.8. Les résultats obtenus sont de l'ordre de ceux annoncés dans les différents théorèmes d'estimations d'erreur *a priori* correspondants. Néanmoins, un maillage plus fin permettrait de mieux prendre en compte la forte variation de gradient le long de $x = x_0$.

nb mailles	$\|u - u_h\|_{0,\Omega}$	$\|u - u_h\|_{1,h}$	$\|p - p_h\|_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0116	0.8193	0.5962	0.2
400	0.0015	0.2226	0.1580	0.1
taux conv.	2.9511	1.8799	1.9159	
50	0.0313	1.4859	1.1320	0.2828
200	0.0043	0.4112	0.3122	0.1414
taux conv.	2.8638	1.8534	1.8583	

TAB. 2.7 – Test 3 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$

nb mailles	$\|u - u_h\|_{0,\Omega}$	$\|u - u_h\|_{1,h}$	$\|p - p_h\|_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0786	0.9638	0.9638	0.2
400	0.0205	0.2621	0.2621	0.1
taux conv.	1.9389	1.8786	1.8786	
50	0.1505	1.6983	1.6983	0.2828
200	0.0409	0.4760	0.4760	0.1414
taux conv.	1.8796	1.8351	1.8351	

TAB. 2.8 – Test 3 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM_1 + \Phi)$

nb mailles	$\|u - u_h\|_{0,\Omega}$	$\|u - u_h\|_{1,h}$	$\|p - p_h\|_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.1427	2.9234	2.4798	0.2
400	0.0388	1.5372	1.2519	0.1
taux conv.	1.8789	0.9273	0.9861	
nb mailles	$\|u - u_h\|_{0,\Omega}$	$\|u - u_h\|_{1,h}$	$\|p - p_h\|_{0,\Omega}$	pas d'espace h
50	0.3062	4.5556	3.9266	0.2828
200	0.0903	2.4734	2.1177	0.1414
800	0.0236	1.2659	1.0822	0.0707
taux conv.	1.7617	0.8811	0.8908	

TAB. 2.9 – Test 3 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$

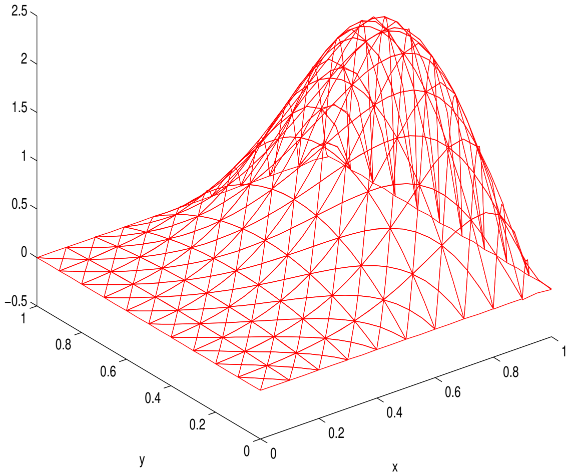

FIG. 2.19 – Test 3 : Solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

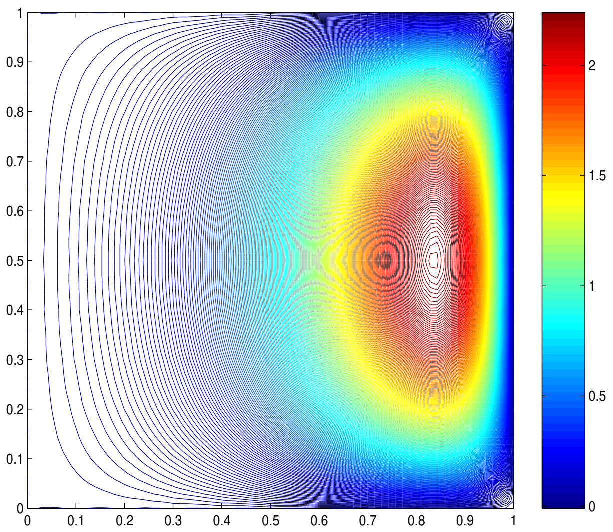

FIG. 2.20 – Test 3 : Isolignes de la solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

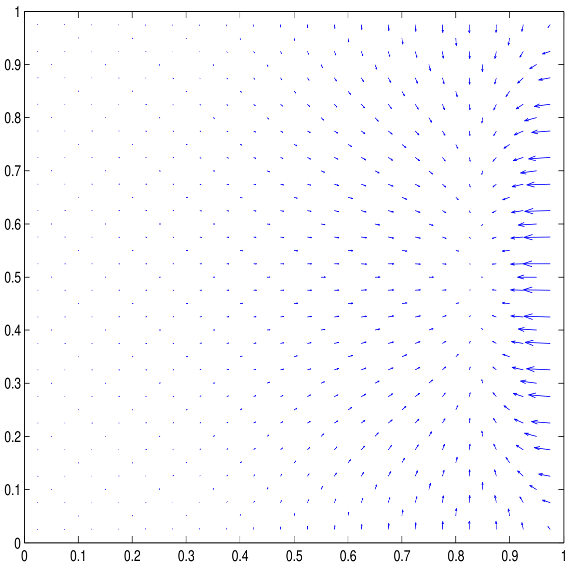

FIG. 2.21 – Flux $p_h \in (RT^1 + \Phi)$ calculé par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

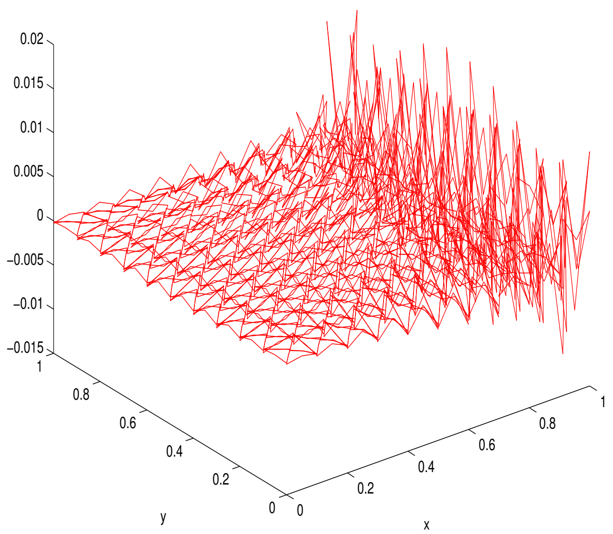

FIG. 2.22 – Différence entre la solution exacte u et la solution calculée $u_h \in P^2_{nc,0}$.

2.7.5 Test 4

Il s'agit d'un cas test proposé par Douglas et Co., [26]. On considère la solution exacte du problème (2.171) :

$$u(x,y) = \exp\bigl(-100\,((x-0.25)^2 + (y-1/3)^2)\bigr)$$

de terme source f :

$$f(x,y) = 100\,\exp(-100((x-0.25)^2 + (y-1/3)^2))\,(4 - 400(x-0.25)^2 - 400\,(y-1/3)^2)\,.$$

Cette solution exacte est une gaussienne centrée au point $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. Les conditions sur la frontière sont données par la solution exacte elle-même. La solution exacte présente un fort gradient autour du pic de la gaussienne. Pour les trois schémas boîte présentés dans ce Chapitre, on calcule la solution u_h et le flux discret p_h. Les taux de convergence de l'erreur entre la solution exacte u et la solution u_h calculée par chacun des trois schémas boîte, ainsi que l'erreur entre le flux exact $p = \nabla u$ et le flux discret p_h sont regroupés dans les Tableaux 2.10 pour le schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$, 2.11 pour le schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (BDM^1 + \Phi)$ et 2.12 pour le schéma boîte $P^1_{nc,0} \times RT^0$. Les taux de convergence de l'erreur entre solution exacte et solution discrète donnée par les schémas boîte sont proches des taux annoncés pour les estimations d'erreur *a priori*.
Nous représentons la solution discrète $u_h \in P^2_{nc,0}$ du schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$ sur les Figures 2.23 et 2.24. Le flux discret $p_h \in (RT^1 + \Phi)$ du schéma boîte $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$ est représenté par la Figure 2.25. Nous constatons sur la Figure 2.26 que l'amplitude maximale entre la solution exacte et la solution calculée par le schéma boîte est située au niveau du pic de la gaussienne. En effet, le maillage condidéré n'est pas assez fin pour prendre en compte la forte variation de gradient au niveau du pic de la gaussienne. Ceci explique également que les taux de convergence obtenus soient un peu plus faibles que ceux attendus.

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0176	0.6984	0.5584	0.2
400	0.0019	0.1888	0.1310	0.1
taux conv.	3.2115	1.8872	2.0917	
nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
50	0.0372	1.2986	1.1244	0.2828
200	0.0051	0.3526	0.2580	0.1414
taux conv.	2.8667	1.8809	2.1237	

TAB. 2.10 – Test 4 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$

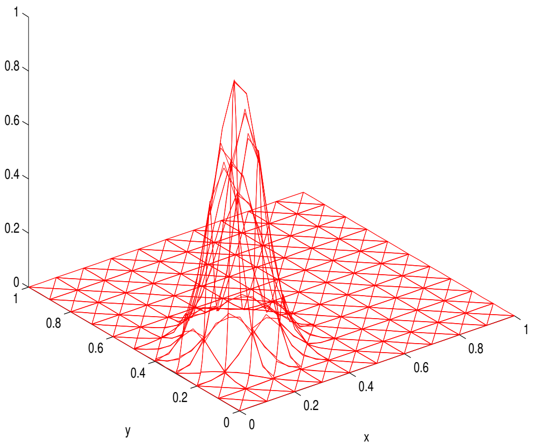

FIG. 2.23 – Test 4 : Solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

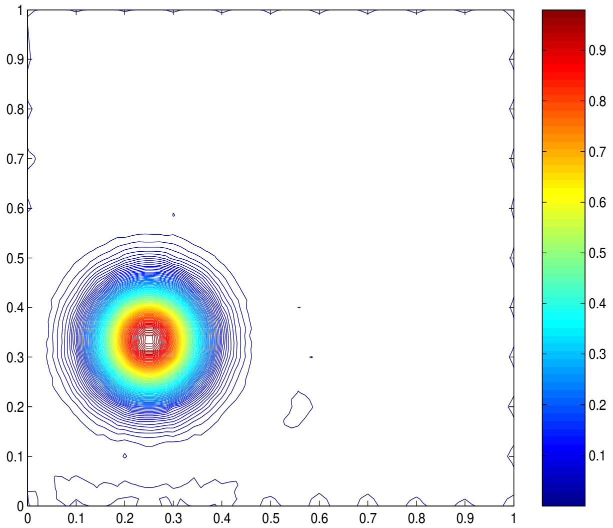

FIG. 2.24 – Test 4 : Isolignes de la solution $u_h \in P^2_{nc,0}$ calculée par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

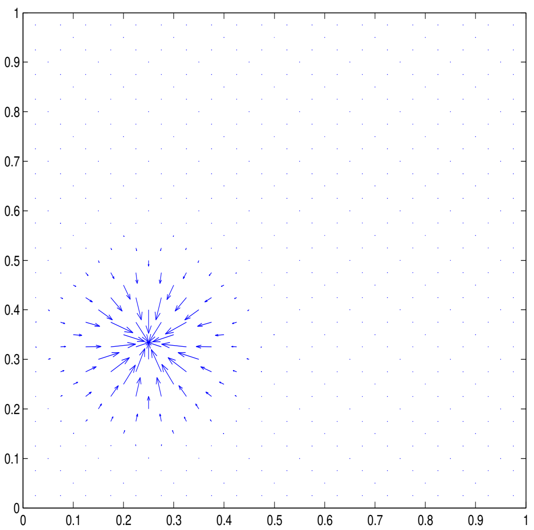

FIG. 2.25 – Test 4 : Flux $p_h \in (RT^1 + \Phi)$ calculé par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

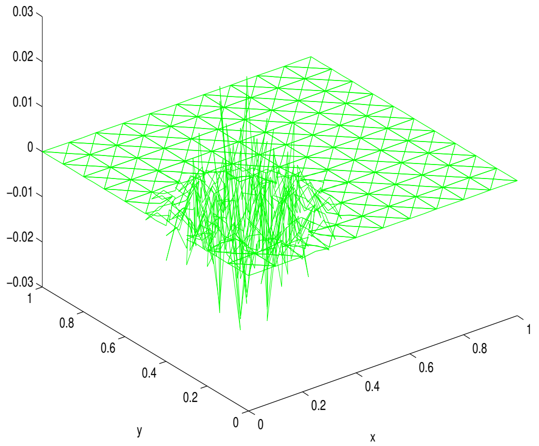

FIG. 2.26 – Test 4 : Différence entre la solution exacte u et la solution calculée $u_h \in P^2_{nc,0}$ par le schéma $P^2_{nc,0} \times (RT^1 + \Phi)$.

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0309	0.8665	0.8665	0.2
400	0.0079	0.2672	0.2672	0.1
taux conv.	1.9677	1.6973		
nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
50	0.0628	1.5714	1.5714	0.2828
200	0.0148	0.4720	0.4720	0.1414
taux conv.	2.0852	1.7352	1.7352	

TAB. 2.11 – Test 4 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^2_{nc,0} \times (BDM^1 + \Phi)$

nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
100	0.0487	1.2234	1.1076	0.2
400	0.0140	0.7197	0.6038	0.1
taux conv.	1.7985	0.7654	0.8753	
nb mailles	$\lvert u-u_h\rvert_{0,\Omega}$	$\lvert u-u_h\rvert_{1,h}$	$\lvert p-p_h\rvert_{0,\Omega}$	pas d'espace h
50	0.0768	1.7252	1.6654	0.2828
200	0.0268	0.9609	0.8343	0.1414
800	0.0074	0.5182	0.4389	0.0707
taux conv.	1.8566	0.8909	0.9267	

TAB. 2.12 – Test 4 : Résultats du schéma boîte $(u_h, p_h) \in P^1_{nc,0} \times RT^0$

Chapitre 3

Quelques schémas boîte sur maillages en rectangles

3.1 Introduction

Une question naturelle est de se demander si les résultats obtenus au chapitre précédent dans le cas de maillages en triangles, se généralisent dans le cas de maillages en rectangles. Nous allons prouver dans ce chapitre que l'on peut effectivement construire des schémas boîte sur un domaine maillé par des rectangles et que ces schémas boîte conservent les propriétés de leurs homologues sur maillages en triangles.
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un rectangle de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ donnée. Le problème de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ , \quad x \in \Omega \\ u = g \ , \quad x \in \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ qui satisfait $\|u\|_{2,\Omega} \leq C|f|_{0,\Omega}$. Nous considérons la formulation mixte de type Petrov-Galerkin du problème de Poisson, introduite au Chapitre 2 : trouver $(u,p) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} (\operatorname{div} p + f, v)_{0,\Omega} = 0 \ , \ \forall v \in L^2(\Omega) \\ (p - \nabla u, q)_{0,\Omega} = 0 \ , \ \forall q \in (L^2(\Omega))^2. \end{cases} \tag{3.2}$$

C'est un problème bien posé, équivalent au problème (3.1). Nous introduisons trois schémas boîte pour le problème de Poisson sur des maillages du domaine Ω en rectangles. Nous conservons le design des schémas boîte tels qu'ils sont introduits dans le cas de maillages triangulaires. D'une façon générale, un *schéma boîte* est une formulation mixte de type Petrov-Galerkin qui consiste à trouver $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ solution de

$$\begin{cases} (\operatorname{div} p_h + f, v_h)_{0,\Omega} = 0 \ , \ \forall v_h \in M_{2,h} \\ (p_h - \nabla u_h, q_h)_{0,\Omega} = 0 \ , \ \forall q_h \in X_{2,h}, \end{cases} \tag{3.3}$$

où les espaces discrets $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ sont des espaces d'éléments finis approchant les espaces $H_0^1(\Omega)$ et $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Deux des schémas, que nous proposons sont de type non-conformes, puisque les espaces discrets $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ satisfont $X_{1,h} \not\subseteq H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ ou $M_{1,h} \not\subseteq H_0^1(\Omega)$. Les espaces de test $M_{2,h}$ et $X_{2,h}$ sont des espaces de polynômes totalement discontinus par rectangle. Pour que le problème discret (3.3) soit bien posé, les espaces discrets doivent vérifier la condition nécessaire d'égalité des dimensions :

$$\dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} = \dim M_{2,h} + \dim X_{2,h}. \tag{3.4}$$

Nous introduisons les espaces $H_0^1(\Omega) + M_{1,h}$ et $H_{\mathrm{div}}(\Omega) + X_{1,h}$, munis respectivement des normes dépendantes du maillage :

$$|u|_{1,h} = \Big(\sum_K |\nabla\, u|^2_{0,K}\Big)^{1/2} \;\; ; \;\; \|u\|_{1,h} = (|u|^2_{0,\Omega} + |u|^2_{1,h})^{1/2} \quad , \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega) + M_{1,h} \tag{3.5}$$

$$|p|_{\mathrm{div},h} = \Big(\sum_K |\,\mathrm{div}\ p|^2_{0,K}\Big)^{1/2} \;\; ; \;\; \|p\|_{\mathrm{div},h} = (|p|^2_{0,\Omega} + |p|^2_{\mathrm{div},h})^{1/2} \quad , \quad \forall\, p \in H_{\mathrm{div}}(\Omega) + X_{1,h} \tag{3.6}$$

Dans le Paragraphe 3.2, nous donnons les notations utilisées par la suite et les propriétés liées au maillage. Nous définissons les espaces d'éléments finis pour les inconnues au Paragraphe 3.3. Enfin, dans les Paragraphes 3.4, 3.5 et 3.6, nous décrivons quelques schémas boîte associés à la formulation mixte de type Petrov-Galerkin (3.2).

3.2 Notations

3.2.1 Le changement de base

Le carré de référence $\hat{K}$ est le carré unité $[0,1]\times[0,1]$ de sommets $\hat{S}_1 = (0,0)$, $\hat{S}_2 = (1,0)$, $\hat{S}_3 = (1,1)$ et $\hat{S}_4 = (0,1)$. On se restreint ici au cas de maillages en rectangles du domaine Ω. Soit K un rectangle de sommets $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$ (Figure 3.1).
Soit φ_K l'application définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_K :\ & \hat{K} \longrightarrow K \\ & (\hat{x},\, \hat{y}) \longmapsto (x,y) =\ \varphi_K(\hat{x},\, \hat{y}) = b + B \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.7}$$

où b et B sont respectivement le vecteur colonne 2×1 et la matrice 2×2 définis par

$$b = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

φ_K est une application linéaire bijective affine. Comme dans le cas de maillages triangulaires, la matrice jacobienne de φ_K est constante sur chaque maille K. C'est une propriété particulière des maillages en parallèlogrammes. De plus, l'espace $Q^1(K)$ est égal à

$$Q^1(K) = \{\hat{q}\circ\varphi_K\ ; \hat{q} \in Q^1(\hat{K})\}\,.$$

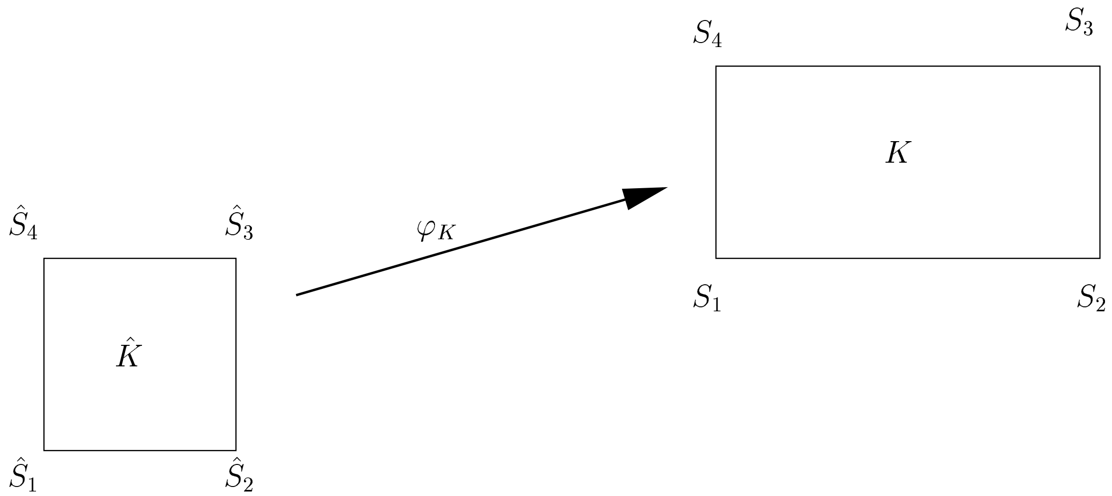

FIG. 3.1 – Application affine $\varphi_K:\ \hat{K} \longrightarrow K$

3.2.2 Notations géométriques

Dans la suite, K désigne un rectangle de sommets S_i, $1 \leq i \leq 4$, de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2). On note e_x et e_y les arêtes horizontale et verticale d'un rectangle K du maillage, d'aire $|K|$ (Figure 3.3). Soit T_i le triangle contenu dans K de sommets S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, avec la notation $S_0 = S_4$. Soient (Figure 3.2) :
- h_K : diamètre de K= diagonale de K.
- $\rho_K = 2 \min\limits_{1 \leq i \leq 4} \rho_i$ où ρ_i est le diamètre du cercle inscrit dans T_i.
- $\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} > 1$.

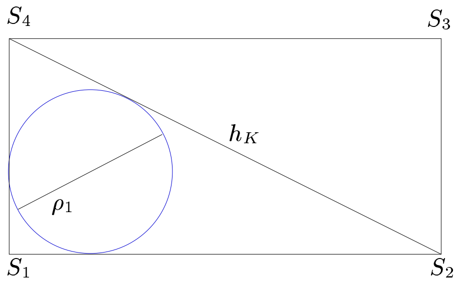

FIG. 3.2 – Géométrie du rectangle

Dans la suite, $\mathcal{T}_h$ désigne un maillage en rectangles du domaine Ω, de paramètre de discrétisation

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

Le maillage $\mathcal{T}_h$ est tel que les rectangles $K \in \mathcal{T}_h$ ont leurs côtés parallèles aux côtés du domaine Ω. La triangulation $\mathcal{T}_h$ est définie de sorte que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ et nous supposons

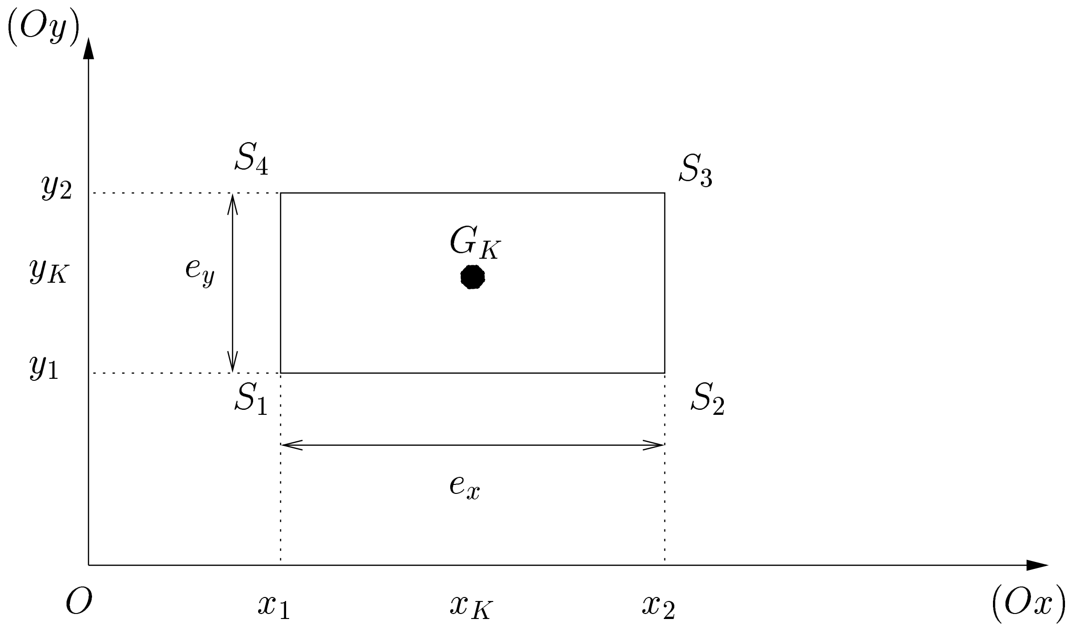

FIG. 3.3 – Notations pour un rectangle K du domaine Ω

que le maillage est uniformément régulier, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $\sigma > 0$ indépendantes de h, telles que

$$\tau\, h \leq h_K \leq \sigma\, \rho_K \quad \text{et} \quad h \to 0.$$

Un exemple de maillage est donné par la Figure 3.4.

Soient $\mathcal{S}$ l'ensemble des noeuds du maillage, constitué des noeuds frontières $\mathcal{S}_b$ et des noeuds internes $\mathcal{S}_i$, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes du maillage, constitué des arêtes frontières $\mathcal{A}_b$ et des arêtes internes $\mathcal{A}_i$. On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
NP &= \text{nombre de noeuds du maillage,}\\
NP_i &= \text{nombre de noeuds internes du maillage,}\\
NE &= \text{nombre de mailles de la discrétisation} \mathcal{T}_h\,,\\
NA &= \text{nombre total d'arêtes,}\\
NA_b &= \text{nombre d'arêtes frontières du maillage,}\\
NA_i &= \text{nombre d'arêtes internes du maillage.}
\end{aligned}$$

Les relations d'Euler sont :

$$NE - NA + NP = 1 \quad \text{et} \quad 4NE = NA + NA_i\,. \tag{3.8}$$

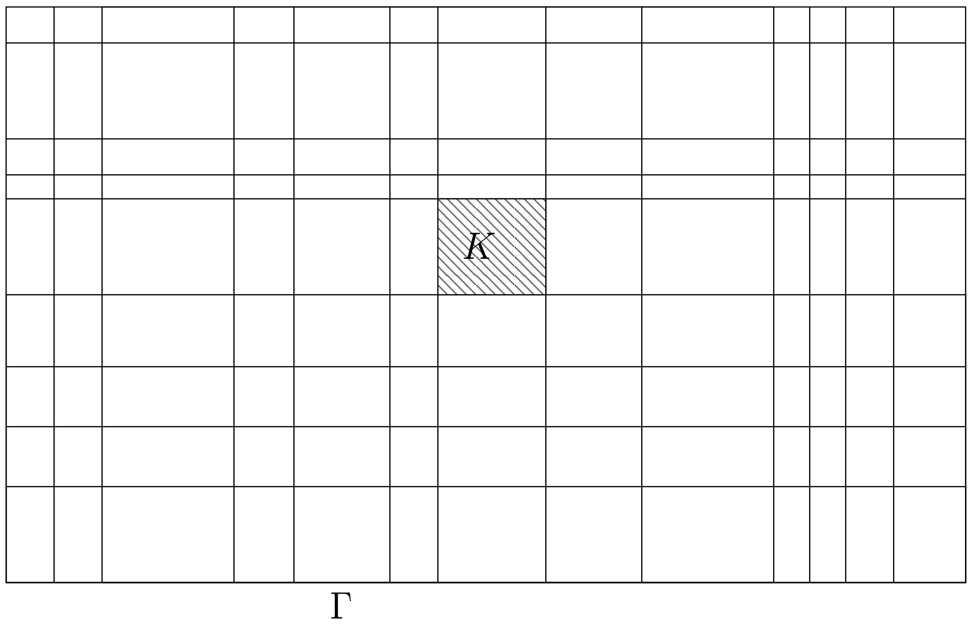

FIG. 3.4 – Exemple de maillage du domaine Ω

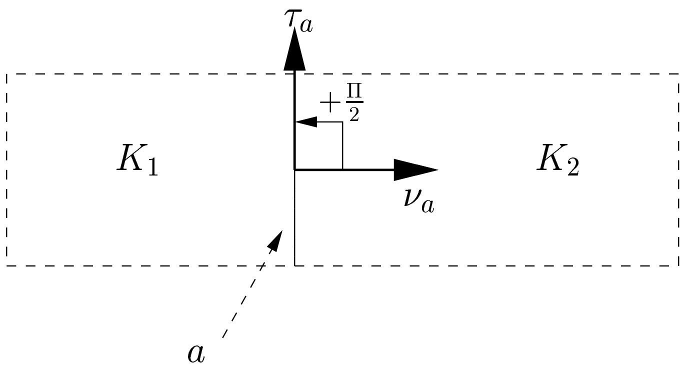

FIG. 3.5 – Base de vecteurs (ν_a, τ_a)

Soit K un rectangle du maillage $\mathcal{T}_h$. Le vecteur normal unitaire à une arête a de K orienté vers l'extérieur est noté ν_a, le vecteur tangent est noté τ_a. Sur la Figure 3.5, ν_a représente le vecteur normal à l'arête a dans le rectangle K_1. Soient K_1 et K_2 deux rectangles d'arête commune a. Le saut d'une fonction v à travers l'arête a est $[v] = v_{K_2,a} - v_{K_1,a}$.
Le gradient d'une fonction $f \in H^1(\Omega)$ est $\nabla f = (\partial_x f\,,\, \partial_y f\,)$, son rotationnel est $\operatorname{rot} f = (\partial_y f\,, -\partial_x f\,)$. Le rotationnel scalaire d'une fonction vectorielle (f_1, f_2) est noté de façon identique $\operatorname{rot}(f_1, f_2) = \partial_y f_1 - \partial_x f_2$.

3.2.3 Quelques lemmes

Soit K un rectangle du maillage. $P^0(K)$ désigne les polynômes constants sur K. $Q^1(K)$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}^2$ de degré 1 en chaque variable x et y, c'est-à-dire de la forme $q = a + b\,x + c\,y + d\,x\,y$ où a, b, c et d sont des constantes réelles.

Pour chaque arête $a \in \mathcal{A}$, soit $\Pi_a : L^2(a) \to P^0(a)$, l'opérateur de projection sur les polynômes constants de a. Si a est une arête du rectangle K, on a la généralisation sur des rectangles du Lemme 3 de Crouzeix-Raviart [22] sur des triangles (Lemme 2.2.2 Chapitre 3) :

Lemme 3.2.1 (Interpolation d'arête, [44])
Il existe une constante $C > 0$ indépendante de K et de a, telle que pour toutes fonctions $\phi \in H^1(K)$ et $v \in H^1(K)$, on ait

$$|\int_e \phi(v - \Pi_e v)\, d\sigma| \leq C\,\sigma_K\, h_K |\phi|_{1,K} |v|_{1,K}.$$

Soit Π^k la projection orthogonale de $L^2(K)$ sur les polynômes de $Q^k(K)$ d'ordre k en chaque variable définie pour $v \in L^2(K)$ par

$$\int_K (\Pi^k v - v)\, q\, dx = 0, \quad \forall q \in Q^k(K).$$

Lemme 3.2.2 (Interpolation [30],[40])
Nous avons les estimation suivantes : si $v \in H^{k+1}(K)$,

$$|v - \Pi^k v|_{m,K} \leq C\,\sigma_K^{4m-1}\, h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,K}\,, \quad 1 \leq m \leq k+1 \tag{3.9}$$

$$|v - \Pi^k v|_{0,K} \leq C\,\sigma_K\, h_K^{k+1} |v|_{k+1,K}\,, \quad m = 0\,. \tag{3.10}$$

3.3 Espaces fonctionnels discrets

Avant d'aborder les différents schémas boîte, nous allons décrire les espaces d'éléments finis utilisés pour approcher la vitesse u et le flux p du problème mixte de type Petrov-Galerkin (3.2).

3.3.1 L'espace scalaire Q^1 conforme

Nous notons Q_c^1 l'espace d'éléments finis Q^1-Lagrange des fonctions polynômiales de degré 1 en chaque variable. C'est un espace conforme dans $H_0^1(\Omega)$.

$$Q_c^1 = \Big\{ u_h \in \mathcal{C}^0(\Omega)\ ;\ u_h \in Q^1(K),\ \ \forall K \in \mathcal{T}_h \Big\},$$

où $Q^1(K)$ est l'espace des polynômes de degré 1 en chaque variable x et y. Sa restriction aux fonctions s'annulant sur la frontière Γ de Ω est notée $Q^1_{c,0}$ telle que

$$Q^1_{c,0} = \Big\{ u_h \in Q^1_c \ ; \ u_{h|a} = 0 \ , \forall a \in \mathcal{A}_b \Big\}. \tag{3.11}$$

Lemme 3.3.1 (Fonctions de base de Q^1_c)
(i) La base de degrés de liberté de l'espace Q^1_c est donnée par $\{(p_i)_{1\leq i\leq NP}\}$:

$$p_i(v_h) = v_h(S_i), \quad \forall v_h \in Q^1_c\,, \ \forall S_i \in \mathcal{S}\,. \tag{3.12}$$

(ii) La base locale de l'espace Q^1_c est $\{(\lambda_i)_{1\leq i\leq 4}\}$: où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq 4}$ sont définis dans le rectangle K par $\lambda_1(x,y) = \frac{1}{|K|}(x_2-x)(y_2-y)$, $\lambda_2(x,y) = \frac{1}{|K|}(x-x_1)(y_2-y)$, $\lambda_3(x,y) = \frac{1}{|K|}(x-x_1)(y-y_1)$ et $\lambda_4(x,y) = \frac{1}{|K|}(x_2-x)(y-y_1)$.
(iii) $\dim Q^1_c = NP$ *et* $\dim Q^1_{c,0} = NP_i$.

3.3.2 L'espace scalaire Q^1 non-conforme

L'espace Q^1_{nc} est l'espace d'éléments finis des polynômes de $Q^1(K)$ continus aux milieux des arêtes du maillage. Contrairement à l'espace Q^1_c, l'espace Q^1_{nc} est un espace non-conforme dans $H^1(\Omega)$. On note :

$$Q^1_{nc} = \Big\{ u_h \in L^2(\Omega) \ ; \ u_h \in Q^1(K), \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h \ ; \int_a [u_h]\, d\sigma = 0 \ , \forall a \in \mathcal{A}_i \Big\}\,.$$

L'espace $Q^1_{nc,0}$ est la restriction de l'espace Q^1_{nc} aux fonctions nulles au milieu des arêtes frontières :

$$Q^1_{nc,0} = \Big\{ u_h \in Q^1_{nc} \ ; \int_a u_h\, d\sigma = 0 \ , \forall a \in \mathcal{A}_b \Big\}.$$

Il semble naturel de choisir les degrés de liberté globaux $\{p_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ de l'espace d'éléments finis Q^1_{nc} comme les valeurs aux points milieux des arêtes. C'est-à-dire

$$p_a(v_h) = v_h(M_a), \ \forall v_h \in Q^1_{nc},$$

où M_a est le milieu de l'arête a. Si M_{a_1}, M_{a_2}, M_{a_3} et M_{a_4} désignent (de façon ordonnée) les points milieux des arêtes de K et $G_K(x_K, y_K)$ le centre de K (Figure 3.6), toute fonction $u \in Q^1(K)$ vérifie l'égalité :

$$u(M_{a_1}) + u(M_{a_2}) = u(M_{a_3}) + u(M_{a_4}) = 2\ u(G_K). \tag{3.13}$$

Donc, les valeurs au milieu des arêtes ne forment pas un ensemble unisolvant ([6], [30]). En effet, il existe une fonction non nulle s'annulant au milieu de toutes les arêtes du maillage : il s'agit d'une bulle.

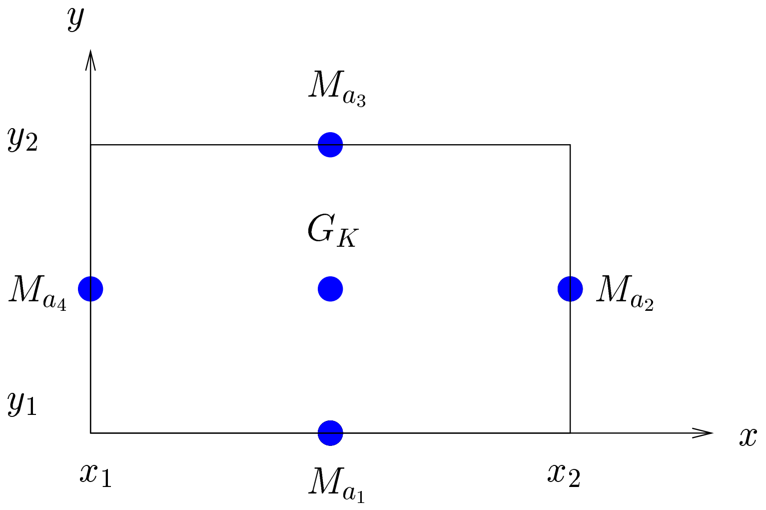

FIG. 3.6 – Rectangle K

Lemme 3.3.2 (Bulle non-conforme de $Q^1(K)$)
Soit η la fonction définie sur $Q^1(K)$ par :

$$\begin{array}{rcl} \eta \ : \ Q^1(K) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ p & \longmapsto & \{p(M_a)\}_{a\in\partial K} \end{array}$$

où M_a désigne le milieu d'une arête a de K. Le noyau de η est de dimension 1, engendré par "la bulle non-conforme" b_K.

$$\operatorname{Ker}\eta = Vect < b_K > , \quad b_K(x,y) = \frac{4}{|K|}(x-x_K)(y-y_K),$$

où $G_K(x_K, y_K)$ est le centre du rectangle K.

Preuve :
Sur chaque rectangle K du maillage, il existe une fonction de $Q^1(K)$ qui s'annule au milieu des arêtes du quadrangle, elle est unique à une constante multiplicative près. On note b_K cette fonction (unitaire) définie par : $b_K = \frac{4}{|K|}(x-x_K)(y-y_K)$, où (x_K, y_K) est le centre du rectangle K. Cette fonction b_K est appelée *bulle non-conforme* associée au rectangle K. ■

La Figure 3.7 représente la bulle sur le carré de référence $[0,1]^2$. Citons quelques propriétés de la fonction "bulle non-conforme" b_K :

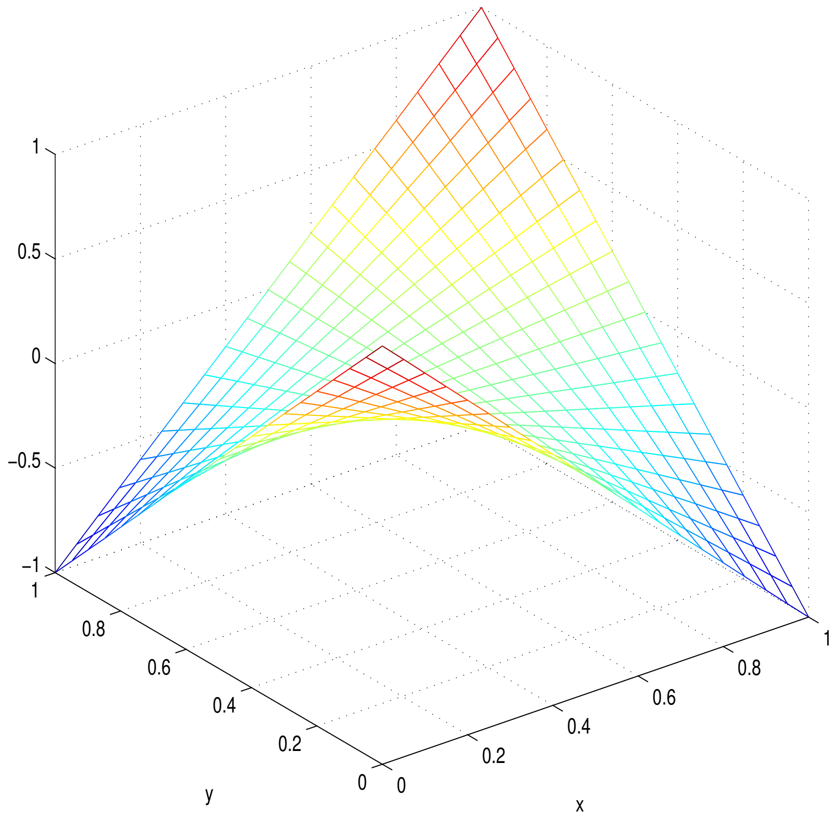

FIG. 3.7 – Bulle non-conforme de $Q^1(\hat{K})$

Lemme 3.3.3 (Propriétés de la bulle non-conforme b_K)
Pour tout rectangle $K \in \mathcal{T}_h$ et toute fonction $v \in Q^1(K)$, la bulle non-conforme b_K satisfait :

$$(i) \int_{\partial K} b_K \, d\sigma = 0\,,$$

$$(ii) \int_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nabla v \, dx = 0\,,$$

$$(iii) \int_{\partial K} (\operatorname{rot} b_K \cdot \nu) \, v \, d\sigma = 0.$$

Preuve :
(i) La bulle non-conforme est affine le long des arêtes du maillage (en rectangles) et nulle aux milieux des arêtes de K, donc

$$\int_{\partial K} b_K \, d\sigma = \sum_{e \in \partial K} \int_e b_K \, d\sigma = \sum_{e \in \partial K} |e| \, b_K(M_e) = 0\,. \tag{3.14}$$

(ii) Soit $v \in Q^1(K)$. En utilisant une intégration par partie, on a

$$\int_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nabla v \, dx = \underbrace{\int_{\partial K} b_K (\nabla v \cdot \tau) \, d\sigma}_{(I)} - \underbrace{\int_K b_K \operatorname{rot}(\nabla v) \, dx}_{(II)}$$

$$(I) = \sum_{e \in \partial K} \int_e b_K \frac{\partial v}{\partial \tau_e} d\sigma$$

Or, $b_K \frac{\partial v}{\partial \tau_e}$ est affine le long d'une arête e et s'annule en son milieu. Elle est donc de moyenne nulle le long de toute arête e du maillage. Donc $(I) = 0$. D'autre part, $\mathrm{rot}(\nabla v) = 0$, pour toute fonction v, donc $(II) = 0$.
(iii) $v \in Q^1(K)$. Par la formule de Green, on a

$$\int_{\partial K} \mathrm{rot}\, b_K \cdot \nu \; v \, d\sigma = \underbrace{\int_K \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, b_K)\, v \, dx}_{(I)} + \underbrace{\int_K \mathrm{rot}\, b_K \cdot \nabla v \, dx}_{(II)} . \tag{3.15}$$

L'intégrale (I) est nulle (puisque $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, b_K) = 0$) et (II) est nulle par *(ii)*. ■

Définition 3.3.1 (Espace des bulles non-conformes)
Soit Ψ l'espace vectoriel "bulle" engendré par les fonctions bulles non-conformes locales :

$$\Psi = \{\psi \in L^2(\Omega) \setminus \psi_{|K} = \alpha_K b_K, \; \alpha_K \in \mathbb{R}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

alors $\dim \Psi = NE$ *et* $\Psi \subseteq Q^1_{nc,0}$.

En effet, par définition de la bulle non-conforme, $b_K \in Q^1(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$, et le long de chaque arête $a \in \partial K$,

$$\int_a b_K \, d\sigma = b_K(M_a) = 0.$$

Donc, $\psi = \sum_K \alpha_K b_K \in Q^1_{nc,0}$. C'est-à-dire, $\Psi \subseteq Q^1_{nc,0}$.

Définition 3.3.2 (Définition de $\mathcal{B}$)
Soit $\mathcal{B}$ l'élément de l'espace $Q^1_{nc,0}$ défini au signe près par $\mathcal{B} = \sum_K \mathrm{sgn}(K)\, b_K$, *où* $\mathrm{sgn}(K)$ *est le signe du rectangle K égal à 1 ou -1. Il est donné par exemple, par le Tableau 3.8 par rapport à un rectangle de référence.*

$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	K	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

FIG. 3.8 – Valeurs de $\mathrm{sgn}(K)$.

Proposition 3.3.1 (Caractérisation des espaces Q^1 non-conformes)
Les espaces Q^1_c, Q^1_{nc} et Ψ vérifient :

$$\begin{array}{lll} (i) & Q^1_c \cap \Psi = Vect\big(\mathcal{B}\big)\,, & \dim(Q^1_c \cap \Psi) = 1\,, \\ (ii) & Q^1_{nc} = Q^1_c + \Psi\,, & \dim Q^1_{nc} = NA\,, \\ (iii) & Q^1_{nc,0} = Q^1_{c,0} \oplus \Psi\,, & \dim Q^1_{nc,0} = NA_i + 1\,. \end{array}$$

Preuve :
(i) Soit $\psi = \sum_K \alpha_K b_K \in Q^1_c \cap \Psi$ un élément de l'intersection de Q^1_c et de Ψ. La continuité de ψ à travers les mailles implique la continuité de ψ le long des arêtes internes. Si $a = \partial K_1 \cap \partial K_2$ désigne une arête interne du maillage, alors la bulle non-conforme par rectangle vérifie $b_{K_1|a} = -b_{K_2|a}$. Donc la continuité de ψ entraîne que $\alpha_K = \mathrm{sgn}(K)\,\alpha,\ \forall K,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\psi = \alpha\,\mathcal{B},\ \alpha \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire $Q^1_c \cap \Psi \subseteq \mathrm{Vect}\big(\mathcal{B}\big)$. La réciproque est évidente.
(ii) Notons M l'espace $M = Q^1_c + \Psi$. L'inclusion $M \subseteq Q^1_{nc}$ est évidente. Pour prouver l'identité $M = Q^1_{nc}$, nous allons prouver l'égalité des dimensions de M et Q^1_{nc}.
Soit i l'application linéaire

$$\begin{array}{rl} i : Q^1_{nc} & \longrightarrow \mathbb{R}^{NA} \\ u & \longmapsto (u(M_a))_{a\in\mathcal{A}} \end{array} \tag{3.16}$$

En utilisant les définitions de l'espace Ψ et de la bulle non-conforme b_K, le noyau de l'application i est tel que

$$\mathrm{Ker}\, i \;=\; \Big\{ u \in Q^1_{nc},\ u(M_a) = 0,\ \forall a \in \mathcal{A} \Big\} \subseteq \Psi$$

et par la relation (3.13), l'image de l'application i est

$$\mathrm{Im}\, i \;=\; \Big\{ (u(M_a)) \in \mathbb{R}^{NA} / u \in Q^1_{nc};\ u(M_{a_1,K}) + u(M_{a_3,K}) = u(M_{a_2,K}) + u(M_{a_4,K}),\ \forall K \in \mathcal{T}_h \Big\}$$

(où $M_{a_i,K}$, $i = 1,..,4$ sont les milieux des arêtes du rectangle K), ce qui implique que $\dim Q^1_{nc} = \dim(\mathrm{Ker}\, i) + \dim(\mathrm{Im}\, i) \le NA$. De plus, la dimension de M est, $\dim M = \dim Q^1_c + \dim \Psi - \dim(Q^1_c \cap \Psi) = NP + NE - 1$. La première relation d'Euler implique $\dim M = NA$. Or $M \subseteq Q^1_{nc}$, donc $\dim M \le \dim Q^1_{nc}$. On en déduit que $\dim Q^1_{nc} = NA$. Ce qui conclut la preuve du *(ii)*.
(iii) De plus, $Q^1_{c,0} \cap \Psi = \{0\}$; en effet, si $\psi = \alpha \sum_K b_K \in Q^1_{c,0} \cap \Psi$, alors $\alpha = 0$ (puisque ψ est nul sur la frontière de Ω). Donc les deux espaces $Q^1_{c,0}$ et Ψ sont en somme directe. ■

Nous en déduisons la base globale de l'espace $Q^1_{nc,0}$:

Lemme 3.3.4 (Base globale de $Q^1_{nc,0}$)
Les degrés de liberté de l'espace $Q^1_{nc,0}$ sont situés aux sommets et aux centres des rectangles du maillage (Figure 3.9) et la base globale de $Q^1_{nc,0}$ est donnée par les fonctions $\{\lambda_i\}_{1\le i\le NP_i} \cup \{b_K\}_{K\in\mathcal{T}_h}$.

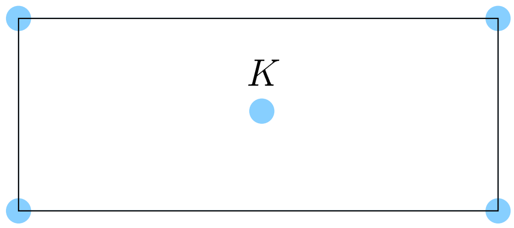

FIG. 3.9 – Degrés de liberté de l'espace Q^1_{nc}

Lemme 3.3.5 (Propriétés de l'espace $Q^1_{nc,0}$)
Pour toute fonction $v \in Q^1_{nc,0}$, on a les relations suivantes

$$(i)\ \forall a \in \mathcal{A}_i, \quad \int_a [v]\, p \, d\sigma = 0\,, \quad \forall p \in P^0(a)\,,$$
$$(ii)\ \forall a \in \mathcal{A}_b, \quad \int_a v \, p \, d\sigma = 0\,, \quad \forall p \in P^0(a)\,.$$

Preuve :
Soit $v \in Q^1_{nc,0}$. Nous allons montrer les relations *(i)* et *(ii)* pour cet élément v.
(i) Soit $a \in \mathcal{A}_i$, $a = \partial K_1 \cap \partial K_2$, soit $p \in P^0(a)$, par la Proposition 3.3.1, $v = \tilde{v} + \sum_K \alpha_K b_K$ où $\tilde{v} \in Q^1_{c,0}$ et $\alpha_K \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\int_a p\,[v]\, d\sigma = \int_a p\,[\tilde{v}]\, d\sigma + \int_a p\,(\alpha_2 b_{K_2} - \alpha_1 b_{K_1})\, d\sigma\,. \tag{3.17}$$

Or, $\tilde{v}$ est continu le long de a ; c'est-à-dire $[\tilde{v}]_{|a} = 0$, donc $\int_a p\,[\tilde{v}]\, d\sigma$ est nulle. D'autre part, la définition de la bulle non-conforme implique $\int_a p\, b_K\, d\sigma = 0$ pour toute arête a. Ce qui prouve *(i)*.
(ii) Soit a une arête frontière , $a = \partial K \cap \Gamma$ et $p \in P^0$. En utilisant les arguments précédents, on obtient

$$\int_a p\, v\, d\sigma = \int_a p\, \tilde{v}\, d\sigma + \underbrace{\int_a \alpha_K\, p\, b_K\, d\sigma}_{=0}\,. \tag{3.18}$$

$\tilde{v}$ est nulle au bord, donc $\int_a p\, \tilde{v}\, d\sigma = 0$. On obtient *(ii)*. ■

Nous allons rappeler brièvement les espaces d'éléments finis utilisés pour approcher le flux $p = \nabla u$.

3.3.3 Espaces vectoriels pour ∇u

L'espace de Raviart-Thomas sur rectangles

L'espace RT^0 est l'espace d'éléments finis introduit par Raviart et Thomas, [39], de plus bas degré sur maillage quadrangulaire. Dans le cas d'un maillage en rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes du domaine Ω, on définit l'espace des vecteurs de polynômes

$$RT^0(K) = \left(P^0(K)\right)^2 + P^0 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + P^0 \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Dans chaque rectangle K, $q_h \in RT^0(K)$ si et seulement si $q_h(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha_K + \gamma_K x \\ \beta_K + \delta_K y \end{pmatrix}$, avec α_K, β_K, γ_K et $\delta_K \in \mathbb{R}$. Remarquons que si $G_K(x_K, y_K)$ est le centre du rectangle K, on a encore les formulations équivalentes

$$\begin{aligned} RT^0(K) &= (P^0(K))^2 + P^0(K) \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + P^0(K) \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \\ RT^0(K) &= (P^0(K))^2 + P^0(K)\,\overrightarrow{G_K X} + P^0(K)\,\mathrm{rot}\, b_K \end{aligned} \tag{3.19}$$

L'espace de Raviart-Thomas est défini par

$$RT^0 = \left\{ q_h \in H_{\mathrm{div}}(\Omega) \text{ tels que } q_h \in RT^0(K),\ \ \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \tag{3.20}$$

Un vecteur p_h de RT^0 est un élément de l'espace $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, donc, sa composante normale est continue le long de chaque arête interne a du maillage :

$$(p_h \cdot \nu_a + p_h \cdot \nu'_a) = 0 \quad \text{ sur l'arête } a\,.$$

De plus, dans le cas de maillages en rectangles, la composante normale $p_h \cdot \nu_a$ est constante par arête : $p \cdot \nu_a \in P^0(a)$.

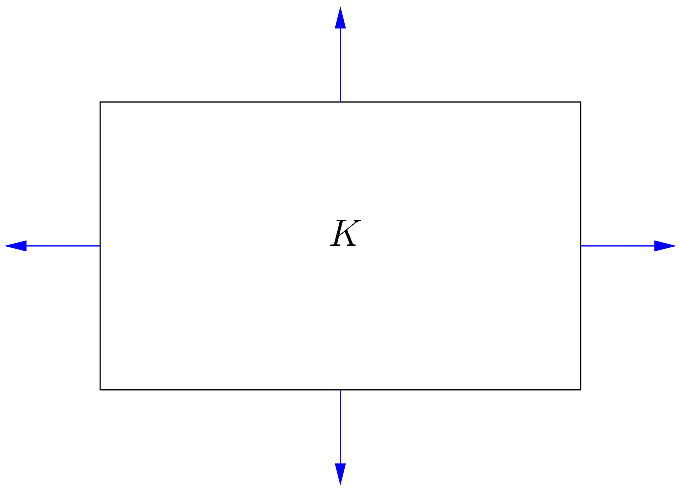

FIG. 3.10 – Degrés de liberté de l'espace RT^0

Lemme 3.3.6 (Fonctions de base de RT^0)
(i) Les degrés de liberté globaux de RT^0 sont les formes linéaires $\{L_a\}_{a\in\mathcal{A}}$, définies par :

$$L_a(q_h) = \int_a q_h \cdot \nu_a \, d\sigma\,.$$

(ii) La base canonique de RT^0 est donnée par $(P_a)_a$:

$$P_a(x,y) = P_{K_1,a}\mathbb{1}_{K_1}(x,y) - P_{K_2,a}\mathbb{1}_{K_2}(x,y)$$

où $a = \partial K_1 \cap \partial K_2$ et $\mathbb{1}_{K_i}$ est l'indicatrice sur le rectangle K_i, $i = 1,2$.
Les fonctions $P_{K,a}$ sont définies par $P_{K,a} = \frac{1}{|K|}\begin{pmatrix} x - x_S \\ 0 \end{pmatrix}$ si a est une arête verticale et x_S désigne l'abscisse de l'arête opposée à a dans le rectangle K et $P_{K,a} = \frac{1}{|K|}\begin{pmatrix} 0 \\ y - y_S \end{pmatrix}$ si a est une arête horizontale et y_S désigne l'ordonnée de l'arête opposée à a dans le rectangle K.
(iii) La dimension de l'espace RT^0 est égale au nombre d'arêtes du maillage : $\dim RT^0 = NA$.

L'espace Φ des rotationnels de bulle

Lemme 3.3.7 *Soit l'espace vectoriel engendré par les rotationnels de la bulle non-conforme*

$$\Phi = \mathrm{rot}\,\Psi = \{\phi = \sum_K \beta_K \,\mathrm{rot}\, b_K, \quad \beta_K \in \mathbb{R}\}$$

alors, $\Phi \cap RT^0 = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{rot}(\mathcal{B})\big)$.

Preuve :
Sur tout rectangle K du maillage, $\mathrm{rot}\, b_K \in RT^0(K)$. Donc tout élément $\phi = \sum_K \beta_K \,\mathrm{rot}\, b_K \in \Phi$ appartient à RT^0 si et seulement $\phi \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. C'est-à-dire si pour toute arête interne $a = \partial K_1 \cap \partial K_2 \in \mathcal{A}_i$, ϕ satisfait

$$(\phi_{|K_1} \cdot \nu_{a,K_1} + \phi_{|K_2} \cdot \nu_{a,K_2})_{|a} = 0.$$

Or, $(\mathrm{rot}\, b_{K_1|a} \cdot \nu_a) = (\mathrm{rot}\, b_{K_2|a} \cdot \nu_a)$. Donc la continuité de la composante normale équivaut à

$$\beta_{K_1} + \beta_{K_2} = 0, \quad \forall a = \partial K_1 \cap \partial K_2.$$

Ainsi, $\phi \in RT^0$ si et seulement si $\phi = \beta \sum_K \mathrm{sgn}(K)\,\mathrm{rot}\, b_K$ pour un certain réel β. ∎

3.4 Le schéma boîte 1 : $(u_h, p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$

3.4.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous cherchons à généraliser sur des maillages en rectangles, le schéma boîte de B. Courbet et J.-P. Croisille introduit sur triangles (Chapitre 2, Paragraphe 2.3.4). De façon naturelle, on cherche les inconnues u_h et p_h dans les espaces $Q^1_{nc,0}$ et RT^0 rectangles, qui correspondent dans le cas de maillages en rectangles aux espaces d'éléments finis $P^1_{nc,0}$ et RT^0 triangles, utilisés par B. Courbet et J.-P. Croisille. Les degrés de liberté de l'espace RT^0 rectangles sont situés au niveau des arêtes. Cependant, les degrés de liberté de l'espace $Q^1_{nc,0}$ ne sont pas situés au niveau des arêtes (Lemme 3.3.4), comme c'était le cas pour l'espace $P^1_{nc,0}$.

3.4.2 Définition du schéma 1

Introduisons le premier schéma boîte de type (3.3) associés au problème mixte (3.2). Nous choisissons $M_{1,h} = Q^1_{nc,0}$ comme espace d'approximation de $H^1_0(\Omega)$ et l'espace RT^0 rectangles, enrichi par le rotationnel de la bulle non-conforme - c'est-à-dire $X_{1,h} = RT^0 + \Phi$ - comme espace d'approximation de $H_{\text{div}}(\Omega)$. Les espaces d'approximation sont non-conformes puisque $Q^1_{nc,0} \not\subseteq H^1_0(\Omega)$ et $(RT^0 + \Phi) \not\subseteq H_{\text{div}}(\Omega)$. Les espaces d'inconnues sont de dimension

$$\dim Q^1_{nc,0} + \dim(RT^0 + \Phi) = (NA_i + 1) + (NA + NE - 1) = 5NE\,.$$

A ces espaces d'approximation $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$, on associe les espaces de fonctions test de polynômes totalement discontinus. Soit $M_{2,h}$, l'espace des polynômes constants totalement discontinus par rectangle, encore noté P^0

$$M_{2,h} = \Big\{ v_h \in L^2(\Omega)\ ;\ v_{h|K} \in P^0(K)\ , \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\} \tag{3.21}$$

et $X_{2,h}$, l'espace des polynômes constants de $\mathbb{R}^2$ totalement discontinus, enrichi sur chaque rectangle par le gradient et le rotationnel de la bulle non-conforme :

$$X_{2,h} = \Big\{ q_h \in (L^2(\Omega))^2\ ;\ q_{h|K} \in (P^0(K))^2 + P^0 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + P^0 \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\ , \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \Big\} \tag{3.22}$$

c'est-à-dire

$$X_{2,h} = (P^0)^2 + P^0(\nabla b_K) + P^0(\operatorname{rot} b_K)\,.$$

En particulier, $\nabla(M_{1,h}) \subseteq X_{2,h}$.

Définition 3.4.1 (Schéma boîte 1)
Considérons le schéma boîte 1 : trouver $(u_h, p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$ solution du problème discret

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} p_h + f, v_h)_{0,K} = 0\ ,\ \forall v_h \in P^0 \\ \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (p_h - \nabla u_h, q_h)_{0,K} = 0\ ,\ \forall q_h \in X_{2,h}\,. \end{array} \right. \tag{3.23}$$

Lemme 3.4.1 (Egalité des dimensions)

$$\dim\,(RT^0 + \Phi) + \dim\, Q^1_{nc,0} = \dim\, X_{2,h} + \dim\, P^0$$

Preuve :
Nous vérifions l'égalité des dimensions entre les espaces, en utilisant les relations d'Euler (3.8).

$$\begin{aligned}
\dim X_{1,h} + \dim M_{1,h} &= (NA + NE - 1) + (NA_i + 1) \\
&= \underbrace{NA_i + NA}_{4NE} + NE \\
&= 5NE = \dim X_{2,h} + \dim M_{2,h} \,.
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.4.2 (Existence et unicité de la solution)
Le schéma boîte (3.23) admet une unique solution $(u_h, p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$.

Preuve :
Par égalité des dimensions et linéarité du schéma boîte (3.23), il est suffisant de prouver que $f \equiv 0$ entraîne $u_h \equiv p_h \equiv 0$. Supposons que $f \equiv 0$, alors l'équation $(3.23)_1$ s'écrit

$$(\operatorname{div} p_h, v_h)_{0,\Omega} = 0 \,,\ \forall\, v_h \in P^0 \tag{3.24}$$

Un élément p_h de l'espace $X_{1,h}$ est à divergence constante par quadrangle : $\operatorname{div} p_{h|K} \in P^0(K)$. Donc l'équation (3.24) implique que $\operatorname{div} p_{h|K} = 0$, dans chaque rectangle K. D'autre part, $\nabla Q^1_{nc,0} \subseteq X_{2,h}$. En choisissant $q_h = \nabla u_h$ dans l'équation $(3.23)_2$, nous obtenons :

$$\sum_K |\nabla u_h|^2_{0,K} = \sum_K (p_h, \nabla u_h)_{0,K} = -\sum_K \int_K \underbrace{\operatorname{div} p_{h|K}}_{\equiv 0} u_h \, dx + \sum_K \int_{\partial K} p_h \cdot \nu \; u_h \, d\sigma \tag{3.25}$$

Puisque $p_h \in X_{1,h} = RT^0 + \Phi$, p_h se décompose sous la forme $p_h = \overline{p_h} + \sum_K \beta_K \operatorname{rot} b_K$, avec $\overline{p}_h \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ et $\beta_K \in \mathbb{R}$. La relation (3.25) devient

$$\sum_K |\nabla u_h|^2_{0,K} = \sum_K \int_{\partial K} \overline{p_h} \cdot \nu \; u_h \, d\sigma + \sum_K \int_{\partial K} \beta_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nu \; u_h \, d\sigma \tag{3.26}$$

Sur un rectangle K, $u_{h|K} \in Q^1(K)$, donc en utilisant le Lemme 3.3.3 *(iii)*, on obtient

$$\sum_K \int_{\partial K} \beta_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nu \; u_h \, d\sigma = 0 \,.$$

D'autre part, si $[v] = (v_{|K_2} - v_{|K_1})_{|a}$ désigne le saut d'une fonction v à travers l'arête a commune à deux mailles K_1 et K_2, l'équation (3.26) se réécrit

$$\sum_K |\nabla u_h|^2_{0,K} = \sum_{a \in A_b} \int_a \overline{p_h} \cdot \nu_a \, u_h \, d\sigma - \sum_{a \in A_i} \int_a \overline{p_h} \cdot \nu_a \, [u_h] \, d\sigma \tag{3.27}$$

Puisque, $\overline{p_h} \cdot \nu_a \ \in P^0(a)$ pour toute arête a du maillage et u_h est continue au milieu des arêtes internes et nulle au milieu des arêtes frontières, le terme $\sum_K |\nabla u_h|^2_{0,K} = 0$. De plus

$u_h \in Q^1_{nc,0}$, d'où on déduit que $u_h = 0$.
Prouvons que p_h est nul. On a vu que $\operatorname{div} p_h = 0$ donc la relation (3.19) implique que $p_h \in P^0(K)^2 + P^0 \operatorname{rot} b_K \subset X_{2,h}$. Choisissons maintenant $q_h = p_h \in X_{2,h}$ dans l'équation $(3.23)_2$, alors $\sum_K |p_h|^2_{0,K} = 0$ et donc $p_h \equiv 0$. ■

Soit $\Pi^0 f$ la projection de f sur $\Pi_{K\in\mathcal{T}_h} P^0(K)$ et $\Pi^0 f_{|K}$ sa restriction à un élément K. Nous allons maintenant exprimer une formulation équivalente du schéma boîte (3.23) :

Proposition 3.4.1 *La solution $(u_h, p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$ du schéma boîte (3.23) est donnée par :*
(i) $u_h \in Q^1_{nc,0}$ est solution du problème variationnel

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ((\Pi^0 f)_{|K}, v_h)_{0,K} \ , \quad \forall v_h \in Q^1_{nc,0} \tag{3.28}$$

(ii) p_h s'écrit localement dans chaque rectangle K :

$$p_{h|K} = (\nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \begin{pmatrix} |e_y|^2 (x - x_K) \\ |e_x|^2 (y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

où (x_K, y_K) est le centre du rectangle K.

Preuve :
(i) Soit $v_h \in Q^1_{nc,0}$. Choisissons $q_h = \nabla v_h$ élément de $X_{2,h}$ dans $(3.23)_2$. En intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_K (\nabla\, u_h \,,\, \nabla\, v_h)_{0,K} &= \sum_K (p_h, \nabla\, v_h)_{0,K} \\ &= -\sum_K \int_K \operatorname{div}\, p_h\, v_h\, dx + \sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu)\ v_h\, d\sigma \end{aligned} \tag{3.30}$$

Puisque, $\operatorname{div} p_{h|K} \in P^0$, on a d'après l'équation $(3.23)_1$, $\operatorname{div} p_{h|K} = -\Pi^0 f_{|K}$. Or, $p_h \in RT^0 + \Phi$ s'écrit localement $p_h = \bar{p}_h + \sum_K \beta_K \operatorname{rot} b_K$, donc la relation (3.30) devient

$$\begin{aligned} \sum_K (\nabla\, u_h \,,\, \nabla\, v_h)_{0,K} &= \sum_K (\Pi^0 f, v_h)_{0,K} + \sum_K \int_{\partial K} (\bar{p}_h + \beta_K \operatorname{rot} b_K) \cdot \nu\ v_h\, d\sigma \\ &= (\Pi^0 f, v_h)_{0,\Omega} + \sum_K \int_{\partial K} \bar{p}_h \cdot \nu\ v_h\, d\sigma + \sum_K \int_{\partial K} \beta_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nu\ v_h\, d\sigma \end{aligned}$$

Le Lemme 3.3.3 *(iii)* donne $\int_{\partial K} \operatorname{rot} b_K \cdot \nu\ v_h d\sigma = 0$. Donc en utilisant la continuité de la composante normale des éléments de $RT^0 \subset H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, on a

$$\sum_K (\nabla\, u_h \,,\, \nabla\, v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f, v_h)_{0,K} + \sum_{a\in\mathcal{A}_b} \int_a \bar{p}_h \cdot \nu_a\, u_h\, d\sigma - \sum_{a\in\mathcal{A}_i} \int_a \bar{p}_h \cdot \nu_a\, [u_h]\, d\sigma$$

Puisque $u_h \in Q^1_{nc,0}$ et $p_h \cdot \nu_a \in P^0(a)$, le Lemme 3.3.5 implique que

$$\int_a \bar{p}_h \cdot \nu_a\, u_h\, d\sigma = 0 \ , \ \forall a \in \mathcal{A}_b \quad \text{et} \quad \int_a \bar{p}_h \cdot \nu_a\, [u_h]\, d\sigma = 0 \ , \ \forall a \in \mathcal{A}_i \tag{3.31}$$

ce qui donne
$$\sum_K (\nabla u_h\,,\,\nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f, v_h)_{0,K}\ ,\ \forall v_h \in Q^1_{nc,0}\,.$$
Ceci prouve *(i)*. En particulier, pour $v_h = b_K \in Q^1_{nc,0}$ (v_h vaut la bulle b_K sur le rectangle K et 0 ailleurs), on obtient
$$(\nabla u_h\,,\,\nabla b_K)_{0,K} \;=\; (\Pi^0 f, b_K)_{0,K}$$
Or, la bulle est à moyenne nulle sur chaque rectangle, donc $(\Pi^0 f, b_K)_{0,K} = 0$. De plus, ∇u_h s'écrit localement $(\nabla u_h)_{|K} = (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} + d_K \nabla b_K$, où d_K est donné par u_h. On en déduit que
$$\begin{aligned} 0 = (\nabla u_h\,,\,\nabla b_K)_{0,K} &= ((\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} + d_K \nabla b_K,\, \nabla b_K)_{0,K} \\ &= \underbrace{((\Pi^0 \nabla u_h)_{|K},\, \nabla b_K)_{0,K}}_{=0} + d_K |\nabla b_K|^2_{0,K} \end{aligned}$$
C'est-à-dire $d_K = 0$, puisque $|\nabla b_K|^2_{0,K} \neq 0$. Donc la composante "bulle" de la solution u_h est nulle et $(\nabla u_h)_{|K} = (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K}$.
(ii) Ecriture locale de p_h
p_h appartient à $RT^0 + \Phi$, il s'écrit donc localement sur un rectangle K, $p_h = \bar{p}_h + \sum_K \beta_K \operatorname{rot} b_K$ avec $\bar{p}_h \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Or, nous avons vu que pour tout rectangle K, $\operatorname{div} p_{h|K} = -\Pi^0 f_{|K}$ et $\operatorname{div}(\operatorname{rot} b_K) = 0$, donc
$$\operatorname{div} p_h = \operatorname{div} \bar{p}_h = -\Pi^0 f\,. \tag{3.32}$$
Puisque p_h et ∇u_h sont des vecteurs polynomiaux de degré 1, l'équation $(3.23)_2$ implique que
$$(\Pi^0 p_h)_{|K} \;=\; (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} \;=\; (\nabla u_h)_{|K}.$$
D'autre part, p_h s'écrit encore sous la forme
$$p_{h|K} \;=\; (\Pi^0 p_h)_{|K} + \frac{\operatorname{div} p_{h|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \tilde{\beta}_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix}$$
où $\tilde{\beta}_K \in \mathbb{R}$. En remplaçant, $(\Pi^0 p_h)_{|K}$ et $\operatorname{div} p_{h|K}$ par leurs valeurs, on obtient
$$p_{h|K} \;=\; \underbrace{(\nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix}}_{p_{h,1}} + \underbrace{\tilde{\beta}_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix}}_{p_{h,2}}$$
Il s'agit maintenant d'évaluer le coefficient $\tilde{\beta}_K$. Réutilisons l'équation $(3.23)_2$ pour un élément $q_{h|K} = \operatorname{rot} b_K$:
$$\int_K (p_{h,1} + p_{h,2} - \nabla u_h) \cdot \operatorname{rot} b_K \, dx = 0 \tag{3.33}$$
Or, par le Lemme 3.3.3 *(ii)*, $\int_K \nabla u_h \cdot \operatorname{rot} b_K = 0$, et $p_{h,1}$ est complètement déterminé par
$$p_{h,1} = (\nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix}$$

donc l'équation (3.33) devient :

$$\begin{aligned}
\int_K p_{h,2} \cdot \operatorname{rot} b_K \, dx &= -\int_K p_{h,1} \cdot \operatorname{rot} b_K \, dx \\
&= \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \int_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} \cdot \operatorname{rot} b_K \, dx - (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} \cdot \underbrace{\int_K \operatorname{rot} b_K \, dx}_{=0} \\
&= \frac{4\Pi^0 f_{|K}}{2|K|} \int_K (x - x_K)^2 - (y - y_K)^2 \, dx
\end{aligned}$$

Sur un rectangle K d'arêtes horizontale e_x et verticale e_y,

$$\int_K (x - x_K)^2 = \frac{|K|}{12} |e_x|^2 \quad \text{et} \quad \int_K (y - y_K)^2 = \frac{|K|}{12} |e_y|^2. \tag{3.34}$$

D'autre part, par définition de $p_{h,2}$,

$$\begin{aligned}
\int_K p_{h,2} \cdot \operatorname{rot} b_K \, dx &= \int_K \tilde{\beta}_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \cdot \operatorname{rot} b_K \, dx \\
&= \frac{4\tilde{\beta}_K}{|K|} \int_K (x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 \, dx \\
&= \frac{4\tilde{\beta}_K}{12} \Big(|e_x|^2 + |e_y|^2 \Big)
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\tilde{\beta}_K = \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \frac{|e_x|^2 - |e_y|^2}{|e_x|^2 + |e_y|^2}.$$

Nous venons de prouver que (u_h, p_h) solution du problème (3.23) est également solution du problème (*(i)*-*(ii)*) qui admet une unique solution. D'où le résultat annoncé. ■

Cette proposition donne aussi l'existence et l'unicité du problème (3.23). Noter que dans le cas particulier de maillages en carrés, le coefficient $\tilde{\beta}_K$ est nul sur chaque carré. C'est-à-dire que la composante selon le rotationnel de bulle est nulle. Donc p_h s'écrit sur le carré K

$$p_{h|K} = (\nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix},$$

nous retrouvons la formulation équivalente du schéma boîte de Courbet-Croisille sur maillage en triangles.

3.4.3 Analyse numérique du schéma

Lemme 3.4.3 (Lemme de Poincaré discret, ([30]))
Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que pour tout $u \in Q^1_{nc,0} + H^1_0(\Omega)$, on a

$$|u|_{0,\Omega} \leq C |u|_{1,h}. \tag{3.35}$$

Preuve :
Soit $u \in Q^1_{nc,0} + H^1_0(\Omega)$. On a

$$|u|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(u,g)_{0,\Omega}|}{|g|_{0,\Omega}} \tag{3.36}$$

Soit $g \in L^2(\Omega)$, $\exists\, p \in H^1(\Omega)^2$ tel que $\operatorname{div} p = g$ et $\|p\|_{1,\Omega} \leq C|g|_\Omega$. En remplaçant g par sa valeur dans (3.36) et en intégrant par parties, on a

$$(u,g)_{0,\Omega} = (u, \operatorname{div} p)_{0,\Omega} = \underbrace{-\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\, dx}_{(I)} + \underbrace{\sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma}_{(II)} \tag{3.37}$$

Majorons les deux termes du second membre :
• Estimation de $|(I)|$:

$$|(I)| = |\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\, dx\,| \leq |u|_{1,h}\, |p|_{1,\Omega}$$

• Soit $[u]$ le saut de u à travers l'arête a, puisque $p \in (H^1(\Omega))^2 \cap H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, (II) est égal à

$$(II) = \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma = \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a p \cdot \nu_a\, u\, d\sigma \,-\, \sum_{a \in A_i} \int_a p \cdot \nu_a\, [u]\, d\sigma\,, \tag{3.38}$$

Soit $\overline{p \cdot \nu_a} = \frac{1}{|a|} \int_a p \cdot \nu_a\, d\sigma$ la moyenne de $p \cdot \nu_a$ le long de l'arête a. Puisque $u \in H^1_0(\Omega) + Q^1_{nc,0}$, par le Lemme 3.3.5 on a les relations suivantes

$$\int_a \overline{p \cdot \nu_a}\, u\, d\sigma = 0\,, \quad \forall a \in \mathcal{A}_b \quad \text{ et } \quad \int_a \overline{p \cdot \nu_a}\, [u]\, d\sigma = 0\,, \quad \forall a \in \mathcal{A}_i \tag{3.39}$$

L'égalité (3.38) devient donc :

$$\begin{aligned} \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma &= \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a})\, u\, d\sigma - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a})\, [u]\, d\sigma \\ &= \sum_K \sum_{e \in \partial K} \int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e})\, u\, d\sigma \end{aligned}$$

Le Lemme 3.2.1 et les propriétés du maillage donnent l'estimation

$$|\int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e})\, u\, d\sigma| \leq C\, h_K |u|_{1,K}\, |p|_{1,K}$$

Ainsi,

$$|(II)| = |\sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\, u\, d\sigma| \leq 4\, Ch |u|_{1,h}\, |p|_{1,\Omega}$$

Finalement, on obtient

$$|(u,g)_{0,\Omega}| \leq (4Ch+1) |u|_{1,h}\, |p|_{1,\Omega} \leq (4\,Ch+1)|u|_{1,h}\, \underbrace{\|p\|_{1,\Omega}}_{\leq C(\Omega)|g|_{0,\Omega}}$$

Nous en déduisons le résultat annoncé. ■

Lemme 3.4.4 *La semi-norme* $|\cdot|_{1,h}$ *est une norme sur l'espace* $H_0^1(\Omega) + Q_{nc,0}^1$.

Ce résultat se déduit du Lemme de Poincaré discret. Nous avons le résultat de stabilité suivant :

Proposition 3.4.2 (Stabilité)
La solution $(u_h, p_h) \in Q_{nc,0}^1 \times (RT^0 + \Phi)$ *du schéma boîte (3.23) satisfait l'estimation de stabilité :*

$$\|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C|f|_{0,\Omega}.$$

Preuve :
• Utilisons la formulation équivalente de la Proposition 3.4.1

$$|u_h|_{1,h}^2 = \sum_K (\nabla u_h, \nabla u_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f_{|K}, u_h)_{0,K} \tag{3.40}$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $|u_h|_{1,h}^2 \leq |f|_{0,\Omega}|u_h|_{0,\Omega}$. Le Lemme de Poincaré 3.4.3 donne

$$|u_h|_{1,h} \leq C|f|_{0,\Omega}. \tag{3.41}$$

La définition de la norme $\|\cdot\|_{1,h}$ et le Lemme de Poincaré impliquent que

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C(\Omega)|f|_{0,\Omega}\,. \tag{3.42}$$

• L'écriture locale de p_h (Proposition 3.4.1) donne :

$$|p_h|_{0,K} \leq |\nabla u_h|_{0,K} + |\Pi^0 f|_{0,K} \frac{|e_x||e_y|}{\sqrt{12}(|e_x|^2 + |e_y|^2)^{1/2}}.$$

C'est-à-dire :

$$|p_h|_{0,K} \leq |u_h|_{1,K} + \frac{h_K |\Pi^0 f|_{0,K}}{4\sqrt{3}}$$

On déduit de (3.41), que

$$|p_h|_{0,\Omega} \quad \leq \quad C|f|_{0,\Omega} \tag{3.43}$$

où C ne dépend que de Ω.
• D'autre part, $\mathrm{div}\, p_h = -\Pi^0 f$. Par l'inégalité (3.43), on obtient $\|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C|f|_{0,\Omega}$. En combinant avec (3.42), on conclut la preuve. ■

Proposition 3.4.3 (Estimations d'erreur *a priori***)**
Soit $(u,p) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ la solution du problème continu (3.2). Soit $(u_h,p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$ la solution du schéma boîte (3.23). Si $f \in H^1(\Omega)$, on a les estimations d'erreur a priori :

$$\begin{array}{ll} (i) & |u-u_h|_{1,h} \le Ch|f|_{0,\Omega} \\ (ii) & |u-u_h|_{0,\Omega} \le Ch^2(|f|_{0,\Omega}+|f|_{1,\Omega}) \\ (iii) & |p-p_h|_{0,\Omega} \le Ch|f|_{0,\Omega} \\ (iv) & |p-p_h|_{\mathrm{div},h} \le Ch|f|_{1,\Omega} \end{array} \tag{3.44}$$

Preuve :
Les estimations d'erreur pour u se démontrent grâce à la formulation équivalente du schéma boîte (3.23), selon le même principe que l'estimation d'erreur dans le cas d'un maillage triangulaire.
(i) Notons a_h la forme bilinéaire définie sur l'espace $H_0^1(\Omega) + Q^1_{nc,0}$ par

$$a_h(u,v) = \sum_K (\nabla u, \nabla v)_{0,K}$$

pour des éléments u et v de $H_0^1(\Omega) + Q^1_{nc,0}$. Pour tout $v_h \in Q^1_{nc,0}$, on a en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|u-u_h|_{1,h} \;\le\; |u-v_h|_{1,h} + |u_h - v_h|_{1,h}\,. \tag{3.45}$$

Or, par définition de a_h,

$$\begin{aligned} |u_h-v_h|^2_{1,h} &= a_h(u_h-v_h, u_h-v_h) \\ &= a_h(u_h-u, u_h-v_h) + a_h(u-v_h, u_h-v_h)\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Donc

$$|u_h-v_h|_{1,h} \;\le\; \sup_{v_h \in Q^1_{nc,0}} \frac{|a_h(u_h-u, u_h-v_h)|}{|u_h-v_h|_{1,h}} + |u-v_h|_{1,h} \tag{3.47}$$

ce qui donne en combinant avec (3.45)

$$|u-u_h|_{1,h} \le 2 \inf_{w_h \in Q^1_{nc,0}} |u-w_h|_{1,h} + \sup_{w_h \in Q^1_{nc,0}} \frac{|a_h(u_h-u, w_h)|}{|w_h|_{1,h}}$$

Estimation de l'erreur de consistance :
Soit $w_h \in Q^1_{nc,0}$, par définition de a_h, on obtient grâce à la formule (3.28)

$$\begin{aligned} a_h(u_h-u, w_h) &= \sum_K \int_K \nabla(u_h-u)\cdot\nabla w_h\,dx \\ &= \sum_K \int_K \nabla u_h \cdot \nabla\, w_h\,dx - \sum_K \int_K \nabla u \cdot \nabla w_h\,dx \\ &= \sum_K (\Pi^0 f, w_h)_{0,K} + \sum_K \int_K \Delta u\, w_h\,dx - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u\cdot\nu)\, w_h\,d\sigma \end{aligned}$$

Or, $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$, donc

$$a_h(u_h - u, w_h) \;=\; \sum_K \int_K (\Pi^0 f - f)\, w_h\, dx - \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu)\, w_h\, d\sigma\,.$$

Notons L_u la forme linéaire définie sur l'espace $H^1_0(\Omega) + Q^1_{nc,0}$ par :

$$L_u(w_h) = \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu)\, w_h\, d\sigma, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

• Estimons le terme $L_u(w_h)$, $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$:

$$L_u(w_h) = \sum_K \int_{\partial K} (\nabla u \cdot \nu)\, w_h\, d\sigma = -\sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a \nabla u \cdot \nu_a\, [w_h]\, d\sigma + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a \nabla u \cdot \nu_a\, w_h\, d\sigma \quad (3.48)$$

Or, $\overline{\nabla u} = \frac{1}{|a|} \int_a \nabla u\, d\sigma \;\in P^0(a)$. D'autre part, puisque $w_h \in H^1_0(\Omega) + Q^1_{nc,0}$ on a d'après le Lemme 3.3.5, les deux relations

$$\int_a \nabla u \cdot \nu_a\, [w_h]\, d\sigma = \int_a (\nabla u - \overline{\nabla u}) \cdot \nu_a\, [w_h]\, d\sigma, \quad a \in \mathcal{A}_i$$

$$\text{et} \quad \int_a \nabla u \cdot \nu_a\, w_h\, d\sigma = \int_a (\nabla u - \overline{\nabla u}) \cdot \nu_a\, w_h\, d\sigma, \quad a \in \mathcal{A}_b$$

Ainsi, l'équation (3.48) est encore équivalente à

$$\begin{aligned} L_u(w_h) \;&=\; -\sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a (\nabla u - \overline{\nabla u}) \cdot \nu_a\, [w_h]\, d\sigma + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a (\nabla u - \overline{\nabla u}) \cdot \nu_a\, w_h\, d\sigma \\ &=\; \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \partial K} \int_e (\nabla u - \overline{\nabla u}) \cdot \nu_e\, w_h\, d\sigma\,. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Chaque intégrale d'arête $e \in \partial K$ s'estime d'après le Lemme 3.2.1 par

$$\Big| \int_e (\nabla u - \overline{\nabla u}) \cdot \nu_e\, w_h\, d\sigma \Big| \le C\, h_K\, |w_h|_{1,K} |\nabla u|_{1,K}$$

et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|L_u(w_h)| \le C\, h\, |w_h|_{1,h} |u|_{2,\Omega}$$

ou encore, puisque $\|u\|_{2,\Omega} \le C'\, |f|_{0,\Omega}$,

$$|L_u(w_h)| \le C\, h\, |w_h|_{1,h} |f|_{0,\Omega}\,. \quad (3.50)$$

• Estimons maintenant le terme $\sum_K \int_K (\Pi^0 f - f)\, w_h\, dx$:
Π^0 étant l'opérateur de projection sur les polynômes constants et $\Pi^0 w_h = \frac{1}{|K|} \int_K w_h$, on a

$$\sum_K \int_K (\Pi^0 f - f)\, w_h\, dx = \sum_K \int_K (\Pi^0 f - f)(w_h - \Pi^0 w_h)\, dx = -\sum_K \int_K f\, (w_h - \Pi^0 w_h)\, dx$$

Ainsi, nous obtenons en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|\sum_K \int_K (\Pi^0 f - f)\, w_h\, dx| &\leq \sum_K |f|_{0,K} |w_h - \Pi^0 w_h|_{0,K} \\ &\leq \sum_K |f|_{0,K}\, (c\, h_K\, |w_h|_{1,K}) \\ &\leq c\, h\, |f|_{0,\Omega} |w_h|_{1,h}\,.\end{aligned}$$

Ceci donne l'estimation de $a_h(u_h - u, w_h)$:

$$\begin{aligned}|a_h(u_h - u, w_h)| &\leq C\, h\, |w_h|_{1,h} |f|_{0,\Omega} + c\, h\, |f|_{0,\Omega} |w_h|_{1,h} \\ &\leq C\, h\, |w_h|_{1,h}\, |f|_{0,\Omega}\end{aligned}$$

Donc l'erreur de consistance est

$$\sup_{w_h \in Q^1_{nc,0}} \frac{|a_h(u_h - u, w_h)|}{|w_h|_{1,h}} \leq C\, h\, |f|_{0,\Omega}\,. \tag{3.51}$$

Estimation de l'erreur d'approximation :
D'autre part, en notant Π^1_h l'opérateur d'interpolation Q^1-Lagrange , on a par inclusion de $Q^1_{c,0}$ dans $Q^1_{nc,0}$, l'estimation de l'erreur d'approximation

$$\inf_{w_h \in Q^1_{nc,0}} |u - w_h|_{1,h} \leq |u - \Pi^1_h u|_{1,h}\,.$$

En utilisant le Lemme 3.2.2 pour $k = 1$, $m = 1$

$$\inf_{w_h \in Q^1_{nc,0}} |u - w_h|_{1,h} \leq Ch|u|_{2,\Omega}$$

Or, puisque u est solution du problème (3.1), $\|u\|_{2,\Omega} \leq C|f|_{0,\Omega}$. Ceci permet de conclure que :

$$|u - u_h|_{1,h} \leq C\, h|f|_{0,\Omega}$$

Nous avons ainsi démontré l'assertion *(i)*.
(ii) Utilisons un argument de type Aubin-Nitsche pour évaluer la norme L^2 de l'erreur [4] :

$$|u - u_h|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(u - u_h, g)_{0,\Omega}|}{|g|_{0,\Omega}}$$

Soit g une fonction de $L^2(\Omega)$. Soit $\phi_g \in H^1_0(\Omega)$, la solution du problème variationnel (3.2) associé au problème de Poisson ($-\Delta\phi_g = g$) de terme source $g \in L^2(\Omega)$:

$$(\nabla\phi_g, \nabla v)_{0,\Omega} = (g, v)_{0,\Omega}\ ,\ v \in H^1_0(\Omega)\,. \tag{3.52}$$

Soit $\phi_h \in Q^1_{nc,0}$ la solution du problème variationnel discret (3.28) associé au schéma boîte (3.23) de terme source g :

$$\sum_K (\nabla\phi_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 g, v_h)_{0,K}\ ,\ v_h \in Q^1_{nc,0}\,. \tag{3.53}$$

Alors, le terme $(u-u_h,g)_{0,\Omega}$ s'évalue en fonction de g, ϕ_g, ϕ_h, par

$$\begin{aligned}(u-u_h,g)_{0,\Omega} = a_h(u-u_h,\phi_g-\phi_h) &- [a_h(u-u_h,\phi_g)-(u-u_h,g)] \\ &-[a_h(u,\phi_g-\phi_h)-(f,\phi_g)+(\Pi^0 f,\phi_h)]\end{aligned} \tag{3.54}$$

D'où la majoration

$$\begin{aligned}|(u-u_h,g)_{0,\Omega}| \le \underbrace{|a(u-u_h,\phi_g-\phi_h)|}_{(I)} &+ \underbrace{|a(u-u_h,\phi_g)-(u-u_h,g)|}_{(II)} \\ &+ \underbrace{|a(u,\phi_g-\phi_h)-(f,\phi_g)+(\Pi^0 f,\phi_h)|}_{(III)}\end{aligned} \tag{3.55}$$

• Evaluons (I). Par définition de a_h sur $H^1_0(\Omega)+Q^1_{nc,0}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|a_h(u-u_h,\phi_g-\phi_h)| \le |u-u_h|_{1,h}|\phi_g-\phi_h|_{1,h}$$

L'estimation *(i)* appliquée aux problèmes (3.1-3.28) et (3.52-3.53) implique

$$|u-u_h|_{1,h} \le Ch\,|f|_{0,\Omega} \quad \text{et} \quad |\phi_g-\phi_h|_{1,h} \le Ch\,|g|_{0,\Omega}$$

D'où $|a_h(u-u_h,\phi_g-\phi_h)| \le Ch^2\,|f|_{0,\Omega}\,|g|_{0,\Omega}$.
• Posons $w_h = u-u_h \in H^1_0(\Omega)+Q^1_{nc,0}$ et évaluons (II) :

$$\begin{aligned}|a_h(u-u_h,\phi_g)-(u-u_h,g)| &= |a_h(w_h,\phi_g)-(w_h,g)| \\ &= |\sum_K \int_{\partial K} \nabla\phi_g\cdot\nu\, w_h\, d\sigma| \\ &= |L_{\phi_g}(w_h)|\end{aligned}$$

L'estimation de L_{ϕ_g} pour $\phi_g \in H^1_0(\Omega)$ est donnée par (3.50), encore valable pour des éléments de $H^1_0(\Omega)+Q^1_{nc,0}$

$$|L_{\phi_g}(w_h)| \le Ch|g|_{0,\Omega}|w_h|_{1,h}$$

En appliquant *(i)*, on obtient

$$|a_h(u-u_h,\phi_g)-(u-u_h,g)| \le Ch^2|g|_{0,\Omega}|f|_{0,\Omega}$$

• Estimons le terme (III). Posons $w_h = \phi_g-\phi_h$,

$$\begin{aligned}|a_h(u,\phi_g-\phi_h)-(f,\phi_g)+(\Pi^0 f,\phi_h)| &= |a_h(u,w_h)-(f,w_h)-(f,\phi_h)+(\Pi^0 f,\phi_h)| \\ &= |L_u(w_h)-(f-\Pi^0 f,\phi_h)| \\ &\le |L_u(w_h)|+|(f-\Pi^0 f,\phi_h)|\end{aligned}$$

Or, par définition de Π^0, $\int_K (f-\Pi^0 f)\,\phi_h\,dx = \int_K (f-\Pi^0 f)\,(\phi_h-\Pi^0\phi_h)\,dx$. On a donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Lemme 3.2.2

$$|(f-\Pi^0 f,\phi_h)| \le C\,h^2\,|f|_{1,\Omega}\,|\phi_h|_{1,h}\,.$$

Comme ϕ_h est solution du problème variationnel (3.53), le Lemme de Poincaré discret donne $|\phi_h|_{1,h} \leq C\,|g|_{0,\Omega}$. D'autre part, d'après la relation (3.50), on a

$$|L_u(w_h)| \leq C\,h\,|w_h|_{1,h}\,|f|_{0,\Omega}\,.$$

Par définition, $|w_h|_{1,h} = |\phi_g - \phi_h|_{1,h}$. Donc d'après *(i)*, on a $|w_h|_{1,h} \leq C\,h\,|g|_{0,\Omega}$. Ainsi, on obtient l'estimation de (III)

$$|(III)| = |a_h(u, \phi_g - \phi_h) - (f, \phi_g) + (\Pi^0 f, \phi_h)| \quad \leq \quad C\,h^2\,|g|_{0,\Omega}\big(|f|_{0,\Omega} + |f|_{1,\Omega}|\big)$$

Finalement, en regroupant les termes (I), (II) et (III), nous obtenons une estimation de $|u - u_h|_{0,\Omega}$:

$$\begin{aligned}
|u - u_h|_{0,\Omega} \quad &\leq \quad \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{1}{|g|_{0,\Omega}} \Big(c_1 h^2 |f|_{0,\Omega} |g|_{0,\Omega} + c_2 h^2 |f|_{0,\Omega} |g|_{0,\Omega} \\
&\qquad + c_3 h^2 \big(|f|_{0,\Omega} + |f|_{1,\Omega}\big) |g|_{0,\Omega} \Big) \\
&\leq \quad C\,h^2\,(|f|_{0,\Omega} + |f|_{1,\Omega})
\end{aligned}$$

(iii) D'après l'écriture locale de p_h (3.29) et la définition de $p = \nabla u$, on a

$$\begin{aligned}
|p - p_h|_{0,\Omega} \quad &= \quad |\nabla u - \sum_K \Big((\nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \begin{pmatrix} |e_y|^2 (x - x_K) \\ |e_x|^2 (y - y_K) \end{pmatrix} \Big) |_{0,\Omega} \\
&\leq \quad |\nabla u - \nabla u_h|_{0,\Omega} \\
&\qquad + \Big[\sum_K \int_K \Big(\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \Big)^2 (|e_y|^4 (x - x_K)^2 + |e_x|^4 (y - y_K)^2) \Big]^{1/2} \\
&\leq \quad |u - u_h|_{1,h} + \Big[\sum_K \frac{\Pi^0 f_{|K}^2}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \frac{|K|}{12} |e_x|^2 |e_y|^2 \Big]^{1/2}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{2|e_x||e_y|}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \leq 1$ et $|K| = |e_x||e_y|$, donc

$$|p - p_h|_{0,\Omega} \quad \leq \quad |u - u_h|_{1,h} + C\,h\,|f|_{0,\Omega}$$

ce qui démontre *(iii)*.
(iv) $|p - p_h|_{\mathrm{div},h} = |\operatorname{div} p - \operatorname{div} p_h|_{0,\Omega}$. Or, $\operatorname{div} p = -f$ d'après (3.2) et $\operatorname{div} p_h = -\Pi^0 f$ d'après (3.32), on en déduit le résultat annoncé. ■

3.5 Schéma boîte de B. Courbet : Schéma boîte 2

3.5.1 Principe du schéma boîte

Dans [12], B. Courbet s'intéresse à la forme mixte instationnaire des équations de Navier-Stokes compressibles. Il choisit d'approcher ses inconnues par des moyennes d'arête.

Rappelons le principe du schéma de B. Courbet pour le problème de la chaleur sur le domaine Ω maillé par des rectangles. On considère le problème

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + \operatorname{div} p + f = 0 \;, \qquad \text{sur } \Omega \\ p = \nabla u \;, \qquad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \;, \qquad \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \tag{3.56}$$

En intégrant le système (3.56) sur un rectangle K du maillage, on obtient le système exact pour la solution exacte du problème (3.56) :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\int_K u\,dx + \int_{\partial K} p\cdot\nu\,d\sigma + \int_K f\,dx = 0 \\ \int_K p\,dx = \int_{\partial K} u\,\nu\,d\sigma \\ u = 0 \;, \qquad \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \tag{3.57}$$

A partir de ce bilan d'équations, on introduit les moyennes volumiques sur chaque rectangle

$$\bar{u}_K = \frac{1}{|K|}\int_K u\,dx \quad , \quad \bar{p}_K = \frac{1}{|K|}\int_K p\,dx \quad \text{et} \quad \bar{f}_K = \frac{1}{|K|}\int_K f\,dx \tag{3.58}$$

La conservation de la quantité scalaire u donne par la relation $(3.57)_1$:

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_K + \frac{1}{|K|}\sum_{e\in\partial K}\int_e p\cdot\nu_e\,d\sigma + \bar{f}_K = 0 \tag{3.59}$$

On utilise les notations de la Figure 3.11 où les indices N, E, S, O désignent les arêtes nord, est, sud ou ouest et (ν_K, τ_K) est une base orthonormée sur le rectangle K.

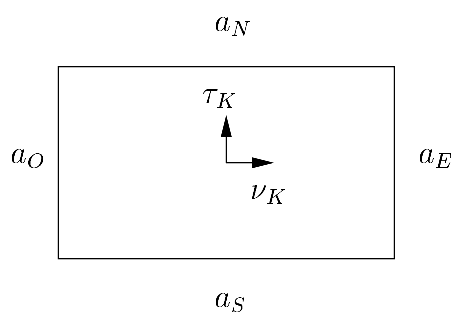

FIG. 3.11 – Notations sur le rectangle K

On note $\bar{p}'_K = \bar{p}_K\cdot\nu_K$ et $\bar{p}''_K = \bar{p}_K\cdot\tau_K$ les composantes de $\bar{p}$ respectivement selon les vecteurs ν_K et τ_K. Par la conservation du flux $(3.57)_2$, on obtient les relations suivantes exactes pour p :

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{p}'_K = \frac{1}{|K|}\left(\int_{a_E} u\,d\sigma - \int_{a_O} u\,d\sigma\right) \\ \bar{p}''_K = \frac{1}{|K|}\left(\int_{a_N} u\,d\sigma - \int_{a_S} u\,d\sigma\right) \end{array}\right. \tag{3.60}$$

La discrétisation spatiale de ces relations exactes pour la solution exacte de (3.56) consiste à relier les moyennes de maille $\bar{u}_K$, $\bar{p}'_K$ et $\bar{p}''_K$ par les valeurs aux interfaces $\int_e u\,d\sigma$ et $\int_e p\cdot\nu_e\,d\sigma$, e étant une des arêtes $e = a_E, a_S, a_O$ et a_N du rectangle K. On note les moyennes d'arête, pour une arête $e \in \partial K$, $u_e = \frac{1}{|e|}\int_e u\, d\sigma$ et $p_e = \frac{1}{|e|}\int_e p \cdot \nu_K\, d\sigma$ si ν_e et ν_K sont colinéaires et $p_e = \frac{1}{|e|}\int_e p \cdot \tau_K\, d\sigma$ sinon. On approche la valeur moyenne de u par deux valeurs différentes en fonction d'une part des arêtes verticales et des arêtes horizontales par

$$\bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_E} + u_{a_O}) \quad \text{et} \quad \bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_S} + u_{a_N}) \tag{3.61}$$

Cette double condition sur la moyenne $\bar{u}_K$ impose en particulier l'égalité $u_{a_E} + u_{a_O} = u_{a_S} + u_{a_N}$. Dans l'espace des polynômes $Q^1(K)$, cette égalité est naturellement vérifiée. D'autre part approche la moyenne de $\bar{p}''_K = p \cdot \nu_K$ et $\bar{p}''_K = p \cdot \tau_K$ par

$$\bar{p}'_K = \frac{1}{2}(p_{a_E} + p_{a_O}) \quad \text{et} \quad \bar{p}''_K = \frac{1}{2}(p_{a_S} + p_{a_N}) \tag{3.62}$$

Les relations (3.59-3.60-3.61-3.62) donnent le schéma semi-discret :
chercher $\big((\bar{u}_K)_{K\in\mathcal{T}_h}, (u_a)_{a\in\mathcal{A}}, (p_a)_{a\in\mathcal{A}}\big)$ tel que pour tout K, on ait

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{d}{dt}\bar{u}_K + \frac{1}{|K|}\big(|a_E|\, p_{a_E} - |a_O|\, p_{a_O} - |a_S|\, p_{a_S} + |a_N|\, p_{a_N}\big) + \bar{f}_K = 0\\
\bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_E} + u_{a_O})\\
\bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_S} + u_{a_N})\\
\frac{1}{2}(p_{a_E} + p_{a_O}) = \frac{1}{|K|}\big(|a_E|\, u_{a_E} - |a_O|\, u_{a_O}\big)\\
\frac{1}{2}(p_{a_S} + p_{a_N}) = \frac{1}{|K|}\big(|a_N|\, u_{a_N} - |a_S|\, u_{a_S}\big)\\
u_a = 0\,, \quad a \in \Gamma
\end{array}\right. \tag{3.63}$$

Ce problème discret est un systéme différentiel algébrique avec autant d'équations que d'inconnues, puisque les inconnues $\bar{u}_K$, u_{a_E}, u_{a_o}, u_{a_S}, u_{a_N} et p_{a_E}, p_{a_O}, p_{a_S}, p_{a_N} sont au nombre de $NE + 2NA$ inconnues, tandis que le nombre d'équations est $5NE + NA_b = NE + (NA + NA_i) + NA_b$, qui est égal au nombre d'inconnues $(NE + 2\,NA)$ par les relations d'Euler.

Lemme 3.5.1 *Le problème stationnaire associé au problème discret instationnaire (3.63) donné par*

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{|K|}\big(|a_E|\, p_{a_E} - |a_O|\, p_{a_O} - |a_S|\, p_{a_S} + |a_N|\, p_{a_N}\big) + \bar{f}_K = 0\\
\bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_E} + u_{a_O})\\
\bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_S} + u_{a_N})\\
\frac{1}{2}(p_{a_E} + p_{a_O}) = \frac{1}{|K|}\big(|a_E|\, u_{a_E} - |a_O|\, u_{a_O}\big)\\
\frac{1}{2}(p_{a_S} + p_{a_N}) = \frac{1}{|K|}\big(|a_N|\, u_{a_N} - |a_S|\, u_{a_S}\big)\\
u_a = 0\,, \quad a \in \Gamma
\end{array}\right. \tag{3.64}$$

est mal posé.

Preuve :
Dans le cas stationnaire, on ne peut pas prouver que le schéma admet une unique solution. Il manque une information sur le flux p, puisque f et u nuls n'impliquent pas que p est nul. En effet : soit $\tilde{p}$ la fonction définie localement comme le rotationnel de la bulle non-conforme (introduite dans le Lemme 3.3.2),

$$\tilde{p}_{|K} = \operatorname{rot} b_K$$

et $\tilde{p}_{a_E}$, $\tilde{p}_{a_S}$, $\tilde{p}_{a_O}$, $\tilde{p}_{a_N}$ la restriction de la fonction $\tilde{p}_{|K}$ aux arêtes a_E, a_S, a_O, a_N. Alors si le terme source f est nul, la fonction $(0,0,0,0,0,0,\tilde{p}_{a_E},\tilde{p}_{a_O},\tilde{p}_{a_S},\tilde{p}_{a_N})$ est solution du système (3.64) mais est non nulle. Ceci est en contradiction avec le fait que le schéma soit bien posé à l'état stationnaire. ■

Dans le cas des rectangles, nous avons vu que le rotationnel de la bulle non-conforme a pour propriété d'être à moyenne nulle. On a donc sur un rectangle K

$$\int_K \nabla u \, dx = \int_K p \, dx$$

qui peut aussi prendre la forme

$$\int_K \nabla u \, dx = \int_K p + \beta \operatorname{rot} b_K \, dx$$

où β est un réel quelconque. Lors de l'intégration du système d'équations (3.56) le terme $\operatorname{rot} b_K$ agit comme un mode parasite qui se superpose à la solution p.
Ce mode n'est pas éliminé par les équations (3.57). Le choix des espaces de test doit donc être assez riche pour éliminer ce phénomène.

Définition 3.5.1 *Soit C_0 l'espace défini par*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{(u_a)_a \in \mathbb{R}^{NA}, \text{ tel que } u_a = 0 \ , \ a \in \Gamma \text{ et} \\ &\qquad\qquad u_{a_E} + u_{a_O} = u_{a_S} + u_{a_N} \text{ sur chaque rectangle}\} \\ &= \{(u_a)_a \in \mathbb{R}^{NA_i}, u_{a_E} + u_{a_O} = u_{a_S} + u_{a_N} \text{ sur chaque rectangle}\} \end{aligned} \tag{3.65}$$

En éliminant l'inconnue $\bar{u}_K$, qui est totalement déterminée par les équations $(3.63)_2$ et $(3.63)_3$, on obtient la formulation équivalente du problème (3.63) chercher $(u,p) \in C_0 \times \mathbb{R}^{NA}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_{a_E} + u_{a_O}) + \frac{1}{|K|}\big(|a_E|\, p_{a_E} - |a_O|\, p_{a_O} - |a_S|\, p_{a_S} + |a_N|\, p_{a_N}\big) + \bar{f}_K = 0 \\ p_{a_E} + p_{a_O} = \frac{2}{|K|}\big(|a_E|\, u_{a_E} - |a_O|\, u_{a_O}\big) \\ p_{a_S} + p_{a_N} = \frac{2}{|K|}\big(|a_N|\, u_{a_N} - |a_S|\, u_{a_S}\big) \end{array} \right. \tag{3.66}$$

C'est encore équivalent à chercher $(u,p) \in (M_{1,h} \cap C_0) \times X_{1,h}$ (où $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$ sont des espaces d'éléments finis dont les degrés de liberté sont donnés par les inconnues u_a et p_a) tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_K \frac{d}{dt}(u,v)_{0,K} + (\operatorname{div} p, v)_{0,K} + (f,v)_{0,K} = 0 \ , \ \forall v \in P^0 \\ \displaystyle\sum_K (p - \nabla u, q)_{0,K} = 0 \ , \ \forall q \in (P^0)^2 \, . \end{array} \right. \tag{3.67}$$

Mais il faut rajouter au moins une contrainte au niveau de $X_{1,h}$ concernant le rotationnel de la bulle, qui peut se traduire par l'ajout de tests supplémentaires.

Du point de vue éléments finis, l'espace d'éléments finis utilisé par B. Courbet pour approcher l'inconnue u pourrait être un espace de polynômes de Q^1 pour lequel les inconnues seraient situées au niveau des arêtes et les degrés de liberté seraient donnés par les moyennes de u par arête. A priori, on peut penser à l'espace $Q^1_{nc,0}$. Or, dans un rectangle, la relation $u_{a_E} + u_{a_O} = u_{a_S} + u_{a_N}$ est toujours vraie dans $Q^1(K)$ (voir Lemme 3.3.2). En particulier, dans le système (3.63), une des deux équations $\bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_E} + u_{a_O})$, $\bar{u}_K = \frac{1}{2}(u_{a_S} + u_{a_N})$ est redondante.
On peut penser également à l'espace de Rannacher et Turek, pour lequel la relation $u_{a_E} + u_{a_O} = u_{a_S} + u_{a_N}$ n'est pas vérifiée et dont les degrés de liberté sont donnés par les moyennes de u par arête. C'est l'objet du schéma boîte 3 $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \times (RT^0 + \Phi)$ que nous proposons Section 3.6.

Lemme 3.5.2 (Dimension de C_0)

$$\dim C_0 \;=\; NA - NE - (NA_b - 1) \;=\; NP_i$$

Preuve :
On prouve par récurrence sur NE, le nombre de rectangles du maillage, que la dimension de l'espace C_0 de B. Courbet est de dimension NP_i. On note $C_{0,NE}$ l'espace C_0 pour un maillage $\mathcal{T}_h$ de NE rectangles. La Preuve est évidente pour un rectangle. On suppose maintenant que le lemme est vrai pour NE rectangles et on prouve le résultat pour $NE+1$ rectangles.
On est ramené à l'étude des trois cas suivants :
-1- on ajoute aucun point au maillage, ce qui correspond à l'ajout d'une seule arête frontière au maillage. Dans ce cas, on vérifie que $C_{0,NE+1} = C_{0,NE} \oplus \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$. Les valeurs φ_1 et φ_2 correspondent aux trois nouvelles valeurs d'arête interne liées par la relation $u_O + u_E = u_S + u_N$. De plus, $NP_{iNE+1} = NP_{iNE} + 2$.
-2- on ajoute un point au maillage, ce qui correspond à l'ajout de deux arêtes frontières au maillage. De même on vérifie que $C_{0,NE+1} = C_{0,NE} \oplus \mathrm{Vect}(\varphi)$. Or, dans ce cas $NP_{iNE+1} = NP_{iNE} + 1$.
-3- on ajoute deux points au maillage, ce qui correspond à l'ajout de trois arêtes frontières au maillage. Alors, $C_{0,NE+1} = C_{0,NE}$, puisque la valeur d'arête interne est nulle. D'autre part, on a aussi $NP_{iNE+1} = NP_{iNE}$.

Lemme 3.5.3 (Lien entre l'espace $Q^1_{c,0}$ et l'espace de B. Courbet C_0)
Si M_a désigne le milieu d'une arête a, l'application linéaire

$$\begin{aligned} L \quad : \quad & Q^1_{c,0} \longrightarrow C_0 \\ & u \quad \longmapsto (u(M_a))_{a\in\mathcal{A}} \end{aligned} \tag{3.68}$$

est une bijection entre les espaces $Q^1_{c,0}$ et C_0.

Preuve :
- Par définition, L est une application linéaire telle que $\mathrm{Im}\, L \subseteq C_0$

• Le noyau de L est

$$\mathrm{Ker}\, L \;=\; \{u_h \in Q^1_{c,0} ; u_h(M_a) = 0\,,\, \forall a \in \mathcal{A}\} = Q^1_{c,0} \cap \Psi = \{0\}$$

puisque par définition, la fonction bulle non-conforme $\psi = \sum_K \alpha_K\, b_K$ est la seule fonction de Q^1 qui s'annule au milieu de toutes les arêtes du maillage. Donc $\mathrm{Ker}\, L = \{0\}$, par la Proposition 3.3.1.
• D'autre part, L est une application linéaire injective entre les espaces vectoriels $Q^1_{c,0}$ et C_0, de même dimension NP_i, donc L est un isomorphisme entre $Q^1_{c,0}$ et C_0. ■

Nous proposons donc une réécriture du schéma de B. Courbet pour le problème de Poisson à l'aide de l'espace d'éléments finis $M_{1,h} = Q^1_{c,0}$. On utilise l'espace $Q^1_{c,0}$ pour approcher l'inconnue scalaire u et l'espace de Raviart-Thomas RT^0 pour approcher le flux p. Les inconnues sont au nombre de $3NE + 1$.

3.5.2 Le schéma boîte $(u_h, p_h) \in Q^1_{c,0} \times RT^0$

Soit Φ l'espace vectoriel des rotationnels de bulle non-conforme par rectangle défini dans le Lemme 3.3.7 par

$$\Phi = \mathrm{rot}\, \Psi = \{\phi = \sum_K \beta_K \,\mathrm{rot}\, b_K, \quad \beta_K \in \mathbb{R}\}\,.$$

Dans cette partie, on propose un nouveau schéma boîte sur des maillages en rectangles, inspiré du schéma proposé par B. Courbet rappelé précédemment. On cherche les inconnues u_h et p_h dans des espaces d'éléments finis $M_{1,h}$ et $X_{1,h}$. D'après le Lemme 3.5.3, il est naturel de choisir les inconnues u_h dans l'espace d'éléments finis $M_{1,h} = Q^1_{c,0}$. D'autre part, on cherche p_h défini par NA inconnues d'arêtes. Or l'espace RT^0 de Raviart-Thomas sur rectangle semble convenir pour ce choix. On choisit donc l'espace $X_{1,h} = RT^0$. Nous avons vu précédemment qu'il faut éliminer un mode parasite issu du rotationnel de la bulle non-conforme ; c'est-à-dire qu'on doit éliminer certaines fonctions vectorielles de l'espace RT^0. Or d'après le Lemme 3.3.7, $\Phi \cap RT^0 = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{rot}(\mathcal{B})\big)$. Il suffit de soustraire les éléments de $\mathrm{Vect}\big(\mathrm{rot}(\mathcal{B})\big)$ à l'espace d'inconnues RT^0, ce qui est équivalent à ajouter un test supplémentaire dans l'espace de test $X_{2,h}$. La dimension des espaces d'inconnues est $\dim\, Q^1_{c,0} + \dim\, RT^0 = NP_i + NA = 3NE + 1$ (par les relations d'Euler (3.8)). La construction du schéma de B. Courbet donne de façon naturelle des espaces de test de type polynômes constants par maille : $M_{2,h} = P^0$ et $X_{2,h} = (P^0)^2$. On enrichit l'espace $X_{2,h}$ par l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big(\mathrm{rot}(\mathcal{B})\big)$. On obtient ainsi le bon décompte entre les dimensions des espaces d'inconnues et des espaces de test :

Lemme 3.5.4

$$\dim\, Q^1_{c,0} + \dim\, RT^0 = \dim\, P^0 + \dim\,((P^0)^2 + \mathrm{Vect}\big(\mathrm{rot}(\mathcal{B})\big)). \tag{3.69}$$

Preuve : En effet :

$$\begin{aligned}
\dim M_{1,h} + \dim X_{1,h} &= NP_i + NA \\
&= NA + (1 + NA_i - NE) \quad \text{relation d'Euler } (3.8)_1 \\
&= 4NE + 1 - NE \quad \text{relation d'Euler } (3.8)_2 \\
&= 3NE + 1 = \dim X_{2,h} + \dim M_{2,h}
\end{aligned}$$

Définition 3.5.2 (Schéma boîte 2)
Considérons le schéma boîte suivant : chercher $(u_h, p_h) \in Q^1_{c,0} \times RT^0$ *solution de :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} p_h + f, v_h)_{0,K} = 0 \ , \ \forall v_h \in P^0 \\ \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (p_h - \nabla u_h, q_h)_{0,K} = 0 \ , \ \forall q_h \in (P^0)^2 + \operatorname{Vect}\big(\operatorname{rot}(\mathcal{B})\big) \end{array} \right. \tag{3.70}$$

Remarquons que l'espace $\nabla(Q^1_{c,0}) \not\subseteq X_{2,h}$, et que l'espace test $X_{2,h}$ n'est pas de type discontinu, contrairement aux schémas boîte étudiés précédemment

Lemme 3.5.5 *Le problème discret (3.70) admet une unique solution* $(u_h, p_h) \in Q^1_{c,0} \times RT^0$.

Preuve :
Par égalité des dimensions et linéarité du problème, il suffit de prouver que $f \equiv 0$ entraîne que $u_h \equiv 0 \equiv p_h$.
Soit $f \equiv 0$ dans l'équation $(3.70)_1$. Sur chaque rectangle K du maillage, on a alors $\operatorname{div} p_{h|K} = 0$. Or, par la relation (3.19),

$$RT^0(K) = (P^0(K))^2 + P^0\overrightarrow{GX} + P^0(K) \operatorname{rot} b_K,$$

donc $\operatorname{div} p_{h|K} = 0$ implique que sur un rectangle K, p_h s'écrit

$$p_{h|K} = (\Pi^0 p_h)_{|K} + \beta_K \operatorname{rot} b_K \in (P^0(K))^2 + P^0(K) \operatorname{rot} b_K \, . \tag{3.71}$$

En choisissant $q_{h|K} = (\Pi^0 p_h)_{|K} \in (P^0(K))^2$, dans l'équation $(3.70)_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_K (p_h, q_h)_{0,K} &= \sum_K (\nabla u_h, q_h)_{0,K} \\
\sum_K |K|(\Pi^0 p_{h|K})^2 &= \sum_K \int_K \nabla u_h \cdot (\Pi^0 p_h)\, dx \\
&= \sum_K \int_K \nabla u_h \cdot p_h\, dx - \sum_K \int_K \nabla u_h \cdot (p_h - (\Pi^0 p_h)_{|K})\, dx \\
&= -\sum_K \int_K \underbrace{\operatorname{div} p_h}_{=0}\, u_h\, dx + \sum_K \int_{\partial K} p_h \cdot \nu\, u_h\, d\sigma \\
&\quad -\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot \underbrace{(p_h - (\Pi^0 p_h)_{|K})}_{\beta_K \operatorname{rot} b_K}\, dx \\
&= \underbrace{\sum_{a\in\mathcal{A}_b} \int_a p_h \cdot \nu_a\, u_h\, d\sigma}_{(I)} - \underbrace{\sum_{a\in\mathcal{A}_i} \int_a p_h \cdot \nu_a\, [u_h]\, d\sigma}_{(II)} \\
&\quad \underbrace{-\sum_K \int_K \nabla u_h \cdot (\beta_K \operatorname{rot} b_K)\, dx}_{(III)}
\end{aligned}$$

Le terme (III) s'annule en vertu du Lemme 3.3.3 *(ii)*. D'autre part, u_h est nul sur la frontière de Ω, donc $(I) = 0$ et le saut $[u_h]$ est nul au niveau des arêtes internes, donc $(II) = 0$. Ainsi $(\Pi^0 p_h)_{|K} = 0$ pour tout K rectangle du maillage. C'est-à-dire, d'après l'écriture (3.71), $p_h \in \Phi$. Or, $p_h \in RT^0$. Le Lemme 3.3.7 implique que $p_h \in \mathbb{R}\mathcal{B}$. On note donc $p_h = \beta \sum_K \operatorname{sgn}(K) \operatorname{rot} b_K$. L'équation $(3.70)_2$ pour $q_h = \mathcal{B}$ donne :

$$0 = (p_h - \nabla u_h, q_h) = \beta \sum_K \int_K (\operatorname{sgn}(K) \operatorname{rot} b_K)^2\, dx - \sum_K \int_K \operatorname{sgn}(K) \operatorname{rot} b_K \cdot \nabla u_h\, dx$$

Par le lemme 3.3.3 *(ii)* , $\int_K \operatorname{rot} b_K \cdot \nabla u_h\, dx = 0$ ce qui prouve que $\beta = 0$ et par conséquent p_h est identiquement nul.
Montrons que $u_h = 0$. En prenant $q_{h|K} = (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K}$ dans l'équation $(3.70)_2$, on obtient $\Pi^0(\nabla u_{h|K}) = 0$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$. Localement, u_h devient un élément de $P^0 + P^0 b_K$. Les propriétés de continuité et de nullité à la frontière des éléments de $Q^1_{c,0}$ permettent de conclure que $u_h = 0$. ■

Proposition 3.5.1 *La solution $(u_h, p_h) \in Q^1_{c,0} \times RT^0$ du problème (3.70) est telle que :*
(i) $u_h \in Q^1_{c,0}$ est solution du problème :

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\Pi^0 \nabla u_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,K} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} ((\Pi^0 f)_{|K}, v_h)_{0,K}\ , \quad \forall v_h \in Q^1_{c,0} \tag{3.72}$$

(ii) p_h *s'écrit localement sur chaque rectangle* K *:*

$$p_{h|K} = (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \gamma_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\,, \tag{3.73}$$

pour un certain $\gamma_K \in \mathbb{R}$.

En particulier, la composante rotationnelle de p_h est non locale.

Preuve :

(i) Soit $(u_h, p_h) \in M_{1,h} \times X_{1,h}$ solution du problème (3.70). Montrons que u_h est solution du problème variationnel (3.72). Soit v_h un élément quelconque de $M_{1,h} = Q^1_{c,0}$, alors $q_h = \Pi^0(\nabla v_h) \in X_{2,h}$, donc l'équation $(3.70)_2$ donne :

$$\sum_K (\nabla u_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (p_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,K} \tag{3.74}$$

Or, sur un rectangle K, nous savons que $\nabla v_{h|K} = \Pi^0 \nabla v_{h|K} + \delta_K \nabla b_K$, pour un certain δ_K réel. En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_K (\nabla u_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,K} &= \sum_K (p_h, \nabla v_h - \delta_K \nabla b_K)_{0,K} \\ &= -\sum_K \int_K \operatorname{div} p_h\, v_h\, dx + \sum_K \int_{\partial K} v_h\, p_h \cdot \nu\, d\sigma \\ &\quad -\sum_K \int_K \delta_K\, p_h \cdot \nabla b_K\, dx \\ &= -\sum_K \int_K \operatorname{div} p_h\, v_h\, dx + \sum_K \int_{\partial K} v_h\, p_h \cdot \nu\, d\sigma \\ &\quad +\sum_K \int_K \delta_K\, \operatorname{div} p_h\, b_K\, dx - \sum_K \int_{\partial K} p_h \cdot \nu\, \delta_K\, b_K\, d\sigma \end{aligned} \tag{3.75}$$

Or, $p_h \in RT^0$, donc $\operatorname{div} p_{h|K} \in P^0$, de plus la bulle b_K est à moyenne nulle sur le rectangle K, on en déduit que $\int_K \delta_K \operatorname{div} p_h\, b_K\, dx = 0$. D'autre part, puisque $p_h \in RT^0$, $p_h \cdot \nu_a \in P^0(a)$, et la bulle est à moyenne nulle sur chaque arête, donc le terme $\int_{\partial K} p_h \cdot \nu\, \delta_K\, b_K\, d\sigma = 0$. Par ailleurs, l'équation $(3.70)_1$ donne

$$\operatorname{div} p_{h|K} = -\Pi^0 f_{|K}\,, \qquad \text{pour tout rectangle } K \in \mathcal{T}_h\,. \tag{3.76}$$

Donc l'égalité (3.75) se réécrit :

$$\begin{aligned} (\nabla u_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,\Omega} &= \sum_K \int_K \Pi^0 f v_h\, dx - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a p_h \cdot \nu_a\, [v_h]\, d\sigma \\ &\quad + \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a p_h \cdot \nu_a\, v_h\, d\sigma \quad - \sum_K \int_K \Pi^0 f_{|K} \delta_K\, b_K\, dx \end{aligned} \tag{3.77}$$

Comme $v_h \in Q^1_{c,0}$, le saut de v_h est nul le long d'une arête interne, c'est-à-dire, $[v_h]_{|a} = 0$, $\forall a \in \mathcal{A}_i$, et v_h est nul le long d'une arête frontière, c'est-à-dire, $v_{h|a} = 0$, $\forall a \in \mathcal{A}_b$. Et par définition, $\int_K b_K\, dx = 0$. Donc (3.77) devient

$$\sum_K (\nabla u_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f, v_h)_{0,K}$$

Ce qui prouve *(i)*, car $\sum_K (\nabla u_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,K} = (\Pi^0 \nabla u_h, \Pi^0 \nabla v_h)_{0,\Omega}$.
(ii) L'écriture locale de p_h :
D'après la relation (3.19), p_h s'écrit localement

$$p_{h|K} = (\Pi^0 p_h)_{|K} + \frac{\operatorname{div} p_{h|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \gamma_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix}.$$

D'après $(3.70)_2$, $(\Pi^0 p_h)_{|K} = (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K}$ et d'après (3.76), $\operatorname{div} p_{h|K} = -\Pi^0 f_{|K}$. Donc

$$p_{h|K} = (\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \gamma_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix}.$$

Il reste maintenant à déterminer le coefficient γ_K. Choisissons $q_h = \sum_K \operatorname{sgn}(K) \operatorname{rot} b_K$ dans l'équation $(3.70)_2$; puisque le produit scalaire entre ∇u_h et $\operatorname{rot} b_K$ (Lemme 3.3.3, *(ii)*) est nul sur chaque rectangle K, nous obtenons

$$0 = \sum_K (p_h, q_h)_{0,K} = \sum_K \int_K p_h \cdot \operatorname{sgn}(K) \operatorname{rot} b_K \, dx\,. \tag{3.78}$$

En remplaçant p_h par sa valeur, ceci est encore équivalent à

$$\sum_K \int_K \Big[(\Pi^0 \nabla u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \gamma_K \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \Big] \cdot \operatorname{sgn}(K) \operatorname{rot} b_K \, dx = 0 \tag{3.79}$$

Or, $\displaystyle\int_K \Pi^0 (\nabla u_h) \cdot \operatorname{rot} b_K \, dx = 0$ (puisque le rotationnel de la bulle $\operatorname{rot} b_K$ est à moyenne nulle sur K) et

$$\int_K (x - x_K)^2 = \frac{|K|}{12} |e_x|^2 \quad \text{et} \quad \int_K (y - y_K)^2 = \frac{|K|}{12} |e_y|^2. \tag{3.80}$$

L'équation (3.79) devient :

$$\sum_K \gamma_K \operatorname{sgn}(K) (|e_x|^2 + |e_y|^2) = \sum_K \operatorname{sgn}(K) \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} (|e_x|^2 - |e_y|^2) \tag{3.81}$$

Pour déterminer γ_K sur chaque rectangle K, utilisons la propriété H_{div} des éléments de RT^0. Considérons d'abord le cas d'un maillage à quatre rectangles comme celui de la Figure 3.12 et $\mathcal{C}$ est le chemin représenté sur la Figure 3.12 :
On note $a_1 = \partial K_1 \cap \partial K_2$, $a_2 = \partial K_2 \cap \partial K_3$, $a_3 = \partial K_3 \cap \partial K_4$ et $a_4 = \partial K_1 \cap \partial K_4$.

Lemme 3.5.6 *La continuité de $p \cdot \nu_a$ le long des arêtes a_1, a_2, a_3 intersectant le chemin $\mathcal{C}$ implique la continuité de $p \cdot \nu_a$ le long de l'arête a_4.*

Preuve :
Soit a une arête interne du maillage $\mathcal{T}_h$ commune aux rectangles K_1 et K_2, tels que $\partial K_1 \cap \partial K_2 = \{a\}$. Soit ν_a le vecteur normal à l'arête a, orienté de K_1 vers K_2, alors p_h satisfait la relation :

$$p_h \cdot \nu_a + p_h \cdot \nu'_a = 0 \text{ le long de l'arête } a.$$

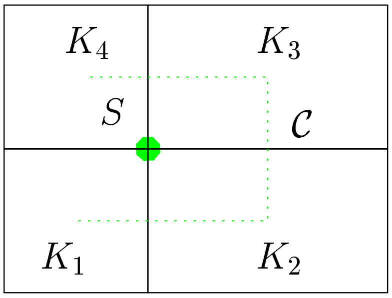

FIG. 3.12 – Chemin $\mathcal{C}$

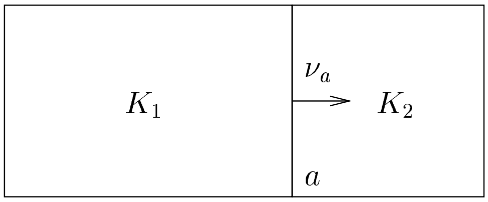

FIG. 3.13 – Arête verticale

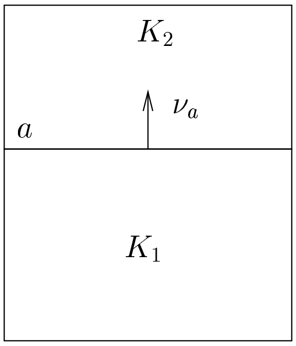

FIG. 3.14 – Arête horizontale

La condition de continuité de p_h le long de l'arête verticale a donne (Figure 3.13) :

$$|K_2|\gamma_{K_2} = -|K_1|\gamma_{K_1} + F(u_h, f, a, K_1, K_2) \tag{3.82}$$

où la fonction F est déterminée par :

$$\begin{aligned} F(u_h, f, a, K_1, K_2) \quad = \quad & -2|a|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_2}\Big) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{|K_1|}{2}\Pi^0 f_{|K_1} + \frac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2} \end{aligned} \tag{3.83}$$

De même, la continuité de p_h le long d'une arête horizontale a donne de façon analogue (Figure 3.14) :

$$|K_2|\gamma_{K_2} = -|K_1|\gamma_{K_1} + G(u_h, f, a, K_1, K_2) \tag{3.84}$$

où la fonction G est déterminée par :

$$G(u_h, f, a, K_1, K_2) = 2|a|\Big((\Pi^0\nabla u_h)_{|K_1} - (\Pi^0\nabla u_h)_{|K_2}\Big) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{|K_1|}{2}\Pi^0 f_{|K_1} - \frac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2}. \tag{3.85}$$

Supposons que $p_h \cdot \nu_a$ soit continue le long des arêtes a qui intersectent le chemin $\mathcal{C}$.

• Le long de l'arête $a_1 = \partial K_1 \cap \partial K_2$ (Figure 3.12), on a par la relation (3.82),

$$|K_2|\gamma_{K_2} = -|K_1|\gamma_{K_1} + F(u_h, f, a_1, K_1, K_2) \tag{3.86}$$

où F est définie par (3.83) :

$$F(u_h, f, a, K_1, K_2) = -2|a|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_2}\Big)\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{|K_1|}{2}\Pi^0 f_{|K_1} + \frac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2}. \tag{3.87}$$

• La continuité le long de $a_2 = \partial K_2 \cap \partial K_3$ donne par la relation (3.84) :

$$|K_3|\gamma_{K_3} = -|K_2|\gamma_{K_2} + G(u_h, f, a_2, K_2, K_3) \tag{3.88}$$

où G est déterminée par :

$$G(u_h, f, a_2, K_2, K_3) = 2|a_2|\Big((\Pi^0\nabla u_h)_{|K_2} - (\Pi^0\nabla u_h)_{|K_3}\Big)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2} - \frac{|K_3|}{2}\Pi^0 f_{|K_3} \tag{3.89}$$

L'équation (3.86) devient :

$$-|K_3|\gamma_{K_3} = -|K_1|\gamma_{K_1} + F(u_h, f, a_1, K_1, K_2) - G(u_h, f, a_2, K_2, K_3) \tag{3.90}$$

• Par continuité le long de $a_3 = \partial K_3 \cap \partial K_4$ et la relation (3.82), l'équation (3.90) devient :

$$\begin{aligned} -(-|K_4|\gamma_{K_4} + F(u_h, f, a_3, K_4, K_3)) &= -|K_1|\gamma_{K_1} + F(u_h, f, a_1, K_1, K_2) \\ &\quad -G(u_h, f, a_2, K_2, K_3) \end{aligned} \tag{3.91}$$

c'est-à-dire

$$|K_4|\gamma_{K_4} = -|K_1|\gamma_{K_1} + F(u_h, f, a_3, K_4, K_3) + F(u_h, f, a_1, K_1, K_2) - G(u_h, f, a_2, K_2, K_3) \tag{3.92}$$

En remplaçant F et G par leurs valeurs, (3.92) s'écrit :

$$\begin{aligned} |K_4|\gamma_{K_4} = &-|K_1|\gamma_{K_1} - 2|a_3|\Big[\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_4} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_3}\Big]\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{|K_4|}{2}\Pi^0 f_{|K_4} + \tfrac{|K_3|}{2}\Pi^0 f_{|K_3} \\ &-2|a_1|\Big[\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_2}\Big]\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{|K_1|}{2}\Pi^0 f_{|K_1} + \tfrac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2} \\ &-\Big[2|a_2|\Big[(\Pi^0\nabla u_h)_{|K_2} - (\Pi^0\nabla u_h)_{|K_3}\Big]\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2} - \tfrac{|K_3|}{2}\Pi^0 f_{|K_3}\Big] \end{aligned} \tag{3.93}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} |K_4|\gamma_{K_4} \;=\; &-|K_1|\gamma_{K_1} \\ &-2\Big[|a_3|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_4} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_3}\Big) + |a_1|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_2}\Big)\Big]\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &-2|a_2|\Big((\Pi^0\nabla u_h)_{|K_2} - (\Pi^0\nabla u_h)_{|K_3}\Big)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{|K_4|}{2}\Pi^0 f_{|K_4} + \frac{|K_3|}{2}\Pi^0 f_{|K_3} \\ &+\frac{|K_1|}{2}\Pi^0 f_{|K_1} + \frac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2} + \frac{|K_2|}{2}\Pi^0 f_{|K_2} + \frac{|K_3|}{2}\Pi^0 f_{|K_3} \end{aligned} \tag{3.94}$$

encore équivalent à

$$
\begin{aligned}
|K_4|\gamma_{K_4} \;=\; & -|K_1|\gamma_{K_1} \\
& -2\Big[|a_3|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_4} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_3}\Big)+|a_1|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{|K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{|K_2}\Big)\Big]\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& -2|a_2|\Big((\Pi^0\nabla u_h)_{|K_2} - (\Pi^0\nabla u_h)_{|K_3}\Big)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& +\sum_K \frac{|K|}{2}\Pi^0 f_{|K} - \frac{|K_4|}{2}\Pi^0 f_{|K_4} - \frac{|K_1|}{2}\Pi^0 f_{|K_1}
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

Utilisons la forme variationnelle (3.72) dont u_h est solution. Soit v_h la fonction de base de $Q^1_{c,0}$ associée au sommet S. Pour ce choix de v_h,

$$
\begin{gathered}
\Pi^0(\nabla v_h)_{K_1} = \tfrac{1}{2|K_1|}\begin{pmatrix} |a_1| \\ |a_4| \end{pmatrix} \;;\quad \Pi^0(\nabla v_h)_{K_2} = -\tfrac{1}{2|K_2|}\begin{pmatrix} |a_1| \\ -|a_2| \end{pmatrix} \\
\Pi^0(\nabla v_h)_{K_3} = -\tfrac{1}{2|K_3|}\begin{pmatrix} |a_3| \\ |a_2| \end{pmatrix} \;;\quad \Pi^0(\nabla v_h)_{K_4} = -\tfrac{1}{2|K_4|}\begin{pmatrix} -|a_3| \\ |a_4| \end{pmatrix} \\
\Pi^0(v_h)_K = \tfrac{1}{4}
\end{gathered}
\tag{3.96}
$$

La relation (3.72) s'écrit encore

$$
\sum_K |K|\Pi^0(\nabla u_h)_K \cdot \Pi^0(\nabla v_h)_K = \sum_K |K|(\Pi^0 f)_K \Pi^0(v_h)_K \tag{3.97}
$$

En remplaçant dans (3.97) pour $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\Big[&\Pi^0(\nabla u_h)_{K_1}\cdot\begin{pmatrix} |a_1| \\ |a_4| \end{pmatrix} - \Pi^0(\nabla u_h)_{K_2}\cdot\begin{pmatrix} |a_1| \\ -|a_2| \end{pmatrix} - \Pi^0(\nabla u_h)_{K_3}\cdot\begin{pmatrix} |a_3| \\ |a_2| \end{pmatrix} \\
&-\Pi^0(\nabla u_h)_{K_4}\cdot\begin{pmatrix} -|a_3| \\ |a_4| \end{pmatrix}\Big] = \sum_K \frac{|K|}{4}(\Pi^0 f)_K
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

Equivalent à l'égalité :

$$
\begin{aligned}
&\Big[|a_1|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{K_2}\Big)+|a_3|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{K_4} - \Pi^0(\nabla u_h)_{K_3}\Big)\Big]\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+\Big[|a_2|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{K_2} - \Pi^0(\nabla u_h)_{K_3}\Big)+|a_4|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{K_4}\Big)\Big]\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_K \frac{|K|}{2}(\Pi^0 f)_K
\end{aligned}
\tag{3.99}
$$

En multipliant par 2 la relation (3.99) et en substituant dans l'équation (3.95), on obtient

$$
\begin{aligned}
|K_4|\gamma_{K_4} = -|K_1|\gamma_{K_1} + 2|a_4|\Big(\Pi^0(\nabla u_h)_{K_1} - \Pi^0(\nabla u_h)_{K_4}\Big)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
-\tfrac{|K_4|}{2}\Pi^0 f_{|K_4} - \tfrac{|K_1|}{2}\Pi^0 f_{|K_1}
\end{aligned}
\tag{3.100}
$$

Il s'agit des relations (3.84)-(3.85) adaptées aux rectangles K_1 et K_4. La condition (3.100) est donc équivalente à la continuité de $p_h \cdot \nu_{a_4}$, où a_4 est l'arête frontière entre les rectangles

K_1 et K_4. Ce qui prouve le lemme. ■

Ce lemme donné pour 4 mailles se généralise au cas d'un maillage $\mathcal{T}_h$ tel qu'il a été introduit au début de ce chapitre. En effet, considérons le domaine Ω, muni du chemin $\mathcal{C}'$ représenté en pointillés sur la Figure 3.15.

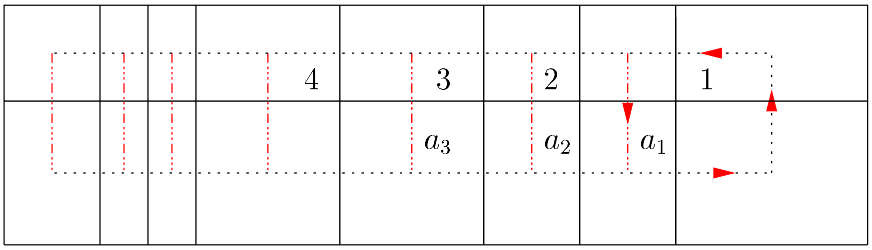

FIG. 3.15 – Chemin $\mathcal{C}'$ parcourant le maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω.

On suppose que la continuité de $p_h \cdot \nu_a$ est vraie sur le chemin $\mathcal{C}'$. En appliquant le Lemme 3.5.6 sur le chemin fléché 1 (Figure 3.15) on obtient la continuité de $p_h \cdot \nu_{a_1}$. De même, grâce au Lemme 3.5.6 appliqué au chemin 2, on obtient la continuité de $p_h \cdot \nu_{a_2}$. En raisonnant par récurrence, on obtient la continuité de $p_h \cdot \nu_a$ sur toutes les arêtes internes a du maillage. D'où l'on déduit le lemme suivant :

Lemme 3.5.7 *Soient u_h la solution du problème (3.72) et p_h donné sur chaque rectangle K par la relation (3.73), où γ_K reste à définir. Soit $\mathcal{C}$ un chemin parcourant tous les rectangles du domaine Ω. La continuité de $p_h \cdot \nu_a$ le long de chaque arête a qui intersecte le chemin $\mathcal{C}$ (Figure 3.16) est équivalente à la continuité de $p_h \cdot \nu_a$ le long de chaque arête interne au domaine Ω.*

Ceci nous permet d'en déduire un système linéaire à NE équations, dont le vecteur $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{NE})$ est solution, donné par les $(NE-1)$ équations de continuité de $p_h \cdot \nu_a$ le long de chaque arête a, intersectant le chemin $\mathcal{C}$ auxquelles, on adjoint l'équation (3.81).

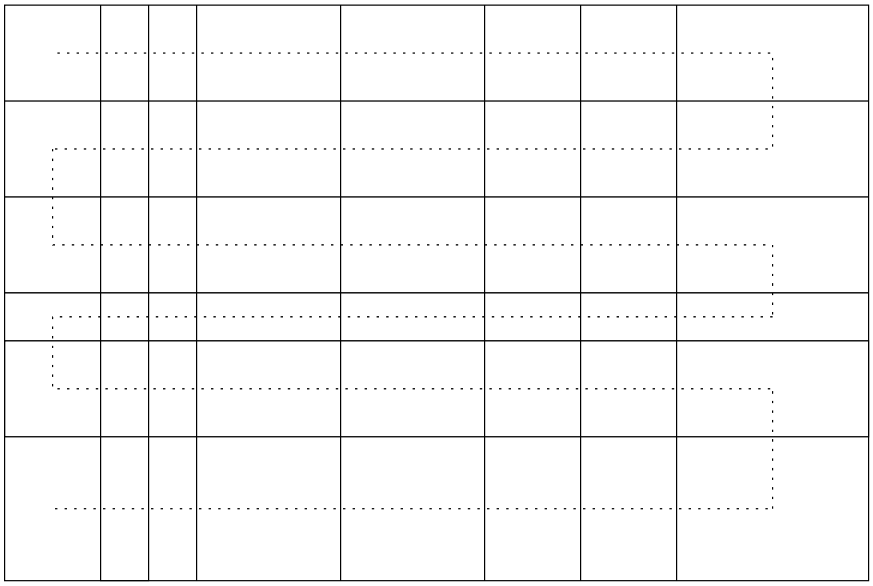

FIG. 3.16 – Chemin $\mathcal{C}$ parcourant le maillage $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω.

Lemme 3.5.8 *$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N)$ solution du système $A\gamma = b$ où*

$$A = \begin{pmatrix} |K_1| & |K_2| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |K_2| & |K_3| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & |K_{N-1}| & |K_N| \\ |e_x|^2 + |e_y|^2 & -(|e_x|^2 + |e_y|^2) & \cdots & \cdots & \cdots & \operatorname{sgn}(K_N)(|e_x|^2 + |e_y|^2 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} H(u_h, f, |a_1|, K_1, K_2) \\ H(u_h, f, |a_2|K_2, K_3) \\ \vdots \\ \vdots \\ H(u_h, f, |a_{N-1}|, K_{N-2}, K_{N-1}) \\ \sum_K \operatorname{sgn}(K) \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2}(|e_x|^2 - |e_y|^2) \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

où $N = NE$, la fonction H désigne F ou G (relations (3.83) et (3.85)) selon les cas et a_i est l'arête commune aux rectangles K_i et K_{i+1}.

Preuve :
Ce système admet une unique solution, en effet le déterminant de la matrice A est :

$$\det A = |K_2| \cdots |K_{N-1}|(|e_x|^2 + |e_y|^2)(\operatorname{sgn}(K_N)|K_1| + (-1)^{N+1} \operatorname{sgn}(K_1)|K_N|).$$

D'autre part, le signe du dernier rectangle vu par le chemin $\mathcal{C}$ est $\operatorname{sgn}(K_N) = (-1)^{N+1}$ et $\operatorname{sgn}(K_1) = 1$. Donc $|\det A| = |K_2| \cdots |K_{N-1}|(|e_x|^2 + |e_y|^2)(|K_1| + |K_N|)$ et $|\det A|$ est non

nul.
Donc γ_K est déterminé de façon unique par la résolution du système $A\gamma = b$ et p_h s'écrit dans chaque rectangle en fonction de γ_K (qui dépend des rectangles voisins)

$$p_{h|K} = \nabla u_h(x_K, y_K) - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \gamma_K \operatorname{rot} b_K \,. \tag{3.102}$$

Ici, nous n'avons pas d'écriture de p_h locale à chaque rectangle K. Ceci est probablement dû au choix de l'espace de fonctions test $X_{2,h}$ qui n'est pas totalement discontinu par maille. Nous savons par le Lemme 3.5.5 que le problème (3.70) admet une unique solution (u_h, p_h) de $Q^1_{c,0} \times RT^0$. Nous venons de prouver que cette solution est elle même solution du problème couplé (3.72-3.73) qui admet une unique solution. C'est donc la solution du problème (3.70). D'où l'équivalence des deux problèmes. ■

Lemme 3.5.9 (Une caractérisation de l'espace Q^1_c)
Soit u_h tel que $u_{h|K} \in Q^1(K)$ pour tout rectangle K du maillage. Alors, $u_h \in Q^1_c$ si et seulement si u_h est continu au milieu des arêtes internes et $\nabla u_h \cdot \tau$ est continu le long du chemin $\mathcal{C}$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} Q^1_c \;=\; & \{u_h / u_{h|K} \in Q^1(K) \,,\, \forall K \in \mathcal{T}_h \,,\, \int_a [u_h]\, d\sigma = 0 \,,\, \forall a \in \mathcal{A}_i \,, \\ & \nabla u_h \cdot \tau_a \textit{ est continu le long du chemin } \mathcal{C}\} \end{aligned}$$

En particulier, sa dimension est $\dim Q^1_c = 4NE - NA_i - (NE - 1) = NP$.

Preuve :
Notons

$$Q = \{u_h \in Q^1(K) \,,\, \forall K \in \mathcal{T}_h \,,\, \int_a [u_h]\, d\sigma = 0 \,,\, \forall a \in \mathcal{A}_i \,,\, \nabla u_h \cdot \tau_a \text{ est continu le long du chemin } \mathcal{C}\} \,.$$

L'inclusion $Q^1_c \subseteq Q$ est évidente. Montrons donc l'inclusion $Q \subseteq Q^1_c$. Comme dans la preuve du Lemme 3.5.6, on se limite au domaine simple composé de quatre rectangles (Figure 3.12). On suppose que u_h est continu au milieu des quatre arêtes a_1, a_2, a_3 et a_4 et que $\nabla u_h \cdot \tau_{a_i}$ est continu le long de l'arête a_i, pour $i = 1, 2, 3$. On déduit algébriquement de ces relations de continuités que $\nabla u_h \cdot \tau_{a_4}$ est continu le long de l'arête a_4. D'autre part la continuité de u_h au milieu des arêtes internes et la continuité de $\nabla u_h \cdot \tau_a$ au niveau des arêtes internes implique la continuité de u_h aux interfaces du maillage, c'est-à-dire, la continuité de u_h sur tout le domaine. On a donc $Q \subseteq Q^1_c$. Ce qui prouve le lemme. ■

Lemme 3.5.10 (Lien entre les schémas boîte 1 et 2 : $Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$ et $Q^1_{c,0} \times RT^0$)
La solution $(u_h, p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$ du schéma boîte 1, (3.23) est donnée explicitement en fonction de la solution $(\bar{u}_h, \bar{p}_h) \in Q^1_{c,0} \times RT^0$ du schéma boîte 2, (3.70) par

$$u_h = \bar{u}_h + \sum_K \alpha_K \, b_K \quad \textit{et} \quad p_h = \bar{p}_h + \sum_K \beta_K \operatorname{rot} b_K \tag{3.103}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_K &= \frac{3|K|}{4}\,\frac{1}{|e_x|^2+|e_y|^2}\,(\bar{p}_h-\nabla\bar{u}_h,\nabla b_K)_{0,K}\\
\beta_K &= -\frac{3|K|}{4}\,\frac{1}{|e_x|^2+|e_y|^2}\,(\bar{p}_h-\nabla\bar{u}_h,\operatorname{rot} b_K)_{0,K}
\end{aligned}$$

Preuve :
Soit $(\bar{u}_h,\bar{p}_h)\in Q^1_{c,0}\times RT^0$ la solution du schéma boîte 2, (3.70). On pose

$$u_h=\bar{u}_h+\sum_K \alpha_K\, b_K \quad \text{et} \quad p_h=\bar{p}_h+\sum_K \beta_K\, \operatorname{rot} b_K \tag{3.104}$$

On cherche $(\alpha_K,\beta_K)_{K\in\mathcal{T}_h}$ tel que $(u_h,p_h)\in Q^1_{nc,0}\times(RT^0+\Phi)$ est solution du schéma boîte 1 (3.23).
• p_h ainsi défini est tel que $\operatorname{div} p_h=\operatorname{div}\bar{p}_h$. Les équations $(3.23)_1$ et $(3.70)_1$ sont identiques. Donc p_h vérifie l'équation $(3.23)_1$, sans contrainte sur les coefficients α_K, β_K.
• A quelles conditions, (u_h,p_h) satisfait l'équation $(3.23)_2$? C'est-à-dire

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(p_h-\nabla u_h,q_h)_{0,K}=0\ ,\ \forall q_h\in(P^0)^2+P^0(\nabla b_K)+P^0(\operatorname{rot} b_K).$$

D'après l'équation $(3.70)_2$ et puisque la moyenne du gradient et du rotationnel de la bulle non-conforme b_K sont nuls sur chaque rectangle K, on a

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(p_h-\nabla u_h,q_h)_{0,K}=0\ ,\ \forall q_h\in(P^0)^2\,.$$

En choisissant $q_h=\nabla b_K$, on obtient

$$(p_h-\nabla u_h,q_h)_{0,K}=(\bar{p}_h-\nabla\bar{u}_h,\nabla b_K)_{0,K}+(\beta_K\ \operatorname{rot} b_K,\nabla b_K)_{0,K}-(\alpha_K\,\nabla b_K,\nabla b_K)_{0,K}\,.$$

Par définition de b_K, le produit scalaire $(\operatorname{rot} b_K,\nabla b_K)_{0,K}$ est nul. Donc α_K s'exprime sur chaque rectangle K en fonction de $\bar{u}_{h|K}$ et $\bar{p}_{h|K}$ par

$$\alpha_K=\frac{3|K|}{4}\frac{1}{|e_x|^2+|e_y|^2}(\bar{p}_h-\nabla\bar{u}_h,\nabla b_K)_{0,K}\,.$$

Ce qui détermine α_K de façon unique sur K, puisque la solution $(\bar{u}_h,\bar{p}_h)$ du schéma boîte (3.70) est unique.
De même, en prenant $q_h=\operatorname{rot} b_K$, on obtient

$$(p_h-\nabla u_h,\operatorname{rot} b_K)_{0,K}=(\bar{p}_h-\nabla\bar{u}_h,\operatorname{rot} b_K)_{0,K}+(\beta_K\ \operatorname{rot} b_K,\operatorname{rot} b_K)_{0,K}-(\alpha_K\,\nabla b_K,\operatorname{rot} b_K)_{0,K}$$

Or, nous avons vu que $(\operatorname{rot} b_K,\nabla b_K)_{0,K}=0$. Donc on peut exprimer le coefficient β_K de façon unique sur K en fonction de l'unique solution $(\bar{u}_h,\bar{p}_h)$ du schéma boîte (3.70) par

$$\beta_K=-\frac{3|K|}{4}\frac{1}{|e_x|^2+|e_y|^2}(\bar{p}_h-\nabla\bar{u}_h,\operatorname{rot} b_K)_{0,K}\,.$$

Ce qui prouve que $(u_h, p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$ est solution du schéma boîte (3.23), qui admet une unique solution. Donc $(u_h, p_h) \in Q^1_{nc,0} \times (RT^0 + \Phi)$ est la solution du schéma boîte (3.23).
Remarquons que puisque $(\bar{u}_h, \bar{p}_h) \in Q^1_{c,0} \times RT^0$ est la solution du schéma boîte (3.70), les coefficients β_K satisfont la relation suivante

$$\sum_K \beta_K \operatorname{sgn}(K) |\operatorname{rot} b_K|^2 = 0 \,. \tag{3.105}$$

■

3.6 Schéma boîte 3 : $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot}} \times RT^0$

3.6.1 L'espace Q^1_{rot}

Rappelons la définition de l'espace Q^1_{rot} introduit par Rannacher et Turek [38]. C'est un espace de type non-conforme, dont les éléments appartiennent localement à l'espace vectoriel noté $Q^1_{\mathrm{rot}}(K)$ engendré par $1, x, y, x^2 - y^2$. Définissons les fonctions de base l_a indicées par les arêtes du maillage

$$l_a(v_h) = \frac{1}{|a|} \int_a v_h \, d\sigma \,.$$

Alors l'espace Q^1_{rot} est défini à l'aide des fonctions l_a par

$$Q^1_{\mathrm{rot}} = \left\{ v_h \in L^2(\Omega); v_{h|K} \in Q^1_{\mathrm{rot}}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h,\ l_a(v_{h|K_1}) = l_a(v_{h|K_2}),\ \forall a = \partial K_1 \cap \partial K_2 \right\} . \tag{3.106}$$

Sa restriction aux éléments nuls sur la frontière Γ est

$$Q^1_{\mathrm{rot},0} = \left\{ v \in Q^1_{\mathrm{rot}} \, ; \, l_a(v_h) = 0, \ \forall a \in \mathcal{A}_b \right\} . \tag{3.107}$$

Lemme 3.6.1 (Fonctions de base de l'espace Q^1_{rot})
(i) Q^1_{rot} est un espace de dimension NA_i, dont les degrés de liberté sont donnés par les fonctions $(l_a)_{a \in \mathcal{A}_i}$.
(ii) La base locale de Q^1_{rot} sur l'élément de référence $\hat{K}$ est $(p_i)_{1 \le i \le 4}$:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 0.75 + 1.5\hat{x} - 2.5\hat{y} - 1.5(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) \\
\hat{p}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= -0.25 - 0.5\hat{x} + 1.5\hat{y} + 1.5(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) \\
\hat{p}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= -0.25 + 1.5\hat{x} - 0.5\hat{y} - 1.5(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) \\
\hat{p}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= 0.75 - 2.5\hat{x} + 1.5\hat{y} + 1.5(\hat{x}^2 - \hat{y}^2)
\end{aligned}$$

Remarque :
Dans le cas d'un domaine rectangulaire maillé par des rectangles, la géométrie du maillage est telle que le coefficient $\alpha_K \in (0, \pi)$ qui mesure l'angle maximal entre les vecteur normaux de deux côtés opposés est $\alpha_K = 0$.

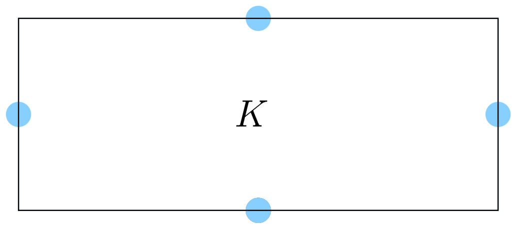

FIG. 3.17 – Les degrés de liberté de Q^1_{rot} dans le rectangle K

Lemme 3.6.2 (Opérateur d'interpolation sur l'espace Q^1_{rot})
Soit i_h l'opérateur d'interpolation global introduit par Rannacher et Turek, [38] dont la restriction i_K à chaque rectangle K est définie par les degrés de liberté l_a. Dans le cas de maillages en rectangle, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$|v - i_h v|_{0,\Omega} + h\,|v - i_h v|_{1,h} \leq C\,h^2\,\|v\|_{2,\Omega} \tag{3.108}$$

Lemme 3.6.3 (Propriété de l'espace $Q^1_{\text{rot},0}$)
Par construction, l'espace $Q^1_{\text{rot},0}$ satisfait les identités suivantes : pour tout $v_h \in Q^1_{\text{rot},0}$,

$$\begin{array}{lll} (i)\ \forall a \in \mathcal{A}_i, & \int_a [v_h]\,p\,d\sigma = 0\,, & \forall p \in P^0(a)\,, \\ (ii)\ \forall a \in \mathcal{A}_b\,, & \int_a v_h\,p\,d\sigma = 0\,, & \forall p \in P^0(a)\,. \end{array} \tag{3.109}$$

Lemme 3.6.4 (Lemme de Poincaré discret)
Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω, telle que

$$|u|_{0,\Omega} \leq C|u|_{1,h}\,, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega) + Q^1_{\text{rot},0}\,. \tag{3.110}$$

Preuve :
Le lemme se démontre de manière analogue au lemme de Poincaré discret pour l'espace $H^1_0(\Omega) + Q^1_{nc,0}$ (Lemme 3.4.3).

$$|u|_{0,\Omega} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(u,g)_{0,\Omega}|}{|u|_{0,\Omega}} \tag{3.111}$$

Soit $g \in L^2$, $\exists\, p \in H^1(\Omega)^2$ tel que $\operatorname{div} p = g$ et $\|p\|_{1,\Omega} \leq C|g|_{\Omega}$.
Soit $u \in H^1_0(\Omega) + Q^1_{\text{rot},0}$, en remplaçant g par sa valeur et en intégrant par parties, on a

$$(u,g)_{0,\Omega} = (u, \operatorname{div} p)_{0,\Omega} = \underbrace{-\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\,dx}_{(I)} + \underbrace{\sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu\,u\,d\sigma}_{(II)}\,. \tag{3.112}$$

Majorons les deux termes du second membre :
• L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|(I)| = |\sum_K \int_K \nabla u \cdot p\,dx\,| \leq |u|_{1,h}\,|p|_{0,\Omega}\,.$$

• $p \in (H^1(\Omega)^2) \cap H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, donc sa composante normale est continue par arête et donc (II) est égal à

$$(II) = \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu \, u \, d\sigma = \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a p \cdot \nu_a \, u \, d\sigma \; - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a p \cdot \nu_a \, [u] \, d\sigma \;, \tag{3.113}$$

où $[u]$ est le saut de u à travers l'arête a. Soit $\overline{p \cdot \nu_a} = \frac{1}{|a|} \int_a p \cdot \nu_a d\sigma$ la moyenne de $p \cdot \nu_a$ le long de l'arête a. $u \in H_0^1(\Omega) + Q^1_{\mathrm{rot},0}$ et l'espace $H_0^1(\Omega) + Q^1_{\mathrm{rot},0}$ satisfait la propriété (3.109) donc l'égalité (3.113) devient

$$\begin{aligned}(II) = \sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu \, u \, d\sigma \;&=\; \sum_{a \in \mathcal{A}_b} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a}) \, u \, d\sigma - \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \int_a (p \cdot \nu_a - \overline{p \cdot \nu_a}) \, [u] d\sigma \\ &=\; \sum_K \sum_{e \in \partial K} \int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e}) \, u \, d\sigma\end{aligned}$$

Le Lemme 3.2.1 et les propriétés du maillage donnent l'estimation de l'intégrale de bord :

$$|\int_e (p \cdot \nu_e - \overline{p \cdot \nu_e}) \, u \, d\sigma| \leq C \, h_K |u|_{1,K} \, |p|_{1,K}$$

Ainsi,

$$|(II)| = |\sum_K \int_{\partial K} p \cdot \nu \, u \, d\sigma| \leq 4Ch|u|_{1,h} \, |p|_{1,\Omega}$$

Finalement, on obtient

$$|(u, g)_{0,\Omega}| \leq (4Ch + 1)|u|_{1,h} \, |p|_{1,\Omega} \leq (4Ch + 1)|u|_{1,h} \, \underbrace{\|p\|_{1,\Omega}}_{\leq C(\Omega)|g|_{0,\Omega}}$$

Nous en déduisons le résultat annoncé. ■

Corollaire 3.6.1 *La semi-norme* $|\cdot|_{1,h}$ *est une norme sur l'espace* $H_0^1(\Omega) + Q^1_{\mathrm{rot},0}$.

3.6.2 Schéma boîte 3

Dans cette partie, nous proposons un troisième schéma boîte, associé au problème de Poisson mixte (3.2), pour lequel les inconnues sont toutes situées au niveau des arêtes. On conserve l'espace de Raviart-Thomas RT^0 comme espace d'approximation pour le flux p. On cherche un espace d'éléments finis dont les degrés de liberté sont localisés au niveau des arêtes, pour approcher l'inconnue scalaire u. On choisit l'espace de Rannacher et Turek. Le choix $M_{1,h} = Q^1_{\mathrm{rot},0}$ et $X_{1,h} = RT^0$ correspond à $NA_i + NA = 4\,NE$ degrés de liberté. On choisit les espaces de test de façon à vérifier l'égalité (3.4) entre nombre d'inconnues et nombre d'équations. L'espace de test $M_{2,h}$ est l'espace des polynômes constants totalement discontinus par rectangle, encore noté P^0

$$M_{2,h} = \Big\{ v_h \in L^2(\Omega) \;;\; v_{h|K} \in P^0(K) \;, \quad \forall \, K \in \mathcal{T}_h \Big\} \tag{3.114}$$

et l'espace de test $X_{2,h}$ est l'espace des polynômes constants de $\mathbb{R}^2$ totalement discontinus, enrichi sur chaque rectangle par le rotationnel de la bulle non-conforme.

$$\begin{aligned} X_{2,h} &= \left\{ q_h \in (L^2(\Omega))^2 \; ; \; q_{h|_K} \in (P^0(K))^2 + P^0 \operatorname{rot} b_K \; , \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\} \\ &= (P^0(K))^2 + \Phi \end{aligned} \tag{3.115}$$

où Φ est l'espace défini dans le Lemme 3.3.7 engendré par le rotationnel de la bulle non-conforme :

$$\Phi = \{ \phi \setminus \phi_{|K} = \alpha_K \operatorname{rot} b_K, \; \alpha_K \in \mathbb{R}, \;\; \forall K \in \mathcal{T}_h \} \,.$$

En particulier, l'espace de test $X_{2,h}$, contient les gradients de u_h ; $\nabla(M_{1,h}) \subseteq X_{2,h}$.

Définition 3.6.1 (Schéma boîte 3)
Soit le schéma boîte suivant : trouver $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \times RT^0$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{div} p_h + f, v_h)_{0,K} = 0 \; , \; \forall v_h \in P^0 \\ \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (p_h - \nabla u_h, q_h)_{0,K} = 0 \; , \; \forall q_h \in (P^0)^2 + \Phi \,. \end{array} \right. \tag{3.116}$$

Lemme 3.6.5 (Egalité des dimensions)
D'après les relations d'Euler, l'égalité des dimensions entre les espaces d'inconnues et les espaces de test est vérifiée :

$$\dim Q^1_{\mathrm{rot},0} \, + \dim RT^0 \, = \dim P^0 \, + \dim((P^0)^2 + \Phi).$$

Lemme 3.6.6 *Le problème discret (3.116) admet une unique solution* $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \times RT^0$.

Preuve :
Puisque dim $X_{1,h}$ + dim $M_{1,h}$ = dim $X_{2,h}$ + dim $M_{2,h}$ et que (3.116) est un problème linéaire, il suffit de prouver que $f = 0$ implique que $u_h = 0$ et $p_h = 0$. div p_h est constant par rectangle, donc l'équation $(3.116)_1$ implique que $\operatorname{div} p_{h|K} = 0$. D'autre part, $p_{h|K} \in RT^0(K)$, donc p_h devient un élément de $X_{2,h}$. Prenons $q_h = p_h \in X_{2,h}$ dans l'équation $(3.116)_2$; en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} |p_h|^2_{0,\Omega} &= \sum_K \int_K p_h \cdot \nabla \, u_h \, dx \\ &= -\sum_K \int_K \underbrace{\operatorname{div} p_h}_{=0} \, u_h \, dx + \sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu) \, u_h \, d\sigma \\ &= \sum_{a \in A_b} \int_a p_h \cdot \nu_a \, u_h \, d\sigma - \sum_{a \in A_i} \int_a p_h \cdot \nu_a \, [u_h] \, d\sigma \end{aligned}$$

Puisque $p_h \cdot \nu_a \in P^0(a)$ $(p_h \in RT^0)$ et que $u_h \in Q^1_{\mathrm{rot},0}$, par le Lemme 3.6.3, on a $|p_h|^2_{0,\Omega} = 0$. Donc p_h est identiquement nul.

Pour prouver que u_h est nul, prenons $q_h = \nabla u_h \in X_{2,h}$ dans l'équation $(3.116)_2$. Puisque p_h est nul, on obtient $\sum_K |\nabla u_h|^2_{0,K} = 0$. Donc u_h est constant par rectangle. Les propriétés de l'espace $Q^1_{\mathrm{rot},0}$ impliquent que u_h est identiquement nul. D'où l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.116). ∎

Proposition 3.6.1 *La solution $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \times RT^0$ du schéma boîte (3.116) est telle que :*
(i) $u_h \in Q^1_{\mathrm{rot},0}$ est solution du problème variationnel

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,K} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\Pi^0 f_{|K}, v_h)_{0,K}\ ,\ \forall v_h \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \tag{3.117}$$

(ii) p_h s'écrit localement sur chaque rectangle K

$$p_{h|K} = \nabla u_{h|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \begin{pmatrix} |e_y|^2 (x - x_K) \\ |e_x|^2 (y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.118}$$

où (x_K, y_K) est le centre du rectangle K et e_x, e_y sont les dimensions de K.

La solution $u_h \in Q^1_{\mathrm{rot},0}$ du schéma boîte (3.116) est la solution du problème non-conforme standard de Rannacher-Turek pour un second membre constant par maille.

Preuve :
(i) Soit $v_h \in Q^1_{\mathrm{rot},0}$, alors $\nabla v_h \in X_{2,h}$. En intégrant par parties, l'équation $(3.116)_2$ pour $q_h = \nabla v_h$, on obtient

$$\sum_K (\nabla\, u_h\, ,\, \nabla\, v_h)_{0,K} = \sum_K (p_h, \nabla\, v_h)_{0,K} = -\sum_K \int_K \mathrm{div}\ p_h\, v_h\, dx + \sum_K \int_{\partial K} (p_h \cdot \nu)\ v_h\, d\sigma \tag{3.119}$$

Puisque $p_h \in RT^0$, $\mathrm{div}\, p_h \in P^0$, et donc l'équation $(3.116)_1$ implique que pour tout rectangle K

$$\mathrm{div}\, p_{h|K} = -(\Pi^0 f)_{|K} \tag{3.120}$$

Puisque la composante normale $p_h \cdot \nu_a$ de p_h est continue le long de l'arête a et $\mathrm{div}\, p_{h|K} = -(\Pi^0 f)_{|K}$, l'identité (3.119) se réécrit

$$\sum_K (\nabla\, u_h\, ,\, \nabla\, v_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f, v_h)_{0,K} + \sum_{a\in A_b} \int_a p_h \cdot \nu_a\, v_h\, d\sigma - \sum_{a\in A_i} \int_a p_h \cdot \nu_a\, [v_h]\, d\sigma\,. \tag{3.121}$$

Or, $p_h \in RT^0$, donc $p_h \cdot \nu_a \in P^0(a)$ et $v_h \in Q^1_{\mathrm{rot},0}$. Donc les deux derniers termes du membre de droite sont nuls par le Lemme 3.6.3. Ce qui prouve le premier point.
(ii) p_h appartient à RT^0, donc d'après la relation (3.19), il s'écrit localement

$$p_{h|K} \;=\; p_h(x_K, y_K) + \gamma \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

Or, $-\Pi^0 f = \operatorname{div} p_{h|K} = 2\gamma$ d'aprés les équations (3.120) et (3.122). D'autre part, en choisissant $q_h \in (P^0)^2$ dans l'équation $(3.116)_2$, on obtient $(\Pi^0 p_h)_{|K} = (\Pi^0 \nabla\, u_h)_{|K}$. Donc, l'identité (3.122) est équivalente à

$$p_{h|K} = (\Pi^0 \nabla\, u_h)_{|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.123}$$

Localement, le gradient de u_h sur K est égal

$$\nabla\, u_{h\,|K} = (\Pi^0 \nabla\, u_h)_{|K} + \eta \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.124}$$

pour un certain $\eta \in \mathbb{R}$. Donc, l'équation (3.123) se réécrit en fonction de $\nabla\, u_{h\,|K}$:

$$p_{h|K} = \nabla\, u_{h\,|K} - \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + (\delta - \eta) \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.125}$$

En posant $\tilde{\eta} = \delta - \eta$, nous obtenons :

$$p_{h|K} - \nabla\, u_{h\,|K} = -\frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \tilde{\eta} \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

Choisissons $q_h = \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \in X_{2,h}$ dans l'équation $(3.116)_2$, on obtient en remplaçant $p_h - \nabla u_h$ par sa valeur

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_K (p_h - \nabla u_h, q_h)_{0,K} \\
&= \sum_K \Big(-\frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \tilde{\eta} \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \Big)_{0,K} \\
&= \sum_K \Big(-\frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \int_K (x - x_K)^2 - (y - y_K)^2 + \tilde{\eta} \int_K (x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 \Big)
\end{aligned}$$

D'après les relations (3.34), on a

$$\int_K (x - x_K)^2 - (y - y_K)^2 = \frac{|K|}{12}(|e_x|^2 - |e_y|^2) \text{ et } \int_K (x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = \frac{|K|}{12}(|e_x|^2 + |e_y|^2)\,.$$

Ce qui donne

$$\tilde{\eta} = \frac{\Pi^0 f_{|K}}{2} \frac{|e_x|^2 - |e_y|^2}{|e_x|^2 + |e_y|^2}\,. \tag{3.127}$$

D'où on déduit *(ii)*. ■

3.6.3 Etude de la stabilité du schéma boîte 3

Proposition 3.6.2 (Stabilité)
La solution (u_h, p_h) du problème (3.116) satisfait l'estimation suivante :

$$\|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C|f|_{0,\Omega}$$

Preuve :
• Utilisons la formulation équivalente de la Proposition 3.6.1

$$|u_h|_{1,h}^2 = \sum_K (\nabla u_h, \nabla u_h)_{0,K} = \sum_K (\Pi^0 f_{|K}, u_h)_{0,K} \tag{3.128}$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\sum_K (\Pi^0 f_{|K}, u_h)_{0,K}| \leq |f|_{0,\Omega}|u_h|_{0,\Omega}\,.$$

On en déduit l'estimation

$$|u_h|_{1,h}^2 \leq |f|_{0,\Omega}|u_h|_{0,\Omega}$$

L'inégalité de Poincaré (3.110) donne

$$|u_h|_{1,h} \leq C|f|_{0,\Omega} \tag{3.129}$$

Par définition de la norme $\|\,.\,\|_{1,h}$, nous obtenons l'inégalité

$$\|u_h\|_{1,h} \leq C(\Omega)|f|_{0,\Omega} \tag{3.130}$$

• D'autre part l'écriture locale de p_h (3.118) et l'estimation (3.129) donne :

$$|p_h|_{0,h} \leq C|f|_{0,\Omega}$$

où C ne dépend que de Ω.
D'autre part, $\mathrm{div}\, p_{h|K} = -(\Pi^0 f)_{|K}$ (par l'équation $(3.116)_1$) par conséquent,

$$\|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C|f|_{0,\Omega}\,. \tag{3.131}$$

En utilisant les résultats (3.130) et (3.131), nous concluons que

$$\|u_h\|_{1,h} + \|p_h\|_{\mathrm{div},h} \leq C(\Omega)|f|_{0,\Omega}$$

■

Proposition 3.6.3 (Estimation d'erreur a priori)
Soit $(u,p) \in H_0^1(\Omega) \times H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ la solution du problème continu (3.2) et $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \times RT^0$ la solution du schéma boîte (3.116). Si de plus $f \in H^1(\Omega)$, on a les estimations d'erreur a priori :

$$\begin{array}{ll} (i) & |u - u_h|_{1,h} \leq Ch|f|_{0,\Omega} \\ (ii) & |u - u_h|_{0,\Omega} \leq Ch^2(|f|_{0,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) \\ (iii) & |p - p_h|_{\mathrm{div},\Omega} \leq Ch|f|_{1,\Omega} \\ (iv) & |p - p_h|_{0,\Omega} \leq Ch|f|_{0,\Omega} \end{array}$$

Preuve :
La démonstration des estimations d'erreur *a priori* du schéma boîte 3, suit la démonstration des estimations d'erreur du schéma boîte 1.
(i) Soit a_h la forme bilinéaire définie sur l'espace $H_0^1(\Omega)+Q^1_{\mathrm{rot},0}$ par $a_h(u,v)=\sum_K(\nabla u,\nabla v)_{0,K}$ pour des éléments u et v de $H_0^1(\Omega)+Q^1_{\mathrm{rot},0}$. Nous montrons comme dans la Preuve de la Proposition 3.4.3 que

$$|u-u_h|_{1,h}\leq 2\inf_{w_h\in Q^1_{\mathrm{rot},0}}|u-w_h|_{1,h}+\sup_{w_h\in Q^1_{\mathrm{rot},0}}\frac{|a_h(u_h-u,w_h)|}{|w_h|_{1,h}}$$

Puisque la forme bilinéaire a_h satisfait la Proposition 3.6.1, on a pour tout $w_h\in Q^1_{\mathrm{rot},0}$

$$a_h(u_h,w_h)=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\nabla u_h,\nabla w_h)_{0,K}=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\Pi^0 f_{|K},w_h)_{0,K}\,.$$

D'autre part, l'espace $Q^1_{\mathrm{rot},0}$ satisfait le Lemme 3.6.3 qui est l'analogue du Lemme 3.3.5. Donc on a l'estimation de l'erreur de consistance (qui se démontre de la même façon que dans la Preuve de la Proposition 3.4.3) :

$$\sup_{w_h\in Q^1_{\mathrm{rot},0}}\frac{|a_h(u_h-u,w_h)|}{|w_h|_{1,h}}\leq C\,h\,|f|_{0,\Omega}\,. \tag{3.132}$$

L'erreur d'approximation est majorée par

$$\inf_{w_h\in Q^1_{\mathrm{rot},0}}|u-w_h|_{1,h}\leq|u-i_hu|_{1,h} \tag{3.133}$$

où i_h est l'opérateur d'interpolation sur l'espace Q^1_{rot} défini au Lemme 3.6.2. On a donc par le Lemme 3.6.2

$$\inf_{w_h\in Q^1_{\mathrm{rot},0}}|u-w_h|_{1,h}\leq c\,h|u|_{2,\Omega}$$

Or, u satisfait $\|u\|_{2,\Omega}\leq C|f|_{0,\Omega}$. On conclut donc, que

$$|u-u_h|_{1,h}\leq C\,h|f|_{0,\Omega}$$

(ii) La démonstration de l'estimation d'erreur *(ii)* est identique à la démonstration de la Preuve de la Proposition 3.4.3. On utilise un argument de type Aubin-Nitsche et l'estimation *(i)*.
(iii) D'après l'écriture locale de p_h (3.118) et la définition du flux $p=\nabla u$, on a

$$\begin{aligned}
|p-p_h|_{0,\Omega} &= |\nabla u-\sum_K\Big(\nabla u_{h|K}-\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2+|e_y|^2}\begin{pmatrix}|e_y|^2(x-x_K)\\ |e_x|^2(y-y_K)\end{pmatrix}\Big)|_{0,\Omega}\\
&\leq |\nabla u-\nabla u_h|_{0,\Omega}+\Big[\sum_K\int_K\Big(\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2+|e_y|^2}\Big)^2(|e_y|^4(x-x_K)^2+|e_x|^4(y-y_K)^2)\Big]^{1/2}\\
&\leq |u-u_h|_{1,h}+\Big[\sum_K\frac{\Pi^0 f^2_{|K}}{|e_x|^2+|e_y|^2}\frac{|K|}{12}|e_x|^2|e_y|^2\Big]^{1/2}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{2|e_x||e_y|}{|e_x|^2+|e_y|^2} \leq 1$ et $|K| = |e_x||e_y|$, donc

$$|p - p_h|_{0,\Omega} \quad \leq \quad |u - u_h|_{1,h} + C\, h\, |f|_{0,\Omega}$$

ce qui démontre *(iii)*.
(iv) $|p-p_h|_{\mathrm{div},h} = |\operatorname{div} p - \operatorname{div} p_h|_{0,\Omega}$. Or, $\operatorname{div} p = -f$ d'après (3.2) et $\operatorname{div} p_h = -\Pi^0 f$ d'après (3.120), d'où on déduit le résultat annoncé. ■

Remarque : Ce schéma boîte a été étudié en parallèle par d'autres auteurs : S.-H. Chou, D.Y. Kwak et K.Y. Kim, [11].

3.6.4 Lien avec le schéma mixte de Raviart-Thomas

Nous allons établir le lien entre la solution $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \times RT^0$ du schéma boîte (3.116) et la solution $(\bar{u}_h, \bar{p}_h) \in Q^0 \times RT^0$ de la méthode mixte standard de Raviart-Thomas de plus bas degré sur rectangles [39] (l'espace Q^0 est égal à l'espace P^0 des constantes). Rappelons la méthode mixte classique : chercher $(\bar{u}_h, \bar{p}_h) \in P^0 \times RT^0$ solution de

$$\begin{cases} (\operatorname{div} \bar{p}_h + f, \bar{v}_h)_{0,\Omega} = 0\ ,\ \forall \bar{v}_h \in P^0 \\ (\bar{p}_h, \bar{q}_h)_{0,\Omega} + (\bar{u}_h, \operatorname{div} \bar{q}_h)_{0,\Omega} = 0\ ,\ \forall \bar{q}_h \in RT^0\,. \end{cases} \tag{3.134}$$

Proposition 3.6.4 *La solution $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h) \in P^0 \times RT^0$ du problème mixte de Raviart-Thomas (3.134) est donnée en fonction de la solution $(u_h, p_h) \in Q^1_{\mathrm{rot},0} \times RT^0$ du schéma boîte (3.116) par*

$$\tilde{p}_h = p_h \qquad \textit{et} \qquad \tilde{u}_{h|K} = (\Pi^0 u_h)_{|K} + \frac{(\Pi^0 f)_{|K}}{24} \frac{|K|^2}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \mathbb{1}_K\,. \tag{3.135}$$

Preuve :
Soit $\tilde{q}_h \in RT^0$. Calculons $(p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega}$:

$$\begin{aligned} (p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} &= (p_h - \nabla u_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} + (\nabla u_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} &(3.136)\\ &= \underbrace{\sum_K (p_h - \nabla u_h, \tilde{q}_h - \frac{\operatorname{div} \tilde{q}_h}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix})_{0,K}}_{(I)} &(3.137)\\ &\quad + \sum_K (p_h - \nabla u_h, \frac{\operatorname{div} \tilde{q}_h}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix})_{0,K} + (\nabla u_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} \end{aligned}$$

D'après la relation (3.19), les éléments de RT^0 s'écrivent localement

$$\tilde{q}_{h|K} \;=\; \Pi^0 \tilde{q}_h + \frac{\operatorname{div} \tilde{q}_h}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} + \tilde{\delta} \begin{pmatrix} x - x_K \\ -(y - y_K) \end{pmatrix} \tag{3.138}$$

Alors, $\tilde{q}_h - \frac{\operatorname{div} \tilde{q}_h}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix} \in X_{2,h}$. Puisque (u_h, p_h) est la solution du schéma boîte (3.116), le terme (I) est nul. Alors,

$$(p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} \;=\; \sum_K (p_h - \nabla u_h, \frac{\operatorname{div} \tilde{q}_h}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix})_{0,K} + (\nabla u_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} \tag{3.139}$$

D'autre part, l'écriture locale de p_h donnée par (3.118) implique que

$$p_{h|K} - \nabla u_{h|K} = -\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \begin{pmatrix} |e_y|^2(x - x_K) \\ |e_x|^2(y - y_K) \end{pmatrix}$$

Le terme $(p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega}$ est égal à

$$\begin{aligned} (p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} &= \sum_K (-\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \begin{pmatrix} |e_y|^2(x - x_K) \\ |e_x|^2(y - y_K) \end{pmatrix}, \frac{\operatorname{div} \tilde{q}_h}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix})_{0,K} \\ &\quad +(\nabla u_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} \end{aligned} \tag{3.140}$$

On applique la formule de Green, qui donne en utilisant les propriété des espaces $Q^1_{\mathrm{rot},0}$ et RT^0 (nous avons vu dans les démonstrations antérieures, que les termes de bord s'annulent)

$$\begin{aligned} (p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} &= \sum_K \underbrace{(-\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \begin{pmatrix} |e_y|^2(x - x_K) \\ |e_x|^2(y - y_K) \end{pmatrix}, \frac{\operatorname{div} \tilde{q}_h}{2} \begin{pmatrix} x - x_K \\ y - y_K \end{pmatrix})_{0,K}}_{(II)} \\ &\quad -(u_h, \operatorname{div} \tilde{q}_h)_{0,\Omega} \end{aligned} \tag{3.141}$$

Le calcul de (II) donne

$$(II) = (\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \frac{|K|^2}{24}, \operatorname{div} \tilde{q}_h)_{0,K}$$

En injectant ce calcul dans (3.141), on obtient

$$(p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} = -(\frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \frac{|K|^2}{24}, \operatorname{div} \tilde{q}_h)_{0,K} - (u_h, \operatorname{div} \tilde{q}_h)_{0,\Omega}$$

D'autre part, $\operatorname{div} \tilde{q}_h \in P^0$, donc $(u_h, \operatorname{div} \tilde{q}_h)_{0,K} = (\Pi^0 u_h, \operatorname{div} \tilde{q}_h)_{0,K}$. En regroupant tous les termes dans le membre de gauche, on obtient

$$(p_h, \tilde{q}_h)_{0,\Omega} + (\sum_K (\Pi^0 u_h + \frac{\Pi^0 f_{|K}}{|e_x|^2 + |e_y|^2} \frac{|K|^2}{24}) \mathbb{1}_K, \operatorname{div} \tilde{q}_h) = 0 \tag{3.142}$$

Soit $\tilde{u}_{h|K} = \big(\Pi^0 u_h + \frac{\Pi^0 f}{24} \frac{|K|^2}{|e_x|^2 + |e_y|^2}\big) \mathbb{1}_K \in P^0$ et $\tilde{p}_h = p_h \in RT^0$, alors nous venons de prouver que $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h)$ est solution du problème (3.134) de Raviart-Thomas, qui admet une unique solution. Donc $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h) \in P^0 \times RT^0$ est la solution de la méthode mixte standard (3.134) de Raviart-Thomas. ■

Chapitre 4

Equation de convection-diffusion en une et deux dimensions d'espace

4.1 Introduction

L'étude des schémas boîte réalisée aux Chapitres 2 et 3 soulèvent de nouvelles interrogations. Existe-t'il des schémas boîte dans le cas d'équations plus complexes ? Comment se comportent ces schémas ? Nous avons étudié au Chapitre 1 les modes oscillants liés à l'équation de la chaleur, un phénomène analogue se produit-il pour l'équation de convection-diffusion ? L'équation de convection-diffusion stationnaire en dimension 1 ayant déjà été étudiée par J-P. Croisille, [17, 18], nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'équation de convection-diffusion instationnaire. Bien que très classiques, ces équations demeurent le modèle de base, notamment pour les problèmes d'écoulements en milieu souterrain. Par exemple, la modélisation des déchets dans un milieu poreux constitué de couches géologiques, couple la loi de Darcy pour le calcul de la vitesse de l'écoulement, à un système d'équations de convection-diffusion pour le transport de polluant. Un exemple d'intérêt actuel est l'étude de la diffusion en milieu souterrain de concentrations de produits radioactifs dans le milieu externe à partir d'un "colis" de déchets.
1- La vitesse $\overrightarrow{u}(x)$ de l'écoulement porteur est calculée dans un premier temps par une équation elliptique (Darcy) :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div}(K(x)\,\nabla H) = 0\,, \quad x \in \Omega \\ \overrightarrow{u}(x) = K(x)\,\nabla H \\ \text{Conditions limites} \end{array}\right. \tag{4.1}$$

2- Les concentrations $C_i(x,t)$ des différents polluants sont solutions d'une équation de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} R_i\,\omega(\frac{\partial C_i}{\partial t} + \lambda_i\,C_i) - \operatorname{div}(D_i\,\nabla C_i) + u\ \cdot \operatorname{grad} C_i = f_i\,, \quad \in \Omega \times (0,T) \\ C_i(x,0) = 0\,, \quad x \in \Omega \\ \ \text{Conditions limites} \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Dans les sections 4.2 et 4.3, nous rappelons le principe du schéma boîte 1d pour les équations de convection-diffusion stationnaire et instationnaire. Les inconnues u et $p = u_x$

sont situées au niveau des noeuds du maillage. De plus, le schéma est paramétré par des décentrements en temps et espace pour chacune des inconnues u et p . Nous effectuons ensuite le lien entre le schéma boîte 1d pour l' équation de convection-diffusion instationnaire et les méthodes d'éléments finis à la Section 4.4 et de type différences finies à la Section 4.5. Nous proposons ensuite une extension du schéma boîte pour le problème de convection-diffusion en dimension 2 à l'aide d'une méthode de type splitting directionnel. Enfin, nous présentons quelques exemples numériques. Ces résultats sont présentés par ailleurs dans [20], [21].

4.2 L'équation de convection-diffusion stationnaire

Nous rappelons briévement les deux schémas boîte introduits par J.-P. Croisille [17] pour le problème de convection-diffusion stationnaire en dimension 1. Ce schéma ne contient qu'un seul paramètre de décentrement D_p, pour la variable p. Une condition suffisante de non-oscillation du schéma est donnée sur D_p par le choix :

$$D_{p,j-1/2} = \frac{\operatorname{sgn}(c)}{2} \max(0, 1 - \frac{1}{\mathrm{Pe}_{j-1/2}}) \tag{4.3}$$

Nous renvoyons à [17] et [18] pour plus d'informations.

4.2.1 Principe du schéma boîte pour l'équation de convection-diffusion stationnaire 1d

On considère le problème de convection-diffusion stationnaire en dimension 1 pour un coefficient de convection $c \in \mathbb{R}$ et un coefficient de diffusion $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} c\, u_x - \varepsilon u_{xx} = f\,, \quad 0 < x < 1 \\ u\,(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

En introduisant la variable auxilliaire $p = -\varepsilon u_x$, on obtient la forme mixte

$$\begin{cases} c\, u_x + p_x = f\,, \quad 0 < x < 1 \\ p + \varepsilon\, u_x = 0\,, \quad 0 < x < 1 \\ u\,(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

On considère $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_j < \ldots < x_J = 1$ une discrétisation de $[0, 1]$. On approche les valeurs aux noeuds $u(x_j)$ et $p(x_j)$ respectivement par les inconnues u_j et p_j situées aux noeuds du maillage. La longueur de la boîte $K_{j-1/2} = x_j - x_{j-1}$ est $h_{j-1/2}$. Rappelons les deux schémas boîte associées à ce problème [17].
Le schéma boîte d'ordre 2 :

$$\begin{cases} c\,(u_j - u_{j-1}) + (p_j - p_{j-1}) = h_{j-1/2}\,(\Pi^0 f)_{j-1/2} \\ \frac{1}{2}\,(p_j + p_{j-1}) - D_{p,j-1/2}\,(p_j - p_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\,(u_j - u_{j-1}) = 0 \\ u_0 = u_J = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

où le coefficient de décentrement est donné par la formule : $D_{p,j-1/2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(c)\max\big(0; 1 - \frac{1}{\mathrm{Pe}_{j-1/2}}\big)$.
Le schéma boîte d'ordre 4 valable pour $\mathrm{Pe}_{j-1/2} \leq 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} c\,(u_j - u_{j-1}) + (p_j - p_{j-1}) = h_{j-1/2}\,(\Pi^0 f)_{j-1/2} \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\frac{ch_{j-1/2}}{\varepsilon}\right)p_j + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\frac{ch_{j-1/2}}{\varepsilon}\right)p_{j-1} + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j - u_{j-1}) = \frac{1}{12}\,h_{j-1/2}^2(\Pi^0 f')_{j-1/2} \\ u_0 = u_J = 0 \end{array}\right. \tag{4.7}$$

On peut hybrider ces deux schémas boîte sous la forme suivante pour la formule de moyenne pour $\bar{p}_{j-1/2}$:

$$\bar{p}_{j-1/2} \simeq \frac{1}{2}\,(p_j + p_{j-1}) - B_{j-1/2}\,(p_j - p_{j-1}) - A_{j-1/2}\,h_{j-1/2}\,(p_{x,j} - p_{x,j-1}) \tag{4.8}$$

où $A_{j-1/2}$ et $B_{j-1/2}$ sont deux coefficients par boîte.

$$p_x = f - c\,u_x = f + \frac{c}{\varepsilon}p \tag{4.9}$$

Donc

$$\bar{p}_{j-1/2} \simeq \big(\frac{1}{2} - B_{j-1/2} - 2\,A_{j-1/2}\ \mathrm{Pe}_{j-1/2}\big)p_j + \big(\frac{1}{2} + B_{j-1/2} + 2\,A_{j-1/2}\ \mathrm{Pe}_{j-1/2}\big)p_{j-1} \tag{4.10}$$

Ce qui motive le choix du coefficient D_p

$$D_{p,j-1/2} = 2A_{j-1/2}\ \mathrm{Pe}_{j-1/2} + B_{j-1/2} \tag{4.11}$$

Le choix des coefficients $A_{j-1/2}$ et $B_{j-1/2}$ est :

- Schéma d'ordre 2 :

$$\left\{\begin{array}{l} B_{j-1/2} = \frac{\mathrm{sgn}(c)}{2}\max(0; 1 - \frac{1}{\mathrm{Pe}_{j-1/2}}) \\ A_{j-1/2} = 0 \end{array}\right. \tag{4.12}$$

- Schéma d'ordre 4 :

$$\left\{\begin{array}{l} B_{j-1/2} = 0 \\ A_{j-1/2} = \frac{1}{12}\,\mathrm{sgn}(c_{j-1/2}) \end{array}\right. \tag{4.13}$$

On obtient la formulation unique du schéma boîte

$$\left\{\begin{array}{l} c\,(u_j - u_{j-1}) + (p_j - p_{j-1}) = h_{j-1/2}(\Pi^0 f)_{j-1/2} \\ \frac{1}{2}(p_j + p_{j-1}) - D_{p,j-1/2}(p_j - p_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}(u_j - u_{j-1}) = A_{j-1/2}h_{j-1/2}^2(\Pi^0 f')_{j-1/2} \\ u_0 = u_J = 0 \end{array}\right. \tag{4.14}$$

qui est d'ordre 2 si $\mathrm{Pe}_{j-1/2} \geq 1$ et d'ordre 4 si $\mathrm{Pe}_{j-1/2} < 1$.
Les coefficients $A_{j-1/2}$ et $B_{j-1/2}$ sont donnés de façon unique par

$$\left\{\begin{array}{l} A_{j-1/2} = \frac{1}{12}\,\mathrm{sgn}(c_{j-1/2})\ \mathbb{1}_{\mathrm{Pe}_{j-1/2}<1} \\ B_{j-1/2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(c_{j-1/2})\max(0; 1 - \frac{1}{\mathrm{Pe}_{j-1/2}})\ \mathbb{1}_{\mathrm{Pe}_{j-1/2}\geq 1} \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Les coefficients ne sont pas continus en fonction de $\mathrm{Pe}_{j-1/2}$. Nous renvoyons à [18] pour des résultats numériques.

4.3 L'équation de convection-diffusion 1d instationnaire

4.3.1 Introduction

Considérons le problème de convection-diffusion instationnaire en dimension 1 donné sur le domaine $I =]0,1[$ par :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t + cu_x - \varepsilon u_{xx} = f(x,t)\,, & x \in I\,, t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x)\,, & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0\,, u(1,t) = 0\,, & t > 0 \end{array}\right. \tag{4.16}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est la vitesse et $\varepsilon > 0$ est le coefficient de diffusion. La solution exacte du problème (4.16) est donnée par la formule de Duhamel

$$u(\cdot,t) = T(t)\cdot u_0 + \int_0^t T(t-s)\cdot f(\cdot,s)\,ds \tag{4.17}$$

où $T(t)\cdot u_0 = v(\cdot,t)$ est la solution du problème de convection-diffusion homogène sur $I =]0,1[$. Un calcul en série de Fourier donne

$$v(x,t) = e^{\lambda x}\sum_{k\geq 1} c_k(u_0)\sin(\mu_k x)e^{-\varepsilon(\mu_k^2+\lambda^2)t} \tag{4.18}$$

où les coefficients $c_k(u_0)$, λ, μ_k sont

$$c_k(u_0) = 2\int_0^1 u_0(x)e^{\lambda x}\sin(\mu_k x)dx, \qquad \lambda = \frac{c}{2\varepsilon}, \qquad \mu_k = k\pi, \qquad k \geq 1 \tag{4.19}$$

On en déduit que le problème (4.16) est bien posé, par exemple dans $C^0([0,T_0[, L^2(]0,1[)) \cap C^\infty(]0,1[\times]0,T_0[)$ de condition initiale $u^0 \in L^2(]0,1[)$ et de terme source $f \in C^0([0,T_0[, L^2(]0,1[))$ et $T_0 > 0$.

Notations :
Considérons un maillage quelconque du segment $[0,1]$ en J intervalles (J est un entier, $J \geq 2$). Notons $x_0 = 0 < x_1 < ... < x_j < ... < x_J = 1$ les coordonnées des noeuds du maillage, représentées sur la Figure 4.1. La boîte $K_{j-1/2}$ est le segment $]x_{j-1}, x_j[$ de longueur $h_{j-1/2} = x_j - x_{j-1}$.

4.3.2 Le schéma boîte semi-discret

Considérons la forme mixte de l'équation de convection-diffusion dans laquelle on introduit le flux de diffusion $p = -\varepsilon u_x$ comme inconnue auxilliaire :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t + cu_x + p_x = f(x,t)\,, & x \in I\,, t > 0 \\ p = -\varepsilon u_x\,, & x \in I\,, t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x)\,, & x \in I \\ p(x,0) = -\varepsilon \frac{d}{dx}u^0(x) = p^0(x)\,, & x \in I \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, & t > 0 \end{array}\right. \tag{4.20}$$

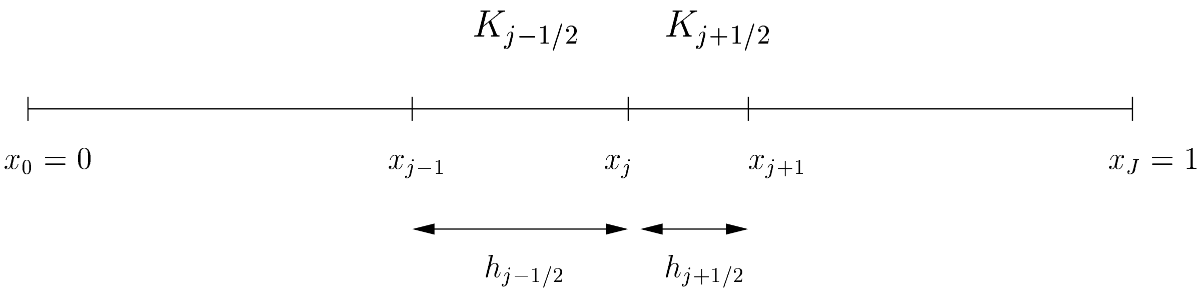

FIG. 4.1 – Maillage du segment $[0, 1]$

Noter que nous n'avons pas d'équation d'évolution sur p, mais simplement la relation $p(x,t) = -\varepsilon\, u_x(x,t)$ à tout instant. En particulier, à l'instant initial, $p\,(x,0) = -\varepsilon \frac{d}{dx} u^0(x)$. Soit Π^0 la projection orthogonale sur les fonctions constantes par maille, donnée pour toute fonction g par :

$$(\Pi^0 g)_{j-1/2} = \frac{1}{h_{j-1/2}} \int_{K_{j-1/2}} g(x)\, dx.$$

En intégrant les équations $(4.20)_1$ et $(4.20)_2$ sur chaque boîte $K_{j-1/2}$, $1 \le j \le J$, nous obtenons les relations semi-discrètes en espace vérifiées par la solution exacte (u,p) de (4.20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{j-1/2}\, \frac{d}{dt}(\Pi^0 u(t))_{j-1/2} + c\,[u\,(x_j\,,\,t) - u\,(x_{j-1}\,,\,t)] \\ \quad +[p\,(x_j\,,\,t) - p(x_{j-1}\,,\,t)] = h_{j-1/2}\,(\Pi^0 f(t))_{j-1/2}\,, 1 \le j \le J\,,\, t > 0 \\ h_{j-1/2}\,(\Pi^0 p)_{j-1/2}\,(t) = -\varepsilon\,[u\,(x_j\,,\,t) - u\,(x_{j-1}\,,\,t)]\,, 1 \le j \le J\,,\, t > 0 \\ u(x_j, 0) = u^0(x_j)\,, \qquad\qquad 0 \le j \le J \\ p(x_j, 0) = p^0(x_j)\,, \qquad\qquad 0 \le j \le J \\ u\,(x_0\,,\,t) = u\,(x_J\,,\,t) = 0\,, \qquad\qquad t > 0 \end{array} \right. \tag{4.21}$$

On approche les inconnues $u(x_j,t)$, $p(x_j,t)$ par les fonctions semi-discrètes $u_j\,(t)$, $p_j\,(t)$. Considérons les fonctions $u_h\,(.,t) \in P^1_{c,0}$, $p_h\,(.,t) \in P^1_c$, où $P^1_{c,0}$ et P^1_c sont les espaces d'éléments finis P^1-Lagrange usuels monodimensionnels, définies par

$$u_h\,(x,t) = \sum_{j=0}^{J} u_j\,(t)\,\varphi_j\,(x) \qquad \text{et} \qquad p_h\,(x,t) = \sum_{j=0}^{J} p_j\,(t)\,\varphi_j\,(x) \tag{4.22}$$

où $\varphi_j(x)$ est la fonction chapeau P^1-Lagrange associée au sommet j. Alors le problème semi-discret (4.21) équivaut à : chercher $(u_h(.,t), p_h(.,t)) \in P^1_{c,0} \times P^1_c$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dfrac{d}{dt}[\Pi^0 u_h(.,t)]; v_h) + (c u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_h) + (p_{h,x}\ ;\ v_h) = (f(.,t)\ ;\ v_h)\,, \quad \forall\, v_h \in P^0 \\ (\Pi^0\, p_h(.,t)\ ;\ q_h) + \varepsilon\,(u_{h,x}(.,t)\ ;\ q_h) = 0\,, \quad \forall\, q_h \in P^0 \end{array} \right. \tag{4.23}$$

Supposons que $\overline{u}_{j-1/2}$ soit une approximation de $(\Pi^0 u)_{j-1/2}$, $\overline{p}_{j-1/2}$ une approximation de $(\Pi^0 p)_{j-1/2}$ et $\overline{f}_{j-1/2}$ une approximation de la moyenne de f, $(\Pi^0 f)_{j-1/2}$. Alors, en remplaçant $(\Pi^0 u(t))_{j-1/2}$ par $\overline{u}_{j-1/2}(t)$, $(\Pi^0 p(t))_{j-1/2}$ par $\overline{p}_{j-1/2}$ et $(\Pi^0 f)_{j-1/2}$ par $\overline{f}_{j-1/2}$ dans (4.21), on obtient le schéma semi-discrétisé en espace, continu en temps :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\bar{u}_{j-1/2}\left(t\right)+c\,\frac{u_j\left(t\right)-u_{j-1}\left(t\right)}{h_{j-1/2}}+\frac{p_j\left(t\right)-p_{j-1}\left(t\right)}{h_{j-1/2}}=\bar{f}_{j-1/2}\left(t\right), & 1\leq j\leq J,\ t>0\\ \bar{p}_{j-1/2}\left(t\right)=-\varepsilon\,\frac{u_j\left(t\right)-u_{j-1}\left(t\right)}{h_{j-1/2}}\,, & 1\leq j\leq J,\ t>0\\ u(x_j,0)=u^0(x_j)\,, \qquad 0\leq j\leq J & \\ p(x_j,0)=p^0(x_j)\,, \qquad 0\leq j\leq J & \\ u_0\left(t\right)=u_J\left(t\right)=0\,, \qquad t>0 & \end{array}\right. \tag{4.24}$$

Le design du schéma boîte semi-discret consiste donc à exprimer les moyennes $\bar{u}_{j-1/2}(t)$ et $\bar{p}_{j-1/2}(t)$ en fonction des inconnues d'interface $u_j(t)$, $u_{j-1}(t)$ et $p_j(t)$, $p_{j-1}(t)$, de sorte que (4.24) définisse effectivement une équation d'évolution en $u_j(t)$ et que $p_j(t)$ se déduise de $u_j(t)$. Pour $\bar{p}_{j-1/2}(t)$, on adopte une formule du type :

$$\bar{p}_{j-1/2}\left(t\right)=\frac{1}{2}\left(p_j\left(t\right)+p_{j-1}\left(t\right)\right)-D_{p,j-1/2}\left(t\right)\left(p_j\left(t\right)-p_{j-1}\left(t\right)\right) \tag{4.25}$$

où $D_{p,j-1/2}(t)$ est un coefficient de décentrement, constant par maille, à préciser. Rappelons que (4.25) est un coefficient de décentrement “stationnaire”, indispensable pour assurer la non-oscillation de la solution approchée de

$$\left\{\begin{array}{l} c\,u_x-\varepsilon\,u_{xx}=f(x)\\ u(0)=u(1)=0 \end{array}\right. \tag{4.26}$$

Ce résultat est démontré dans [17, 18] et rappelé au Paragraphe 4.2. Un choix du coefficient de décentrement D_p, qui assure la monotonie de $(u_j)_j$ est

$$D_{p,j-1/2}=\frac{\mathrm{sgn}(c)}{2}\max(0,1-\frac{1}{\mathrm{Pe}_{j-1/2}}) \tag{4.27}$$

où le nombre de Peclet par maille est $\mathrm{Pe}_{j-1/2}=\frac{|c|h_{j-1/2}}{2\varepsilon}$. Dans la suite on supposera que $D_{p,j-1/2}$ est indépendant du temps, donné par (4.27). On introduit à présent un second paramètre de décentrement $D_{u,j-1/2}(t)$, [12], dans chaque boîte $K_{j-1/2}$, tel que

$$\bar{u}_{j-1/2}(t)=\frac{1}{2}\left(u_j(t)+u_{j-1}(t)\right)+D_{u,j-1/2}(t)\left(u_j(t)-u_{j-1}(t)\right). \tag{4.28}$$

Noter qu'à l'état stationnaire, $\frac{d}{dt}\bar{u}_{j-1/2}=0$, donc le coefficient $D_{u,j-1/2}$ ne joue plus de rôle, la précision du schéma ne dépend plus alors que de $D_{p,j-1/2}$. On s'attend à ce que le décentrement en u soit colinéaire à la vitesse c du déplacement ; c'est-à-dire $c\,D_{u,j-1/2}\geq 0$ dans chaque boîte $K_{j-1/2}$. En remplaçant $\bar{u}_{j-1/2}(t)$ et $\bar{p}_{j-1/2}(t)$ par leurs valeurs (4.28) et (4.25) dans l'équation (4.24), on obtient la semi-discrétisation spatiale pour $t>0$ et $1\leq j\leq J$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{1}{2}+D_{u,j-1/2}(t)\right)u_j(t)\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{1}{2}-D_{u,j-1/2}\left(t\right)\right)u_{j-1}(t)\right\} & \\ \qquad +c\,\frac{u_j\left(t\right)-u_{j-1}\left(t\right)}{h_{j-1/2}}+\frac{p_j\left(t\right)-p_{j-1}\left(t\right)}{h_{j-1/2}}=\bar{f}_{j-1/2}\left(t\right), & 1\leq j\leq J\\ \left(\frac{1}{2}-D_{p,j-1/2}\left(t\right)\right)p_j\left(t\right)+\left(\frac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\left(t\right)\right)p_{j-1}\left(t\right)+\varepsilon\,\frac{u_j\left(t\right)-u_{j-1}\left(t\right)}{h_{j-1/2}}=0\,, & 1\leq j\leq J\\ u(x_j,0)=u^0(x_j)\,, \qquad 0\leq j\leq J & \\ p(x_j,0)=p^0(x_j)\,, \qquad 0\leq j\leq J & \\ u_0\left(t\right)=u_J\left(t\right)=0\,, \qquad t>0 & \end{array}\right. \tag{4.29}$$

Dans toute la suite, les coefficients de décentrement $D_{u,j-1/2}$ et $D_{p,j-1/2}$ seront choisis constants par maille et indépendants du temps.

Lemme 4.3.1 *Le problème semi-discret (4.29) admet une unique solution $(u_j(t), p_j(t)) \in C^1([0,\infty[;\mathbb{R}^{2(J+1)})$, sous les conditions suffisantes $D_{u,j-1/2}\, D_{p,j-1/2} \geq 0$ sur chaque boîte $K_{j-1/2}$.*

Preuve :
Pour démontrer ce résultat, on se limite au cas de maillages équidistants ($h > 0$ est fixé), où $D_{p,j-1/2} = D_p$ et $D_{u,j-1/2} = D_u$ sont constants sur le maillage. Après élimination du flux $p_j(t)$ dans la première équation de (4.29) et de $p_{j-1}(t)$ dans la deuxième équation de (4.29), on obtient $p_{j-1}(t)$ en fonction de $u_j(t)$, $u_{j-1}(t)$ pour la première équation et $p_j(t)$ en fonction de $u_j(t)$, $u_{j-1}(t)$ pour la deuxième équation. En considérant la maille $K_{j+1/2}$ pour la première équation, p_j est donné en fonction de $u_{j+1}(t)$ et $u_j(t)$. On peut donc identifier la valeur de $p_j(t)$ à l'interface des mailles $K_{j-1/2}$ et $K_{j+1/2}$. On obtient alors le système différentiel ordinaire linéaire en $(u_j(t))$ uniquement :

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\frac{1}{2}-D_p\right)\left(\frac{1}{2}+D_u\right)\frac{d}{dt}u_{j+1}(t)+\left(\frac{1}{2}+2D_pD_u\right)\frac{d}{dt}u_j(t)+\left(\frac{1}{2}+D_p\right)\left(\frac{1}{2}-D_u\right)\frac{d}{dt}u_{j-1}(t) & \\ =\left(-(\frac{1}{2}-D_p)\frac{c}{h}+\frac{\varepsilon}{h^2}\right)u_{j+1}(t)-2\left(\frac{c}{h}D_p+\frac{\varepsilon}{h^2}\right)u_j(t)+\left((\frac{1}{2}+D_p)\frac{c}{h}+\frac{\varepsilon}{h^2}\right)u_{j-1}(t) & \\ +\left(\frac{1}{2}-D_p\right)\bar{f}_{j+1/2}(t)+\left(\frac{1}{2}+D_p\right)\bar{f}_{j-1/2}(t)\ , & 1 \leq j \leq J-1 \\ u(x_j,0)=u^0(x_j)\ , \qquad 0 \leq j \leq J & \\ u_0\,(t)=u_J\,(t)=0\ , \qquad t>0 & \end{array}\right. \tag{4.30}$$

Le problème semi-discret en $u = (u_j(t))$ s'écrit donc

$$A\,\dot{u}\,(t) = B\,u(t) + F(t)\,. \tag{4.31}$$

Rappel : Lemme de Gershgorin, [27]
Les valeurs propres d'une matrice A sont telles que $Sp(A) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(a_{ii}, r_i)$ où D est le disque fermé de centre a_{ii} et de rayon $r_i = \sum_{j\neq i, j\in I} |a_{ij}|$ et I est l'ensemble des indices matriciels.

Sous la condition $D_{u,j-1/2}\, D_{p,j-1/2} > 0$, on vérifie à l'aide du théorème de Gershgorin que les valeurs propres de la matrice A sont non nulles, c'est-à-dire que A est inversible. En effet, si $D_{u,j-1/2}\, D_{p,j-1/2} > 0$, alors l'inégalité

$$|\left(\frac{1}{2}-D_p\right)\left(\frac{1}{2}+D_u\right)| + |\left(\frac{1}{2}+D_p\right)\left(\frac{1}{2}-D_u\right)| \leq |\left(\frac{1}{2}+2D_pD_u\right)|$$

est toujours vérifiée. Si $D_{u,j-1/2}\, D_{p,j-1/2} = 0$, on prouve par le calcul du déterminant de la matrice A que A est inversible. Il existe donc un unique $u(t)$ solution de (4.31). On reconstruit le flux $p(t)$ en fonction de $u(t)$ par l'intermédiaire des équations précédentes. ■

4.3.3 Intégration en temps par un ϑ-schéma

Il reste à définir à présent le schéma en temps. On se limite dans la suite à un ϑ-schéma, avec ϑ constant et des coefficients de décentrement $D_{u,j-1/2}$ et $D_{p,j-1/2}$ indépendants du temps, constants par maille. En posant $\delta^n v_j = \frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{k}$, la discrétisation de l'équation $(4.29)_1$ est sous forme incrémentale

$$\begin{aligned}\Big\{h_{j-1/2}\left(\tfrac{1}{2}+D_{u,j-1/2}\right)\Big\}\,\delta^n u_j+\Big\{h_{j-1/2}\left(\tfrac{1}{2}-D_{u,j-1/2}\right)\Big\}\,\delta^n u_{j-1}\\ +(1-\vartheta)\,c\,(u_j^n-u_{j-1}^n)+\vartheta\,c\left(u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}\right)+(1-\vartheta)\,(p_j^n-p_{j-1}^n)+\vartheta\,(p_j^{n+1}-p_{j-1}^{n+1})\\ =h_{j-1/2}\left((1-\vartheta)\,\overline{f}_{j-1/2}^{\,n}+\vartheta\,\overline{f}_{j-1/2}^{\,n+1}\right).\end{aligned} \tag{4.32}$$

L'équation $(4.29)_2$ est valable pour tout t, elle est donc vérifiée à l'intant t^n et à l'intant t^{n+1}. En particulier, la solution exacte p au point x_j satisfait le système suivant en $\delta^n p_j$ et p_j^n

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{1}{2}-D_{p,j-1/2}\right)\delta^n p_j+\left(\dfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\right)\delta^n p_{j-1}+\varepsilon\,\dfrac{\delta^n u_j-\delta^n u_{j-1}}{h_{j-1/2}}=0\\ \left(\dfrac{1}{2}-D_{p,j-1/2}\right)p_j^n+\left(\dfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\right)p_{j-1}^n+\varepsilon\,\dfrac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h_{j-1/2}}=0\,.\end{array}\right. \tag{4.33}$$

Les conditions initiales et les conditions limite sont discrétisées de façon naturelle par

$$\left\{\begin{array}{l}u_j^0=u^0(x_j)\,,\quad 0\le j\le J\\ p_j^0=p^0(x_j)\,,\quad 0\le j\le J\\ u_0^n=u_J^n=0\,,\quad 1\le n\,.\end{array}\right. \tag{4.34}$$

Définition 4.3.1 (Schéma boîte pour l'équation de convection-diffusion instationnaire 1d)
Soit le schéma boîte associé au problème de convection-diffusion (4.20) : pour tout $n\ge 0$, chercher $(u^n=(u_j^n),p^n=(p_j^n))\in\mathbb{R}^{J+1}\times\mathbb{R}^{J+1}$ solution du système pour tout $0\le j\le J$,

$$\left\{\begin{array}{ll}(i)\quad \left(\tfrac{1}{2}+D_{u,j-1/2}\right)\delta^n u_j+\left(\tfrac{1}{2}-D_{u,j-1/2}\right)\delta^n u_{j-1}+k\,\vartheta c\,(\delta^n u_j-\delta u_{j-1})+c\,(u_j^n-u_{j-1}^n) & \\ \qquad +k\,\vartheta\,(\delta^n p_j-\delta^n p_{j-1})+p_j^n-p_{j-1}^n=h_{j-1/2}\left((1-\vartheta)\,\overline{f}_{j-1/2}^{\,n}+\vartheta\,\overline{f}_{j-1/2}^{\,n+1}\right), & 1\le j\le J\\ (ii)\quad \left(\tfrac{1}{2}-D_{p,j-1/2}\right)\delta^n p_j+\left(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\right)\delta^n p_{j-1}+\varepsilon\,\frac{\delta^n u_j-\delta^n u_{j-1}}{h_{j-1/2}}=0, & 1\le j\le J\\ (iii)\quad \left(\tfrac{1}{2}-D_{p,j-1/2}\right)p_j^n+\left(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\right)p_{j-1}^n+\frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\,(u_j^n-u_{j-1}^n)=0, & 1\le j\le J,\ n\ge 1\\ (iv)\quad u_j^0=u^0(x_j)\,,\quad 0\le j\le J & \\ (v)\quad p_j^0=p^0(x_j)\,,\quad 0\le j\le J & \\ (vi)\quad u_0^n=u_J^n=0\,,\quad 1\le n & \end{array}\right. \tag{4.35}$$

Considérons le système d'équations (4.35*(i)*-4.35*(ii)*). En éliminant $\delta^n p_j$ dans l'équation (4.35(i)) et $\delta^n p_{j-1}$ dans (4.35(ii)), on obtient le système : pour tout $1 \le j \le J$ et $0 \le n$

$$\left\{\begin{array}{l}
(i) \quad h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} - D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} + D_{u,j-1/2}\Big)\,\delta^n u_j \\
+h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} - D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} - D_{u,j-1/2}\Big)\,\delta^n u_{j-1} \\
+k\,\vartheta\,(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1})\Big(c(\frac{1}{2} - D_{p,j-1/2}) - \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big) - k\,\vartheta\,\delta^n p_{j-1} \\
= \Big(\frac{1}{2} - D_{p,j-1/2}\Big)\,\Big(-c\,(u_j^n - u_{j-1}^n) - (p_j^n - p_{j-1}^n) + h_{j-1/2}\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}\,_{j-1/2}^{\,n} + \vartheta\,\overline{f}\,_{j-1/2}^{\,n+1}\Big)\Big) \\
\\
(ii) \quad h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} + D_{u,j-1/2}\Big)\,\delta^n u_j \\
+h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} - D_{u,j-1/2}\Big)\,\delta^n u_{j-1} \\
+k\,\vartheta\,(\delta^n u_j - \delta^n u_{j-1})\Big(c(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big) + k\,\vartheta\,\delta^n p_j \\
= \Big(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\,\Big(-c\,(u_j^n - u_{j-1}^n) - (p_j^n - p_{j-1}^n) + h_{j-1/2}\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}\,_{j-1/2}^{\,n} + \vartheta\,\overline{f}\,_{j-1/2}^{\,n+1}\Big)\Big)
\end{array}\right. \tag{4.36}$$

Ces relations sont vraies pour tout $1 \le j \le J$, par élimination de $\delta^n p_j$ à l'interface des boîtes $K_{j-1/2}$ et $K_{j+1/2}$, on obtient le système tridiagonal en $\delta^n u_j$

$$\begin{array}{rl}
& \Big[h_{j+1/2}\Big(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} + D_{u,j+1/2}\Big) + k\vartheta\Big(c(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}) - \frac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big)\Big]\,\delta^n u_{j+1} \\
& + \Big[h_{j+1/2}\Big(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} - D_{u,j+1/2}\Big) - k\vartheta\Big(c(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}) - \frac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big) \\
& \quad + h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} + D_{u,j-1/2}\Big) + k\vartheta\Big(c(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\Big]\,\delta^n u_j \\
& + \Big[h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} - D_{u,j-1/2}\Big) - k\vartheta\Big(c(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\Big]\,\delta^n u_{j-1} \\
= & \Big(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\Big)\Big(-c\,(u_{j+1}^n - u_j^n) - (p_{j+1}^n - p_j^n)\Big) \\
& + \Big(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\Big(-c\,(u_j^n - u_{j-1}^n) - (p_j^n - p_{j-1}^n)\Big) \\
& + h_{j+1/2}\Big(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\Big)\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}\,_{j+1/2}^{\,n} + \vartheta\,\overline{f}\,_{j+1/2}^{\,n+1}\Big) \\
& + h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}\,_{j-1/2}^{\,n} + \vartheta\,\overline{f}\,_{j-1/2}^{\,n+1}\Big)
\end{array} \tag{4.37}$$

D'autre part, l'équation (4.35(iii)) donne p_j^n en fonction de u_j^n :

$$\left\{\begin{array}{l}
\Big(\dfrac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\Big)\,p_{j+1}^n + \Big(\dfrac{1}{2} + D_{p,j+1/2}\Big)\,p_j^n + \varepsilon\,\dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h_{j+1/2}} = 0 \\
\Big(\dfrac{1}{2} - D_{p,j-1/2}\Big)\,p_j^n + \Big(\dfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)\,p_{j-1}^n + \varepsilon\,\dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h_{j-1/2}} = 0
\end{array}\right. \tag{4.38}$$

C'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l}
\Big(\dfrac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\Big)(p_{j+1}^n - p_j^n) = -p_j^n - \varepsilon\,\dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h_{j+1/2}} \\
\Big(\dfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\Big)(p_j^n - p_{j-1}^n) = p_j^n + \varepsilon\,\dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h_{j-1/2}}
\end{array}\right. \tag{4.39}$$

Donc l'équation (4.37) devient :

$$
\begin{aligned}
A_1\,\delta^n u_{j+1} + A_0\,\delta^n u_j + A_{-1}\,\delta^n u_{j-1} &= \Big(-c\,(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big)\,u^n_{j+1}\\
&+\Big(c\,(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}) - c\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{j+1/2}} - \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\,u^n_j\\
+\Big(c\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\,u^n_{j-1} &+ h_{j+1/2}\,(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2})\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j+1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j+1/2}\Big)\Big)\\
&+h_{j-1/2}\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2})\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j-1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j-1/2}\Big)\Big)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

où les coefficients A_1, A_0, A_{-1} sont donnés par les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= h_{j+1/2}\,\Big(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}\Big)\,\Big(\tfrac{1}{2}+D_{u,j+1/2}\Big) + k\,\vartheta\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big)\\
A_0 &= h_{j+1/2}\,\Big(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}\Big)\,\Big(\tfrac{1}{2}-D_{u,j+1/2}\Big) - k\,\vartheta\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big)\\
&\quad + h_{j-1/2}\,\Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\,\Big(\tfrac{1}{2}+D_{u,j-1/2}\Big) + k\,\vartheta\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\\
A_{-1} &= h_{j-1/2}\,\Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\,\Big(\tfrac{1}{2}-D_{u,j-1/2}\Big) - k\,\vartheta\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

On définit les coefficients B_1, B_0, B_{-1} par

$$
\begin{aligned}
B_1 &= A_1 - k\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big)\\
B_0 &= A_0 + k\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big) - k\Big(c(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\\
B_{-1} &= A_{-1} + k\Big(c\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

En utilisant la définition de $\delta^n u_j$, on obtient le schéma boîte découplé en u^n_j et en p^n_j, pour tout $n \geq 0$,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(i)\quad A_1\,u^{n+1}_{j+1} + A_0\,u^{n+1}_j + A_{-1}\,u^{n+1}_{j-1} = B_1\,u^n_{j+1} + B_0\,u^n_j + B_{-1}\,u^n_{j-1}\\
&\quad +k\,h_{j+1/2}\Big(\tfrac{1}{2}-D_{p,j+1/2}\Big)\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j+1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j+1/2}\Big)\Big)\\
&\quad +k\,h_{j-1/2}\Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j-1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j-1/2}\Big)\Big), \quad 1 \leq j \leq J-1\\
&(i)bis\quad k\,\vartheta\,\delta^n p_0 = \Big[h_{1/2}\Big(\tfrac{1}{2}-D_{p,1/2}\Big)\Big(\tfrac{1}{2}+D_{u,1/2}\Big) + k\,\vartheta\,\Big(c(\tfrac{1}{2}-D_{p,1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{1/2}}\Big)\Big]\,\delta^n u_1\\
&\quad +\Big[h_{1/2}\Big(\tfrac{1}{2}-D_{p,1/2}\Big)\Big(\tfrac{1}{2}-D_{u,1/2}\Big) - k\,\vartheta\,\Big(c(\tfrac{1}{2}-D_{p,1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{1/2}}\Big)\Big]\,\delta^n u_0\\
&\quad -\Big(\tfrac{1}{2}-D_{p,1/2}\Big)\,\Big(-c\,(u^n_j-u^n_0) - (p^n_1-p^n_0) + h_{1/2}\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{1/2}\Big)\Big)\\
&(ii)\quad k\,\vartheta\,\delta^n p_j =\\
&\quad -\Big[h_{j-1/2}\Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\tfrac{1}{2}+D_{u,j-1/2}\Big) + k\,\vartheta\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\Big]\,\delta^n u_j\\
&\quad -\Big[h_{j-1/2}\Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\Big(\tfrac{1}{2}-D_{u,j-1/2}\Big) - k\,\vartheta\,\Big(c\,(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\Big]\,\delta^n u_{j-1}\\
&\quad +\Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\,\Big(-c\,(u^n_j-u^n_{j-1}) - (p^n_j-p^n_{j-1})\Big)\\
&\quad +h_{j-1/2}\Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j-1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j-1/2}\Big), \quad 1 \leq j \leq J\\
&(iii)\quad \Big(\tfrac{1}{2}-D_{p,j-1/2}\Big)\,p^n_j + \Big(\tfrac{1}{2}+D_{p,j-1/2}\Big)\,p^n_{j-1} + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\,(u^n_j-u^n_{j-1}) = 0,\ 1 \leq j \leq J,\ n \geq 1\\
&(iv)\quad u^0_j = u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq J\\
&(v)\quad p^0_j = p^0(x_j), \quad 0 \leq j \leq J\\
&(vi)\quad u^n_0 = u^n_J = 0, \quad 1 \leq n
\end{aligned}
\right.
\tag{4.43}
$$

L'équation *(i)* en u est équivalente à

$$(B - k\,\vartheta\,C)\,u^{n+1} = (B + k\,(1-\vartheta)\,C)\,u^n + k\,D\,f \tag{4.44}$$

où les opérateurs B, C et D sont définis par

$$\begin{aligned}
B\,v \;=\;& h_{j+1/2}\left(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\right)\left(\frac{1}{2} + D_{u,j+1/2}\right) v_{j+1} && (4.45)\\
&+\Big[h_{j+1/2}\left(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\right)\left(\frac{1}{2} - D_{u,j+1/2}\right) + h_{j-1/2}\left(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right)\left(\frac{1}{2} + D_{u,j-1/2}\right)\Big]\,v_j\\
&+h_{j-1/2}\left(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right)\left(\frac{1}{2} - D_{u,j-1/2}\right) v_{j-1}\\
C\,v \;=\;& -\Big(c(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}) - \frac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big)\,v_{j+1} && (4.46)\\
&+\Big[\Big(c(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}) - \frac{\varepsilon}{h_{j+1/2}}\Big) - \Big(c(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\Big]\,v_j\\
&+\Big(c(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}) + \frac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\Big)\,v_{j-1}\\
D\,f \;=\;& h_{j+1/2}\left(\frac{1}{2} - D_{p,j+1/2}\right)\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j+1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j+1/2}\Big) && (4.47)\\
&+h_{j-1/2}\left(\frac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right)\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j-1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j-1/2}\Big)
\end{aligned}$$

pour certains vecteurs v et f.

Lemme 4.3.2 *Le schéma boîte (4.35) associé au problème de convection-diffusion (4.16) est équivalent à*
(1) La résolution d'un problème en $u = (u_j^n)_{0\le j\le J,\,0\le n\le N}$

$$\left\{\begin{array}{ll}
(i) & (B - k\,\vartheta\,C)\,u^{n+1} = (B + k\,(1-\vartheta)\,C)\,u^n + k\,D\,f\\
(ii) & u_j^0 = u^0(x_j)\,, \quad 0 \le j \le J\\
(iii) & u_0^n = u_J^n = 0\,, \quad 1 \le n
\end{array}\right. \tag{4.48}$$

(2) La reconstruction locale sur chaque maille du flux de diffusion p, pour $n \ge 0$

$$\left\{\begin{array}{l}
(i) k\,\vartheta\,\delta^n p_j =\\
\quad -\Big[h_{j-1/2}\left(\tfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right)\left(\tfrac{1}{2} + D_{u,j-1/2}\right) + k\,\vartheta\left(c\,(\tfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\right)\Big]\,\delta^n u_j\\
\quad -\Big[h_{j-1/2}\left(\tfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right)\left(\tfrac{1}{2} - D_{u,j-1/2}\right) - k\,\vartheta\left(c\,(\tfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}) + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\right)\Big]\,\delta^n u_{j-1}\\
\quad +\left(\tfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right)\Big(-c\,(u_j^n - u_{j-1}^n) - (p_j^n - p_{j-1}^n)\Big)\\
\quad +h_{j-1/2}\left(\tfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right)\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j-1/2} + \vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j-1/2}\Big)\,, \quad 1 \le j \le J\\
(i)bis \quad k\,\vartheta\,\delta^n p_0 = \Big[h_{1/2}\left(\tfrac{1}{2} - D_{p,1/2}\right)\left(\tfrac{1}{2} + D_{u,1/2}\right) + k\,\vartheta\left(c(\tfrac{1}{2} - D_{p,1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{1/2}}\right)\Big]\,\delta^n u_1\\
\quad +\Big[h_{1/2}\left(\tfrac{1}{2} - D_{p,1/2}\right)\left(\tfrac{1}{2} - D_{u,1/2}\right) - k\,\vartheta\left(c(\tfrac{1}{2} - D_{p,1/2}) - \tfrac{\varepsilon}{h_{1/2}}\right)\Big]\,\delta^n u_0\\
(ii) \quad \left(\tfrac{1}{2} - D_{p,j-1/2}\right) p_j^n + \left(\tfrac{1}{2} + D_{p,j-1/2}\right) p_{j-1}^n + \tfrac{\varepsilon}{h_{j-1/2}}\,(u_j^n - u_{j-1}^n) = 0\,,\ 1 \le j \le J,\ n \ge 1\\
(iii) \quad p_j^0 = p^0(x_j)\,, \qquad 0 \le j \le J
\end{array}\right. \tag{4.49}$$

La résolution du schéma boîte (4.35) est équivalente à la résolution du problème découplé ((4.48)-(4.49)). En pratique, on résoud en premier lieu le système (4.48) qui donne la solution u^{n+1} au temps t^{n+1} en fonction de la donnée initiale u^0, puis on reconstruit le flux p^{n+1} à l'instant t^{n+1} en fonction de la solution calculée u^{n+1} grâce aux équations (4.49).

Remarque :
La matrice B étant inversible, soit A l'opérateur spatial défini par $A = B^{-1}C$. Alors la formulation (4.48-(i)) en u_j^n du schéma boîte (4.35) s'écrit aussi dans le cas homogène

$$(I - k\theta A)u^{n+1} = (I + k(1-\theta)A)u^n \tag{4.50}$$

On utilisera par la suite cette formulation pour le splitting en dimension 2 du schéma boîte (4.35) obtenu en dimension 1.

4.3.4 Schéma tridiagonal

On suppose que le maillage est équidistant de pas d'espace h et que les coefficients de décentrement sont égaux sur tout le maillage; c'est-à-dire $D_{p,j-1/2} = D_p$ et $D_{u,j-1/2} = D_u$ pour tout $1 \leq j \leq J$. Soient $\lambda = \frac{c\,k}{h}$ le nombre de Courant par maille et $\mu = \frac{\varepsilon\,k}{h^2}$. Dans le cas homogène, la formulation (4.48-(i)) est équivalente au schéma compact à trois points suivant :

$$a_1\, u_{j+1}^{n+1} + a_0\, u_j^{n+1} + a_{-1}\, u_{j-1}^{n+1} = b_1\, u_{j+1}^n + b_0\, u_j^n + b_{-1}\, u_{j-1}^n \tag{4.51}$$

où les coefficients a_i et b_i ($i = -1, 0, 1$) sont donnés par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = \left(\frac{1}{2} - D_p\right)\left(\frac{1}{2} + D_u + \vartheta\,\lambda\right) - \vartheta\,\mu \\ b_1 = \left(\frac{1}{2} - D_p\right)\left(\frac{1}{2} + D_u - \lambda\,(1-\vartheta)\right) + \mu\,(1-\vartheta) \\ a_0 = \frac{1}{2} + 2\,\vartheta\,\mu + 2\,D_p\,(D_u + \vartheta\,\lambda) \\ b_0 = \frac{1}{2} - 2\,(1-\vartheta)\,\mu + 2\,D_p\,(D_u - (1-\vartheta)\,\lambda) \\ a_{-1} = \left(\frac{1}{2} + D_p\right)\left(\frac{1}{2} - D_u - \vartheta\,\lambda\right) - \vartheta\,\mu \\ b_{-1} = \left(\frac{1}{2} + D_p\right)\left(\frac{1}{2} - D_u + \lambda\,(1-\vartheta)\right) + \mu\,(1-\vartheta) \end{array}\right. \tag{4.52}$$

Noter que la forme (4.51) correspond à la forme (2) de Rigal, [41], qui étudie des schémas implicites à trois points. Le coefficient de décentrement D_p (constant par maille) donné par la formule (4.27) vérifie

$$(a_1 - b_1)\,(a_{-1} - b_{-1}) \geq 0 \tag{4.53}$$

qui est la la condition suffisante de Rigal de monotonie de l'état stationnaire (Lemme 2 de [41]).

Lemme 4.3.3 *Le schéma boîte (4.48-4.49) admet une unique solution* $(u_j^n, p_j^n) \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ *au temps* n.

Preuve :
La formulation boîte en u (4.48-(i)) s'écrit :

$$(B - k\,\vartheta\,C)\,u^{n+1} = (B + k\,(1-\vartheta)\,C)u^n + k\,D\,f \tag{4.54}$$

Il suffit donc de vérifier que la matrice $B - k\theta C$ (qui contient les conditions aux limites Dirichlet) est inversible. Le calcul du déterminant de $B - k\theta C$ donne $\det(B - k\theta C) = \frac{1}{r_1 - r_2}(r_1^J - r_2^J)$, où r_1 et r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique : $r^2 - a_0\, r - a_1\, a_{-1} = 0$. Puisque $r_1 \neq r_2$,

$$\begin{aligned} \det(B - k\,\vartheta\, C) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad r_1^J - r_2^J = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad r_1 = -r_2 \text{ si J est pair} \\ &\Longleftrightarrow \quad a_0 = 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Or, $\mu > 0$ et D_p, $D_u + \vartheta\,\lambda$ sont du signe de c. Donc $a_0 > 0$. Ainsi $\det(B - k\,\vartheta\, C)$ est toujours non nul. Ce qui prouve l'existence et l'unicité de la solution u. De plus, p est donné de façon unique en fonction de u par les équations (4.49). Ce qui conclut la preuve. ■

4.4 Interprétation éléments finis du schéma boîte

On définit les deux fonctions de décentrement constantes par boîte $K_{j-1/2}$. Elles sont définies par :

$$d_p\,(x) = \sum_{j=2}^{J} D_{p,j-1/2}\, h_{j-1/2} \mathbb{1}_{K_{j-1/2}}\,(x) \qquad \text{décentrement stationnaire} \tag{4.56}$$

$$d_u\,(x) = \sum_{j=2}^{J} D_{u,j-1/2}\, h_{j-1/2} \mathbb{1}_{K_{j-1/2}}\,(x) \qquad \text{décentrement instationnaire} \tag{4.57}$$

On note $u_h(.,t) \in P^1_{c,0}$, $p_h(.,t) \in P^1_c$ les fonctions semi-discrètes de type éléments finis

$$u_h(x,t) = \sum_{j=0}^{J} u_j\,(t)\,\varphi_j\,(x) \qquad \text{et} \qquad p_h(x,t) = \sum_{j=0}^{J} p_j\,(t)\,\varphi_j\,(x) \tag{4.58}$$

où $(\varphi_j)_j$ sont les fonctions P^1-Lagrange associées au sommet x_j.

Proposition 4.4.1 (Interprétation SUPG du schéma boîte)
Le schéma-boîte (4.35) est équivalent au problème semi-discret : chercher $(u_h\,(.,t), p_h(.,t) \in P^1_{c,0} \times P^1_c$ tel que
(i) $u_h(.,t) \in P^1_{c,0}$ est solution de la formulation SUPG pour tout $v_h \in P^1_{c,0}$

$$\begin{aligned} (\frac{d}{dt}[\Pi^0\, u_h(.,t) \quad &+ \quad d_u\, u_{h,x}(.,t)]\ ;\ v_h + d_p\, v_{h,x}) + (c u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_h + d_p\, v_{h,x}) \\ &+ \quad (\varepsilon u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) = ((\Pi^0 f)(.,t)\ ;\ v_h + d_p\, v_{h,x}) \end{aligned} \tag{4.59}$$

(ii) La reconstruction locale de $p_h\,(.,t)$ est

$$\begin{aligned} p_h\,(.,t)_{|K_{j-1/2}} \quad = \quad & -\varepsilon u_{h,x}(.,t)_{|K_{j-1/2}} \\ & +[\Pi^0 f(.,t) - c u_{h,x}(.,t) - \frac{d}{dt}\,(\Pi^0\, u_h(.,t) + d_u\, u_{h,x}(.,t))]\,[D_{p,j-1/2} + \overrightarrow{x_{j-1/2}\, x}] \end{aligned} \tag{4.60}$$

où $x_{j-1/2}$ désigne le milieu de la boîte $K_{j-1/2}$.

Preuve :
Le schéma boîte semi-discret (4.35) peut se réécrire sous la forme de la méthode d'éléments finis mixte (Petrov-Galerkin) suivante : chercher $(u_h(.,t), p_h(.,t)) \in P^1_{c,0} \times P^1_c$ tel que pour tout $(\tilde{v}_h, \tilde{q}_h) \in P^0 \times P^0$, on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dfrac{d}{dt}[\Pi^0 u_h(.,t) + d_u\, u_{h,x}(.,t)]; \tilde{v}_h) + (c\, u_{h,x}(.,t)\ ;\ \tilde{v}_h) + (p_{h,x}\ ;\ \tilde{v}_h) = (f(.,t)\ ;\ \tilde{v}_h)\ , \\ (\Pi^0\, p_h(.,t) - d_p\, p_{h,x}(.,t)\ ;\ \tilde{q}_h) + \varepsilon\, (u_{h,x}(.,t)\ ;\ \tilde{q}_h) = 0 \end{array} \right. \tag{4.61}$$

(i) Soit $v_h \in P^1_{c,0}$, choisissons $\tilde{q}_h = v_{h,x} \in P^0$ dans $(4.61)_2$. Ceci donne

$$(\Pi^0\, p_h(.,t), v_{h,x}) - (d_p(.) p_{h,x}(.,t), v_{h,x}) + \varepsilon\, (u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) = 0 \tag{4.62}$$

Or, $(\Pi^0\, p_h(.,t))_{|K_{j-1/2}} = p_h(.,t)_{|K_{j-1/2}} - p_{h,x}(.,t)_{|K_{j-1/2}} \overrightarrow{x_{j-1/2}\, x}$, où $x_{j-1/2}$ est le milieu de la cellule $K_{j-1/2}$. En remplaçant l'expression de $\Pi^0\, p_h(.,t)$ dans (4.62), on obtient après intégration par parties

$$\begin{array}{r} -(p_{h,x}(.,t), v_h) - \displaystyle\sum_{K_{j-1/2}} (p_{h,x}(.,t)_{|K_{j-1/2}} \overrightarrow{x_{j-1/2}\, x}, v_{h,x}) - (d_p\, p_{h,x}(.,t), v_{h,x}) \\ +\varepsilon\, (u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) = 0 \end{array} \tag{4.63}$$

Puisque $p_{h,x}(.,t)\, v_{h,x} \in P^0$, le terme $\sum_{K_{j-1/2}} (p_{h,x}(.,t)_{|K_{j-1/2}} \overrightarrow{x_{j-1/2}\, x}, v_{h,x}) = 0$. D'où on déduit que

$$-(p_{h,x}(.,t), v_h) - (d_p\, p_{h,x}(.,t), v_{h,x}) + \varepsilon\, (u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) = 0 \tag{4.64}$$

L'équation $(4.61)_1$ est vraie pour $\tilde{v}_h = \Pi^0 v_h \in P^0$, donc par propriété de Π^0, on obtient

$$0 \ = \ (\frac{d}{dt}[\Pi^0 u_h(.,t) + d_u\, u_{h,x}(.,t)]; v_h) + (c\, u_{h,x}(.,t), v_h) + (p_{h,x}(.,t)\ ;\ v_h) - (\Pi^0 f(.,t), v_h) \tag{4.65}$$

Ce qui donne, en sommant les égalités (4.64) et (4.65) :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (\dfrac{d}{dt}[\Pi^0 u_h(.,t) + d_u\, u_{h,x}(.,t)]; v_h) + (c\, u_{h,x}(.,t), v_h) + \varepsilon\, (u_{h,x}(.,t)\ ;\ v_{h,x}) \\ & & -(\Pi^0 f(.,t), v_h) - (d_p\, p_{h,x}(.,t), v_{h,x}) \end{array} \tag{4.66}$$

Nous prenons maintenant $\tilde{v}_h = d_p\, v_{h,x} \in P^0$ dans $(4.61)_1$, ce qui donne, à chaque instant t

$$\begin{array}{rcl} (d_p\, p_{h,x}(.,t), v_{h,x}) & = & (\Pi^0 f(.,t), d_p\, v_{h,x}) - (\dfrac{d}{dt}[\Pi^0 u_h(.,t) + d_u\, u_{h,x}(.,t)], d_p\, v_{h,x}) \\ & & -(c\, u_{h,x}(.,t), d_p\, v_{h,x}(.,t)) \end{array} \tag{4.67}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (4.66) on obtient la formulation (4.59).
(ii) Le flux p_h est donné sur chaque maille $K_{j-1/2}$ par la formule affine

$$p_h(.,t)_{|K_{j-1/2}} = (\Pi^0 p_h(.,t))_{|K_{j-1/2}} + p_{h,x}(.,t)_{|K_{j-1/2}} \overrightarrow{x_{j-1/2}\, x} \tag{4.68}$$

où $x_{j-1/2}$ désigne le milieu de la boîte $K_{j-1/2}$. Puisque $u_h \in P^1$ et $p_h \in P^1$ localement, le terme $\Pi^0\, p_h(.,t) - d_p\, p_{h,x}(.,t) + \varepsilon\, u_{h,x}(.,t)$ est un polynôme constant, l'équation $(4.61)_2$ donne donc $\Pi^0\, p_h\, (.,t)$:

$$\Pi^0\, p_h(.,t)_{|K_{j-1/2}} = -\varepsilon u_{h,x}(.,t)_{|K_{j-1/2}} + D_{p,j-1/2}\, p_{h,x}(.,t)_{|K_{j-1/2}} \tag{4.69}$$

De même, l'écriture de $p_{h,x} \in P^0$ est déduite de l'équation $(4.61)_1$

$$p_{h,x}(.,t) = \Pi^0 f(.,t) - c\, u_{h,x}(.,t) - \frac{d}{dt}\left(\Pi^0\, u_h(.,t) + d_u\, u_{h,x}(.,t)\right) \tag{4.70}$$

■

4.5 Equation équivalente

Afin d'obtenir des conditions sur le coefficient de décentrement D_u, nous étudions maintenant l'équation équivalente associée au schéma boîte en u donné par (4.48). Nous étendons l'analyse par l'équation équivalente dans le cas de l'équation de convection de [12], au cas de l'équation de convection-diffusion. Si A est un opérateur différentiel linéaire spatial d'ordre maximal $O(A)$ défini par

$$A\,u = \sum_{\alpha=1}^{O(A)} a_\alpha \partial_\alpha u\,, \tag{4.71}$$

l'équation équivalente du problème d'évolution suivant

$$\frac{du}{dt} = Au \tag{4.72}$$

est l'équation formelle

$$\frac{du}{dt} = Au + \sum_{\alpha \geq O(A)} h^\alpha\, E_{\alpha+1}\, \partial_{\alpha+1}\, u \tag{4.73}$$

obtenue par un développement limité de Taylor du schéma, en remplaçant les dérivées partielles en temps par des dérivées partielles en espace, obtenues à partir de l'équation équivalente elle-même [33, 20].

Proposition 4.5.1 *L'équation équivalente du schéma (4.48) est*

$$u_t + cu_x - \varepsilon u_{xx} = h\, E_2\, u_{xx} + h^2\, E_3\, u_{xxx} + h^3\, E_4\, u^{(4)} + \ldots \tag{4.74}$$

où le coefficient de dissipation E_2 et le coefficient de dispersion E_3 sont donnés respectivement par les formules

$$E_2 = c\,\tilde{D}_u \quad ; \quad E_3 = c\left[\frac{1}{12}(1-\lambda^2) - \tilde{D}_u^2\right] - \frac{\varepsilon}{h}\left[\tilde{D}_u + \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\lambda - D_p\right] \tag{4.75}$$

avec $\tilde{D}_u = D_u + (\vartheta - 1/2)\lambda$.

Le terme E_3 s'écrit encore en fonction du nombre de Courant λ et du nombre de Peclet Pe :

$$E_3 = c\left[\frac{1}{12}(1-\lambda^2) - \tilde{D}_u^2 - \frac{1}{2\ \mathrm{Pe}}\left[\tilde{D}_u + \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\lambda - D_p\right]\right] \tag{4.76}$$

L'équation équivalente donne quelques informations sur le coefficient de décentrement D_u. Elle peut se réécrire :

$$u_t + cu_x = (\varepsilon + ch\,\tilde{D}_u)\, u_{xx} + h^2\, E_3\, u_{xxx} + h^3\, E_4\, u^{(4)} + \dots \tag{4.77}$$

Le coefficient $ch\,\tilde{D}_u$ joue le rôle de diffusion artificielle du schéma. Si le nombre de Peclet est assez petit, c'est-à-dire si le problème de convection-diffusion (4.16) est suffisamment diffusif, il n'est pas nécessaire de rajouter de la diffusion artificielle. Le coefficient D_u doit donc être nul. En particulier, si $c = 0$, on choisit $D_u = 0$. Sur la base d'expériences numériques pour l'équation de convection pure, une valeur expérimentale de D_u de l'ordre de 0.1 donne des profils non oscillants dans la plupart des cas. Nous prendrons dans la suite $D_{u,0} = 0.2 = \frac{\mathrm{sgn}(c)}{2\,\mathrm{Pe}_0}$, où $\mathrm{Pe}_0 = 2.5$ pour la convection pure. En nous basant sur cette remarque et sur l'écriture (4.77), nous pouvons choisir de façon analogue une valeur de D_u telle que :

$$\varepsilon + ch\,\tilde{D}_u \geq ch\tilde{D}_{u,0} \tag{4.78}$$

Or, $\tilde{D}_u = D_u + \lambda(\vartheta - \frac{1}{2})$ et $\tilde{D}_{u,0} = D_{u,0} + \lambda(\vartheta - \frac{1}{2})$, la formule (4.78) est équivalente à

$$\mathrm{sgn}(c)\, D_u \geq \frac{1}{2\,\mathrm{Pe}_0} - \frac{\varepsilon}{|c|\,h} \tag{4.79}$$

C'est-à-dire

$$\mathrm{sgn}(c)\, D_u \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{\mathrm{Pe}_0} - \frac{1}{\mathrm{Pe}}) \tag{4.80}$$

D'autre part, nous cherchons un décentrement de la variable u colinéaire à la convection c, c'est-à-dire tel que $\mathrm{sgn}(c)\, D_u \geq 0$. Une façon de choisir D_u est de prendre

$$D_u = \frac{\mathrm{sgn}(c)}{2} \max(0, \frac{1}{\mathrm{Pe}_0} - \frac{1}{\mathrm{Pe}})\,. \tag{4.81}$$

Dans la suite, nous utiliserons cette formule pour D_u. En particulier, pour un nombre de Peclet $\mathrm{Pe} \leq 2.5$, le coefficient D_u est nul. Notons que D_u intervient en rajoutant de la diffusion artificielle à l'équation de convection-diffusion. Si la quantité de diffusion donnée par μ est suffisante, il est inutile de rajouter de la diffusion artificielle. Dans ce cas, le coefficient de décentrement D_u est nul. Par contre, dans un régime plutôt convectif, il est nécessaire de rajouter de la diffusion artificielle pour éliminer les oscillations dispersives. En augmentant la valeur du décentrement D_u, on stabilise le schéma, puisqu'il devient plus diffusif. En contrepartie, la solution calculée par le schéma boîte est moins précise. En effet, on le constate dans l'équation équivalente (4.74), le schéma n'est précis qu'à l'ordre 1 en espace si E_2 est non nul.
Le régime de l'équation de convection-diffusion s'interprète par le biais du nombre de Peclet. C'est donc aussi le nombre de Peclet qui intervient pour le calcul des valeurs de décentrement D_u et D_p, données par les formules (4.81) et (4.27).

Remarques :
1- L'expression (4.75) est valable pour $|\lambda| = \mathcal{O}(1)$ et $\mathrm{Pe} = \mathcal{O}(1)$.

2- Si Pe $> \mathcal{O}(\frac{1}{h})$, alors le terme $\frac{1}{2\,\mathrm{Pe}}\left[\tilde{D}_u + \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\lambda - D_p\right]$ donne un terme d'ordre h^α, $\alpha \geq 3$ dans l'équation équivalente. On retrouve dans ce cas l'équation équivalente de B. Courbet pour l'équation de convection pure :

$$u_t + c\,u_x = c\,\tilde{D}_u\,h\,u_{xx} + c\,\left[\frac{1}{12}(1-\lambda^2) - \tilde{D}_u^2\right]\,h^2 u_{xxx} + \mathcal{O}(h^3)$$

3- Le schéma boîte proposé présente l'inconvénient de n'avoir qu'un paramètre D_u à optimiser, ϑ et D_p étant supposés fixés par des contraintes de stabilité. On doit donc choisir D_u au mieux pour limiter les oscillations dispersives.
4- La formule (4.81) est linéaire et donne uniquement un schéma d'ordre 1 quand Pe $\geq$ Pe$_0$. Ceci pourrait être amélioré par un réglage non linéaire de D_u analogue à ceux des limiteurs de pente pour la méthode volumes finis.

4.6 Analyse numérique de type différences finies

Nous allons étudier quelques propriétés (stabilité, consistance) du schéma boîte (4.35) associé au problème de convection-diffusion homogène défini sur un maillage régulier de type différences finies. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux propriétés de la formulation en l'inconnue u du schéma boîte (4.35), donnée par (4.48), par rapport à l'équation de convection-diffusion (4.16). En fait, nous comparons la solution exacte de l'équation de convection-diffusion (4.16) et la solution approchée u du schéma boîte (4.35), donnée par (4.48), le flux de diffusion p étant déduit de u par la formulation (4.49).

4.6.1 Stabilité

Nous allons étudier la stabilité du schéma (4.48) au sens de Von Neumann, sur un maillage régulier de type différences finies. Le facteur d'amplification du schéma (4.48) est donné par

$$g(\theta) = \frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)} = \frac{b_0 + (b_1 + b_{-1})\cos\theta + i(b_1 - b_{-1})\sin\theta}{a_0 + (a_1 + a_{-1})\cos\theta + i(a_1 - a_{-1})\sin\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi[. \tag{4.82}$$

D'après [20], nous avons les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité du schéma en u, (4.48) données par l'étude du facteur d'amplification :

Proposition 4.6.1 (Stabilité)
Soit $\tilde{D}_u = \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\lambda + D_u$. Le schéma (4.48) est stable au sens de Von Neumann si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(i)\ \ \tilde{D}_u\,\lambda + \mu \geq 0 \qquad et \qquad (ii)\ \ [D_p\,\lambda + \mu]\left[\tilde{D}_u\,D_p + \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\mu\right] \geq 0$$

En particulier, la condition $\vartheta \geq \frac{1}{2}$ est une condition suffisante assurant la stabilité du schéma (4.48) au sens de Von Neumann.

Preuve :
Nous rappelons brièvement la preuve de [20], déduite du résultat général de Rigal [41]. A savoir la condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma $\sup_{\theta \in [0,2\pi[} |g(\theta)| \leq 1$ est équivalente d'après Rigal, [41] à

$$a_1 + a_{-1} - b_1 - b_{-1} \leq \min\left[(a_1 - a_{-1})^2 - (b_1 - b_{-1})^2 \;;\; (a_1 + a_{-1})^2 - (b_1 + b_{-1})^2\right] \qquad (4.83)$$

Or, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{array}{l} a_1 - a_{-1} = D_u + \vartheta\,\lambda - D_p \\ a_1 + a_{-1} = \frac{1}{2} - 2D_p(D_u + \vartheta\,\lambda) - 2\vartheta\mu \\ b_1 - b_{-1} = a_1 - a_{-1} - \lambda \\ b_1 + b_{-1} = a_1 + a_{-1} + 2\,D_p\lambda + 2\mu \end{array} \qquad (4.84)$$

Donc, la condition (4.83) est équivalente à

$$-(D_p\lambda + \mu) \leq \min\left(\lambda\,(\tilde{D}_u - D_p)\;;\; -2\,(D_p\lambda + \mu)\,(\frac{1}{2} - 2D_p\,\tilde{D}_u - 2(\vartheta - \frac{1}{2})\mu)\right) \qquad (4.85)$$

Ce qui donne les conditions *(i)* et *(ii)*.

Le choix de D_p donné par la formule (4.27) implique l'équivalence entre la condition *(ii)* et la condition suivante

$$\tilde{D}_u\,D_p + \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\mu \geq 0$$

Nous choisissons D_u et c de même signe. Nous obtenons la condition suffisante de stabilité du schéma (4.48) : $\vartheta \geq \frac{1}{2}$. En effet : si $\vartheta \geq \frac{1}{2}$, puique λ et D_u sont du signe de c, $\tilde{D}_u\,\lambda \geq 0$. Or, μ est toujours strictement positif, la condition *(i)* est donc vérifiée. De même $\tilde{D}_u\,D_p \geq 0$. Ce qui prouve *(ii)*. ∎

Si le nombre de Peclet est inférieur à 1, c'est-à-dire si l'équation de convection-diffusion est suffisament diffusive, D_p est nul d'après (4.27). Le schéma est donc stable si et seulement si $\vartheta \geq \frac{1}{2}$. On retrouve en particulier, le résultat de stabilité du schéma boîte pour l'équation de la chaleur (cf Chapitre 1). Dans la suite, le coefficient de décentrement en temps ϑ sera choisi $\vartheta \geq \frac{1}{2}$, assurant la stabilité du schéma. Rappelons toutefois que la stabilité du schéma n'exclut pas les oscillations observées pour l'équation de la chaleur, au Chapitre 1. En effet, nous verrons au Paragraphe 4.7.2 que de telles oscillations peuvent apparaître. Nous en ferons l'interprétation au Paragraphe 4.7.3.

4.6.2 Consistance du schéma boîte

Considérons le problème de convection-diffusion homogène. Nous allons étudier la consistance de la formulation en u (4.48), du schéma boîte (4.35) par rapport au problème de convection-diffusion (4.16) ; c'est-à-dire l'équivalence du schéma discret et du problème continu lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers 0. Soit $\lambda = \frac{c\,k}{h}$ le nombre de Courant et $\mu = \frac{\varepsilon\,k}{h^2}$. Le nombre de Peclet qui mesure le rapport de la convection sur la diffusion est $\mathrm{Pe} = \frac{|\lambda|}{\mu} = \frac{|c|\,h}{2\,\varepsilon}$.

Proposition 4.6.2 (Consistance)
La formulation en u (4.48) du schéma boîte (4.35) est consistante avec le problème (4.16) à l'ordre 1 en espace et l'ordre 1 en temps si $\vartheta \neq \frac{1}{2}$, à l'ordre 2 en temps sinon.

Preuve :
Nous étudions la consistance du schéma (4.48) par rapport à $u(x,t)$ en évaluant, ([42]) pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ la différence

$$\frac{1}{k}\Big(e^{kq(\xi)} - g(h\xi)\Big) \tag{4.86}$$

où q est le symbole de l'opérateur spatial continu $-cu_x + \varepsilon u_{xx}$, donné par $q(\xi) = -c\,i\,\xi - \varepsilon\,\xi^2$ et $g(h\xi)$ est le facteur d'amplification du schéma boîte (4.48). On considère que h, $k \to 0$ indépendemment, avec l'hypothèse que λ et μ vérifient $\lambda_1 < |\lambda| < \lambda_2$ et $\mu_1 < |\mu| < \mu_2$. Le pas de temps k est supposé donné en fonction du pas d'espace h par une fonction $k = \Lambda(h^\alpha)$, pour un certain α. Dans le cas d'un régime plutôt convectif, on prend $k = \mathcal{O}(h)$ et dans le cas d'un régime de type diffusion dominante, $k = \mathcal{O}(h^2)$. Le facteur d'amplification g du schéma boîte (4.48) est donné par (4.82), pour $\theta = h\,\xi \in [0, 2\pi[$:

$$g(\theta) = \frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)} = \frac{b_0 + (b_1 + b_{-1})\cos\theta + i(b_1 - b_{-1})\sin\theta}{a_0 + (a_1 + a_{-1})\cos\theta + i(a_1 - a_{-1})\sin\theta} \tag{4.87}$$

Un développement limité en h de $g(\theta)$, $\theta = h\,\xi$, ξ fixé à l'ordre 4 est

$$\begin{array}{rcl} g(\theta) & = & 1 - i\theta\big((a_1 - a_{-1}) - (b_1 - b_{-1})\big) \\ & & +\theta^2\Big(\frac{1}{2}\big((a_1 + a_{-1}) - (b_1 + b_{-1})\big) + (a_1 - a_{-1})\big((b_1 - b_{-1}) - (a_1 - a_{-1})\big)\Big) \\ & & +i\theta^3\Big(\frac{1}{6}\big((a_1 - a_{-1}) - (b_1 - b_{-1})\big) - (a_1 - a_{-1})\,(a_1 + a_{-1}) \\ & & +(a_1 - a_{-1})^2\,\big((a_1 - a_{-1}) - (b_1 - b_{-1})\big) + (b_1 - b_{-1})\frac{(a_1 + a_{-1})}{2} + (b_1 + b_{-1})\frac{(a_1 - a_{-1})}{2}\Big) \\ & & +A_4\theta^4 + \mathcal{O}(\theta^5) \end{array} \tag{4.88}$$

où A_4 est égal à

$$\begin{array}{rcl} A_4 & = & \frac{1}{4!}\Big((b_1 + b_{-1}) - (a_1 + a_{-1})\Big) + \frac{1}{4}\,(a_1 + a_{-1})\Big((a_1 + a_{-1}) - (b_1 + b_{-1})\Big) \\ & & -\frac{3}{2}(a_1 - a_{-1})^2(a_1 + a_{-1}) + \frac{1}{2}(b_1 + b_{-1})(a_1 - a_{-1})^2 \\ & & -\frac{1}{3}(a_1 - a_{-1})(b_1 - b_{-1}) + \frac{1}{3}(a_1 - a_{-1})^2 \\ & & +(b_1 - b_{-1})(a_1 - a_{-1})(a_1 + a_{-1}) + (a_1 - a_{-1})^4 - (b_1 - b_{-1})(a_1 - a_{-1})^3 \end{array} \tag{4.89}$$

Pour la commodité du calcul, on conserve les notations avec le paramètre $\theta = \xi\,h$, $h \to 0$. De plus, ϑ, λ, μ et $\mathrm{Pe} = \frac{\lambda}{2\mu}$ sont fixés. D'autre part, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{array}{l} a_1 - a_{-1} = D_u + \vartheta\,\lambda - D_p \\ a_1 + a_{-1} = \frac{1}{2} - 2D_p(D_u + \vartheta\,\lambda) - 2\vartheta\mu \\ b_1 - b_{-1} = a_1 - a_{-1} - \lambda \\ b_1 + b_{-1} = a_1 + a_{-1} + 2D_p\lambda + 2\mu \end{array} \tag{4.90}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (4.88), on obtient

$$\begin{aligned} g(\theta) &= 1 - i\theta\lambda - \theta^2\Big(\mu + \lambda(D_u + \vartheta\lambda)\Big) \\ &\quad + i\theta^3\Big(-\tfrac{\lambda}{12} + \lambda\,(D_u + \vartheta\,\lambda)^2 + \mu\,(D_u + 2\vartheta\,\lambda - D_p)\Big) + A_4\theta^4 + \mathcal{O}(\theta^5) \end{aligned} \tag{4.91}$$

D'autre part, on a

$$e^{kq(\xi)} = 1 - k(ci\xi + \varepsilon\xi^2) + \tfrac{k^2}{2}(ci\xi + \varepsilon\xi^2)^2 + \mathcal{O}(k^3) \tag{4.92}$$

On garde h et k distincts pour le moment. Le terme $e^{kq(\xi)} - g(h\xi)$ est donné par :

$$\begin{aligned} e^{kq(\xi)} - g(h\xi) &= 1 - k(ci\xi + \varepsilon\xi^2) + \tfrac{k^2}{2}(ci\xi + \varepsilon\xi^2)^2 + \mathcal{O}(k^3) \\ &\quad -1 + i\xi h\lambda + \xi^2 h^2\Big(\mu + \lambda(D_u + \vartheta\lambda)\Big) \\ &\quad -i\xi^3 h^3\Big(-\tfrac{\lambda}{12} + \lambda\,(D_u + \vartheta\,\lambda)^2 + \mu\,(D_u + 2\vartheta\,\lambda - D_p)\Big) \\ &\quad -A_4\xi^4\,h^4 + \cdots \end{aligned} \tag{4.93}$$

En remplaçant les valeurs de λ et μ, l'équation (4.93) est encore égale à :

$$\begin{aligned} e^{kq(\xi)} - g(h\xi) &= k^2\Big(\xi^2\,c^2\,(\vartheta - \tfrac{1}{2}) + \xi^4\,\tfrac{\varepsilon^2}{2} + i\xi^3\,c\,\varepsilon\,(1 - 2\vartheta)\Big) - i\xi^3\,c^3\,\vartheta^2\,k^3 + \mathcal{O}(k^3) \\ &\quad + k\,h\Big(\xi^2\,c\,D_u - i\xi^3\,(D_u - D_p)\,\varepsilon\Big) \\ &\quad + i\xi^3\,h^2\,k\,c\,(\tfrac{1}{12} - D_u^2) - 2i\xi^3\,c^2\,D_u\,\vartheta h\,k^2 \\ &\quad -\xi^4 h^4 A_4 + \cdots \end{aligned} \tag{4.94}$$

Le coefficient A_4 est donné par :

$$\begin{aligned} A_4\theta^4 = \xi^4\,A_4 h^4 = k\,\Big[&\vartheta\varepsilon^2\,k\,\xi^4 + 3k^2\vartheta^2\varepsilon c^2\,\xi^4 + \varepsilon h^2(-\tfrac{1}{6} + D_p\,D_u + (D_u - D_p)^2)\,\xi^4 \\ &+ 2\,kh\,\vartheta\varepsilon c(2D_u - D_p)\,\xi^4 + \mathcal{O}(\|(h,k)\|^3)\Big] \end{aligned} \tag{4.95}$$

où on définit $\mathcal{O}(\|(h,k)\|) = \mathcal{O}(\|h\|) + \mathcal{O}(\|k\|)$. Après simplification, $\frac{1}{k}\Big(e^{kq(\xi)} - g(h\xi)\Big)$ est donné par

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{k}\Big(e^{kq(\xi)} - g(h\xi)\Big) &= k\Big[\xi^2\,c^2\,(\vartheta - \tfrac{1}{2}) + i\,\xi^3\,c\,\varepsilon\,(1 - 2\vartheta) + \xi^4\,\varepsilon^2(\tfrac{1}{2} - \vartheta)\Big] \\ &\quad - k^2\,\Big(i\xi^3\,c^3\,\vartheta^2 + 3\,c^2\,\varepsilon\,\vartheta^2\,\xi^4\Big) \\ &\quad + h\Big(cD_u\xi^2 - i\xi^3\,(D_u - D_p)\,\varepsilon\Big) \\ &\quad + h^2\Big(i\xi^3\,c\,(\tfrac{1}{12} - D_u^2) - \varepsilon\,\xi^4(-\tfrac{1}{6} + D_p\,D_u + (D_u - D_p)^2)\Big) \\ &\quad - h\,k\Big(2i\xi^3\,c^2\,D_u\,\vartheta + 2\,c\,\varepsilon\vartheta\,\xi^4(2D_u - D_p)\Big) \\ &\quad + \mathcal{O}(\|(h,k)\|^3) \end{aligned} \tag{4.96}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{k}\Big(e^{kq(\xi)} - g(h\xi)\Big) = (\vartheta - \frac{1}{2})\,\mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(\|(h, h\,k)\|) \tag{4.97}$$

Le schéma boîte (4.48) est donc d'ordre 1 en temps si $\vartheta \neq \frac{1}{2}$, d'ordre 2 en temps sinon et toujours d'ordre 1 en espace. Si le nombre de Peclet est inferieur à 1, les coefficients de décentrement D_p et D_u sont nuls dans l'équation (4.96). Dans ce cas, le schéma est consistant à l'ordre 2 en espace. On retrouve également les résultats de consistance obtenus pour l'équation de la chaleur (Chapitre 1) si $c = 0$. ■

Par application du théorème de Lax-Richtmyer, [42], on obtient

Théorème 4.6.1 *Le schéma boîte en u donné par (4.48) est consistant avec le problème (4.16) et stable sous les conditions de la Proposition 4.6.1, il est donc convergent sous ces conditions. C'est-à-dire :*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t) - u_h(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(T)\, h\,.$$

Exemples numériques :
Nous cherchons à illustrer l'effet des coefficients de décentrement D_u et D_p sur la solution u du schéma boîte (4.35) grâce à quelques tests numériques. On suppose que les coefficients de décentrement D_u et D_p sont donnés par les formules (4.81) et (4.27) :

$$D_u = \frac{\mathrm{sgn}(c)}{2}\max(0, \frac{1}{\mathrm{Pe}_0} - \frac{1}{\mathrm{Pe}})\,,$$
$$D_{p,j-1/2} = \frac{\mathrm{sgn}(c)}{2}\max(0, 1 - \frac{1}{\mathrm{Pe}_{j-1/2}})\,.$$

On considère le problème de convection-diffusion

$$\begin{cases} u_t + u_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad x \in]0,2[, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,2] \\ u(0,t) = 1,\ u(2,t) = 0 \end{cases} \tag{4.98}$$

de solution intiale de type créneau

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < 0.5 \\ 0 \text{ si } 0.5 < x < 2\,. \end{cases} \tag{4.99}$$

Le segment $[0,2]$ est maillé par 101 points, le pas d'espace est $h = 2.10^{-2}$. On choisit un pas de temps constant pour tous les tests $k = 0.3\,h = 6.10^{-3}$, le paramètre ϑ de l'intégration en temps est $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Test 1 : action de D_p : On considère le cas où le coefficient de diffusion est $\varepsilon = 4.4.10^{-3}$, ce qui donne $\lambda = 0.3$, $\mu = 0.066$ et un nombre de Peclet Pe $= 2.2727$. Les coefficients de décentrement prennent les valeurs $D_p = 0.28$, $D_u = 0$. La solution discrète u du schéma boîte (4.48) est représentée sur la Figure 4.3. La Figure 4.2 représente la solution discrète du schéma boîte (4.48) dans le cas où le coefficient de décentrement D_p est choisi $D_p = 0$ sans utiliser la formule (4.27). Quelques oscillations apparaissent alors, au niveau du front initial. Elles n'apparaissaient pas pour un choix du décentrement D_p donné par la formule

(4.27). Ceci prouve, que le décentrement D_p est indispensable même en phase transitoire.

Test 2 : action de D_u : On considère la cas où le coefficient de diffusion est $\varepsilon = h^2 = 4.10^{-4}$, ce qui donne $\lambda = 0.3$, $\mu = 6.10^{-3}$ et un nombre de Peclet Pe $= 25$. Les coefficients de décentrement prennent les valeurs $D_p = 0.48$, $D_u = 0.18$. La solution discrète u du schéma boîte (4.48) est représentée sur la Figure 4.5. La Figure 4.4 représente la solution discrète du schéma boîte (4.48) dans le cas où le coefficient de décentrement D_p est gardé tel quel et le coefficient de décentrement D_u est choisi $D_u = 0$, sans utiliser la formule (4.81). Alors d'importantes oscillations dispersives apparaissent au niveau du front, ce qui n'est pas le cas si le coefficient de décentrement D_u est non nul. Le coefficient de décentrement D_u permet d'éliminer les oscillations dispersives du schéma. La solution obtenue est moins précise (seulement d'ordre 1), mais ne présente plus d'oscillations.

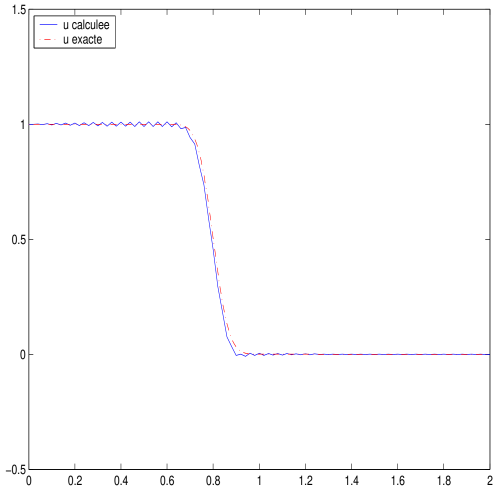

FIG. 4.2 – Test 1 : Aucun décentrement : $D_p = 0$

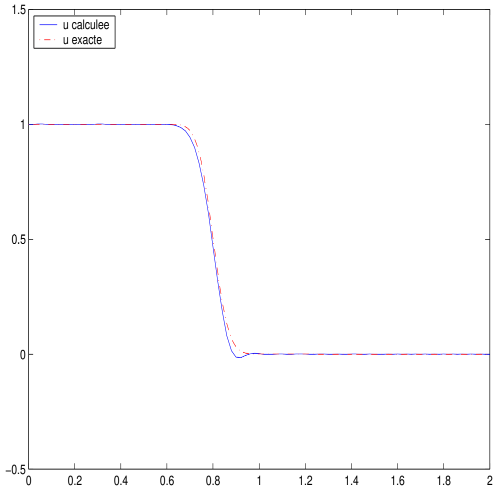

FIG. 4.3 – Test 1 : Décentrement $D_p = 0.28$ donné par (4.27)

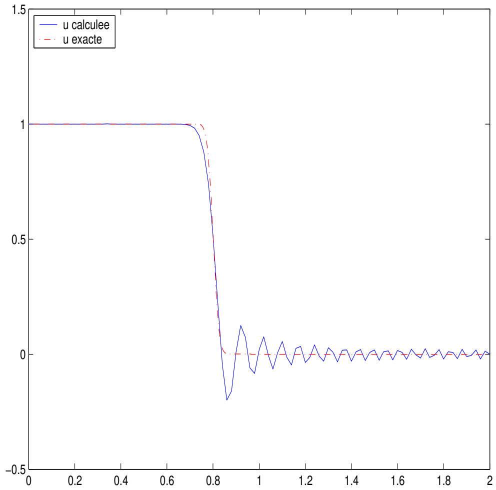

FIG. 4.4 – Test 2 : Aucun décentrement : $D_u = 0$. On observe des oscillations dispersives.

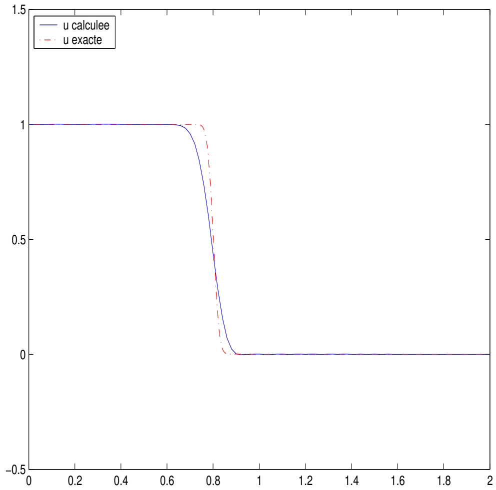

FIG. 4.5 – Test 2 : Décentrement $D_u = 0.18$ donné par (4.81). Le schéma est d'ordre 1. On observe la diffusion artificielle.

4.7 Comportement numérique du schéma sur le créneau

4.7.1 Introduction

Nous étudions la solution du schéma boîte selon les différents régimes de convection-diffusion du schéma. En premier lieu, nous étudions le cas où le nombre de Courant λ est $\lambda = \mathcal{O}(1)$ et ensuite $\lambda = \mathcal{O}(h)$. Ceci a pour conséquence de fixer le pas de temps k en fonction du pas d'espace h. Nous distinguons plusieurs cas selon l'ordre du nombre de Peclet Pe par rapport au pas d'espace h.

Nous considérons quelques cas représentatifs des différents régimes classiques de l'équation (4.16), c'est-à-dire :
• convection dominante si $\mathrm{Pe} = \mathcal{O}(\frac{1}{h})$
• convection-diffusion si $\mathrm{Pe} = \mathcal{O}(1)$
• diffusion dominante si $\mathrm{Pe} = \mathcal{O}(h)$
où Pe est le nombre de Peclet par maille. Il peut être choisi distinct par maille, puisque les coefficients c et ε sont donnés dans chaque maille. Pour simplifier, nous considérons le cas où le coefficient de convection c est $c = 1$. Le choix du pas de temps k se fait en fonction du pas d'espace h, selon les valeurs prises par le nombre de Courant $\lambda = \frac{k}{h}$. Puisque nous étudions l'équation de convection-diffusion *instationnaire*, nous nous intéressons à la partie instationnaire du problème, c'est-à-dire à de petits pas de temps. Nous nous restreignons donc dans cette étude à des nombres de Courant en $\mathcal{O}(1)$ ou $\mathcal{O}(h)$.

λ | Pe	$\mathcal{O}(\frac{1}{h})$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(h)$
$\mathcal{O}(1)$	$\mu \sim h$ $\varepsilon \sim h^2$ $k \sim h$	$\mu \sim 1$ $\varepsilon \sim h$ $k \sim h$	$\mu \sim \frac{1}{h}$ $\varepsilon \sim 1$ $k \sim h$
$\mathcal{O}(h)$	$\mu \sim h^2$ $\varepsilon \sim h^2$ $k \sim h^2$	$\mu \sim h$ $\varepsilon \sim h$ $k \sim h^2$	$\mu \sim 1$ $\varepsilon \sim 1$ $k \sim h^2$

TAB. 4.1 – Tableau récapitulatif des différents couplages possibles entre le nombre de Courant et le nombre de Peclet.

4.7.2 Tests numériques

Nous calculons la solution du schéma boîte (4.35) associé à l'équation de convection diffusion suivante

$$\begin{cases} u_t + u_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \quad x \in]0,2[, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,2] \\ u(0,t) = 1,\ u(2,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \tag{4.100}$$

de solution initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < 0.5 \\ 0 \text{ si } 0.5 < x < 2\,. \end{cases} \tag{4.101}$$

Le segment $[0, 2]$ est maillé par 100 boîtes de même longueur $h = 0.02$. On observe la solution calculée au bout du temps $T = 1$ selon les différents régimes du nombre de Courant λ.

1. Tests pour $\lambda = \mathcal{O}(1)$

Nous nous plaçons dans le cas où le nombre de Courant λ est d'ordre 1, c'est-à-dire que le pas d'espace k est du même ordre que le pas d'espace h. Le coefficient ϑ d'intégration en temps est choisi égal à 1/2 (Crank-Nicolson). Nous distinguons selon l'ordre du nombre de Peclet Pe, l'allure de la solution discrète u du schéma boîte (4.35). Si des oscillations apparaissent, on observe numériquement les conséquences que peuvent avoir l'augmentation artificielle de la valeur de ϑ ou l'augmentation de décentrement D_u sur la solution calculée.

• **Cas 1.1 :** $\text{Pe} = \mathcal{O}(\frac{1}{h})$**,** $\lambda = \mathcal{O}(1)$ **:**

L'équation est à convection dominante. Puisque le nombre de Peclet est très grand, les coefficients de décentrement D_u et D_p sont donnés par les formules (4.81) et (4.27) et sont donc non nuls, . La solution calculée u est représentée sur la Figure 4.6 au bout du temps $T = 1$ (c'est-à-dire 50 itérations), pour les paramètres $k = h$, $\vartheta = 0.5$, $\varepsilon = h^2$. On observe très nettemment l'effet de D_u sur la solution du schéma. Le schéma boîte obtenu est très diffusif, la solution obtenue est peu précise. En effet : le créneau est amorti par la diffusion artificielle provenant de D_u dans l'équation équivalente. Pour éviter les oscillations dispersives du schéma, on augmente fortement la diffusion du schéma, mais on obtient une solution moins précise. Il faudrait avoir recours ici à une variante de schéma boîte de plus haute précision, utilisant en particulier un réglage non linéaire de la diffusion artificielle (coefficient D_u), dans le même esprit que celui des limiteurs de pente dans les méthodes de volumes finis. Nous n'avons pas étudié une telle variante dans ce travail.

• **Cas 1.2 :** $\text{Pe} = \mathcal{O}(1)$**,** $\lambda = \mathcal{O}(1)$ **:**

On distingue trois cas selon les valeurs du nombre de Peclet, pour lesquels les coefficients de décentrement sont soit simultanément nuls, soit D_p est non nul et D_u est nul, soit simultanément non nuls. Le pas d'espace k est choisi égal au pas d'espace h pour ces trois sous-cas.

•• **Cas 1.2.1 :** $\text{Pe} < 1$ **:**

Le nombre ce Peclet est inférieur à 1, les formules (4.27) et (4.81) impliquent que $D_u = 0$ et $D_p = 0$. On conserve les données précédentes : $\vartheta = 0.5$, $h = 0.02$, $k = h$. On choisit maintenant $\varepsilon = h$. Donc le nombre de Peclet prend la valeur $\text{Pe} = 0.5$. La solution discrète u du schéma boîte (4.35) est représentée sur la Figure 4.7. On constate l'apparition d'oscillations au niveau du front de la solution initiale au point $x = 0.5$. Ces oscillations sont de même nature que celles observées au Chapitre 1 pour le schéma boîte associé à l'équation de la chaleur. L'interprétation de ces oscillations provient du mode oscillant qui sera mis

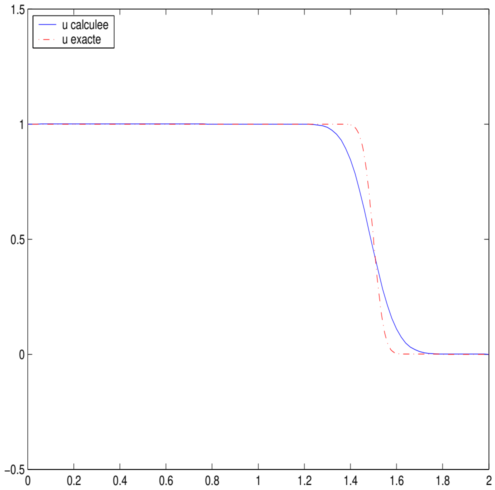

FIG. 4.6 – Cas 1.1 : $\lambda = 1$, Pe $= 25$, $T = 1$,$D_u = 0.18, \vartheta = 0.5$.

en évidence au Lemme 4.7.1. Les Figures 4.8 et 4.9 représentent la solution u du schéma (4.35), dans lequel on augmente de façon artificielle la valeur de ϑ ou de D_u. On constate, que l'augmentation (même faible) de ϑ atténue les oscillations, alors qu'une augmentation de D_u ou de D_p est sans conséquence sur les oscillations de la solution.

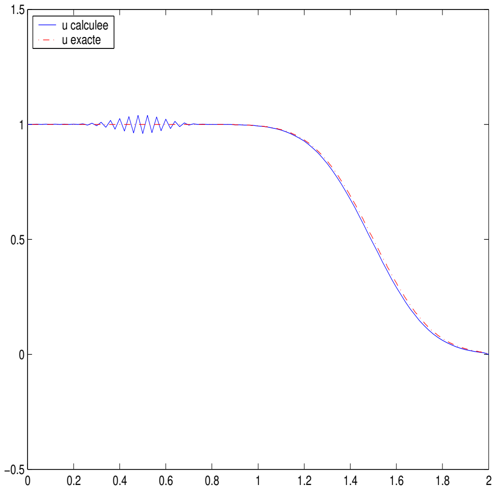

FIG. 4.7 – Cas 1.2.1 : $\lambda = 1$, Pe $= 0.5$, $T = 1$, $D_u = 0$, $\vartheta = 0.5$.

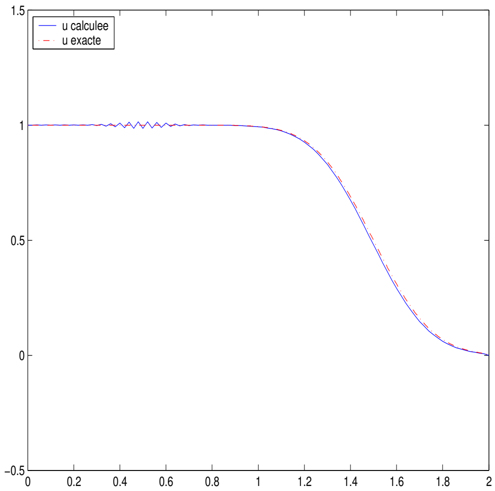

FIG. 4.8 – Cas 1.2.1 : $\lambda = 1$, Pe $= 0.5$, $T = 1$, augmentation de $\vartheta = 0.505$, $D_u = 0$.

•• **Cas 1.2.2 :** $1 < \text{Pe} < \text{Pe}_0 (= 2.5)$ **:**

Dans ce test, nous considérons les cas où le nombre de Peclet prend des valeurs comprises entre 1 et 2.5, ce qui a pour conséquence de ne plus annuler le coefficient de décentrement D_p. Pour les données $\vartheta = 0.5$, $h = 0.02$, $k = h$ et $\varepsilon = 0.006 = 0.3\,h$, le nombre de Peclet

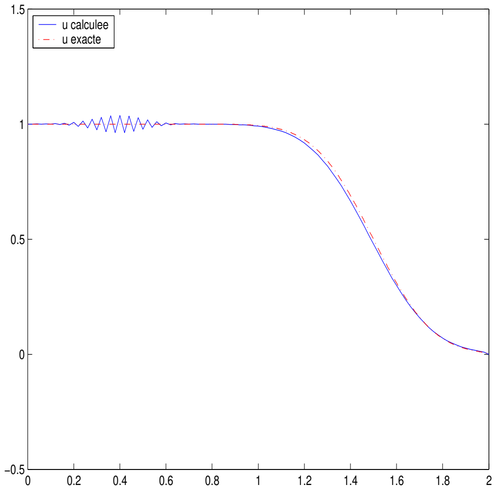

FIG. 4.9 – Cas 1.2.1 : $\lambda = 1$, Pe $= 0.5$, $T = 1$, augmentation de $D_u = 0.1$, $\vartheta = 0.5$,

est Pe $= 5/3$, donc $D_p = 0.2$ par la formule (4.27) et D_u reste nul. La solution u du schéma boîte (4.35) est représentée sur la Figure 4.10. Cette fois encore les oscillations apparaissent au niveau du front de la solution initiale et sont convectées par l'équation. Une augmentation du coefficient ϑ ou du coefficient de décentrement D_u atténuent les oscillations (Figures 4.11 et 4.12). Notons que pour des valeurs de $\lambda < 1$, les oscillations apparaissent après le front initial et sont convectées par l'équation. Dans ce cas, l'augmentation de D_u élimine instantanément les oscillations.

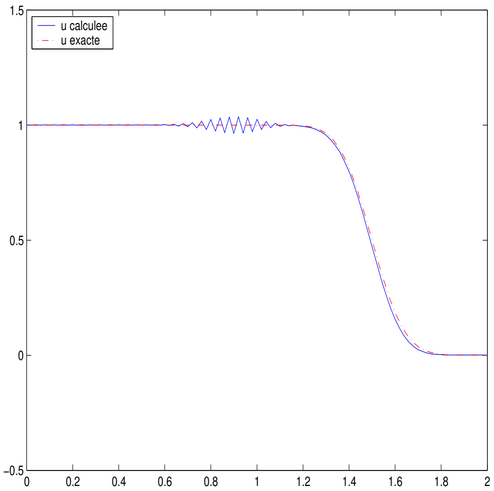

FIG. 4.10 – Cas 1.2.2 : $\lambda = 1$, Pe $= 5/3$, $T = 1$ $D_u = 0$, $\vartheta = 0.5$

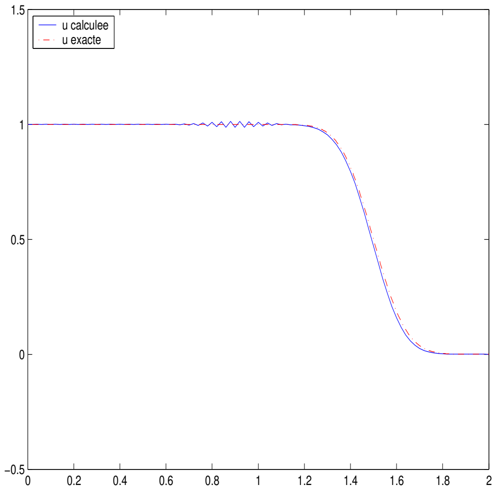

FIG. 4.11 – Cas 1.2.2 : $\lambda = 1$, Pe $= 5/3$, $T = 1$, augmentation de $\vartheta = 0.505$, $D_u = 0$

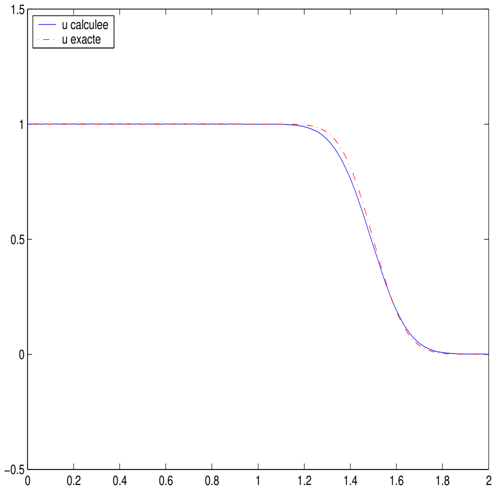

FIG. 4.12 – Cas 1.2.2 : $\lambda = 1$, Pe $= 5/3$, $T = 1$, augmentation de $D_u = 0.1$, $\vartheta = 0.5$.

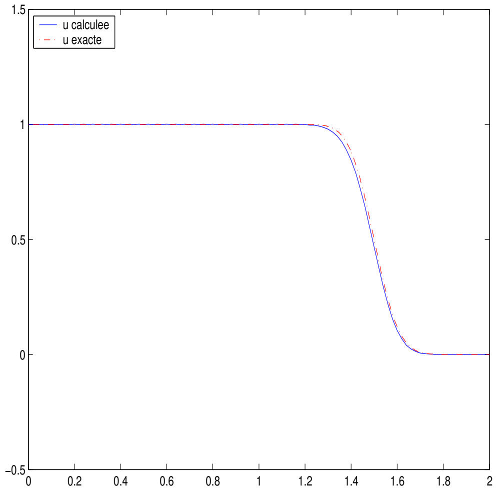

FIG. 4.13 – Cas 1.2.3 : $\lambda = 1$, Pe $= 3$, $T = 1$, $\vartheta = 0.5$, $D_u = 0.033$, $D_p = 0.333$.

•• **Cas 1.2.3 :** Pe > 2.5 **:**

Nous considérons le cas où le nombre de Peclet est supérieur à 2.5. Alors, les coefficients de décentrement D_p et D_u sont non nuls. Soient les données $\vartheta = 0.5$, $\varepsilon = k/6$, $k = h$, $h = 0.02$, le nombre de Peclet est Pe $= 3$. Les coefficients de décentrement prennent les valeurs $D_p = 0.3333$, $D_u = 0.0333$. La solution discrète du schéma est représentée sur la Figure 4.13 au bout de 50 itérations. Quelques oscillations apparaissent au niveau du front initial. Elles disparaissent assez rapidement (totalement au bout de 40 iterations).

• **Cas 1.3 :** Pe $= \mathcal{O}(h)$**,** $\lambda = \mathcal{O}(1)$

Le nombre de Peclet est inférieur à 1. Le régime d'équation est plutôt diffusif du type d'une équation de la chaleur. On observe les résultats donnés par le schéma boîte pour $k = \mathcal{O}(h)$ ($\lambda = \mathcal{O}(1)$) et non pas $k = \mathcal{O}(h^2)$. Le pas de temps est sélectionné en fonction du nombre de Courant λ et non pas en fonction du paramètre μ qui semblerait plus approprié. Les coefficients de décentrement D_p et D_u sont donc nuls d'après les formules (4.27) et (4.81). On considère les données $\varepsilon = 1$, $\vartheta = 0.5$, $h = 0.02$, $k = h$. Le nombre de Peclet est Pe $= 10^{-2}$. La solution u du problème (4.35) est représentée sur la Figure 4.14. Une forte oscillation apparaît au niveau du front de la solution initiale au point d'abscisse $x = 0.5$ et n'est pas amortie. C'est un phénomène qui semble typique des schémas boîte ; il entretient les oscillations au démarrage. L'augmentation de ϑ atténue ce phénomène (Figure 4.15), comme on l'a déjà vu pour l'équation de la chaleur au Chapitre 1. L'augmentation de D_u est sans effet (Figure 4.16). On constate qu'une augmentation plus forte de D_u à la valeur 1 n'améliore pas le résultat. Noter cependant une augmentation simultanée de D_u et D_p élimine ces oscillations.

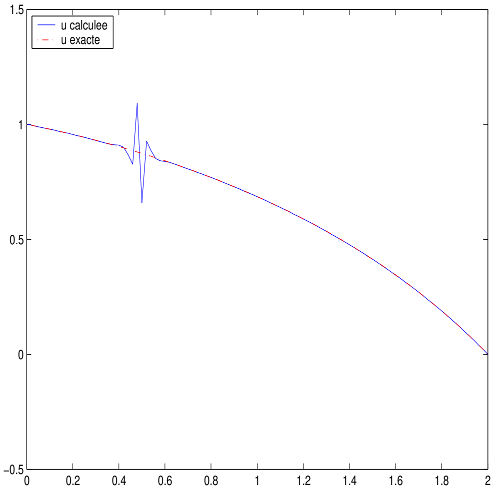

FIG. 4.14 – Cas 1.3 : $\lambda = 1$, Pe $= 10^{-2}$, $T = 1$, $D_u = 0$, $\vartheta = 0.5$.

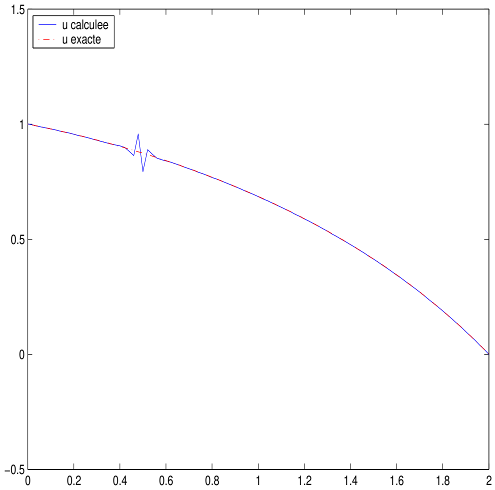

FIG. 4.15 – Cas 1.3 : $\lambda = 1$, Pe $= 10^{-2}$, $T = 1$, augmentation de $\vartheta = 0.505$, $D_u = 0$.

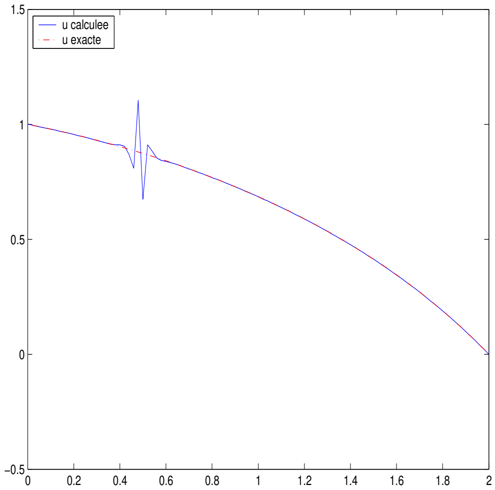

FIG. 4.16 – Cas 1.3 : $\lambda = 1$, Pe $= 10^{-2}$, $T = 1$, augmentation de $D_u = 0.1$, $\vartheta = 0.5$.

2. Tests pour $\lambda = \mathcal{O}(h)$

Nous nous intéressons maintenant au cas où λ est d'ordre h. Le pas de temps k est donc en $\mathcal{O}(h^2)$; c'est-à-dire caractéristique d'une éqaution de diffusion. Comme précédemment, on considère différentes valeurs du nombre de Peclet.

- **Cas 2.1 :** Pe $= \mathcal{O}(\frac{1}{h})$, $\lambda = \mathcal{O}(h)$ **:**

Nous sommes dans un régime d'équation de type convectif, pour lequel le pas de temps est choisi en fonction de l'échelle de temps de la diffusion. Dans ce cas, les coefficients de décentrement D_p et D_u sont non nuls. Pour $\varepsilon = h^2$, $\vartheta = 0.5$, $h = 0.02$, $k = h^2 = 4.10^{-4}$, le nombre de Peclet est Pe $= 25$. D'après les formules (4.81) et (4.27) les paramètres de décentrement sont non nuls : $D_u = 0.18$, $D_p = 0.48$. On représente la solution du problème approché (4.35) au temps intermédiaire $T = 0.1$ (250 itérations en temps) sur la Figure 4.17 et au temps final $T = 1$ (2500 itérations) sur la Figure 4.18. Les oscillations présentent lors du choc s'atténuent rapidement. On obtient un profil comparable à celui obtenu pour $\lambda = \mathcal{O}(1)$ et Pe $= \mathcal{O}(\frac{1}{h})$ (Cas 1.2).

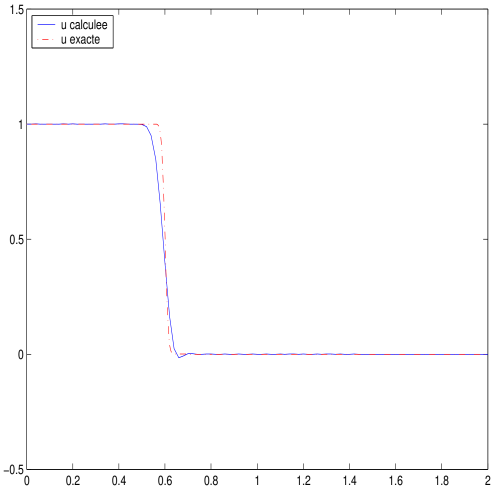

FIG. 4.17 – Cas 2.1 : $\lambda = h$, Pe $= 25$, $T = 0.1$

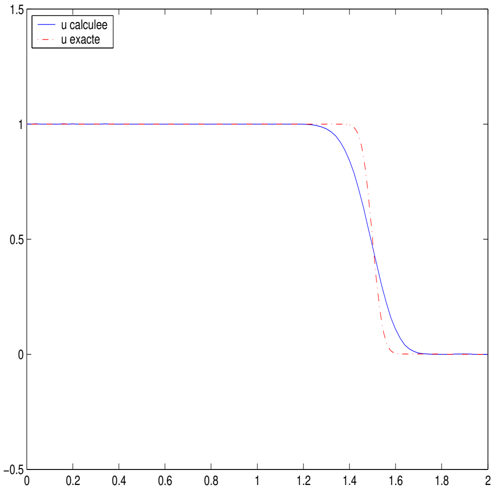

FIG. 4.18 – Cas 2.1 : $\lambda = h$, Pe $= 25$, $T = 1$

- **Cas 2.2 :** Pe $= \mathcal{O}(1)$, $\lambda = \mathcal{O}(h)$ **:**

On reprend les tests effectués au Cas 1.2. La solution discrète u du schéma est représentée sur les Figures 4.19, 4.20 et 4.21, pour des nombres de Peclet respectivement égaux à Pe $= 0.5$, Pe $= 5/3$ et Pe $= 3$. Contrairement au Cas 1.2, le pas de temps est assez petit pour prendre en compte le front de la solution initiale. Les oscillations sont de plus faible amplitude que dans les cas 1.2.1 et 1.2.2.

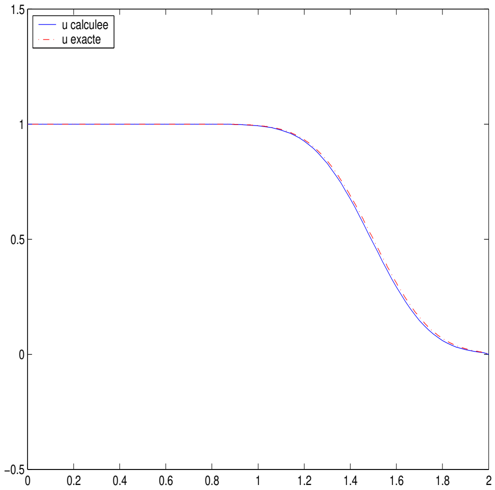

FIG. 4.19 – Cas 2.2.1 : $\lambda = h$, Pe $= 0.5$, $T = 1$, $D_u = 0$, $\vartheta = 0.5$, $\varepsilon = h = 0.02$, $D_p = 0$

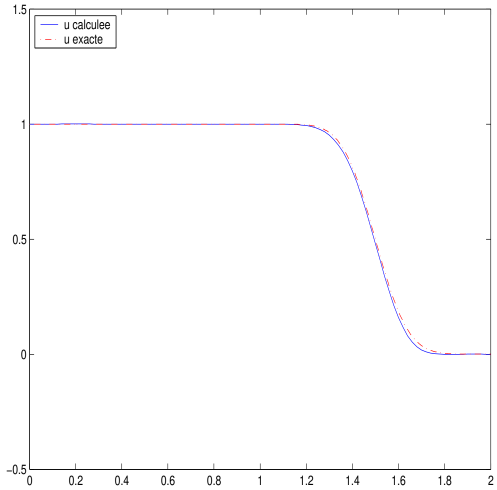

FIG. 4.20 – Cas 2.2.2 : $\lambda = h$, Pe $= 5/3$, $T = 1$, $D_u = 0$, $\vartheta = 0.5$, $\varepsilon = 6.10^{-3}$, $D_p = 0.2$

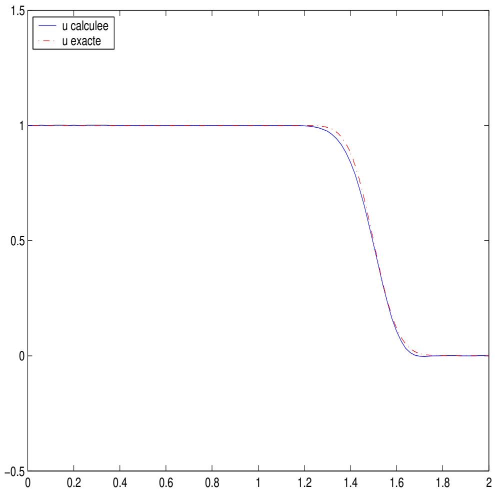

FIG. 4.21 – Cas 2.2.3 : $\lambda = h$, Pe $= 3$, $T = 1$, $D_u = 0.0033$, $\vartheta = 0.5$, $\varepsilon = h/6$, $D_p = 0.3333$

- **Cas 2.3 :** Pe $= \mathcal{O}(h)$

Puisque le nombre de Peclet est de l'ordre du pas d'espace, nous sommes dans un régime de type diffusif simulé avec un pas de temps convenable pour la diffusion ($k = \mathcal{O}(h^2)$). Donc, les coefficients de décentrement sont nuls. Pour des valeurs du coefficient de diffusion $\varepsilon = 1$ et des paramètres $\vartheta = 0.5$, $h = 0.02$, $k = h^2 = 4.10^{-4}$, le nombre de Peclet est Pe $= 10^{-2}$. On représente la solution du schéma boîte (4.35) au temps intermédiaire $T = 0.1$ (sur la Figure 4.22) qui correspond à 250 itérations en temps et au temps final $T = 1$ (sur la Figure 4.25), pour 2500 itérations. Des oscillations apparaissent au niveau du front initial et s'atténuent lentement. L'augmentation de la valeur de ϑ accélère ce phénomène (Figure 4.23). Dans le premier cas les oscillations autour de $x = 0.5$ subsistent assez longtemps. Elles s'atténuent au bout de 250 itérations si $\theta = 0.505$ et au bout de 500 itérations si $D_u = 0.1$. En diminuant le pas de temps, la solution calculée u présente moins d'oscillations et converge vers la solution exacte. Nous constatons que la diminution du pas de temps contribue à l'étalement des oscillations. Ce phénomène s'explique probablement par l'augmentation du coefficient E_3 de l'équation équivalente (4.74) ; c'est-à-dire de la dispersion du schéma.

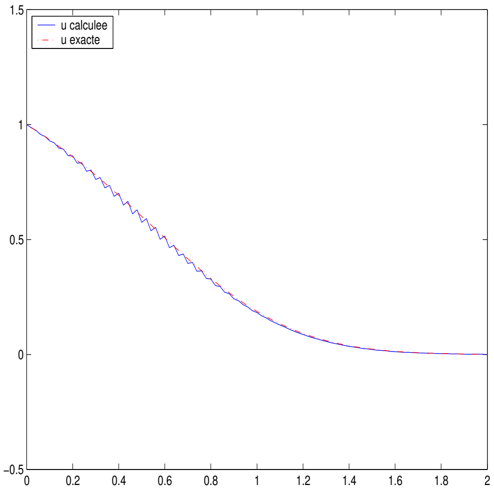

FIG. 4.22 – Cas 2.3 : $\lambda = h$, Pe $= 10^{-2}$, $T = 0.1$, $D_u = 0$, $\vartheta = 0.5$

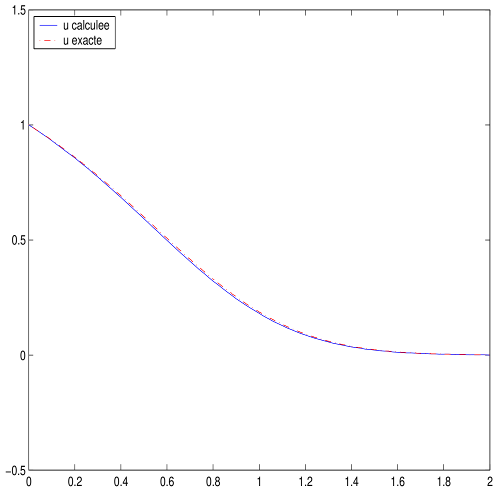

FIG. 4.23 – Cas 2.3 : $\lambda = h$, Pe $= 10^{-2}$, $T = 0.1$, augmentation de $\vartheta = 0.505$, $D_u = 0$

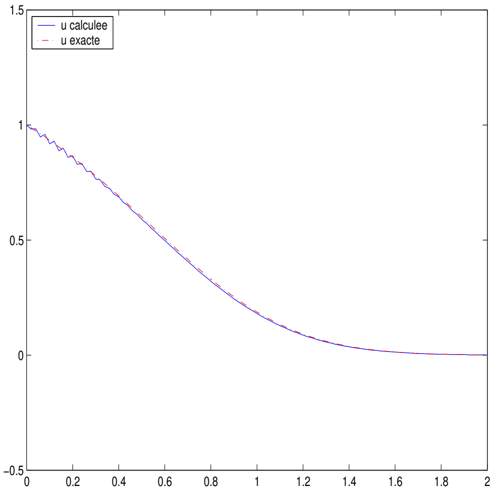

FIG. 4.24 – Cas 2.3 : $\lambda = h$, Pe $= 10^{-2}$, $T = 0.1$, augmentation de $D_u = 0.1$, $\vartheta = 0.5$

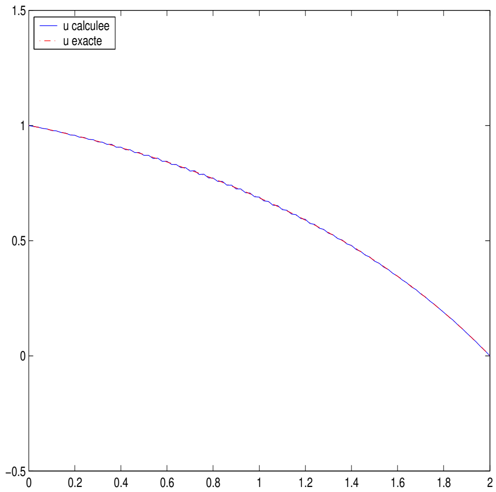

FIG. 4.25 – Cas 2.3 : $\lambda = h$, Pe $= 10^{-2}$, $T = 1$, $D_u = 0$, $\vartheta = 0.5$

On remarque donc que dans certains cas, un mode oscillant vient parasiter la solution du schéma boîte. Toutefois, une augmentation de ϑ permet toujours de réduire le phénomène d'oscillation jusqu'à l'éliminer complétement. A noter qu'une augmentation artificielle du coefficient de décentrement D_u lorsqu'il est nul a une action similaire à celle de ϑ, si le coefficient de décentrement D_p est non nul. Nous allons maintenant interpréter ce phénomène par l'étude du facteur d'amplification g de la formulation en u du schéma boîte (4.35).

4.7.3 Interprétation

Dans cette partie, nous allons donner une expliquation des oscillations produites par le schéma à l'aide d'une étude du facteur d'amplification du schéma boîte. Le facteur d'amplification est donné par la formule (4.82) :

$$g(\theta) = \frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)} = \frac{b_0 + (b_1 + b_{-1})\, \cos\theta + i\,(b_1 - b_{-1}) \sin\theta}{a_0 + (a_1 + a_{-1})\, \cos\theta + i\,(a_1 - a_{-1}) \sin\theta}\ , \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

sa valeur en π est

$$g(\pi) = \frac{b_0 - (b_1 + b_{-1})}{a_0 - (a_1 + a_{-1})} \tag{4.102}$$

Lemme 4.7.1

$$g(\pi) = -1 \quad \textit{si et seulement si} \quad \Big(\ D_p\, \tilde{D}_u = 0 \quad \textit{et} \quad 2\vartheta - 1 = 0\ \Big) \tag{4.103}$$

Preuve du Lemme 4.7.1 :
Par définition de g et en utilisant les formules (4.52), on a

$$\begin{array}{rcl} g(\pi) = -1 & \Longleftrightarrow & b_0 + a_0 - (b_1 + b_{-1} + a_1 + a_{-1}) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 2D_p\tilde{D}_u - \mu\,(1 - 2\vartheta) = 0 \end{array} \tag{4.104}$$

Or, D_p et $\tilde{D}_u$ sont du signe de c, leur produit est donc positif. D'autre part, $\vartheta \in [\frac{1}{2}, 1]$, donc $1 - 2\vartheta \leq 0$. Ainsi, $2D_p\tilde{D}_u \geq 0$ et $-\mu\,(1 - 2\vartheta) \geq 0$, puisque $\mu > 0$. Ceci prouve le résultat. ■

En particulier si la solution u calculée par le schéma boîte présente à un instant donné une oscillation, celle-ci est automatiquement amplifiée par un facteur $+1$ ou -1 à chaque pas de temps suivant. Ce qui donne naissance à un mode oscillant qui parasite la solution. Ce lemme explique en particulier certains phénomènes oscillatoires, tels que ceux mis en évidence au Cas 1.2 ($\lambda = \mathcal{O}(1)$, $\mathrm{Pe} = \mathcal{O}(1)$). En effet :

• pour le Cas 1.2.1, $\mathrm{Pe} < 1$ donne $D_u = D_p = 0$ et si $\vartheta = \frac{1}{2}$, alors $g(\pi) = -1$. La Figure 4.7 représente le mode oscillant lié au créneau initial. Seule une augmentation de ϑ permet d'avoir $g(\pi) \neq -1$, comme cela est constaté sur les Figures 4.8 et 4.9.

• de même pour le Cas 1.2.2, $1 < \mathrm{Pe} < \mathrm{Pe}_0$ donne $D_p \neq 0$ et $D_u = 0$. Si $\vartheta = \frac{1}{2}$, alors $g(\theta) = -1$. On constate effectivement sur la Figure 4.10, l'apparition d'un mode oscillant. En augmentant ϑ ou D_u, on obtient $g(\pi) \neq -1$ (voir les Figures 4.11 et 4.12).

• enfin pour le Cas 1.2.3, $\mathrm{Pe} > \mathrm{Pe}_0$ donne $D_p \neq 0$ et $D_u \neq 0$, donc $g(\pi) \neq -1$. On constate effectivement l'abscence d'oscillations dans ce cas (Figure 4.13).
D'autre part, si le coefficient de décentrement D_u calculé par la formule (4.81), est non nul, alors le décentrement D_p est également non nul par la formule (4.27). Dans ce cas, $D_p \tilde{D}_u$ est non nul qui implique que $g(\pi) \neq -1$. On constate effectivement que pour les cas $\mathrm{Pe} > \mathrm{Pe}_0$, aucun mode oscillant n'apparaît.
Dans tous les cas, pour une valeur du paramètre $\vartheta > \frac{1}{2}$, on a $g(\pi) \neq -1$, donc l'augmentation de ϑ permet d'éliminer certains phénomènes oscillatoires.

4.7.4 Un cas test pour une équation de convection-diffusion à fort contraste de coefficient de diffusion

Nous considèrons le problème, [20],

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + u_x - (\varepsilon(x) u_x)_x = 0 \qquad x \in]0,1] \\ u\,(x,0) = u_0(x), \quad x \in]0,1] \\ u\,(0,t) = 1, \quad u\,(1,t) = 0 \end{array}\right. \tag{4.105}$$

où le coefficient de diffusion est donné par $\varepsilon(x) = \left\{\begin{array}{cc} 10^{-6} & 0 < x < 0.15 \\ 1 & 0.15 < x < 0.25 \\ 10^{-3} & 0.25 < x < 0.35 \\ 10^{-1} & 0.35 < x < 0.45 \\ 1 & 0.45 < x < 1 \end{array}\right.$

La solution initiale est $u_0(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$
Le schéma calcule simultanément u et le flux $p = -(\varepsilon(x) u_x)$ par la résolution du système (4.48) et la reconstruction (4.49). Le pas de temps est choisi automatiquement par $\frac{k}{\max(h_{j-1/2})} = 0.5$. On calcule la solution pour 100 cellules, $\vartheta = 0.5$. Les paramètres $D_{u,j-1/2}$ et $D_{p,j-1/2}$ sont donnés dans chaque boîte par les formules (4.27), (4.81). Les Figures 4.26 à 4.31 représentent les fonctions $u(x)$, $p(x) = -\varepsilon u_x$ au temps $T1 = 0.084$, $T2 = 0.175$, $T3 = 0.238$, $T4 = 0.35$, $T5 = 0.525$, $T6 = 1.519$. u est représentée par des cercles et le flux p en trait continu. Le pas d'espace varie dans chaque boîte $K_{j-1/2}$. Le nombre CFL local $\lambda_{j-1/2}$ est représenté sur la Figure 4.32. Le coefficient local $\mu_{j-1/2}$ est représenté sur la Figure 4.33. On peut noter un bon comportement du schéma, qui passe dans tous les régimes du nombre de Peclet. Le saut du coefficient de diffusion $\varepsilon(x)$ ne géne pas.

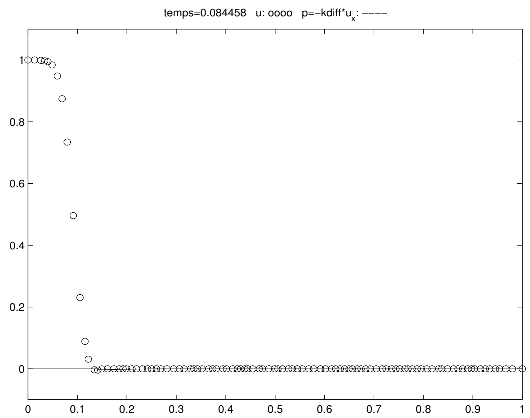

FIG. 4.26 – 100 points, T_1

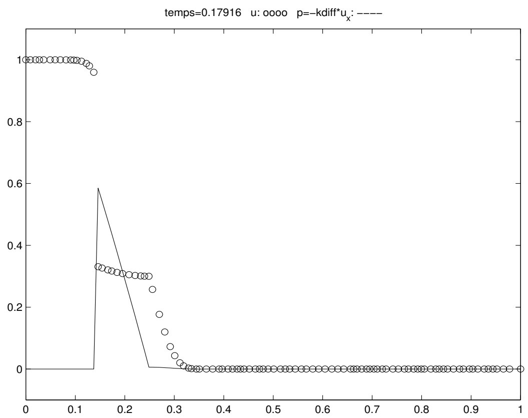

FIG. 4.27 – 100 points, T_2

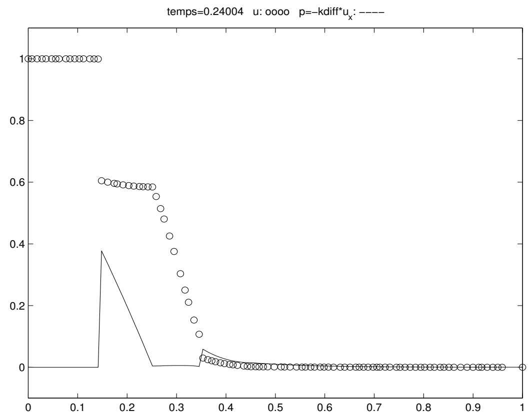

FIG. 4.28 – 100 points, T_3

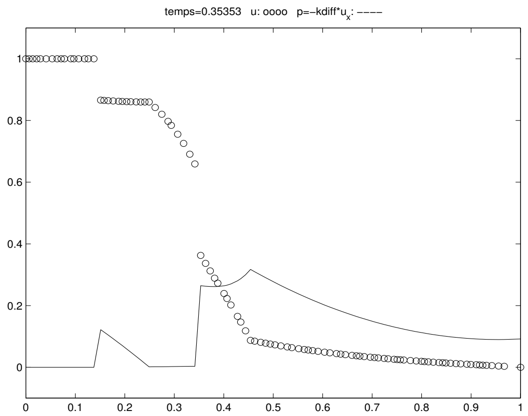

FIG. 4.29 – 100 points, T_4

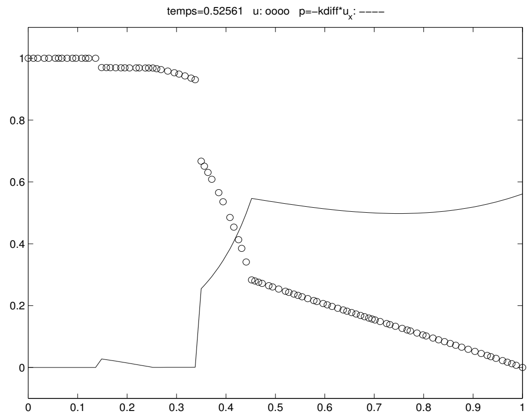

FIG. 4.30 – 100 points, T_5

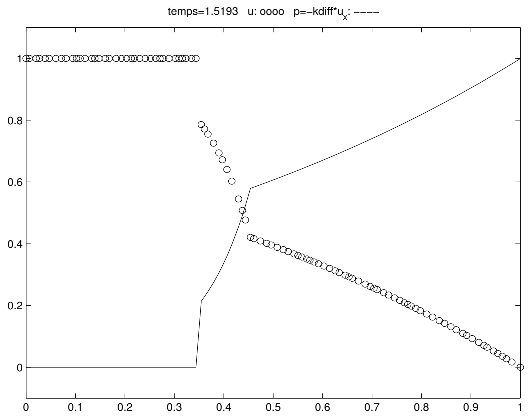

FIG. 4.31 – 100 points, T_6

4.8 Convection diffusion 2d

4.8.1 Introduction

Après avoir étudié une version "boîte" du problème de convection-diffusion instationnaire en dimension 1, nous proposons une méthode simple permettant de généraliser ce

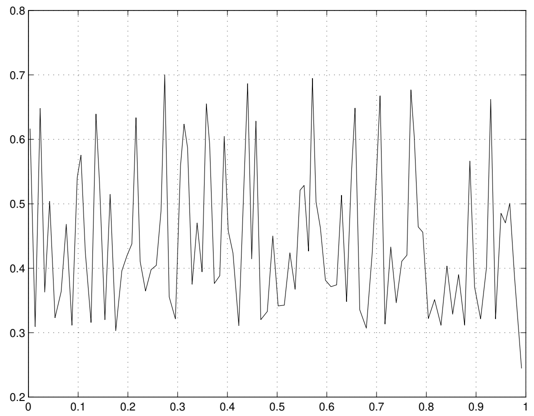

FIG. 4.32 – Représentation de λ pour ce test

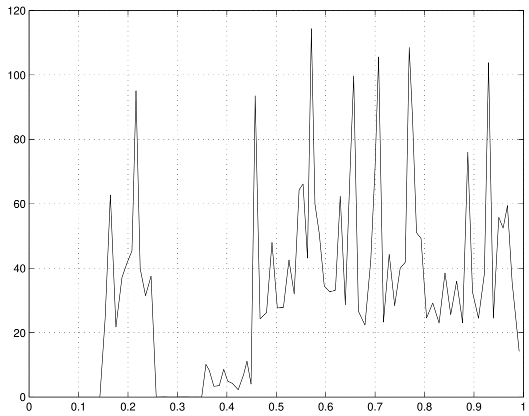

FIG. 4.33 – Représentation de μ pour ce test

schéma en dimension 2, sur des maillages rectangulaires, notamment concernant le choix des valeurs de décentrement pour les variables de vitesse u et de pression p introduites en dimension 1. Nous nous intéressons aux techniques de splitting, plus particulièrement à la méthode ADI (Alternating Direction Implicit) introduite par Peaceman et Rachford en 1955 [37]. En effet cette technique permet de passer de schémas 1d à leurs généralisation en 2d assez rapidement. En particulier, la méthode ADI présente l'avantage de pouvoir réaliser des tests numériques basés sur les réglages des paramètres de décentrement en dimension 1. Elle ne nécessite pas une étude approfondie de type analyse numérique du schéma boîte 2d pour le choix des décentrements bidimensionnels qui semble plus compliquée. Dans ce paragraphe, nous rappelons la méthode ADI pour l'équation de la chaleur, telle qu'elle est introduite dans [42]. Ensuite, nous adaptons cette méthode pour l'étude de l'équation de convection-diffusion. Puis, nous réalisons l'analyse numérique du schéma boîte ADI ainsi obtenu. Nous concluons ce Chapitre par quelques tests numériques.
Considérons un domaine rectangulaire Ω de frontière $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, régulière et le problème de convection-diffusion :

$$\left\{\begin{array}{lr} u_t + c.\nabla u - \mathrm{div}(\varepsilon\nabla u) = f(x,y,t)\,,\ \varepsilon > 0, & (x,y)\in\Omega,\ t>0 \\ u\,(x,y,0) = u_0\,(x,y)\,, & (x,y)\in\Omega \\ u_{|\Gamma} = g\,, & (x,y)\in\Gamma_D \\ \nabla u\cdot\nu = g_N\,, & (x,y)\in\Gamma_N \end{array}\right. \tag{4.106}$$

de forme mixte :

$$\left\{\begin{array}{lr} u_t + c.\nabla u + \mathrm{div}\,p = f(x,y,t)\,, & (x,y)\in\Omega,\ t>0 \\ p = -\varepsilon\nabla u\,, & (x,y)\in\Omega\,,\ \varepsilon>0 \\ u\,(x,y,0) = u_0\,(x,y)\,, & (x,y)\in\Omega \\ u_{|\Gamma} = g\,, & (x,y)\in\Gamma_D \\ \nabla u\cdot\nu = g_N\,, & (x,y)\in\Gamma_N \end{array}\right. \tag{4.107}$$

où ν désigne le vecteur unitaire normal à la frontière du domaine orienté vers l'extérieur.
Nous supposons dans la suite la donnée au bord de type Dirichlet sur toute la frontière Γ.
Rappelons que

Lemme 4.8.1 *Ce problème admet une unique solution dans* $\mathcal{C}_b^0([0,T[;L^2(\Omega))\cap\mathcal{C}^\infty(\Omega\times]0,T[)$ *pour* f *donnée dans* $C_b^0([0,T[;L^2(\Omega))$.

4.8.2 La méthode ADI pour l'équation de la chaleur

Dans cette partie, nous rappelons le principe de la méthode ADI décrit dans Strikwerda [42], dans le cas de l'équation de la chaleur. Considérons l'équation :

$$u_t = \varepsilon_1 u_{xx} + \varepsilon_2 u_{yy}\,, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \tag{4.108}$$

Soient A_1 et A_2 les opérateurs linéaires définis par

$$\begin{aligned} A_1 u &= \varepsilon_1 u_{xx} \\ A_2 u &= \varepsilon_2 u_{yy} \end{aligned} \tag{4.109}$$

La méthode ADI permet de résoudre le problème

$$u_t = A_1 u + A_2 u \tag{4.110}$$

à l'aide des deux problèmes monodimensionnels $u_t = A_1 u$ et $u_t = A_2 u$. En discrétisant l'équation (4.110) par la méthode de Crank-Nicholson, on obtient l'identité

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{k} = \frac{1}{2}(A_1 u^{n+1} + A_1 u^n) + \frac{1}{2}(A_2 u^{n+1} + A_2 u^n) + O(k^2) \tag{4.111}$$

Ou encore, si I désigne l'opérateur identité

$$(I - \frac{k}{2}A_1 - \frac{k}{2}A_2)u^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A_1 + \frac{k}{2}A_2)u^n + O(k^3) \tag{4.112}$$

En rajoutant de part et d'autre de l'égalité (4.112) le terme $\frac{k^2}{4}A_1A_2u^{n+1}$, puis en factorisant, nous obtenons :

$$(I - \frac{k}{2}A_1)(I - \frac{k}{2}A_2)u^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A_1)(I + \frac{k}{2}A_2)u^n + \frac{k^2}{4}A_1A_2(u^{n+1}-u^n) + O(k^3) \tag{4.113}$$

D'autre part, $u^{n+1} = u^n + O(k)$, donc l'expression (4.113) se réécrit :

$$(I - \frac{k}{2}A_1)(I - \frac{k}{2}A_2)u^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A_1)(I + \frac{k}{2}A_2)u^n + O(k^3) \tag{4.114}$$

La solution exacte $u(\cdot,t)$ du problème (4.108) vérifie l'équation (4.114). On considère maintenant le problème approché :

$$(I - \frac{k}{2}A_1)(I - \frac{k}{2}A_2)u^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A_1)(I + \frac{k}{2}A_2)u^n \tag{4.115}$$

que l'on discrétise en espace en approchant les opérateurs continus A_1 et A_2 par les opérateurs discrets $A_{1,h}$ et $A_{2,h}$. On obtient le schéma :

$$(I - \frac{k}{2}A_{1,h})(I - \frac{k}{2}A_{2,h})u^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A_{1,h})(I + \frac{k}{2}A_{2,h})u^n \tag{4.116}$$

La discrétisation classique du laplacien donne, dans le cas de l'équation de la chaleur, des matrices de tridiagonales $A_{1,h}$ et $A_{2,h}$ telles que :

$$\begin{aligned} A_{1,h}\, u_{i,j} &= \varepsilon_1 \frac{u_{i+1,j} - 2\, u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \\ A_{2,h}\, u_{i,j} &= \varepsilon_2 \frac{u_{i,j+1} - 2\, u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \end{aligned}$$

L'algorithme de Thomas permet alors de résoudre le système tridiagonal rapidement. Pour résoudre (4.116), Peaceman et Rachford proposent l'algorithme suivant [37, 25, 24] :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (I - \frac{k}{2} A_{1,h}) \tilde{u}^{n+1/2} & = & (I + \frac{k}{2} A_{2,h}) u^n \\ (I - \frac{k}{2} A_{2,h}) u^{n+1} & = & (I + \frac{k}{2} A_{1,h}) \tilde{u}^{n+1/2} \end{array} \right. \tag{4.117}$$

L'algorithme (4.117) est appelé la méthode ADI (Alternating Direction Implicit). On alterne la résolution du problème entre une passe selon la direction (Ox) et une passe selon la direction (Oy). Dans un premier temps, on calcule de façon implicite $\tilde{u}^{n+1/2}$ en fonction de u^n, ensuite on calcule u^{n+1} en fonction de la variable auxilliaire $\tilde{u}^{n+1/2}$. Dans chaque passe, on utilise uniquement le schéma 1d correspondant à l'opérateur spatial A_i, $i = 1, 2$.

Lemme 4.8.2 *Cette méthode est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.*

Preuve :
Ce résultat se démontre par le calcul du facteur d'amplification du schéma [42]. En remplaçant $u^n_{l,m}$ par $g^n\, e^{il\theta}\, e^{im\phi}$ et $\tilde{u}^{n+1/2}_{l,m}$ par $\tilde{g}\, g^n\, e^{il\theta}\, e^{im\phi}$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + 2\,\mu_1\, \sin^2 \frac{\theta}{2})\, \tilde{g} = (1 - 2\,\mu_2\, \sin^2 \frac{\phi}{2}) \\ (1 + 2\,\mu_2\, \sin^2 \frac{\phi}{2})\, g = (1 - 2\,\mu_1\, \sin^2 \frac{\theta}{2})\, \tilde{g} \end{array} \right. \tag{4.118}$$

Ce qui donne

$$g(\theta, \phi) = \frac{(1 - 2\,\mu_1\, \sin^2 \frac{\theta}{2})}{(1 + 2\,\mu_1\, \sin^2 \frac{\theta}{2})} \frac{(1 - 2\,\mu_2\, \sin^2 \frac{\phi}{2})}{(1 + 2\,\mu_2\, \sin^2 \frac{\phi}{2})}\,. \tag{4.119}$$

Puisque $\mu_1,\ \mu_2 > 0$, on a $\sup\limits_{\theta,\phi} |g(\theta, \phi)| \leq 1$. Ce qui donne le résultat. ■

4.8.3 La méthode ADI pour le problème de convection-diffusion

On généralise la méthode ADI pour le problème de convection-diffusion de terme source f non nul. Soit l'équation de convection-diffusion linéaire de terme source $f \in C^0_b([0, T[; L^2(\Omega))$:

$$u_t + c \cdot \nabla u - \varepsilon \Delta u = f(x, y, t) \tag{4.120}$$

Soient A_1 et A_2 sont les opérateurs spatiaux définis par

$$\begin{aligned} A_1 u &= -c_1 u_x + \varepsilon_1 u_{xx}\,, \\ A_2 u &= -c_2 u_y + \varepsilon_2 u_{yy}\,, \end{aligned} \tag{4.121}$$

l'équation (4.120) se réécrit sous la forme

$$u_t - A_1 u - A_2 u = f(x, y, t) \tag{4.122}$$

Discrétisons en temps l'équation (4.120) à l'aide d'un ϑ-schéma pour des valeurs ϑ variant entre 0 et 1. Si u est la solution exacte de (4.120) dans $C^0([0, +\infty[; L^2(\Omega)) \cap C^\infty(]0, \infty[\times\Omega)$,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} = \vartheta[(A_1 u)^{n+1} + (A_2 u)^{n+1} + f^{n+1}] + (1-\vartheta)[(A_1 u)^n + (A_2 u)^n + f^n] + O(k^2) \tag{4.123}$$

où $u^{n+1} = u(x, y, t^{n+1})$ et $u^n = u(x, y, t^n)$ désignent les valeurs prises par la solution exacte au point de coordonnées (x, y) dans le domaine Ω, aux instants respectifs t^{n+1} et t^n, k désigne le pas de temps associé à la méthode défini par : $k = t^{n+1} - t^n$.
L'égalité (4.123) est équivalente à

$$\begin{aligned} u^{n+1} - k\vartheta(A_1 u)^{n+1} - k\vartheta(A_2 u)^{n+1} &= u^n + k(1-\vartheta)(A_1 u)^n + k(1-\vartheta)(A_2 u)^n \\ &\quad + k\vartheta f^{n+1} + k(1-\vartheta) f^n + O(k^3) \end{aligned}$$

A_1 et A_2 sont des opérateurs spatiaux indépendants du temps. Donc, en notant I l'opérateur identité, on obtient :

$$\begin{aligned} [I - k\vartheta A_1 - k\vartheta A_2]u^{n+1} &= [I + k(1-\vartheta)A_1 + k(1-\vartheta)A_2]u^n \\ &\quad + k(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta) f^n) + O(k^3) \end{aligned} \tag{4.124}$$

Nous ajoutons et soustrayons dans les deux membres de l'égalité (4.124) les termes $k^2\vartheta^2 A_1 A_2 u^{n+1}$ et $k^2(1-\vartheta)^2 A_1 A_2 u^n$, on obtient

$$\begin{aligned} &(I - k\vartheta A_1)(I - k\vartheta A_2)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_1)(I + k(1-\vartheta)A_2)u^n \\ &+ k\vartheta f^{n+1} + k(1-\vartheta) f^n - k^2(1-\vartheta)^2 A_1 A_2 u^n + k^2\vartheta^2 A_1 A_2 u^{n+1} + O(k^3) \end{aligned} \tag{4.125}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} &(I - k\vartheta A_1)(I - k\vartheta A_2)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_1)(I + k(1-\vartheta)A_2)u^n \\ &+ k(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta) f^n) + k^2[(2\vartheta - 1)A_1 A_2 u^n + \vartheta^2 A_1 A_2(u^{n+1} - u^n)] + O(k^3) \end{aligned} \tag{4.126}$$

D'autre part, $u^{n+1} - u^n$ est d'ordre k, c'est à dire $u^{n+1} - u^n = O(k)$. L'expression (4.126) se réécrit donc :

$$\begin{aligned} &(I - k\vartheta A_1)(I - k\vartheta A_2)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_1)(I + k(1-\vartheta)A_2)u^n \\ &+ k(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta) f^n) + k^2(2\vartheta - 1)A_1\, A_2\, u^n + O(k^3) \end{aligned} \tag{4.127}$$

Ainsi, le schéma est d'ordre $(2\vartheta - 1)k + O(k^2)$ en temps, en particulier d'ordre 2 si $\vartheta = \frac{1}{2}$, d'ordre 1 sinon. Par la suite, nous considérons le problème semi-discrétisé en temps

$$(I - k\vartheta A_1)(I - k\vartheta A_2)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_1)(I + k(1-\vartheta)A_2)u^n + k(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta) f^n) \tag{4.128}$$

Remarque :

Si elle existe, la solution u du problème stationnaire associé au problème semi-discret en temps (4.128), vérifie

$$k(1-2\vartheta)A_1 A_2 u + (A_1 + A_2)u + f = 0 \tag{4.129}$$

En particulier, si $\vartheta = \frac{1}{2}$, l'équation (4.129) devient l'équation continue du problème stationnaire associé au problème instationnaire (4.128).

Avant de discrétiser en espace le problème (4.128), définissons un maillage du domaine rectangulaire Ω. On suppose que les côtés horizontaux de Ω sont divisés en $J_x + 1$ points équidistants et que les côtés verticaux sont divisés en $J_y + 1$ points équidistants. On relie les points face à face de façon à obtenir un maillage du domaine Ω en $J_x\, J_y$ boîtes équivalentes. Les dimensions d'une boîte sont notées h_x et h_y (Figure 4.34).

Pour approcher les opérateurs spatiaux continus A_1 et A_2, nous utilisons les opérateurs boîte

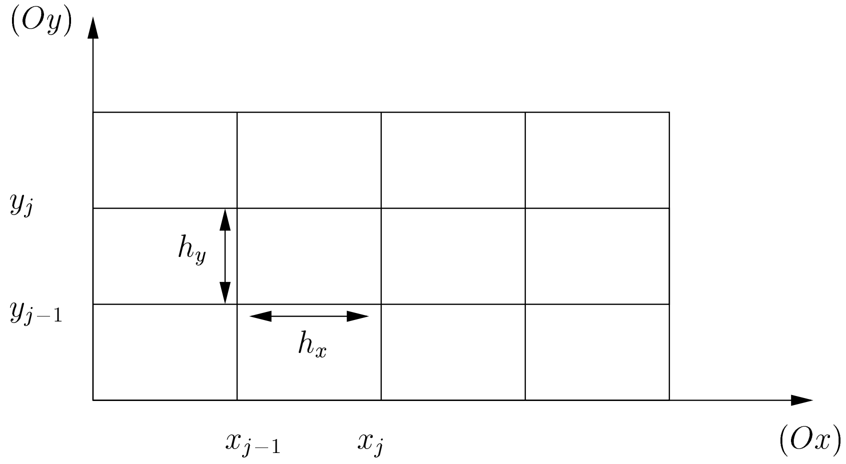

FIG. 4.34 – Maillage du domaine Ω

en dimension 1. Nous avons vu (4.48) que le schéma boîte pour le problème de convection-diffusion 1d homogène est

$$(B - k\,\vartheta\, C)u^{n+1} = (B + k\,(1-\vartheta)\, C)u^n \tag{4.130}$$

où les opérateurs boîte B, C sont donnés par les formules (4.45-4.46). Puisque la matrice B est inversible, la formulation en u se réécrit encore sous la forme :

$$(I - k\,\vartheta\, A)u^{n+1} = (I + k\,(1-\vartheta)\, A)u^n \tag{4.131}$$

où $A = B^{-1}C$. Soient B_x, C_x et B_y, C_y les opérateurs boîte 1d dans chaque direction (Ox), (Oy). On définit $A_x = B_x^{-1}\,C_x$ et $A_y = B_y^{-1}\,C_y$. Soient les schémas boîte 1d selon les directions (Ox) et (Oy)

$$\begin{array}{rcl} (i)\ (I - k\theta A_x)u^{n+1} & = & (I + k(1-\theta)A_x)u^n \\ (ii)\ (I - k\theta A_y)u^{n+1} & = & (I + k(1-\theta)A_y)u^n \end{array} \tag{4.132}$$

associés respectivement aux problèmes de convection-diffusion 1d selon les directions respectives (Ox) et (Oy) :

$$\begin{array}{l} u_t - c_1\, u_x + \varepsilon_1\, u_{xx} = 0 \\ u_t - c_2\, u_x + \varepsilon_2\, u_{yy} = 0 \end{array} \tag{4.133}$$

Nous obtenons le schéma discrétisé en temps et en espace associé au problème initial (4.106), en approchant les opérateurs continus en espaces $I - k\vartheta A_i$ et $I + k(1-\vartheta)A_i$, $i = 1, 2$, par les opérateurs boîte $I - k\vartheta A$ et $I + k(1-\vartheta)A$ dans les directions (Ox) et (Oy), de la façon suivante :

- $I - k\vartheta A_1$ approché par $I - k\vartheta A_x$, opérateur boîte 1d selon la direction (Ox) du domaine
- $I - k\vartheta A_2$ approché par $I - k\vartheta A_y$, opérateur boîte 1d selon la direction (Oy) du domaine
- $I + k(1 - \vartheta A_1)$ approché par $I + k(1 - \vartheta A_x)$
- $I + k(1 - \vartheta A_2)$ approché par $I + k(1 - \vartheta A_y)$.

Définition 4.8.1 *La formulation en u du schéma boîte-ADI 2d pour le problème de convection-diffusion s'écrit alors :*

$$(I - k\vartheta A_x)(I - k\vartheta A_y)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_x)(I + k(1-\vartheta)A_y)u^n + k(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta)f^n) \tag{4.134}$$

Sa résolution se fait à l'aide de l'algorithme de Peaceman-Rachford en deux étapes par la proposition suivante.

Proposition 4.8.1 (Algorithme de Peaceman-Rachford)
Le seul quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, tel que le problème discret (4.134) soit équivalent au problème prédicteur-correcteur de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - k\vartheta A_x)\tilde{u}^{n+1/2} = (I + k(1-\vartheta)A_y)u^n + (\alpha f^n + \beta f^{n+1}) \\ (I - k\vartheta A_y)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_x)\tilde{u}^{n+1/2} + (\gamma f^n + \delta f^{n+1}) \end{array} \right. \tag{4.135}$$

est $\alpha = k\,\vartheta\,(1-\vartheta)$, $\beta = k\,\vartheta^2, \gamma = k\,(1-\vartheta)^2, \delta = k\,\vartheta\,(1-\vartheta)$.

Preuve :
Multiplions la seconde équation du système (4.135) à gauche par $(I - k\vartheta A_x)$, on obtient

$$\begin{aligned} &(I - k\vartheta A_x)(I - k\vartheta A_y)u^{n+1} \\ &= (I - k\vartheta A_x)\,(I + k(1-\vartheta)A_x)\,\tilde{u} + (I - k\vartheta A_x)\,(\gamma f^n + \delta f^{n+1}) \\ &= (I + k(1-\vartheta)A_x)\,[(I + k(1-\vartheta)A_y)\,u^n + (\alpha f^n + \beta f^{n+1})] + (I - k\vartheta A_x)\,(\gamma f^n + \delta f^{n+1}) \\ &= (I + k(1-\vartheta)A_x)\,(I + k(1-\vartheta)A_y)\,u^n + (I + k(1-\vartheta)A_x)\,(\alpha f^n + \beta f^{n+1}) \\ &\qquad + (I - k\vartheta A_x)\,(\gamma f^n + \delta f^{n+1}) \\ &= (I + k(1-\vartheta)A_x)\,(\,I + k(1-\vartheta)A_y)\,u^n + \big((\alpha+\gamma)I + k\,A_x((1-\vartheta)\alpha - \vartheta\gamma\big)\,f^n \\ &\qquad + \big((\beta+\delta)I + k\,A_x((1-\vartheta)\beta - \vartheta\delta\big)\,f^{n+1} \end{aligned}$$

En identifiant avec l'équation (4.134), on trouve la valeur des coefficients α, β, γ, δ donnée par $\alpha = k\,\vartheta\,(1-\vartheta)$, $\beta = k\,\vartheta^2, \gamma = k\,(1-\vartheta)^2, \delta = k\,\vartheta\,(1-\vartheta)$. Inversement, on peut toujours factoriser le problème discret sous la forme (4.135) pour les valeurs des coefficients α, β, γ, δ

données précédemment. Remarquons que cette factorisation est toujours possible, il n'est pas nécessaire que les opérateurs A_x et A_y commutent. ■

Théorème 4.8.1 *:*
Soit J_x+1, respectivement J_y+1, le nombre de noeuds selon l'axe (Ox), respectivement l'axe (Oy). Le problème discret (4.134) admet une unique solution $u = (u_{i,j}^n) \in \mathbb{R}^{J_x\,J_y}$ à chaque pas de temps n.

Preuve :
Il suffit de prouver que les matrices $I - k\vartheta A_x$ et $I - k\vartheta A_y$ sont inversibles. Nous avons vu qu'en dimension 1, la matrice $B - k\vartheta C$ est inversible (Preuve du Lemme 4.3.3). Or, nous savons que B est inversible. Ce qui prouve le résultat. ■

Le problème de convection-diffusion (4.106) est approché par le schéma-boîte-ADI suivant :

Lemme 4.8.3 *Soit $p = (p_1, p_2)$ le flux de diffusion; $p_1 = -\varepsilon_1\, u_x$ et $p_2 = -\varepsilon_2\, u_y$. Soit le schéma-boîte-ADI : chercher (u, p) tel que*
(i) u est la solution de la formulation ADI :

$$\left\{\begin{array}{l} (I - k\vartheta A_x)(I - k\vartheta A_y)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_x)(I + k(1-\vartheta)A_y)u^n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +k(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta)f^n) \\ u_{i,j}^0 = u^0(x_i, y_j)\,, \\ u_{i,j}^n = g(x_i, y_j, t^n)\,. \end{array}\right. \tag{4.136}$$

(ii) Le flux de diffusion $p = (p_1, p_2)$ est donné selon chaque direction (O_x) et (O_y) par

$(ii)_1$ $p_1 = (p_{1,i,j}^n)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ k\,\vartheta\,\delta^n p_{1,i,j} = \\ -\Big[h_{x,i-1/2}\Big(\frac{1}{2} + D_{p,x,i-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} + D_{u,x,i-1/2}\Big) + k\,\vartheta\,\Big(c_1\,(\frac{1}{2} + D_{p,x,i-1/2}) + \frac{\varepsilon_1}{h_{x,i-1/2}}\Big)\Big]\delta^n u_{i,j} \\ -\Big[h_{x,i-1/2}\Big(\frac{1}{2} + D_{p,x,i-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2} - D_{u,x,i-1/2}\Big) - k\,\vartheta\,\Big(c_1\,(\frac{1}{2} + D_{p,x,i-1/2}) + \frac{\varepsilon_1}{h_{x,i-1/2}}\Big)\Big]\delta^n u_{i-1,j} \\ +\Big(\frac{1}{2} + D_{p,x,i-1/2}\Big)\Big(-c_1\,(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - (p_{1,i,j}^n - p_{1,i-1,j}^n) \\ +h_{x,i-1/2}\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}_{i-1/2}^{\,n} + \vartheta\,\overline{f}_{i-1/2}^{\,n+1}\Big)\Big), \quad 1 \le i \le J_x \\ \bullet\ p_{1,i,j}^n\Big(\frac{1}{2} - D_{p,x,i-1/2}\Big) + p_{1,i-1,j}^n\Big(\frac{1}{2} + D_{p,x,i-1/2}\Big) + \frac{\varepsilon_1}{h_{x,i-1/2}}\,(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) = 0 \\ \bullet\ p_{1,i,j}^0 = -\varepsilon_1 \frac{d}{dx} u^0(x_i, y_j) \end{array}\right. \tag{4.137}$$

$(ii)_2$ $p_2 = (p^n_{2,i,j})$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ k\,\vartheta\,\delta^n p_{2,i,j} = \\ -\Big[h_{y,j-1/2}\Big(\frac{1}{2}+D_{p,y,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2}+D_{u,y,j-1/2}\Big)+k\,\vartheta\,\Big(c_2\,(\frac{1}{2}+D_{p,y,j-1/2})+\frac{\varepsilon_2}{h_{y,j-1/2}}\Big)\Big]\delta^n u_{i,j} \\ -\Big[h_{j-1/2}\Big(\frac{1}{2}+D_{p,y,j-1/2}\Big)\Big(\frac{1}{2}-D_{u,y,j-1/2}\Big)-k\,\vartheta\,\Big(c_2\,(\frac{1}{2}+D_{p,y,j-1/2})+\frac{\varepsilon_2}{h_{y,j-1/2}}\Big)\Big]\delta^n u_{i,j-1} \\ +\Big(\frac{1}{2}+D_{p,y,j-1/2}\Big)\Big(-c_2\,(u^n_{i,j}-u^n_{i,j-1})-(p^n_{2,i,j}-p^n_{2,i,j-1}) \\ +h_{y,j-1/2}\,\Big((1-\vartheta)\,\overline{f}^{\,n}_{j-1/2}+\vartheta\,\overline{f}^{\,n+1}_{j-1/2}\Big)\Big),\quad 1\le j\le J_y \\ \bullet\ p^n_{2,i,j}\Big(\frac{1}{2}-D_{p,y,j-1/2}\Big)+p^n_{2,i,j-1}\Big(\frac{1}{2}+D_{p,y,j-1/2}\Big)+\frac{\varepsilon_2}{h_{j-1/2}}\,(u^n_{i,j}-u^n_{i,j-1})=0 \\ \bullet\ p^0_{2,i,j}=-\varepsilon_2\frac{d}{dy}u^0(x_i,y_j) \end{array}\right. \tag{4.138}$$

4.8.4 Etude de la stabilité du schéma ADI

Dans cette partie, nous étudions la stabilité au sens de Von Neumann de la formulation en u du schéma boîte-ADI pour le problème de convection-diffusion. Calculons le facteur d'amplification g associé à (4.135).

Lemme 4.8.4 *Le facteur d'amplification du schéma (4.135) est donné par*

$$g(\theta,\phi) = g_x(\theta)g_y(\phi) \tag{4.139}$$

où g_x et g_y désignent respectivement les facteurs d'amplifications des schémas boîte (4.133) selon la direction (Ox) et (Oy).

Preuve :
Le problème discrétisé homogène s'écrit à l'aide de l'algorithme de Peaceman-Rachford sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} (I-k\vartheta A_x)\tilde{u}^{n+1/2} = (I+k(1-\vartheta)A_y)u^n \\ (I-k\vartheta A_y)u^{n+1} = (I+k(1-\vartheta)A_x)\tilde{u}^{n+1/2} \end{array}\right. \tag{4.140}$$

Faisons agir le schéma (4.140) sur un mode simple du type $u^n_{l,m} = g^n e^{il\theta}e^{im\phi}$.
Nous obtenons alors,

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{g}\big((I-k\vartheta A_x)e^{il\theta}e^{im\phi}\big)= g^n(\theta,\phi)\big((I+k(1-\vartheta)A_y)e^{il\theta}e^{im\phi}\big) \\ g^{n+1}(\theta,\phi)\big((I-k\vartheta A_y)e^{il\theta}e^{im\phi}\big)= \tilde{g}\big((I+k(1-\vartheta)A_x)e^{il\theta}e^{im\phi}\big) \end{array}\right. \tag{4.141}$$

Le facteur d'amplification est donné par

$$g(\theta,\phi) = \frac{\big((I+k(1-\vartheta)A_x)e^{il\theta}e^{im\phi}\big)}{\big((I-k\vartheta A_y)e^{il\theta}e^{im\phi}\big)}\;\frac{\big((I+k(1-\vartheta)A_y)e^{il\theta}e^{im\phi}\big)}{\big((I-k\vartheta A_x)e^{il\theta}e^{im\phi}\big)}$$

L'opérateur A_x, respectivement A_y, est l'opérateur discret associé au schéma boîte (4.132)*(i)* selon la direction (Ox), respectivement (4.132)*(ii)* selon la direction (Oy). On note g_x et g_y leurs facteurs d'amplifications respectifs définis par

$$g_x(\theta) = \frac{(I+k\,(1-\vartheta)\,A_x)(e^{i\,l\,\theta})}{(I-\,k\,\theta\,A_x)\,(e^{i\,l\,\theta})} \tag{4.142}$$

$$g_y(\phi) = \frac{(I+k\,(1-\vartheta)\,A_y)(e^{i\,m\,\phi})}{(I-k\,\theta\,A_y)\,(e^{i\,m\,\phi})} \tag{4.143}$$

L'opérateur A_x agit selon la direction (Ox), son intervention ne modifie que les valeurs $e^{il\theta}$, de même, A_y agit sur la direction (Oy), il n'intervient que sur les valeurs $e^{il\phi}$. Donc, g_x, g_y ne dépendent respectivement que des valeurs θ et ϕ. On obtient donc

$$g(\theta, \phi) = g_x(\theta)\, g_y(\phi)$$

C'est-à-dire, g est le produit des facteurs d'amplifications des schémas boîte 1d selon chaque direction du domaine Ω. ■

Les conditions de stabilité du schéma (4.135) se déduisent donc des conditions de stabilité du schéma boîte 1d données par la Proposition 4.6.1.

Proposition 4.8.2 (Stabilité)
Le schéma boîte-ADI en u (4.134) est stable au sens de Von Neumann si et seulement si :
(i) $\tilde{D}_{u,1}\,\lambda_1 + \mu_1 \geq 0$ *et* $\tilde{D}_{u,2}\,\lambda_2 + \mu_2 \geq 0$
(ii) $[D_{p,1}\,\lambda_1 + \mu_1]\left[\tilde{D}_{u,1}\,D_{p,1} + \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\mu_1\right] \geq 0$
et $[D_{p,2}\,\lambda_2 + \mu_2]\left[\tilde{D}_{u,2}\,D_{p,2} + \left(\vartheta - \frac{1}{2}\right)\mu_2\right] \geq 0$

Dans la suite, nous supposons que les conditions *(i)* et *(ii)* de la Proposition 4.8.2 sont satisfaites.

4.8.5 Consistance du schéma ADI

Nous nous intéressons à la consistance du schéma ADI par rapport à la solution exacte $u(x, y, t)$. Nous supposons le maillage régulier en temps et en espace. Tout comme pour la consistance du schéma boîte 1d, nous faisons une analyse numérique du type de celle effectuée par Strikwerda [42].

Proposition 4.8.3 (Consistance du schéma ADI)
Le schéma ADI (4.134) est consistant avec le problème continu (4.106) à l'ordre 1 en espace et 1 en temps si $\vartheta \neq \frac{1}{2}$ *et à l'ordre 2 en temps sinon.*

Preuve :
On considère que h_x, h_y, $k \to 0$ indépendemment, avec l'hypothèse que λ_1, λ_2 et μ_1, μ_2 sont bornés. Comme pour le schéma boîte (4.48) associé au problème de convection-diffusion 1d, on étudie l'ordre du terme

$$\frac{1}{k}\left(e^{k\,q(\xi,\eta)} - g(h_x\,\xi, h_y\,\eta)\right) \tag{4.144}$$

pour tout ξ, $\eta \in \mathbb{R}$. g est le facteur d'amplification du schéma boîte (4.135) donné par le Lemme 4.8.4 par

$$g(\theta, \phi) = g_x(\theta)\, g_y(\phi) \tag{4.145}$$

où g_x, g_y sont les facteurs d'amplification selon chaque direction (O_x) et (O_y). Et q est le symbole de l'opérateur spatial $-c\cdot\nabla u+\varepsilon_1\,u_{xx}+\varepsilon_2\,u_{yy}$, donné par

$$q(\xi,\eta)=-c_1\,i\,\xi-c_2\,i\,\eta-\varepsilon_1\,\xi^2-\varepsilon_2\,\eta^2\,. \tag{4.146}$$

Le facteur d'amplification g du schéma ADI s'écrit encore

$$\begin{aligned} g(h_x\,\xi,h_y\,\eta) &= g_x(h_x\,\xi)\,g_y(h_y\,\eta)\\ &= g_x(h_x\,\xi)+g_y(h_y\,\eta)-1+(g_x(h_x\,\xi)-1)\,(g_y(h_y\,\eta)-1)) \end{aligned} \tag{4.147}$$

Le symbole q est donné en fonction des symboles q_x et q_y des opérateurs spatiaux $-c_1\,u_x+\varepsilon_1\,u_{xx}$, respectivement $-c_2\,u_y+\varepsilon_2\,u_{yy}$ par $q(\xi,\eta)=q_x(\xi)+q_y(\eta)$. Donc $e^{kq(\xi,\eta)}$ est encore égal à

$$e^{k\,q(\xi,\eta)}=e^{k\,q_x(\xi)+kq_y(\eta)}=e^{k\,q_x(\xi)}+e^{k\,q_y(\eta)}-1+(e^{k\,q_x(\xi)}-1)\,(e^{k\,q_y(\eta)}-1) \tag{4.148}$$

En combinant (4.147) et (4.148), on obtient l'expression de (4.144)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\Big(e^{k\,q(\xi,\eta)}-g(h_x\,\xi,h_y\,\eta)\Big) &= \underbrace{\frac{1}{k}\Big(e^{k\,q_x(\xi)}-g_x(h_x\,\xi)\Big)}_{(I)}+\underbrace{\frac{1}{k}\Big(e^{k\,q_y(\eta)}-g_y(h_y\,\eta)\Big)}_{(II)}\\ &\quad+\underbrace{\frac{1}{k}\Big((e^{k\,q_x(\xi)}-1)\,(e^{k\,q_y(\eta)}-1)-(g_x(h_x\,\xi)-1)\,(g_y(h_y\,\eta)-1)\Big)}_{(III)} \end{aligned} \tag{4.149}$$

Les termes (I) et (II) sont donnés par la consistance du schéma boîte en u (4.48) selon la direction (Ox) et la direction (Oy) (relation (4.97) selon (Ox) et (Oy)) par

$$(I)=\frac{1}{k}\Big(e^{k\,q(\xi)}-g(h_x\,\xi)\Big) = (\vartheta-\frac{1}{2})\,\mathcal{O}(k)+\mathcal{O}(k^2)+\mathcal{O}(\|(h_x,h_x\,k)\|) \tag{4.150}$$

$$(II)=\frac{1}{k}\Big(e^{k\,q(\xi)}-g(h\xi)\Big) = (\vartheta-\frac{1}{2})\,\mathcal{O}(k)+\mathcal{O}(k^2)+\mathcal{O}(\|(h_y,h_y\,k)\|) \tag{4.151}$$

en notant $\mathcal{O}(\|(h_1,h_2)\|)=\mathcal{O}(\|(h_1)\|)+\mathcal{O}(\|(h_2)\|)$. Evaluons le terme (III). En utilisant les développements limités de $e^{k\,q_x(\xi)}$, $e^{k\,q_y(\eta)}$, g_x et g_y, comme cela est fait dans la preuve de la Proposition 4.6.2, on obtient

$$\begin{aligned} k\,(III) &= (k\,c_1\,i\,\xi+k\,\varepsilon_1\,\xi^2)\,(k\,c_2\,i\,\eta+k\,\varepsilon_2\eta^2)+\mathcal{O}(k^3)\\ &\quad-\Big(-k\,c_1\,i\xi-k\,\varepsilon_1\xi^2-\xi^2\,h_x^2\,\lambda_1(D_{u,x}+\vartheta\lambda_1)+i\,A_3\,\xi^3\,h_x^3+A_4\,\xi^3\,h_x^4\Big)\\ &\quad\Big(-k\,c_2\,i\,\eta-k\,\varepsilon_2\,\eta^2-\eta^2\,h_y^2\,\lambda_2\,(D_{u,y}+\vartheta\lambda_2)+i\,B_3\,\eta^3\,h_y^3+B_4\,\eta^3\,h_y^4\Big) \end{aligned} \tag{4.152}$$

où A_3, B_3 et A_4, B_4 sont respectivement les coefficients des termes d'ordre 3 et 4 des développements limités de g_x-1 et g_y-1. En simplifiant l'expression (4.152), on obtient

$$\begin{aligned} k\,(III) &= \mathcal{O}(k^3)+\Big(k\,c_1\,i\,\xi+k\,\varepsilon_1\,\xi^2\Big)\Big(-\eta^2\,h_y^2\,\lambda_2\,(D_{u,y}+\vartheta\,\lambda_2)+i\,B_3\,\eta^3\,h_y^3+B_4\,\eta^3\,h_y^4\Big)\\ &\quad+\Big(k\,c_2\,i\eta+k\,\varepsilon_2\,\eta^2\Big)\,\Big(-\xi^2\,h_x^2\,\lambda_1\,(D_{u,x}+\vartheta\lambda_1)+i\,A_3\,\xi^3\,h_x^3+A_4\,\xi^3\,h_x^4\Big)\\ &\quad-\Big(-\xi^2\,h_x^2\,\lambda_1\,(D_{u,x}+\vartheta\lambda_1)+i\,A_3\,\xi^3\,h_x^3+A_4\,\xi^3\,h_x^4\Big)\\ &\quad\Big(-\eta^2\,h_y^2\,\lambda_2(D_{u,y}+\vartheta\,\lambda_2)+i\,B_3\,\eta^3\,h_y^3+B_4\,\eta^3\,h_y^4\Big) \end{aligned} \tag{4.153}$$

Or, par définition des expressions A_3, B_3 et A_4, B_4, nous obtenons l'ordre de

$$\begin{aligned} h_x^3\,A_3 &= \mathcal{O}(\|(h_x,k)\|^2)\\ h_y^3\,B_3 &= \mathcal{O}(\|(h_y,k)\|^2)\\ h_x^4\,A_4 &= \mathcal{O}(\|(h_x,k)\|^2)\\ h_y^4\,B_4 &= \mathcal{O}(\|(h_y,k)\|^2)\end{aligned}$$

Et $h_x^2\,\lambda_1 = c_1\,k\,h_x$ et $h_y^2\,\lambda_2 = c_2\,k\,h_y$, donc le terme (III) est d'ordre :

$$(III) = \mathcal{O}(\|(h_x,k)\|^2) \tag{4.154}$$

Finalement, en combinant les relations (4.150)-(4.151) et (4.154) on obtient

$$\frac{1}{k}\Big(e^{k\,q(\xi,\eta)} - g(h_x\,\xi, h_y\,\eta)\Big) \;=\; (\vartheta - \frac{1}{2})\,\mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(\|(h_x, h_y, h_x\,k, h_y\,k)\|)$$

Ce qui conclut la démonstration. ■

Théorème 4.8.2 *Le schéma est stable et consistant sous les conditions (i) et (ii) de la Proposition 4.8.2. Il est donc convergent sous ces conditions.*

4.9 Applications numériques

4.9.1 Introduction

La programmation de la méthode boîte ADI se fait à l'aide de l'algorithme de Peaceman-Rachford (4.135). Dans un premier temps on calcule $\tilde{u}^{n+1/2}$ en fontion de u^n par la résolution de $(4.135)_1$, puis on calcule u^{n+1} en fontion de $\tilde{u}^{n+1/2}$ par la résolution de $(4.135)_2$.
Nous avons défini B_x, C_x et B_y, C_y comme les opérateurs du schéma boîte 1d dans la direction (Ox), y étant fixé (respectivement dans la direction (Oy), x étant fixé) donnés par les relations (4.45-4.46). Les opérateurs $A_x = B_x^{-1}\,C_x$ et $A_y = B_y^{-1}\,C_y$ satisfont les relations (4.132). On s'intéresse à la résolution de l'algorithme de Peaceman-Rachford

$$\left\{\begin{array}{l} (I - k\vartheta A_x)\tilde{u}^{n+1/2} = (I + k(1-\vartheta)A_y)u^n + k\vartheta(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta)f^n)\\ (I - k\vartheta A_y)u^{n+1} = (I + k(1-\vartheta)A_x)\tilde{u}^{n+1/2} + k(1-\vartheta)(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta)f^n)\end{array}\right. \tag{4.155}$$

En pratique on résoud le système

$$B_y v_1 = (B_y + k\,(1-\vartheta)\,C_y)\,u^n$$

qui nous permet de calculer $v_1 = (I + k\,(1-\vartheta)\,A_y)\,u^n$, puis pour calculer $\tilde{u}^{n+1/2}$, on résoud le système

$$B_x\,(I - k\,\vartheta A_x)\tilde{u}^{n+1/2} = B_x\,v_1 + k\vartheta B_x\,(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta)f^n)$$

c'est-à-dire

$$(B_x - k\,\vartheta C_x)\tilde{u}^{n+1/2} = B_x\,v_1 + k\vartheta B_x\,(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta)f^n)$$

On réitére ce processus pour calculer v_2 solution du système

$$B_x v_2 = (B_x + k\,(1 - \vartheta\, C_x))\, \tilde{u}^{n+1/2}$$

et ensuite la solution finale u^{n+1} solution du système

$$(B_y - k\,\vartheta\, C_y)\, u^{n+1} = B_y\, v_2 + k(1-\vartheta)\, B_y\, (\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta) f^n)$$

La programmation des conditions limites se fait de la façon suivante :

• *Conditions de type Dirichlet*

Pour les conditions frontière de type Dirichlet $u^n_{i_0,j_0} = g^n(x_{i_0}, y_{j_0})$, on impose simplement la valeur exacte de $u^{n+1}_{i_0,j_0} = g^{n+1}(x_{i_0}, y_{j_0})$ dans $(4.135)_2$. Le problème est de choisir la valeur à affecter à l'état intermédiaire $\tilde{u}^{n+1/2}$ sur la frontière. En soustrayant $(4.135)_2$ de $(4.135)_1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} [(I - k\vartheta A_x) + (I + k(1-\vartheta)A_x)]\tilde{u} &= (I + k(1-\vartheta)A_y)u^{n+1} + (I - k\vartheta A_y)u^n \\ &+ k(2\vartheta - 1)(\vartheta f^{n+1} + (1-\vartheta) f^n) \end{aligned} \tag{4.156}$$

Puisque les opérateurs A_x, A_y n'agissent pas sur les points frontières, nous avons la relation suivante pour les points du bord : $\tilde{u}_\partial$ (on note ∂ pour tout couple $(i,j) \in \Gamma = \partial\Omega$)

$$\tilde{u}_\partial = \frac{1}{2}(u^n_\partial + u^{n+1}_\partial) + k(\vartheta - \frac{1}{2})(\vartheta f^{n+1}_\partial + (1-\vartheta) f^n_\partial) \tag{4.157}$$

Cette valeur est appliquée à l'état intermédiaire.

• *Conditions de type Neumann*

Pour avoir $\frac{\partial u}{\partial \nu}^{n+1} = g^{n+1}$ aux points frontière dans le schéma (4.134), nous utilisons la formule de reconstruction de $p = (p_1, p_2)$ donnée par le Lemme 4.8.3 qui exprime le flux de diffusion en fonction de l'inconnue u. Considérons par exemple, la donnée de type Neumann, sur une arête frontière, horizontale du maillage définie par les points de coordonnées (x_{i_0}, y_0) et (x_{i_0+1}, y_0), de normale exterieure $\nu = -(1,0)$. Nous déduisons de (4.137) l'identité qui lie $u^{n+1}_{i_0,0}, u^{n+1}_{i_0+1,0}$ aux valeurs du flux de diffusion sur la frontière $p^n_{1,i_0,0} = -\varepsilon g(x_{i_0}, y_0, t^n)$, $p^{n+1}_{1,i_0,0} = -\varepsilon g(x_{i_0}, y_0, t^{n+1})$, connues par la donnée de type Neumann sur Γ_N.

$$\left\{ \begin{array}{l} [\vartheta\mu_{1,i_0+1/2} + (\frac{1}{2} - D_{p,x,i_0+1/2})\,(\frac{1}{2} - \vartheta\lambda_{1,i_0+1/2} - D_{u,x,i_0+1/2})]\; u^{n+1}_{i_0,0} \\ -[\vartheta\mu_{1,i_0+1/2} - (\frac{1}{2} - D_{p,x,i_0+1/2})(\frac{1}{2} + \vartheta\lambda_{1,i_0+1/2} + D_{u,x,i_0+1/2})]\; u^{n+1}_{i_0+1,0} \\ = \vartheta\, \frac{k}{h_{x,i_0+1/2}}\, p^{n+1}_{1,i_0,0} + (1-\vartheta)\, \frac{k}{h_{1/2}}\, p^n_{1,i_0,0} \\ -[(1-\vartheta)\mu_{1,i_0+1/2} - (\frac{1}{2} - D_{p,x,i_0+1/2})(\frac{1}{2} + (1-\vartheta)\lambda_{1,i_0+1/2} - D_{u,x,i_0+1/2})]\; u^n_{i_0,0} \\ +[(1-\vartheta)\mu_{1,i_0+1/2} + (\frac{1}{2} - D_{p,x,i_0+1/2})(\frac{1}{2} - (1-\vartheta)\lambda_{1,i_0+1/2} + D_{u,x,i_0+1/2})]\; u^n_{i_0+1,0} \\ +k\,(\frac{1}{2} - D_{u,x,i+1/2})\,((1-\vartheta)\, f^n_{i_0+1/2} + \vartheta\, f^{n+1}_{i_0+1/2}) \end{array} \right. \tag{4.158}$$

Dans cette partie, nous résolvons le problème de convection-diffusion avec notre schéma boîte ADI, comme nous l'avons expliquer précedemment. Nous proposons trois tests. Quand cela est possible, nous comparons les résultats obtenus avec ceux existants. On choisit des maillages de pas d'espace constant dans chaque direction. Le paramètre ϑ d'intégration en temps est $\vartheta = \frac{1}{2}$.

4.9.2 Le cas test de Noye et Tan

On considère le cas test proposé dans [36]. Il s'agit du déplacement d'une gaussienne, centrée initialement au point $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$. Elle se propage par l'équation de convection-diffusion

$$u_t + c.\nabla u - (\varepsilon_1 u_{xx} + \varepsilon_2 u_{yy}) = 0$$

le long de la diagonale $y = x$ du domaine carré $\Omega = [0, 2]^2$, pendant 1.25 secondes. Les coefficients de diffusion sont $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01$ et la vitesse est $\vec{c} = (0.8, 0.8)$. La solution exacte de ce problème est :

$$g(x, y, t) = \frac{1}{4t+1} \exp\left[-\frac{(x - c_1 t - x_0)^2}{\varepsilon_1(4t+1)} - \frac{(y - c_2 t - y_0)^2}{\varepsilon_2(4t+1)}\right].$$

Les conditions de Dirichlet sont données par la solution exacte sur la frontière. Nous comparons nos résultats avec ceux de Turner et Truscott [45], obtenus par une méthode de type volumes finis. On utilise l'erreur maillage-dépendante e_{TT} introduite par Turner et Truscott, définie par :

$$e_{TT} = \frac{1}{(J_x+1)\,(J_y+1)} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{J_x} \sum_{j=0}^{J_y} (u(i,j) - g(x(i), y(j), t0))^2}{\sum_{i=0}^{J_x} \sum_{j=0}^{J_y} u(i,j)^2}} \tag{4.159}$$

où $J_x + 1$ et $J_y + 1$ sont respectivement les nombres de points horizontaux et verticaux. La solution est calculée sur trois maillages différents :
- un maillage grossier composé de 961 noeuds (31 points selon l'axe (Ox) et l'axe (Oy)) noté Maillage 1.
- un maillage medium composé de 4096 noeuds (64 points selon l'axe (Ox) et l'axe (Oy)) noté Maillage 2.
- un maillage fin composé de 10201 noeuds (101 points selon l'axe (Ox) et l'axe (Oy)) noté Maillage 3.

Le maillage 1 est choisi afin d'obtenir un nombre de Peclet $\mathrm{Pe} \geq \mathrm{Pe}_0 = 2.5$. Dans ce cas, le coefficient de décentrement D_u est non nul par maille d'après la formule (4.81). Ce n'est pas le cas des maillages 2 et 3 utilisés par Turner et Truscott, pour lesquels le nombre de Peclet est $\mathrm{Pe} \leq 1$. Nous comparons la hauteur du pic et l'erreur e_{TT} à l'instant final $T = 1.25$ pour la méthode boîte-ADI, avec ceux obtenus par la méthode volumes finis "contrôle" utilisée par Turner et Truscott pour les maillages 2 et 3. Nous rajoutons les résultats obtenus par la méthode boîte-ADI pour le maillage 1, ainsi que l'erreur en norme L^2 pour les trois maillages. Les indices Box et TT sont utilisés respectivement pour indiquer les résultats obtenus par la méthode boîte-ADI et la méthode Turner et Truscott. Nous présentons les résultats obtenus dans le Tableau 4.2. La hauteur de la gaussienne à l'instant initial est 1 et devient 1/6 au temps final $T = 1.25$.

La méthode boîte-ADI donne d'assez bons résultats, comparativement à la méthode utilisée par Turner et Truscott. Nous obtenons des taux de convergence en norme L^2 environ égaux à 2 entre les maillages 1 et 2 et à 3 pour les maillages 2 et 3. Nous représentons la vitesse

u. Le flux p est donné par la reconstruction locale par le Lemme 4.8.3. Les Figures 4.35 et 4.36 représentent la solution exacte à l'instant initial $T = 0$. Les résultats obtenus pour le Maillage 1, sont regroupés sur les Figures 4.37 à 4.40, qui représentent respectivement la solution calculée, son contour, la coupe des solutions exacte et calculée le long de la première diagonale, ainsi que la différence entre la solution exacte et la solution calculée par le schéma boîte ADI. Les phénomènes de dispersion et dissipation du schéma apparaissent très nettement sur ces deux denières figures. En effet, pour le maillage 1, le coefficient de décentrement D_u est non nul, et nous avons déjà vu qu'il intervient dans la dissipation du schéma (par l'intermédiaire du coefficient E_2 de l'équation équivalente) et dans la dispersion (par l'intermédiaire de E_3). La solution du schéma n'est donc pas très précise, mais stable, pour un maillage très grossier.
La solution u calculée par le schéma boîte-ADI obtenue pour le Maillage 3 est représentée sur les Figures 4.41 et 4.42. D'aprés les Figures 4.43 et 4.44, nous constatons que l'effet de dissipation et de dispersion s'est beaucoup atténué en raffinant le maillage.

Maillages	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Nombre de Peclet	2.6667	1.2698	0.8
Box hauteur du pic	0.1452	0.1636	0.1660
TT hauteur du pic		0.1382	0.1518
Box e_{TT}	$2.2727073.10^{-4}$	$1.0844153.10^{-5}$	$9.4819593.10^{-7}$
TT e_{TT}		$4.975446.10^{-5}$	$1.424502.10^{-5}$
Box erreur L^2	0.0103	$2.2239.10^{-3}$	$4.9213.10^{-4}$
Taux de conv. L^2		2.0661	3.2644

TAB. 4.2 – Comparaison entre le schéma boîte-ADI et la méthode volumes finis de Turner-Truscott

4.9.3 Second cas test

Le second test est donné par Balaguer et co. [1]. On considère l'équation

$$u_t + v(y)\, u_x - D(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \tag{4.160}$$

de conditions de Dirichlet données par la solution exacte :

$$u(x,y,t) = \frac{\Delta M}{4\pi D t (1 + \lambda^2 t^2/12)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{x} - 0.5\lambda y t)^2}{4Dt(1 + \lambda^2 t^2/12)} - \frac{y^2}{4Dt} \right] \tag{4.161}$$

où la vitesse est $v(y) = v_0 + \lambda y$ et D est une constante positive. ΔM est la source de masse au point de coordonnées $x = x_0,\ y = 0$ et $t = 0$. $\bar{x}$ est défini par $\bar{x} = x_0 + v_0 t$.
Nous considérons le domaine $\Omega = [-20000; 20000] \times [-2000; 2000]$, l'instant initial est t_{ini} égal à $t_{ini} = 2400$, $\Delta M = 4\pi D t_{ini}(1 + \lambda^2 t_{ini}^2/12)^{1/2}$. Le pic de concentration initial est égal à 1 et vaut 0.4991 au temps final $t_{final} = 4800$.

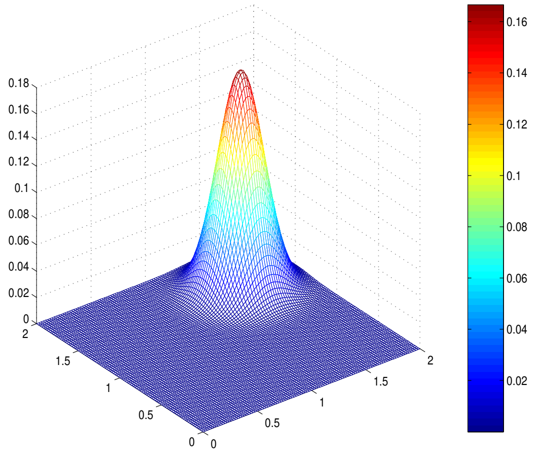

FIG. 4.35 – Test 1 : Solution initiale.

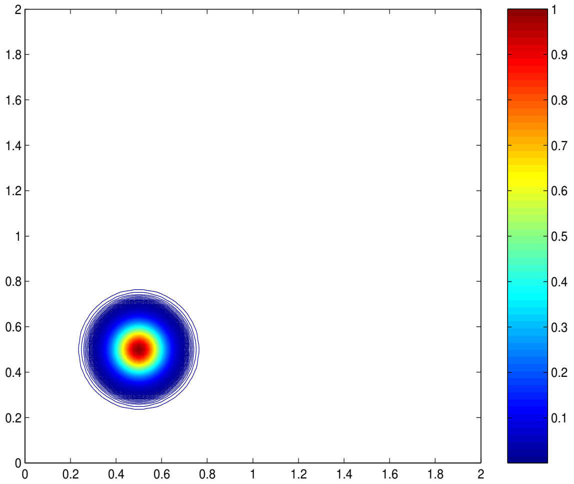

FIG. 4.36 – Test 1 : Isolignes de la solution initiale.

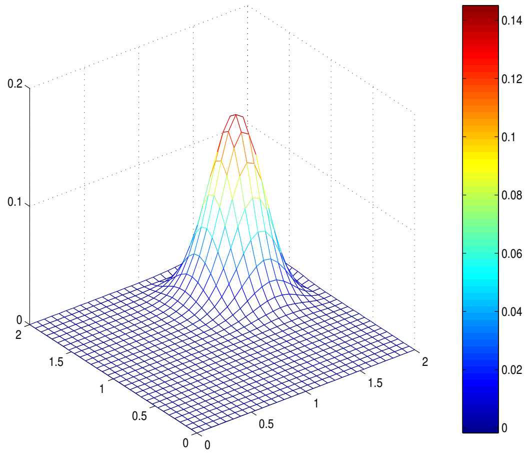

FIG. 4.37 – Test 1 : Solution calculée, $T = 1.25$, Maillage 1.

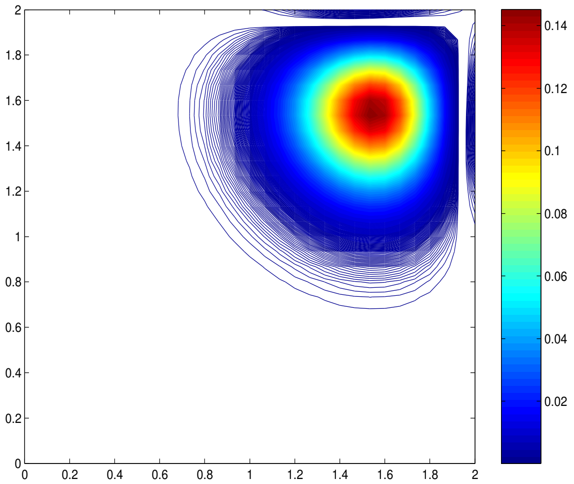

FIG. 4.38 – Test 1 : Isolignes de la solution calculée, $T = 1.25$, Maillage 1.

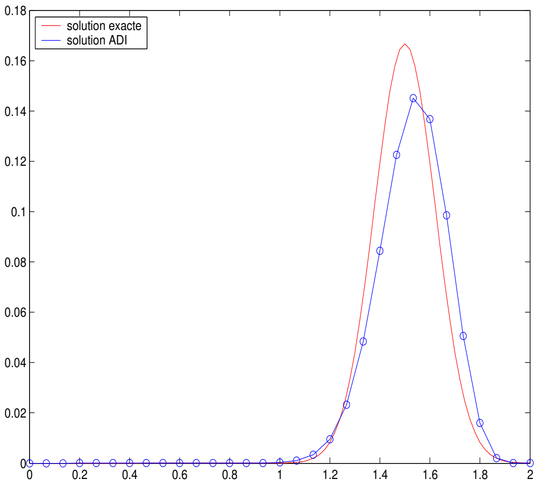

FIG. 4.39 – Test 1 : Coupe selon la diagonale $y = x$ de la solution exacte et de la solution calculée ADI, $T = 1.25$, Maillage 1.

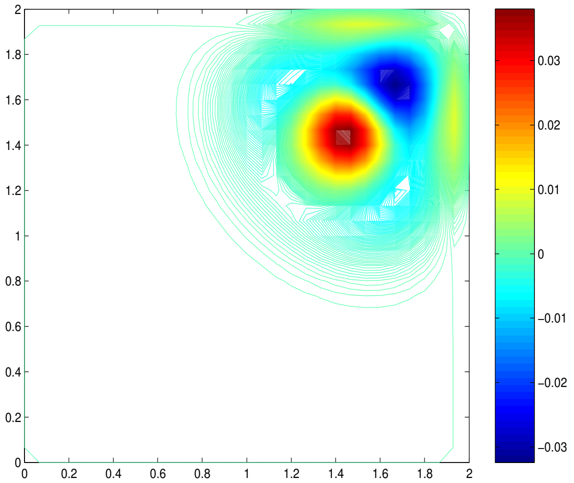

FIG. 4.40 – Test 1 : Isolignes de la différence entre la solution exacte et la solution ADI, $T = 1.25$, Maillage 1.

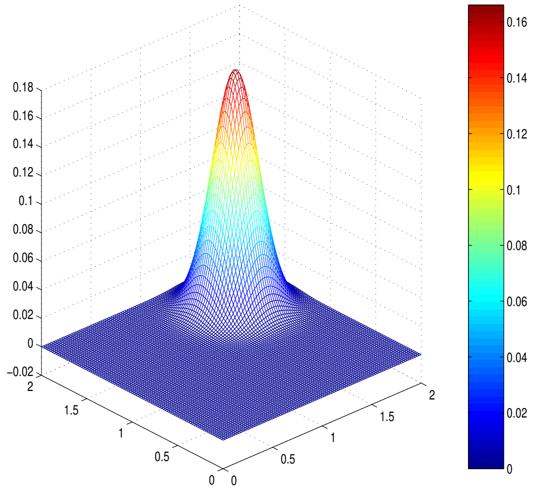

FIG. 4.41 – Test 1 : Solution calculée ADI, $T = 1.25$, Maillage 3.

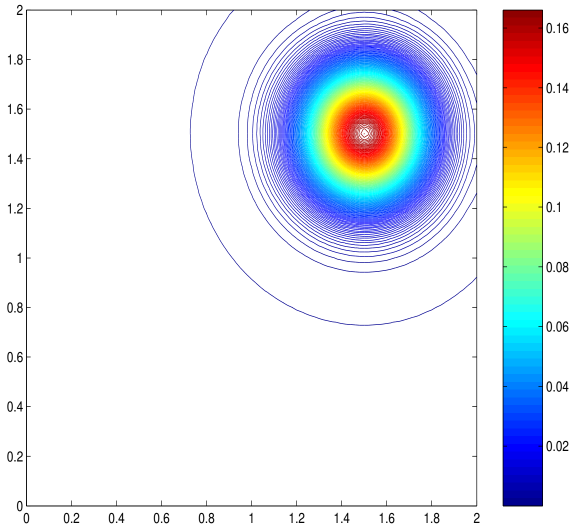

FIG. 4.42 – Test 1 : Isolignes de la solution calculée ADI, $T = 1.25$, Maillage 3.

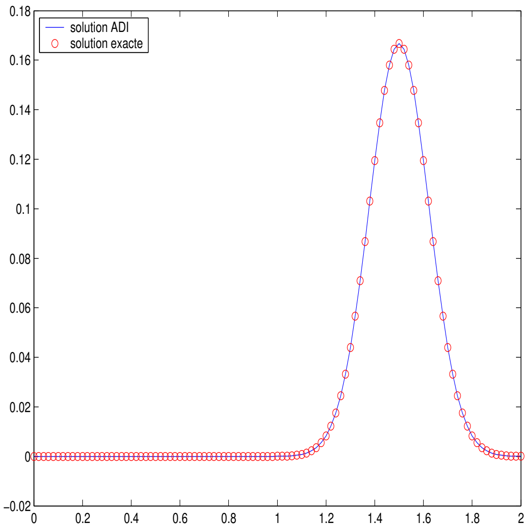

FIG. 4.43 – Test 1 : Coupe selon la diagonale $y = x$ de la solution exacte et de la solution calculée ADI, $T = 1.25$, Maillage 3.

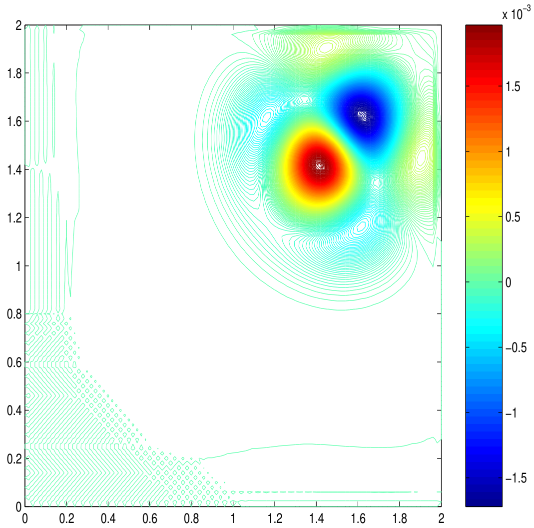

FIG. 4.44 – Test 1 : Isolignes de la différence entre la solution exacte et la solution ADI, $T = 1.25$, Maillage 3.

Les paramètres sont : $x_0 = 7200$, $v_0 = 0.5$, $\lambda = 5 \times 10^{-5}$, $D = 10$. Le pas d'espace est $h = h_x = h_y$. Nous étudions trois maillages différents, pour lesquels le nombre CFL est 0.24, le pas d'espace est respectivement $h = 200$, $h = 100$ et $h = 50$ pour les maillages 1, 2 et 3. A noter que la vitesse $(c_1, c_2) = (v(y), 0)$ est assymétrique, avec $v(y) = v_0 + \lambda y$. La gaussienne

Maillage	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
h	200	100	50
Nx	201	401	801
Ny	21	41	81
Pas de temps dt	80	40	20
Hauteur du pic	0.3643	0.4793	0.4955
$\max(\lvert u - u_h \rvert)$	0.0652	0.0403	0.0096
Erreur L^2	59.5037	20.8254	4.6216
Taux de convergence		1.5146	2.1719

TAB. 4.3 – Test 2 : Résultats obtenus par le schéma boîte ADI à l'instant final $T = 4800$.

initiale est convectée selon la direction (Ox). Le nombre de Peclet selon x, $\mathrm{Pe}_x = \frac{|c_1|\, h_x}{2\varepsilon}$ est non-constant. On a $4 \leq \mathrm{Pe}_x \leq 6$ dans le cas $h = 200$, et $2 \leq \mathrm{Pe}_x \leq 3$ dans le cas $h = 100$, c'est-à-dire que $D_{u,x}$ varie entre 0 et 1/30 sur chaque arête horizontale. Dans le cas $h = 50$, le coefficient de décentrement D_u est nul. Les coefficients verticaux Pe_y et $D_{u,y}$ s'annulent dans les trois cas. Ces résultats sont regroupés dans le Tableau 4.3.

On calcule les taux de convergence en norme L^2 entre les maillages 1 et 2, puis les maillages 2 et 3. On obtient des taux de convergence environ égaux à 1.5 et 2. Le deuxième taux est meilleur. En effet, nous avons vu que le coefficient de décentrement D_u est nul pour le Maillage 3. La précision du schéma est donc meilleure dans ce dernier cas, puisqu'il n'y a pas de dissipation liée au coefficient de décentrement D_u. On peut noter que le schéma se comporte trés bien, dans le cas d'un coefficient de convection variable, si le maillage est assez raffiné. Au temps final $T = t_{final} = 4800$, on représente la solution u calculée par le schéma boîte ADI (4.134). Les Figures 4.45 et 4.49 représentent les isovaleurs de la solution du schéma boîte ADI (4.134), respectivement pour les maillages 2 et 1. On compare ensuite la solution exacte et la solution calculée ADI sur les Figures 4.46 et 4.50. Comme on peut s'y attendre, l'erreur est surtout localisée au niveau de la gaussienne. Les Figures 4.47 et 4.51 représentent la coupe selon la droite $x = 9600$ de la solution exacte en trait continu et la solution calculée par des cercles, pour les maillages 2, puis 1. De même les Figures 4.48 et 4.52 représentent la coupe selon l'axe des abscisses de la solution exacte (trait continu) et la solution calculée (des cercles), pour les maillages 2, puis 1. L'effet des coefficients de décentrement apparaît clairement sur ces figures. Lorsque nous comparons ces différents profils de coupe selon une des directions x ou y pour le maillage 1 on remarque que la dispersion du schéma n'apparaît que dans la direction Ox. Ceci est lié à la convection c, qui n'agit que selon la direction Ox. Par contre, pour le maillage 2, plus fin, ce phénomène n'est pas visible ; la dispersion est plus faible. Comme précedemment, en raffinant le maillage, la solution est beaucoup plus précise.

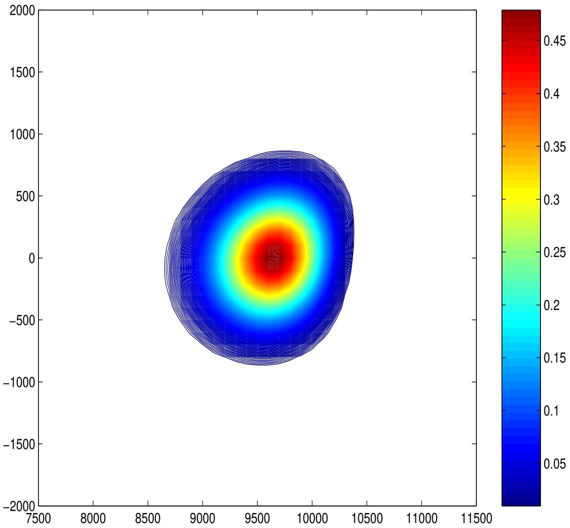

FIG. 4.45 – Test 2 : Isolignes de la solution calculée ADI, $T = 4800$, Maillage 2.

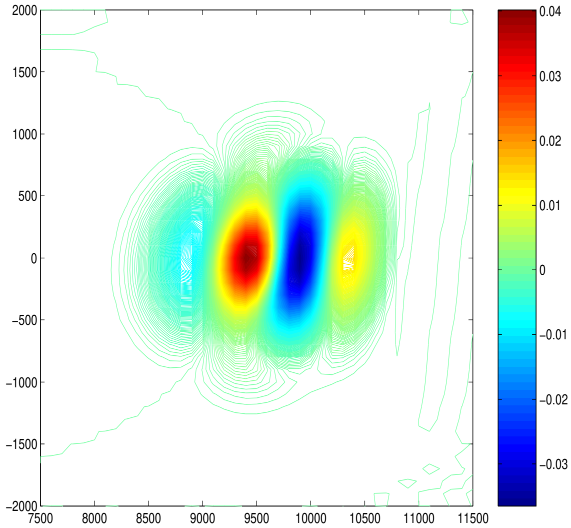

FIG. 4.46 – Test 2 : Différence entre la solution exacte et la solution calculée ADI, $T = 4800$, Maillage 2

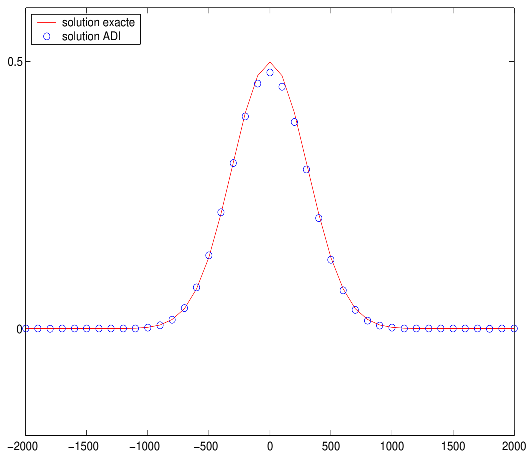

FIG. 4.47 – Test 2 : Coupe selon $x = 9600$ des solutions exacte et calulée ADI, $T = 4800$, Maillage 2

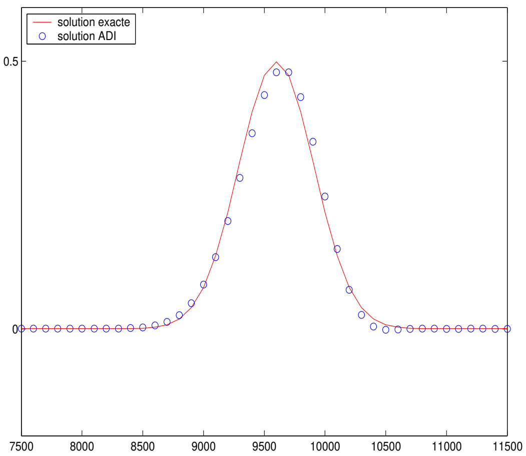

FIG. 4.48 – Test 2 : Coupe selon $y = 0$ des solutions exacte et calculée ADI, $T = 4800$, Maillage 2

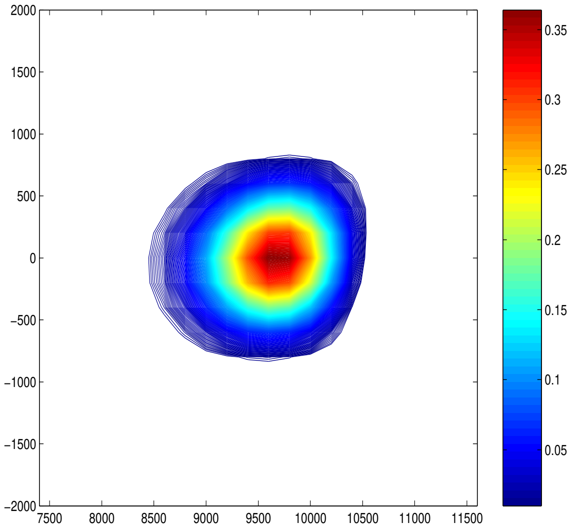

FIG. 4.49 – Test 2 : Isolignes de la solution calculée ADI, $T = 4800$, Maillage 1.

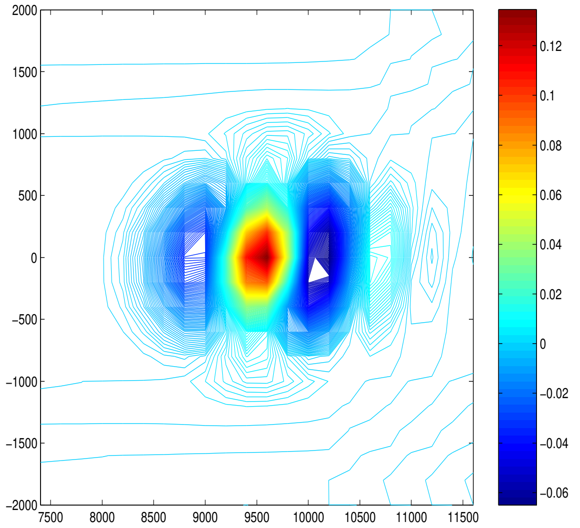

FIG. 4.50 – Test 2 : Différence entre la solution exacte u et la solution calculée ADI, $T = 4800$, Maillage 1.

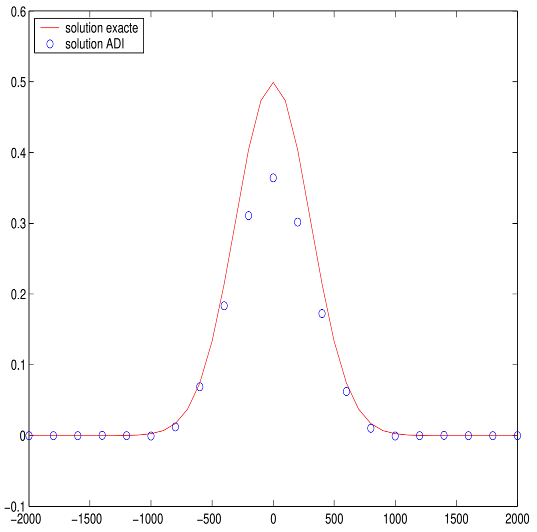

FIG. 4.51 – Test 2 : Coupe selon $x = 9600$ des solutions exacte et calculée ADI, $T = 4800$, Maillage 1.

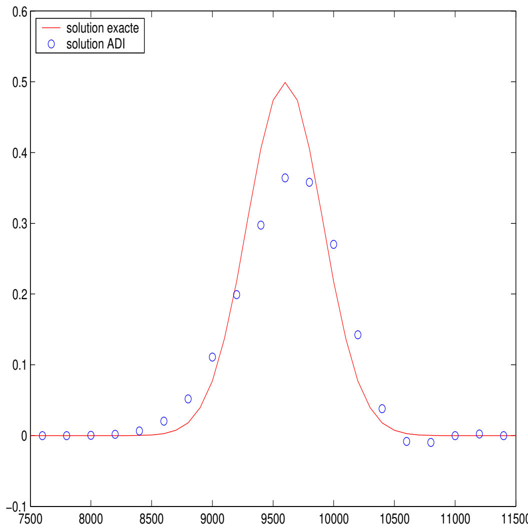

FIG. 4.52 – Test 2 : Coupe selon $y = 0$ des solutions exacte et calculée ADI, $T = 4800$, Maillage 1.

4.9.4 Troisième cas test

On s'intéresse maintenant au problème de convection-diffusion de coefficient de diffusion $\varepsilon(x,y)$ variable en fonction de x et y et de convection constante. On résoud l'équation de convection-diffusion de coefficient de convection $c = (1,1)$ et de coefficient de diffusion $\varepsilon(x,y) = K \sin(\frac{\pi}{4}x) \sin(\frac{\pi}{4}y)$:

$$u_t + c.\nabla u - \text{div}(\varepsilon(x,y)\,\nabla u) = f(x,y,t)$$

Les conditions limite sont de type Dirichlet données par la solution exacte. Il s'agit de la gaussienne du cas test de Noye et Tan, centrée au point $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ donnée par :

$$g(x,y,t) = \frac{1}{4t+1} \exp\left[-\frac{(x - c_1 t - x_0)^2}{K\,(4t+1)} - \frac{(y - c_2 t - y_0)^2}{K\,(4t+1)}\right].$$

Le terme source est défini par

$$f(x,y,t) = g_t + c.\nabla g - \text{div}(\varepsilon(x,y)\,\nabla g)$$

On étudie deux cas $K = 10^{-2}$ et $K = 10^{-1}$. Les coefficients de décentrement du schéma boîte (4.134) sont calculés par les formules (4.27) et (4.81) varient dans chaque maille, le paramètre $\vartheta = \frac{1}{2}$. La gaussienne est convectée le long de la diagonale $y = x$ à la vitesse $c = (1,1)$. Le pas de temps est toujours $k = 0.0125$ et le temps final est $T = 1$, ce qui correspond à 80 itérations en temps. On calcule la solution u du schéma boîte ADI pour chacun des cas $K = 10^{-2}$ et $K = 10^{-1}$. Le coefficient de diffusion varie donc entre 0 et 0.01 ou entre 0 et 0.1. Les résultats sont réunis respectivement dans les Tableaux 4.4 et 4.5. On représente la solution calculée pour le maillage le plus fin (Maillage 4) pour les deux cas $K = 10^{-2}$ et $K = 10^{-1}$ sur les Figures 4.53 et 4.54, respectivement sur les Figures 4.57 et 4.58. On représente ensuite la différence entre la solution exacte et la solution calculée sur les Figures 4.55 et 4.59. Enfin, on compare la solution exacte et la solution calculée le long de la diagonale $y = x$, toujours pour le Maillage 4 (Figures 4.56 et 4.60). On constate que les solutions calculées dans chacun des deux cas sont proches de la solution exacte. Les taux de convergence de l'ordre de 2 pour $K = 10^{-2}$ et l'ordre de 1 pour $K = 10^{-1}$ confirment cette constation. Le taux de convergence du cas $K = 10^{-1}$ est plus faible ; en effet, pour ce test, la variation de ε est plus importante que dans le cas $K = 10^{-2}$. Il faudrait donc raffiner d'avantage le maillage pour obtenir de meilleurs résultats.

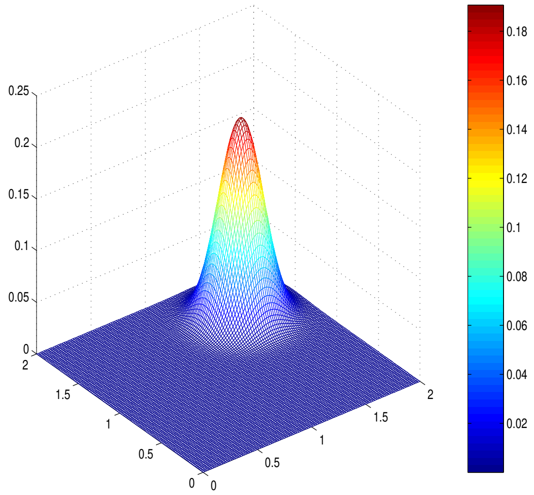

FIG. 4.53 – Test 3 : $K = 0.01$, Solution calculée ADI, $T = 1$, Maillage 4.

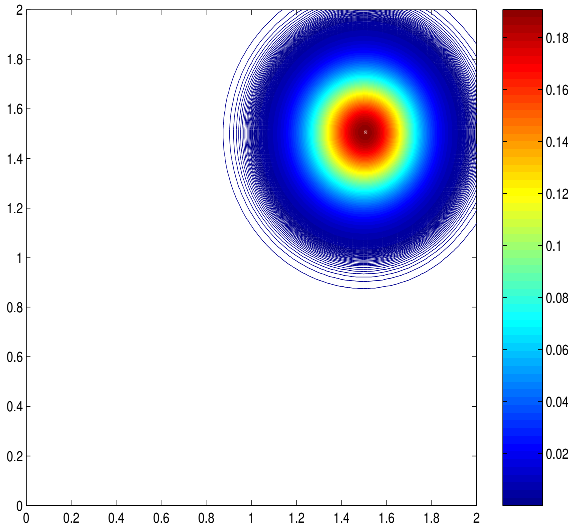

FIG. 4.54 – Test 3 : $K = 0.01$, Isolignes de la solution calculée, $T = 1$, Maillage 4.

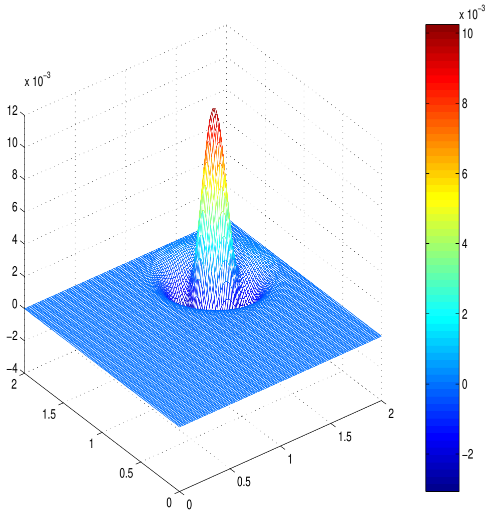

FIG. 4.55 – Test 3 : $K = 0.01$, Différence entre la solution exacte u et la solution calculée ADI, $T = 1$, Maillage 4.

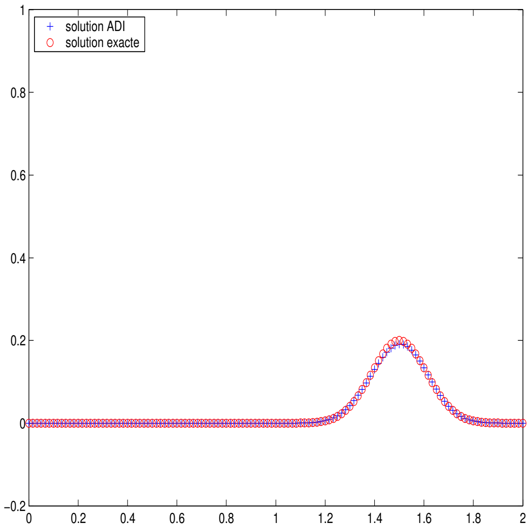

FIG. 4.56 – Test 3 : $K = 0.01$, Diagonale de la solution exacte et de la solution calculée ADI, $T = 1$, Maillage 4.

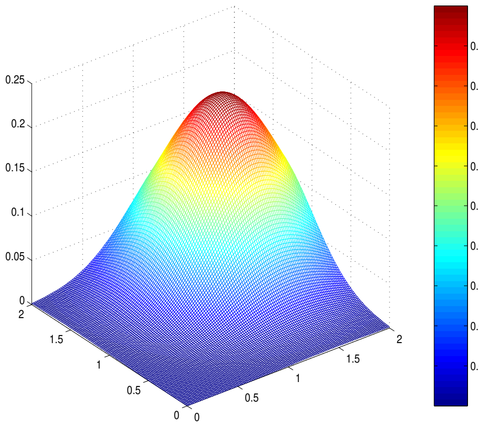

FIG. 4.57 – Test 3 : $K = 0.1$, Solution calculée ADI, $T = 1$, Maillage 4.

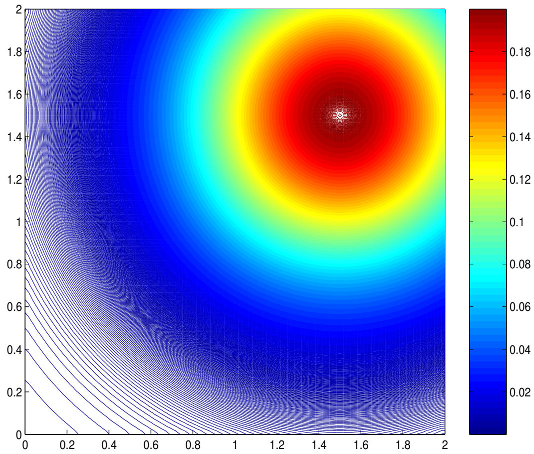

FIG. 4.58 – Test 3 : $K = 0.1$, Isolignes de la solution calculée ADI, $T = 1$, Maillage 4.

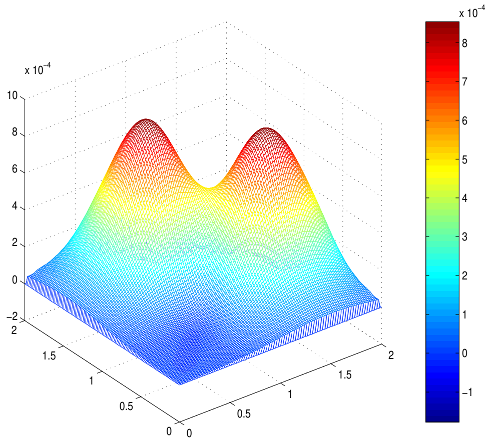

FIG. 4.59 – Test 3 : $K = 0.1$, Différence entre la solution exacte u et la solution calculée ADI, $T = 1$, Maillage 4.

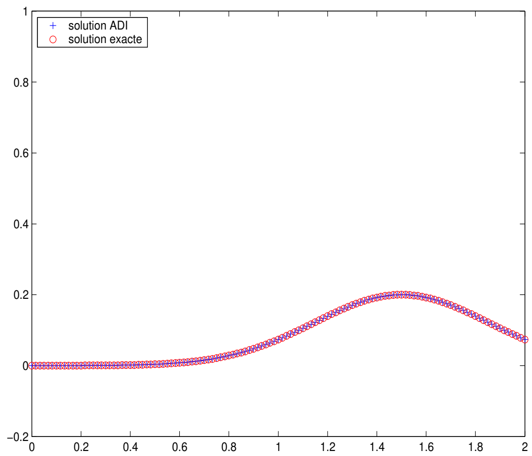

FIG. 4.60 – Test 3 : $K = 0.1$, Diagonale de la solution exacte et de la solution calculée ADI, $T = 1$, Maillage 4.

Maillage	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
h	1/15	1/30	1/45	1/60
Nx	31	61	91	121
Hauteur du pic	0.0969	0.1523	0.1790	0.1907
$\max(\|u - u_h\|)$	0.1	0.0492	0.0229	0.0102
Erreur L^2 relative	0.3981	0.1630	0.0702	0.0312
Erreur L^2 absolue	0.0220	0.0091	0.0039	0.0017
Taux de convergence		1.2883	2.0776	2.8188

TAB. 4.4 – Test 3 : $K = 0.01$, Résultats obtenus par le schéma boîte ADI à l'instant final $T = 1$.

Maillage	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
h	1/15	1/30	1/45	1/60
Nx	31	61	91	121
Hauteur du pic	0.1975	0.1996	0.1998	0.2
$\max(\|u - u_h\|)$	0.0043	0.0014	0.0010	$8.5425.10^{-4}$
Erreur L^2 relative	0.0158	0.0069	0.0051	0.0041
Erreur L^2 absolue	0.0026	0.0011	$8.3007.10^{-4}$	$6.6552.10^{-4}$
Taux de convergence		1.1953	0.7455	0.7587

TAB. 4.5 – Test 3 : $K = 0.1$, Résultats obtenus par le schéma boîte ADI à l'instant final $T = 1$.

4.10 Conclusion

En dimension 1, un β-schéma boîte associé à l'équation de convection-diffusion, construit sur le principe du β-schéma boîte associé à l'équation de la chaleur pourrait éliminer les modes oscillants quand le paramètre ϑ prend la valeur 1/2. Il s'écrit de la même façon que le β-schéma associé à l'équation de la chaleur. Numériquement, nous avons pu constater l'efficacité de ce schéma.
Dans le cadre du groupe de travail MoMas, pour le stockage souterrain des déchets nucléaires, on essaie de résoudre le cas test Couplex1 à l'aide des schémas boîte. On résoud l'équation de Darcy à l'aide d'un schéma boîte étudié sur des maillages en triangles. La résolution de l'écoulement des nucléides dans le sol est faite par le schéma boîte ADI. Ce travail en cours est réalisé par J-M. Sac Epée qui réécrit en C++, les codes matlab des schémas boîte pour la rapidité de l'exécution.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons proposé un travail de prospection des schémas boîte dans divers cadres. Ce travail présente une étude de deux types :

1- Design de différents nouveaux schémas boîte pour des problèmes elliptiques sur des maillages en triangle et des maillages en rectangles. L'intérêt majeur réside dans la reconstruction du flux, donnée de façon explicite en fonction de l'inconnue u.

2- Design de schémas boîte pour l'équation de convection-diffusion. Le problème réside dans la modélisation des formules de décentrements numériques. Il faut élargir la classe des formules de quadrature numérique : trouver des formules de quadrature plus précises, utiliser des méthodes de type limiteurs de pente.
Pour le moment, les formules de décentrement utilisées sont insuffisantes, car peu précises. Le schéma boîte obtenu est d'ordre 1 si les paramètres de décentrement sont non nuls.
Les schémas boîte proposés pour les problèmes elliptiques et les équations de convection-diffusion pourraient permettre de résoudre, dans le cadre du groupe de travail MoMas, le cas test Couplex1 pour le stockage souterrain des déchets nucléaires. Cette étude est actuellement en cours, avec la collaboration de J-M. Sac Epée.

3- Des difficultés subsistent dans les deux cas. Néanmoins, les schémas boîte sont encore d'actualité. Ils sont étudiés par Linda El Alaoui (Thèse au Cermics) pour des problèmes d'estimations *a posteriori*. A noter, que S-H. Chou , S. Tang, D. Y. Kwak, K. Y. Kim, s'intéressent également à ce genre de schémas, [10, 11].

Les perspectives sont à court terme le développement des schémas boîtes pour des équations de convection-diffusion stationnaire en dimension 2, qui fait l'objet d'un travail en cours avec Linda El Alaoui. D'autre part, la résolution du cas test Couplex1 semble en bonne voie de résolution.
Parallélement, il sera intéressant de développer un schéma boîte plus précis, du type β-schéma, pour éliminer certains phénomènes de type dispersif.

Liste des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

[1] A. Balaguer, C. Conde, J.A. Lòpez, V. Martińez, A Finite Volume Method with a Modified ENO Scheme using a Hermite Interpolation to solve Advection-Diffusion Equations, *Int. J. Numer. Meth. Engng* ;50 :2339-2371, 2001.

[2] I. Babuška, Error bounds for finite elements method, *Numer.Math.*,

[3] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems, arising from Lagrangian multipliers, *R.A.I.R.O.*, 16, 322-333. 8, R-2, 129-151, 1974.

[4] D. Braess, *Finite Elements*, Cambridge Univ. Press, 1997.

[5] F. Brezzi, J. Douglas, L.D. Marini, Two families of Mixed Finite Element for second order elliptic problems, *Numer. Math., 47*, 217-235, 1985 .

[6] S. Brenner et S. Scott, The mathematical Theory of the Finite Element Method, *Springer Verlag, Berlin/Heidelberg*, 1994.

[7] C. Bernardi, C. Canuto, Y. Maday, Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem, *SIAM J. Numer. Anal., 25,6*, 1237-1271, 1988.

[8] J.J. Chattot, Box-schemes for First Order Partial Differential Equations, *Advances in Comp. Fluid Dynamics*, Gordon Breach Publ., 1995, 307-331.

[9] J.J. Chattot, S. Malet, A “box-scheme” for the Euler equations, *Lecture Notes in Math., 1270,* Springer-Verlag, 1987, 82-99.

[10] S-H. Chou , S. Tang, Comparing two approaches of analizing mixed finite volume methods, *J. KSIAM* ,5 ,1 55-78, 2001.

[11] S-H. Chou , D. Y. Kwak, K. Y. Kim, Mixed finite volume methods on nonstaggered quadrilateral grids for elliptic problems, *Mathematics of Computation*, 2001.

[12] B. Courbet, Schémas à deux points pour la simulation numérique des écoulements, *La Recherche Aérospatiale, n°4,*, 21-46, 1990.

[13] B. Courbet, Etude d'une famille de schémas boîte à deux points et application à la dynamique des gaz monodimensionnelle, *La Recherche Aérospatiale, n°5,*, pp 31-44, 1991.

[14] B. Courbet, Schémas boîte en réseau triangulaire, *Rapport Technique ONERA n°18/3446 EN,* 1992.

[15] B. Courbet, J.P. Croisille, Finite Volume Box Schemes on triangular meshes, *Math. Model. and Numer., 32,5*, 631-649, 1998.

[16] J-P. Croisille, Finite Volume Box Schemes and Mixed Methods, *Math. Model. and Numer., 34, 5*, 1087-1106, 2000.

[17] J-P. Croisille, Keller's box-scheme for the one-dimensional stationary convection-diffusion equation, Computing, 68, 37-63, 2002.

[18] J-P. Croisille, Un schéma boîte pour l'équation de convection-diffusion stationnaire 1d, *Préprint de l'Université de Metz*, 2003.

[19] J-P. Croisille, I. Greff, Some box-schemes for elliptic problems, *Numerical Methods for Partial Differential Equations, 17, 4* , 355-373, 2001.

[20] J-P. Croisille, I. Greff, A box scheme for convection-diffusion equations, Proc of the 3. ISFVMCA, Porquerolles, Hermes, 2002.

[21] J-P. Croisille, I. Greff, A box scheme for convection-diffusion equations with sharp contrast in the diffusion coefficients, Preprint de l'Université de Metz.

[22] M. Crouzeix, P-A. Raviart, Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I, *R.A.I.R.O. 7,* R-3, 33-76, 1973.

[23] M. Crouzeix, P-A. Raviart Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

[24] J. Douglas, J.E. Gunn, A general formulation of alternating direction methods ; Part I. Parabolic and hyperbolic problems, *Num. Math, 6*, 1964, 428-453.

[25] J. Douglas, H.H. Rachford, On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. of the Amer. Math. Soc, 82, 421-439, 1956.

[26] Douglas N. Arnold, Daniele Boffi, Richard S. Falk, Approximation by quadrilateral finite elements, *Mathematics of computation , 71, 239*, 909-922, 2002.

[27] W. Hackbusch, On first and second order box schemes, *Computing, 41,*, 277-296, 1989.

[28] M. Fortin, M. Soulie, A non-conforming piecewise quadratic finite element on triangles, Int. J. Num. meth. Eng., 19, 505-520, 1983.

[29] M. Fortin, M. Fahrloul, A non-conforming mixed finite element for second order elliptic problems, Num. Meth. PDE, 1997.

[30] V. Girault, Cours de D.E.A., Université Paris 6, unpublished.

[31] H.B. Keller, A new difference scheme for parabolic problems, Numerical solutions of partial differential equations, II, B. Hubbard ed., Academic Press, New-York, 327-350, 1971.

[32] B. M. Irons, A. Razzaque, Experience with the patch test for convergence of finite element, *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations* (A. K. Aziz, Ed.), 557-588, academic Press, New-York, 1972.

[33] R. Carpentier, A. de la Bourdonnaye, B. Larrouturou, On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods, *Math. Model. and Numer., 31, 4*, 459-470, 1997.

[34] J.F. Maitre, About a "natural" mixed finite element method ;relation with classical methods and applications. Talk at the ENUMATH 99, July 99, Jyveskyla, Finland.

[35] R.A. Nicolaides, Existence, uniqueness and approximation for generalized saddle point problems, *SIAM J. Numer. Anal., 19, 2,* 349-357, 1982.

[36] B.J. Noye, H.H. Tan, Finite difference methods for solving the 2D convection-diffusion equation, Int. Jour. Numer. Meth. Flu., (9), 75-98, 1989.

[37] D.W. Peaceman, H.H Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 3, 28-41, 1955.

[38] R. Rannacher, S. Turek, Simple Nonconforming Quadrilateral Stokes Element, *Numer. Meth. Partial Diff. Equations.*, 8, 97-111, 1992.

[39] P-A. Raviart, J-M. Thomas, A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems, *Lecture Notes in Math., 606,* Springer-Verlag, 292-315, 1977.

[40] P-A. Raviart, J-M. Thomas, Introduction à l'Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, *Masson*, 1992.

[41] A. Rigal, High order difference methods for unsteady 1D diffusion-convection problems, *J. Comp. Phys., 114* , 59-76, 1994.

[42] J. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth & Brooks/Cole Pub., 1989.

[43] G. Strang, G. Fix, An analysis of the Finite Element Method, *Prentice Hall, New-York*, 1973.

[44] M. Stynes, L. Tobiska, The streamline-diffusion method for nonconforming Q^1_{rot} elements on rectangular tensor-product meshes, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **21**, 123-142, 2001.

[45] S.L. Truscott, I.W. Turner, An investigation of Spatial and Temporal Weighting Schemes for use in Unstructured Mesh Control Volume Finite Element Methods, 10th Comp. Tech. App. Conf., Brisbane, July 2001, to appear in the *ANZIAM Jour.*

[46] S.F. Wornom, Application of compact difference schemes to the conservative Euler equations for one-dimensional flows, *NASA Tech. Mem. 83262*, 1982.

[47] S.F. Wornom, M.M. Hafez, Implicit conservative schemes for the Euler equations, *AIAA J., 24,2,*, 215-233, 1986.

Dans cette thèse, nous étudions les **schémas boîte**. Ils ont été introduits par H.B. Keller en 1971. Dans un premier temps, on s'est intéressé à des problèmes elliptiques de type Poisson. Plusieurs schémas boîte pour des domaines de $\mathbb{R}^2$ maillés par des triangles ou des rectangles ont été introduits. Dans ce cas, la discrétisation s'effectue sur la forme mixte du problème en prenant la moyenne des deux équations (conservation et flux) sur les cellules du maillage. La méthode peut être qualifiée de "méthode volumes finis mixte de type Petrov-Galerkin ". Une des difficultés du design de cette famille de schémas réside dans le choix des différents espaces de fonctions (approximation et test) qui doivent satisfaire des conditions de compatibilité de type Babŭska-Brezzi. En revanche, cette méthode de discrétisation ne nécessite qu'un seul maillage (le maillage du domaine). De plus, on montre dans la plupart des cas que le schéma obtenu est équivalent à un problème découplé : la résolution d'un problème variationnel pour l'inconnue principale et une formule locale pour le gradient (le flux). Des résultats de stabilité et les calculs d'erreurs reposant sur la théorie des éléments finis ont été établis. Une étude numérique valide ces résultats pour quelques cas tests. Dans le cadre du Groupement de Recherche MoMaS pour le stockage des déchets nucléaires dans la Meuse, j'ai ensuite étudié des problèmes de convection-diffusion instationnaires. Un schéma boîte permettant d'approcher ces équations dans le cas monodimensionnel a été introduit. Des coefficients de décentrement propres à chaque maille permettent de contrôler le schéma (précision, stabilité). Afin de généraliser rapidement ce schéma au cas bidimensionnel, je me suis concentrée sur une extension du schéma boîte monodimensionnel par la méthode ADI (Alternating Direction Implicit).

The main object of this thesis is the theoretical and numerical analysis of **box schemes**. This class of schemes, has been introduced by H.B. Keller in 1971 for parabolic problems. In the case of elliptic problems, the basic principle is to average the two continuous equations (conservation and flux) given by the mixed form of the problem, onto the boxes of the mesh. Box schemes belong to the category of so-called mixed Petrov-Galerkin finite volume methods. The selection of the different spaces functions (trial and test) is difficult, because they have to satisfy the compatibility Babŭska-Brezzi condition. However, contrary to other schemes, the method requires an unique mesh. In most of the cases, the scheme is equivalent to a variational formulation in the principal unknow (u) and a local reconstruction of the flux (∇u). Firstly, I studied the bidimensional mixed form of the Poisson problem with a box scheme on triangular or quadrangular meshes. Stability results and error estimates are given using the finite element theory. A numerical study on several test cases (Matlab code) completes our theoretical results. As part of the research group MoMaS for deep ground repositories of radioactive wastes, the potential interest of box schemes for unstationary convection-diffusion problems has been tested. A box scheme has been designed for the 1D equation. Two kinds of upwinding are introduced, each one being designed to cure the two classical oscillations sources present in the approximation of convective-diffusion equations. The generalization to the bidimensional case is perfomed using an ADI-like method (Alternating Direction Implicit).