Correction du contôle de mécanique

ISA-BTP Deuxième année

17 mai 2002

1 Poutre encastrée appuyée:

Le problème hyperstatique d'ordre 1, se décompose en deux problèmes isostatiques P_{b0} et $P_{b1} = Y_A\overline{P_{b1}}$.

1.1 Résolution des problèmes isotatiques

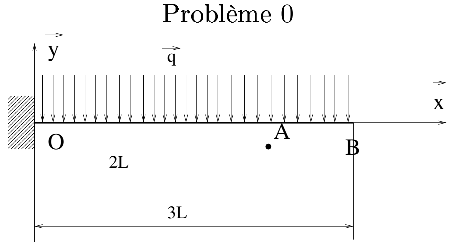
On calcule pour chaque problème:

- Le moment fléchissant.
- Les variables demandées pour le problème hyperstatique soit: Les réactions d'appui, l'effort tranchant.

Attention aux notations: M_o:moment d'encastrement au point O, M_0 : Moment pour le problème P_{b0}.

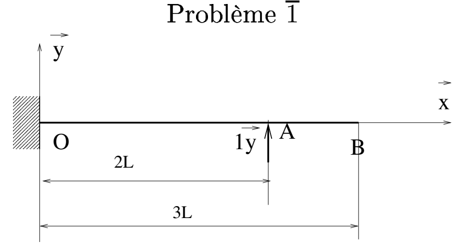
On choisit la décomposition suivante:

Problème 0

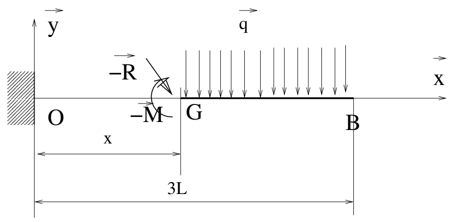


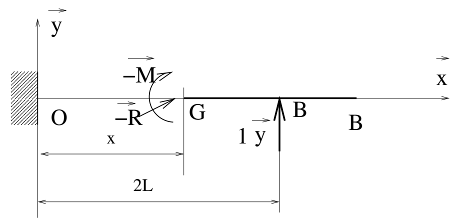
$$\overrightarrow{M_{o0}} + \frac{3L}{2}\overrightarrow{x} \wedge 3qL\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{R_{o0}} + 3qL\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$
$$Mo0 = -\frac{9qL^2}{2}$$
$$X_{o0} = 0$$
$$Y_{o0=-3qL}$$

Problème $\overline{1}$



$$\overrightarrow{\overline{M_{o1}}} + 2L\overrightarrow{x} \wedge 1\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{\overline{R_{o1}}} + 1\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$
$$\overline{M_{o1}} = -2L$$
$$\overline{X_{o1}} = 0$$
$$\overline{Y_{o1}} = -1$$



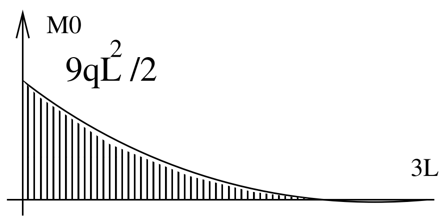


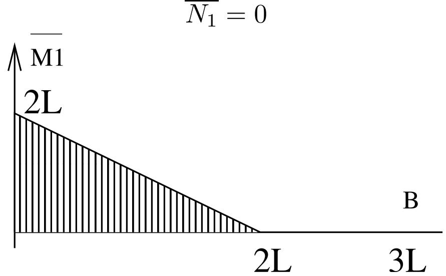
$$-\overrightarrow{M_0} + \frac{3L-x_0}{2}\overrightarrow{x} \wedge q(3L-x_0)\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$
$$-\overrightarrow{R_0} + q(3L-x_0)\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$

$$M_0 = q\frac{(3L-x_0)^2}{2}$$
$$V_{y0} = q(3L-x_0)$$
$$N_0 = 0$$

$$x_0 < 2L \begin{cases} -\overrightarrow{\overline{M_1}} + (2L-x_0)\,\overrightarrow{x} \wedge 1\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{\overline{R_1}} + 1\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$
$$x_0 > 2L \begin{cases} \overrightarrow{\overline{M_1}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\overline{R_1}} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

$$x_0 < 2L \begin{cases} \overline{M_1} = (2L-x_0) \\ \overline{V_{y1}} = 1 \end{cases}$$
$$x_0 > 2L \begin{cases} \overline{M_1} = 0 \\ \overline{V_{y1}} = 0 \end{cases}$$
$$\overline{N_1} = 0$$





1.2 Calcul de l'inconnue hyperstatique

L'inconnue hyperstatique est donc:

$$Y_A = -\frac{\int_0^{3L} M_0\overline{M_1}}{\int_0^{3L} \overline{M_1 M_1}}$$

On ne peut pas simplement trouver $\int_0^{3L} M_0\overline{M_1}$ car les longueurs des abscisses des diagrammes ($3L$ pour M_0 et $2L$ pour $\overline{M_1}$)ne correspondent pas, il faut faire le calcul à la main.

$\int_0^{3L} M_0\overline{M_1} = \int_0^{2L} q\frac{(3L-x_0)^2}{2}\,(2L-x_0)\,dx_0 = \frac{17qL^4}{3}$

Par contre le calcul de $\int_0^{3L} \overline{M_1 M_1}$ se fait facilement en utilisant les intégrales de Mohr (Attention la longueur de l'abscisse est $2L$)

$\int_0^{3L} \overline{M_1 M_1} = \frac{8L^3}{3}$

On en déduit:

$$Y_A = -\frac{17qL}{8}$$

1.3 Calcul des réactions d'appui:

$M_o = M_{o0} + Y_A \overline{M_{o1}}$ soit $M_o = -3q\frac{L^2}{2} + \frac{17qL}{8}2L = \frac{11qL^2}{4}$

$Y_o = Y_{o0} + Y_A \overline{Y_{o1}}$ soit : $Y_o = -3qL + \frac{17qL}{8} = -\frac{7qL}{8}$

1.4 Calcul des sollicitations:

- $x_0 < 2L$:

$V_y = V_{y0} + Y_A \overline{V_{y1}} = q(3L - x_0) - \frac{17qL}{8}$

$M = M_0 + Y_A \overline{M_1} = q\frac{(3L-x_0)^2}{2} - \frac{17qL}{8}(2L - x_0)$

$V_y = q\left(\frac{7L}{8} - x_0\right)$ et $V_y(0) = \frac{7qL}{8}$, $V_y(2L) = -\frac{11qL}{8}$, $V_y\left(\frac{7L}{8}\right) = 0$

$M(0) = \frac{qL^2}{4}$, $M\left(\frac{7L}{8}\right) = \frac{-17qL^2}{128}$ et $M(2L) = \frac{qL^2}{2}$

- $x_0 > 2L$:

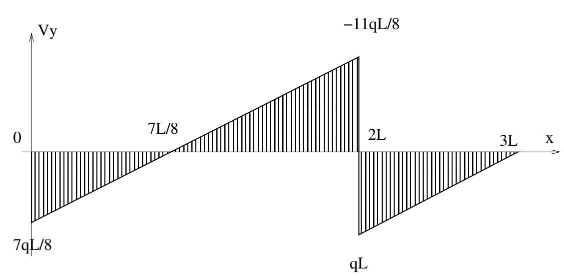
$V_y = V_{y0} + Y_A \overline{V_{y1}} = V_{y0} = q(3L - x_0)$

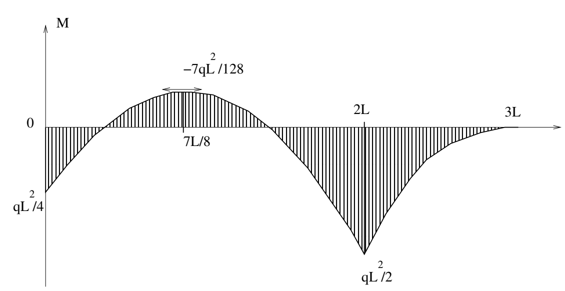
$M = M_0 + Y_A \overline{M_1} = q\frac{(3L-x_0)^2}{2}$

$V_y(2L) = qL$ et $V_y(3L) = 0$

$M(2L) = \frac{qL^2}{2}$ et $M(3L) = 0$

On peut maintenant tracer les diagrammes. Il sont tracés dans l'hypothèse où $q < 0$:

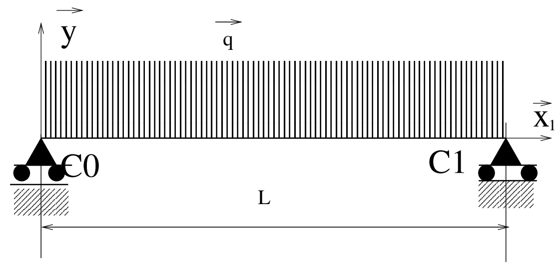




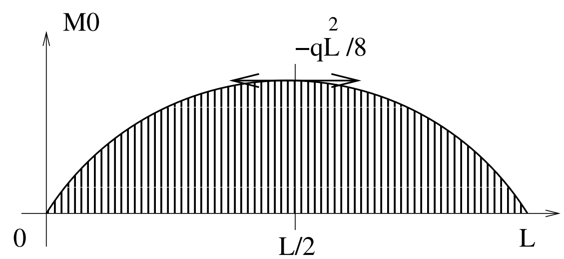
2 Poutre continue:

2.1 Calcul des moments isostatiques M_0 dans chaque travée:

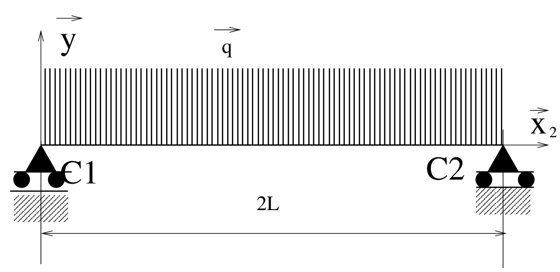
Travée 1:



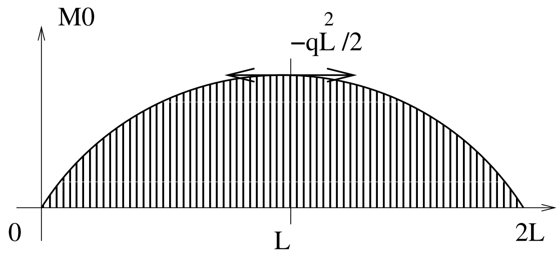
$$M_0 = -\frac{qx(L-x)}{2}$$



Travée2



$$M_0 = -\frac{qx(2L-x)}{2}$$

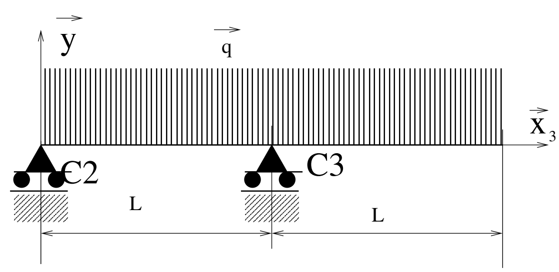


Travée 3:

On peut considérer la travée entière, mais il faudra ensuite faire attention que le moments fléchissant dü à l'inconnue hyperstatique X_2 est nul sur la partie de la poutre en porte à faux.

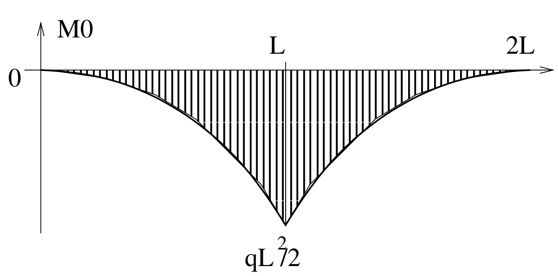
On peut aussi considérer une travée réduite à sa portion entre les appuis C_2 et C_3 en imposant le moment $qL^2/2$ appliqué par la partie de poutre en porte à faux sur la portion considérée en C_3.

Quelque soit l'option choisie, le problème reste hyperstatique d'ordre 2 et la formule des trois moments ne peut être appliquée que 2 fois.



$$x < L \quad : \quad M_0 = \frac{qx^2}{2}$$

$$x > L \quad : \quad M_0 = \frac{q\,(2L - x)^2}{2}$$



2.2 Application de la formule des trois moments:

En C_1 :

$2X_1\,(3L) + X_2\,(2L) + 6\int_{\Gamma_1} M_0 \frac{x_1}{L} dx_1 + 6\int_{\Gamma 2} M_0 \frac{2L-x_2}{2L} dx_2 = 0$

Les intégrales sont facilement obtenues :

$6\int_{\Gamma_1} M_0 \frac{x_1}{L} dx_1 = -\frac{qL^3}{4}$ et $6\int_{\Gamma 2} M_0 \frac{2L-x_2}{2L} dx_2 = -2qL^3$

et donc:

$6LX_1 + 2LX_2 = \frac{qL^3}{4} + 2qL^3$

$$24X_1 + 8X_2 = 9qL^2 \tag{1}$$

En C_2 :

$X_1(2L) + 2X_2\,(3L) + 6\int_{\Gamma 2} M_0 \frac{x_2}{2L} dx_2 + 6\int_{\Gamma 3} M_0 \frac{L-x_3}{L} dx_3 = 0$

Attention sur la troisième travée : Γ_3 se limite ici à la zone d'intervention du moment hyperstatique X_3, c'est à dire sur la première partie de la travée. Le moment fléchissant provoqué par X_3 sur la partie de la travée en porte à faux est nul.

Les intégrales sont facilement obtenues :

$6\int_{\Gamma 2} M_0 \frac{x_2}{2L} dx_2 = -2qL^3$ et $6\int_{\Gamma 3} M_0 \frac{L-x_3}{L} dx_3 = \frac{qL^3}{4}$

et donc:

$2LX_1 + 6LX_2 = 2qL^3 - \frac{qL^3}{4}$

2.3 Résolution:

$$8X_1 + 24X_2 = 7qL^2 \tag{2}$$

3*(1)-(2)$\Rightarrow$: $64X_1 = 20qL^2$ soit : $X_1 = \frac{5qL^2}{16} = -700kN$

3*(2)-(1)$\Rightarrow$: $64X_2 = 12qL^2$ soit : $X_2 = \frac{3qL^2}{16} = -420kN$

2.4 Diagramme des moments fléchissants:

Le diagramme de l'effort tranchant n'étant pas demandé, on étudie directement les moments fléchissants et les extréma sont obtenus par dérivarion.

Sur la première travée:

$M = M_0 + X1\frac{x_1}{L}$ soit $M = -\frac{qx_1(L-x_1)}{2} + \frac{5qL}{16}x_1 = \frac{q}{16}x_1\,(5L - 8L + 8x_1)$

$$M = \frac{q}{16}x_1\,(8x_1 - 3L)$$

$\frac{dM}{dx_1} = \frac{q}{16}\left[(8x_1 - 3L) + 8x_1\right] = q\left(x_1 - \frac{3L}{16}\right)$

$M\,(0) = 0,\ M\,(L) = X1 = \frac{5qL^2}{16},\ M\left(\frac{3L}{8}\right) = 0$ et $M\left(\frac{3L}{16}\right) = -\frac{9qL^2}{512} = 39,375kN$

Sur la deuxième travée:

$M = M_0 + X1\frac{2L-x_2}{2L} + X_2\frac{x_2}{2L}$ soit

$M = -\frac{qx_2(2L-x_2)}{2} + \frac{5qL}{16}\frac{2L-x_2}{2} + \frac{3qL}{16}\frac{x_2}{2} = \frac{qx_2^2}{2} - \frac{17qLx_2}{16} + \frac{5qL^2}{16}$

$$M = \frac{q}{16}\left(8x_2^2 - 17Lx_2 + 5L^2\right)$$

$\frac{dM}{dx_2} = \frac{q}{16}\left(16x_2 - 17L\right)$

$M\left(0\right) = X_1 = \frac{5qL^2}{16}$, $M\left(2L\right) = X_2 = \frac{3qL^2}{16}$, et

$M\left(\frac{17L}{16}\right) = -\frac{129qL^2}{512} = 564,375kN$

Sur la troisième travée:

Pour $x_3 < L$

$M = M_0 + X_2\frac{x_3}{L}$ soit $M = \frac{qx_3^2}{2} + \frac{3qL}{16}\left(L - x_3\right) = \frac{q}{16}\left(8x_3^2 - 3Lx_3 + 3L^2\right)$

$$\frac{q}{16}\left(8x_3^2 - 3Lx_3 + 3L^2\right)$$

$\frac{dM}{dx_3} = \frac{q}{16}\left(16x_3 - 3\right) = q\left(x_3 - \frac{3L}{16}\right)$

$M\left(0\right) = X_2 = \frac{3qL^2}{16}$, $M\left(L\right) = \frac{qL^2}{2}$, et

$M\left(\frac{3L}{16}\right) = \frac{87qL^2}{512} = -380,625kN$