

EFFORTS DE COHÉSION

CHRISTIAN LA BORDERIE

1. TORSEUR DES EFFORTS DE COHÉSION:

1.1. **Introduction:** Les efforts de cohésion jouent pour la poutre le même rôle que la contrainte pour le matériau. Ils représentent, qualifient et quantifient la façon dont la poutre est sollicitée dans une section particulière. Le calcul des efforts de cohésion est une étape nécessaire au dimensionnement ou à la vérification d'une poutre.

1.2. **Définition:** Soit une poutre Ω de ligne moyenne Γ orientée par une abscisse s et sollicité de manière quelconque (Figure 1).

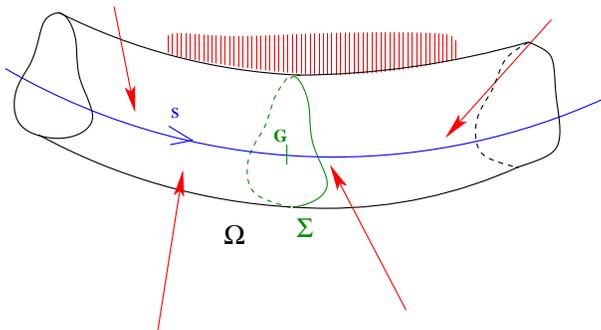


FIGURE 1. Poutre quelconque

Soit le point G de la ligne moyenne d'abscisse s_0 et Σ la section de poutre correspondante.

On désigne par Ω^+ la partie de Ω d'abscisse plus grande que s_0 et par Ω^- la partie de la poutre d'abscisse plus petite que s_0 (Figure 2).

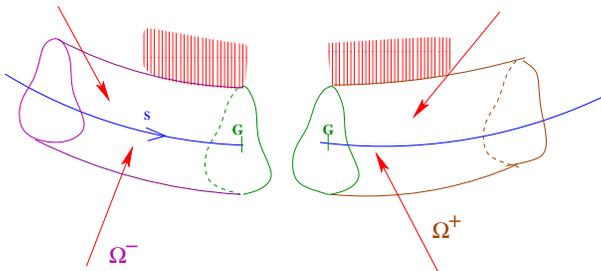


FIGURE 2. Coupure virtuelle de la poutre au point d'abscisse s_0 .

Définition. Le torseur des efforts de cohésion \mathfrak{S}_G au point G est le torseur des actions de Ω^+ sur Ω^- .

$$(1) \quad \mathfrak{S}_G = \mathcal{F}_{\Omega^+/\Omega^-}$$

On note respectivement $\overrightarrow{R}(s)$ et $\overrightarrow{M}(s)$ la résultante et le moment en G du torseur des efforts de cohésion au point G d'abscisse s .

Note. Le torseur des efforts de cohésion est aussi appelé torseur des efforts intérieurs ou contraintes généralisées.

Le torseur des efforts de cohésion en un point G est bien un torseur, on peut donc lui appliquer les relations de transport de torseur pour calculer les éléments de réduction de \mathfrak{S}_G en un autre point que G .

$$\mathfrak{S}_G \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(s)} \\ \overrightarrow{M(s)} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R(s)} \\ \overrightarrow{M(s)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R(s)} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur des efforts de cohésion en G_2 est différent du torseur de cohésion en G_1 , on ne peut donc pas appliquer de relation de transport entre les éléments de réduction de ces deux torseurs.

1.3. Calcul du torseur des efforts de cohésion. La poutre étant en équilibre, le torseur résultant des actions extérieures sur Ω est nul : $\mathcal{F}_{ext/\Omega} = \{0\}$.

1.3.1. *Équilibre de Ω^- .* Ω^- est en équilibre sous l'action :

- des efforts extérieurs à Ω appliqués sur Ω^- : $\mathcal{F}_{ext/\Omega^-}$
- des actions de Ω^+ sur Ω^- : $\mathcal{F}_{\Omega^+/\Omega^-} = \mathfrak{S}_G$

Le principe fondamental de la statique impose alors

$$(2) \quad \mathfrak{S}_G + \mathcal{F}_{ext/\Omega^-} = \{0\}$$

1.3.2. *Équilibre de Ω^+ .* Ω^+ est en équilibre sous l'action :

- des efforts extérieurs à Ω appliqués sur Ω^+ : $\mathcal{F}_{ext/\Omega^+}$
- des actions de Ω^- sur Ω^+ : $\mathcal{F}_{\Omega^-/\Omega^+} = -\mathcal{F}_{\Omega^+/\Omega^-} = -\mathfrak{S}_G$

Le principe fondamental de la statique impose alors

$$(3) \quad -\mathfrak{S}_G + \mathcal{F}_{ext/\Omega^+} = \{0\}$$

Note. Le calcul de \mathfrak{S}_G résulte toujours de l'équilibre d'une partie de la poutre coupée dans la section considérée, la totalité de Ω^+ ou de Ω^- est à prendre en considération.

On choisira d'utiliser l'équation 2 ou 3 en fonction de la facilité présumée de chaque calcul.

1.4. Exemple. Une poutre en bois est sollicitée en porte à faux par une force concentrée (Figure 3). On donne $L = 4m$, $a = 0,5m$ et $F = -20kN$.

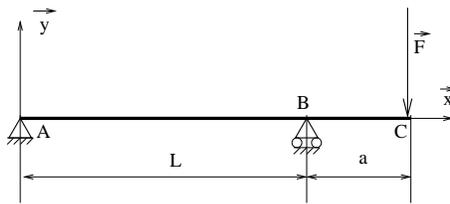


FIGURE 3. Poutre en porte à faux

On se propose de calculer le torseur des efforts de cohésion pour tout point G de la ligne moyenne de la poutre.

1.4.1. *Calcul des actions d'appuis:* Ce calcul est un préliminaire nécessaire dans presque tous les cas. On obtient simplement les réactions d'appuis pour un problème isostatique en écrivant l'équilibre de la poutre:

Équation de moment en A : $L \overrightarrow{x} \wedge Y_B \overrightarrow{y} + (L + a) \overrightarrow{x} \wedge F \overrightarrow{y} = 0$ soit : $Y_B = -\frac{L+a}{L} F$

Projection de la résultante sur l'axe \overrightarrow{y} : $Y_A + Y_B + F = 0$ soit : $Y_A = \frac{a}{L} F$

Projection de la résultante suivant l'axe \overrightarrow{x} : $X_A = 0$

Note. Le calcul du torseur des efforts de cohésion sera différent pour un point $G \in [AB[$ ou $G \in]BC]$ il convient donc de faire son calcul dans les deux cas.

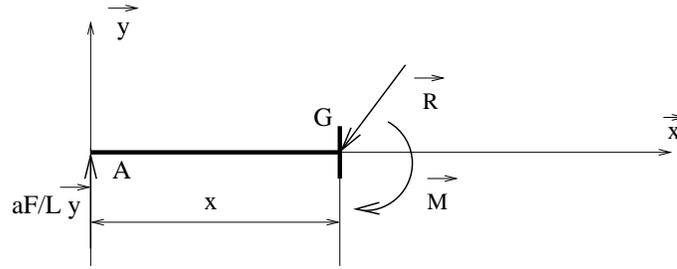


FIGURE 4. Équilibre de Ω^-

1.4.2. *Calcul de \mathfrak{S}_G pour $G \in [AB[$:* Je choisis d'écrire l'équilibre de Ω^- (Figure 4) et j'utilise la relation 2.

$$\vec{R} + \frac{a}{L}F\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\frac{a}{L}F\vec{y}$$

$$\text{et } \vec{M} - x\vec{x} \wedge \frac{a}{L}F\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M} = \frac{a}{L}Fx\vec{z}$$

1.4.3. *Calcul de \mathfrak{S}_G pour $G \in]BC]$:* Je choisis d'écrire l'équilibre de Ω^+ (Figure 5) et j'utilise la relation 3.

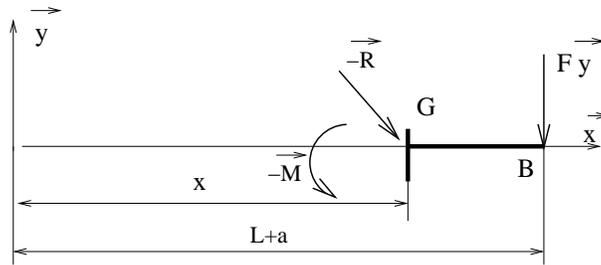


FIGURE 5. Équilibre de Ω^+

$$-\vec{R} + F\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = F\vec{y}$$

$$\text{et } -\vec{M} + (L+a-x)\vec{x} \wedge F\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M} = F(L+a-x)\vec{z}$$

1.5. **Base locale de projection:** Soit une poutre Ω de ligne moyenne Γ orientée par une abscisse s . On définit par \vec{X} le vecteur unitaire tangent à Γ au point G . \vec{Y} et \vec{Z} sont choisis tels que $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ soit une base orthonormée directe.

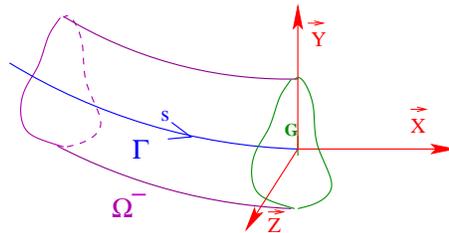


FIGURE 6. Base locale de projection

- Dans le cas d'une poutre plane, \vec{X} et \vec{Y} sont choisis dans le plan de la poutre et $\vec{Y} = \vec{z} \wedge \vec{X}$ de cette manière $\vec{z} = \vec{Z}$.
- Dans le cas d'une poutre droite, la base locale de projection est identique pour toute la poutre.

- Dans le cas d'une poutre gauche, les définitions de \vec{Y} et \vec{Z} correspondent à celles du repère de Fresnet : \vec{Y} est le vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux de $\frac{d\vec{X}}{ds}$ et bien sûr, $\vec{Z} = \vec{X} \wedge \vec{Y}$.

1.6. Projections des éléments de réduction de \mathfrak{S}_G .

1.6.1. *Définition.* Soient $\vec{R}(s)$ la résultante de \mathfrak{S}_G et $\vec{M}(s)$ son moment au point G , on définit les sollicitations au point G par :

$$\begin{aligned} N(s) &= \vec{R}(s) \bullet \vec{X} \text{ l'effort normal} \\ V_y(s) &= \vec{R}(s) \bullet \vec{Y} \text{ l'effort tranchant par rapport à l'axe } \vec{Y} \\ V_z(s) &= \vec{R}(s) \bullet \vec{Z} \text{ l'effort tranchant par rapport à l'axe } \vec{Z} \\ M_{tx}(s) &= \vec{M}(s) \bullet \vec{X} \text{ le moment de torsion} \\ M_{fy}(s) &= \vec{M}(s) \bullet \vec{Y} \text{ le moment de flexion par rapport à l'axe } \vec{Y} \\ M_{fz}(s) &= \vec{M}(s) \bullet \vec{Z} \text{ le moment de flexion par rapport à l'axe } \vec{Z} \end{aligned}$$

Note. Compte tenu des conventions prises en 1.2 un effort normal positif caractérise un état de traction, vice versa, un effort normal négatif correspond à un état de compression.

Dans le cas d'une poutre plane, $V_z(s)$, $M_{tx}(s)$ et $M_{fy}(s)$ sont identiquement nuls.

1.6.2. *Exemple :* Reprenons l'exercice donné en 1.4.

La poutre est droite et la base locale est confondue avec les axes du repère : $\vec{X} = \vec{x}$, $\vec{Y} = \vec{y}$ et $\vec{Z} = \vec{z}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } G \in [AB]: \quad \vec{R} = -\frac{a}{L}F\vec{Y} &\Rightarrow \begin{cases} N = \vec{R} \bullet \vec{X} = 0 \\ V_y = \vec{R} \bullet \vec{Y} = -\frac{a}{L}F \\ \vec{M} = x\frac{a}{L}F\vec{Z} \Rightarrow M_{fz} = \vec{M} \bullet \vec{Z} = \frac{a}{L}Fx \end{cases} \\ \text{pour } G \in]BC]: \quad \vec{R} = F\vec{Y} &\Rightarrow \begin{cases} N = \vec{R} \bullet \vec{X} = 0 \\ V_y = \vec{R} \bullet \vec{Y} = F \\ \vec{M} = (l+a-x)F\vec{Z} \Rightarrow M_{fz} = \vec{M} \bullet \vec{Z} = (l+a-x)F \end{cases} \end{aligned}$$

1.7. Diagrammes des sollicitations:

1.7.1. *Définition :* Pour chaque sollicitation définie en 1.6, on peut tracer l'évolution de la valeur correspondante en fonction de l'abscisse. L'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est généralement hachuré avec des hachures perpendiculaires à l'axe. Les valeurs caractéristiques sont reportées sur la courbe et le signe de la sollicitation est reporté pour l'effort normal et le moment fléchissant. Dans le cas de poutres non droites, les valeurs des sollicitation sont habituellement reportées sur la ligne moyenne de la structure, perpendiculairement à celle-ci.

1.7.2. *Exemple :* En se basant sur les résultats donnés en 1.6.2, on peut tracer les diagrammes en prenant soin de respecter une échelle (Figure 7). Les diagrammes sont généralement présentés au dessus les uns des autres de façon à faciliter leur lecture et à identifier les sections droites de poutres les plus sollicitées.

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉQUILIBRE

2.1. **Introduction :** Les équations différentielles d'équilibre permettent de calculer la variation des sollicitations le long de l'abscisse d'une poutre. Ces équations peuvent être utilisées en complément de la méthode classique décrite en 1.3 consistant à écrire l'équilibre d'un tronçon de poutre.

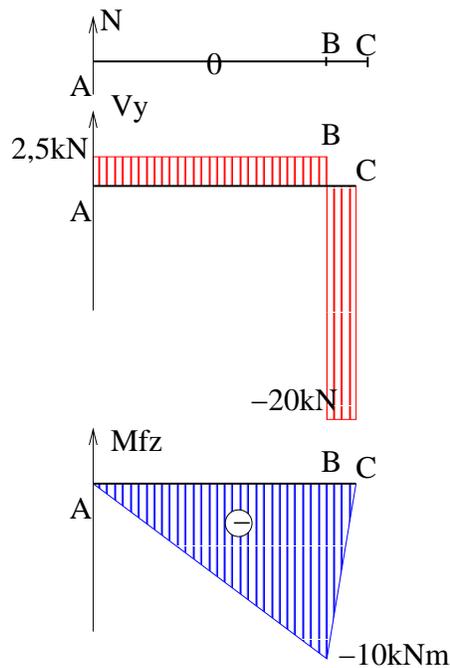


FIGURE 7. Diagrammes des sollicitations

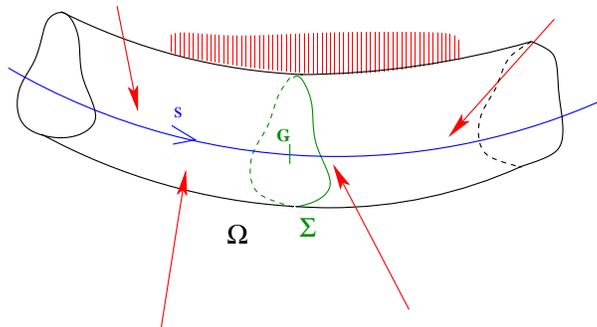


FIGURE 8. Poutre Ω

2.2. **Équations générales** : Soit une poutre Ω de ligne moyenne Γ orientée par une abscisse s soumise à des efforts ponctuels et répartis (Fig. 8).

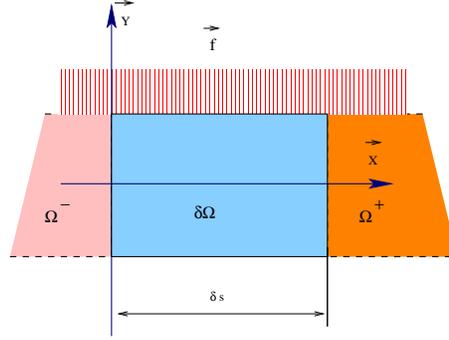
Isolons un tronçon infinitésimal de poutre $\delta\Omega$ de longueur δs , compris entre les sections Σ_0 d'abscisse s_0 et Σ_1 d'abscisse $s_0 + \delta s$ (Figure 9).

Quelque soit l'abscisse s_0 non confondue avec une abscisse d'application de charge concentrée, on pourra toujours trouver δs suffisamment petit pour qu'aucune charge concentrée ne s'applique sur $\delta\Omega$.

Comme on fera tendre δs vers 0, on pourra considérer le segment de poutre comme étant droit et la charge répartie comme étant uniforme sur $\delta\Omega$ (cette charge n'est pas forcément dirigée perpendiculairement à la ligne moyenne).

Le tronçon de poutre $\delta\Omega$ est en équilibre sous l'action de :

- L'action de Ω^- sur Ω^+ en G_0 : $-\mathfrak{S}_{G_0} : \left\{ \begin{array}{l} -\vec{R}(s_0) \\ -\vec{M}(s_0) \end{array} \right\}_{G_0}$


 FIGURE 9. Tronçon de poutre $\delta\Omega$

- L'action de Ω^+ sur Ω^- en G_1 : $\mathfrak{S}_{G_1} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(s_0 + \delta s) \\ \vec{M}(s_0 + \delta s) \end{array} \right\}_{G_1}$
- L'action de la charge répartie : $\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}\delta s \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$ où M est le milieu de $[G_0G_1]$.

L'équation de la résultante donne:

$$-\vec{R}(s_0) + \vec{R}(s_0 + \delta s) + \vec{f}\delta s = \vec{0}$$

soit en divisant par δs :

$$\frac{\vec{R}(s_0 + \delta s) - \vec{R}(s_0)}{\delta s} + \vec{f} = \vec{0}$$

en prenant la limite lorsque δs tend vers 0, on obtient:

$$(4) \quad \frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{f} = \vec{0}$$

L'équation du moment en G_0 donne:

$$-\vec{M}(s_0) + \vec{M}(s_0 + \delta s) + \delta s \vec{X} \wedge \vec{R}(s_0 + \delta s) + \frac{\delta s}{2} \vec{X} \wedge \vec{f}\delta s = \vec{0}$$

\vec{X} désigne le vecteur tangent à la ligne moyenne Γ . En divisant par δs , on obtient :

$$\frac{\vec{M}(s_0 + \delta s) - \vec{M}(s_0)}{\delta s} + \vec{X} \wedge \vec{R}(s_0 + \delta s) + \frac{\delta s}{2} \vec{X} \wedge \vec{f} = \vec{0}$$

à la limite lorsque δs tend vers 0, on obtient:

$$(5) \quad \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{X} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Les équations 4 et 5 sont les équations différentielles d'équilibre. Ces équations sont valables sur tout tronçon de poutre ne recevant pas de charge concentrée.

2.3. Traitement des charges concentrées: Considérons une section de poutre Σ_i d'abscisse s_i sur laquelle s'applique une charge extérieure concentrée \vec{F}_i .

Soit $\lim_{s \rightarrow s_i^-} \mathfrak{S}_G(s) = \mathfrak{S}_{G_i^-} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(s_i^-) \\ \vec{M}(s_i^-) \end{array} \right\}_{G_i}$ le torseur des efforts de cohésion lorsque s tend

vers s_i par valeur inférieure et $\lim_{s \rightarrow s_i^+} \mathfrak{S}_G(s) = \mathfrak{S}_{G_i^+} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(s_i^+) \\ \vec{M}(s_i^+) \end{array} \right\}_{G_i}$ le torseur des efforts de

cohésion lorsque s tend vers s_i par valeur supérieure.

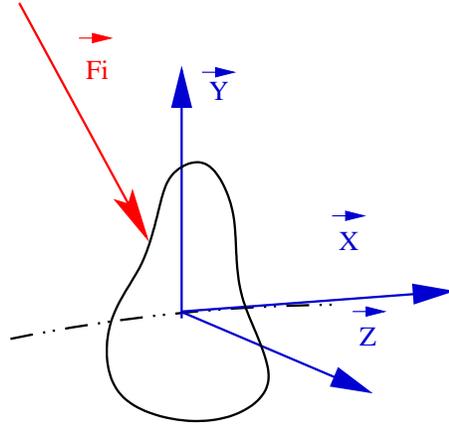


FIGURE 10. Application d'une charge concentrée

$\mathcal{F}_i : \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_i \\ 0 \end{array} \right\}_{G_i}$ est le torseur représentant l'action concentrée.

La section Σ_i est en équilibre sous l'action de $-\mathfrak{S}_{G_i^-}$, de $\mathfrak{S}_{G_i^+}$ et de \mathcal{F}_i

L'équation de la résultante traduisant l'équilibre de la section Σ_i donne :

$\vec{R}(s_i^+) - \vec{R}(s_i^-) + \vec{F}_i = \vec{0}$ si on note $\vec{R} \parallel_{s_i}$ la discontinuité de la résultante au point d'abscisse s_i , on obtient :

$$(6) \quad \vec{R} \parallel_{s_i} = -\vec{F}_i$$

La discontinuité de la résultante opposée à la charge concentrée.

L'équation du moment en G_i donne simplement : $\vec{M}(s_i^+) - \vec{M}(s_i^-) = \vec{0}$ soit :

$$(7) \quad \vec{M} \parallel_{s_i} = \vec{0}$$

Le moment est continu.

2.4. Cas bidimensionnel: Dans le plan, nous avons dans la base locale $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{z})$:

$$\vec{R} = N\vec{X} + V_y\vec{Y}$$

et

$$\vec{M} = M_{fz}\vec{z}$$

La charge répartie est

$$\vec{f} = f_x\vec{X} + f_y\vec{Y}$$

La première équations différentielle d'équilibre (4) donne:

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} = -f_x \\ \frac{dV_y}{ds} = -f_y \end{cases}$$

La deuxième donne : $\frac{d(M_{fz}\vec{z})}{ds} + \vec{X} \wedge (N\vec{X} + V_y\vec{Y}) = \vec{0}$, soit :

$$\frac{dM_{fz}}{ds} = -V_y$$

2.5. Récapitulation des cas courants: Les règles permettant de tracer les diagrammes dans la plupart des cas sont résumées dans le tableau 1.

événement	Schéma	Effort normal N	Effort tranchant V_y	Moment fléchissant M_{fz}
Extrémité libre		$N(A) = 0$	$V_y(A) = 0$	$M_{fz}(A) = 0$
Extrémité chargée		$N(A) = -X_A$	$V_y(A) = -Y_A$	$M_{fz}(A) = -M_A$
Tronçon courant sans charge		$N(A) = X_A$ N constant	V_y Constant	$M_{fz}(A) = M_A$
Charge uniforme sur tronçon courant		N constant	V_y linear $V_{yB} - V_{yA} = -f \cdot l$	M_{fz} parabolique $M_B - M_A = -V_{yA} \cdot l$ $M_C - M_A = -\frac{a V_{yA}}{2}$ $M_B - M_C = -\frac{b V_{yB}}{2}$
Charge concentrée		$N_B - N_A = -X_A$	V_y constant $V_{yB} - V_{yA} = -Y_A$	M_{fz} linéaire $M_C - M_A = -a V_{yA}$ $M_B - M_C = -b V_{yB}$

TABLE 1. Évolution des sollicitations dans le cas courant