

Introduction à la méthode des éléments finis

ISA-BTP Quatrième année

C. La Borderie

Institut Supérieur Aquitain du Bâtiment et des Travaux Publics
Université de Pau et des Pays de l'Adour

Année universitaire 2023-2024

Objectifs du cours

- 1 Comprendre les principes de la méthode des éléments finis
 - Comprendre l'approximation
 - Evaluer les erreurs
 - Optimiser la discrétisation
- 2 Utiliser le méthode dans les cas
 - Mécanique élastique linéaire
 - Thermique linéaire en régime établi
- 3 ***Initiation au code EF Cast3m***

1 Introduction :

- Énoncé du problème
- Cas de la mécanique
- Cas de la thermique

2 Cas de la mécanique en 1D

- Barre soumise à un effort concentré
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution
- Barre soumise à son poids propre
 - solution exacte
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution

3 Cas de la thermique en 1D

- Barre soumise à un flux convectif
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation

- 1 Introduction :
 - Énoncé du problème
 - Cas de la mécanique
 - Cas de la thermique

- 2 Cas de la mécanique en 1D
 - Barre soumise à un effort concentré
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution
 - Barre soumise à son poids propre
 - solution exacte
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution

- 3 Cas de la thermique en 1D
 - Barre soumise à un flux convectif
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation

- La structure est caractérisée par :
 - Sa géométrie.
 - Un ou plusieurs matériaux.
- Elle reçoit des sollicitations
 - Mécaniques (forces, déplacements)
 - Thermiques (températures, flux)
 - Autres
- Nous souhaitons connaître en tout point
 - L'état de contrainte, les déplacements
 - La température, les flux
 - La plasticité, la fissuration ...

- La structure est caractérisée par :
 - Sa géométrie.
 - Un ou plusieurs matériaux.
- Elle reçoit des sollicitations
 - Mécaniques (forces, déplacements)
 - Thermiques (températures, flux)
 - Autres
- Nous souhaitons connaître en tout point
 - L'état de contrainte, les déplacements
 - La température, les flux
 - La plasticité, la fissuration ...

- La structure est caractérisée par :
 - Sa géométrie.
 - Un ou plusieurs matériaux.
- Elle reçoit des sollicitations
 - Mécaniques (forces, déplacements)
 - Thermiques (températures, flux)
 - Autres
- Nous souhaitons connaître en tout point
 - L'état de contrainte, les déplacements
 - La température, les flux
 - La plasticité, la fissuration ...

- 1 Introduction :
 - Énoncé du problème
 - **Cas de la mécanique**
 - Cas de la thermique

- 2 Cas de la mécanique en 1D
 - Barre soumise à un effort concentré
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution
 - Barre soumise à son poids propre
 - solution exacte
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution

- 3 Cas de la thermique en 1D
 - Barre soumise à un flux convectif
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation

Problème de mécanique

① Le champ de déplacement est *cinématiquement admissible*

- Respecte les conditions aux limites
- Est compatible avec l'existence de la déformation.

$$\bullet \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right)$$

② La relation de comportement

- Permet de calculer la contrainte à partir du déplacement
- $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \alpha\Delta T\delta_{ij}$ en élasticité

③ La contrainte est *statiquement admissible*

- Respecte les conditions aux limites
- Vérifie les équations d'équilibre

$$\bullet \sum \frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} + f_i = \rho\ddot{U}_i$$

- 1 Introduction :
 - Énoncé du problème
 - Cas de la mécanique
 - Cas de la thermique

- 2 Cas de la mécanique en 1D
 - Barre soumise à un effort concentré
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution
 - Barre soumise à son poids propre
 - solution exacte
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution

- 3 Cas de la thermique en 1D
 - Barre soumise à un flux convectif
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation

Problème de thermique

- ① Le champ de températures (\equiv cinématiquement admissible)
 - Respecte les conditions aux limites (températures imposés)
 - Est dérivable par rapport aux variables d'espace.

- ② La relation de comportement
 - Permet de calculer le flux de chaleur

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \text{ ou } q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

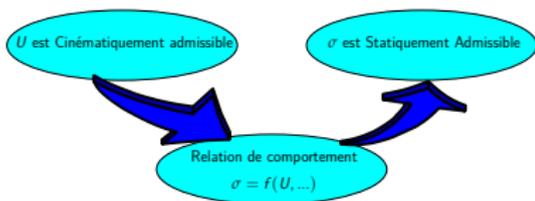
- ③ Le flux de chaleur (\equiv statiquement admissible)
 - Respecte les conditions aux limites (convection, radiation ...)
 - Vérifie l'équation d'équilibre

$$\text{div}(\vec{q}) = 0 \text{ ou } \sum \frac{dq_i}{dx_i} = 0$$

Formulation faible

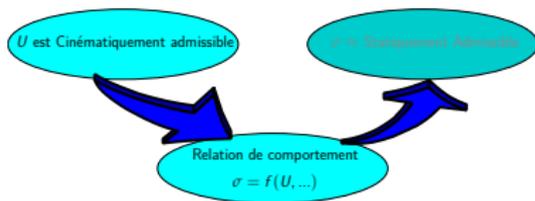
- Solution exacte

- U (ou T) \in espace infini de solutions



- Solution approchée

- U (ou T) \in espace fini de solutions

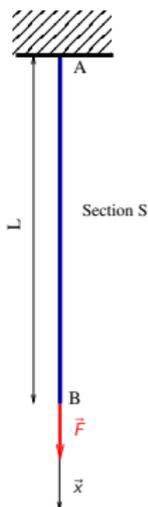


- 1 Introduction :
 - Énoncé du problème
 - Cas de la mécanique
 - Cas de la thermique

- 2 Cas de la mécanique en 1D
 - Barre soumise à un effort concentré
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution
 - Barre soumise à son poids propre
 - solution exacte
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution

- 3 Cas de la thermique en 1D
 - Barre soumise à un flux convectif
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation

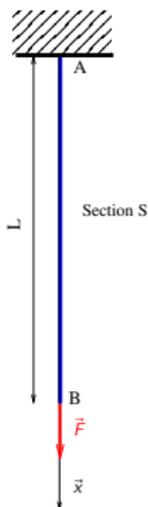
Soit une barre $[AB]$ encastrée en A et soumise à un effort F en B .



Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ et $\sigma(L) = \frac{F}{S}$
 - $E \frac{dU}{dx} = \frac{F}{S}$
- $U(x) = \frac{F}{ES}x + 0$
- $\sigma(x) = \frac{F}{S}$

Soit une barre $[AB]$ encastrée en A et soumise à un effort F en B .



Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ et $\sigma(L) = \frac{F}{S}$
 - $E \frac{dU}{dx} = \frac{F}{S}$
- $U(x) = \frac{F}{ES}x + 0$
- $\sigma(x) = \frac{F}{S}$

Soit une barre $[AB]$ encastrée en A et soumise à un effort F en B .



Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ et $\sigma(L) = \frac{F}{S}$
 - $E \frac{dU}{dx} = \frac{F}{S}$
- $U(x) = \frac{F}{ES}x + 0$
- $\sigma(x) = \frac{F}{S}$

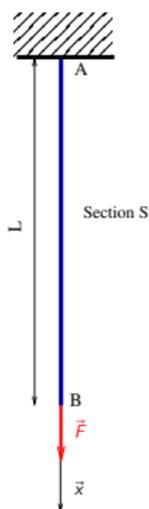
Soit une barre $[AB]$ encastrée en A et soumise à un effort F en B .



Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ et $\sigma(L) = \frac{F}{S}$
 - $E \frac{dU}{dx} = \frac{F}{S}$
- $U(x) = \frac{F}{ES}x + 0$
- $\sigma(x) = \frac{F}{S}$

Soit une barre $[AB]$ encastrée en A et soumise à un effort F en B .

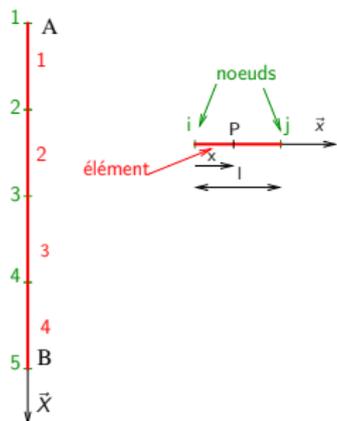


Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} = 0$ et $\sigma(L) = \frac{F}{S}$
 - $E \frac{dU}{dx} = \frac{F}{S}$
- $U(x) = \frac{F}{ES}x + 0$
- $\sigma(x) = \frac{F}{S}$

Barre soumise à un effort concentré

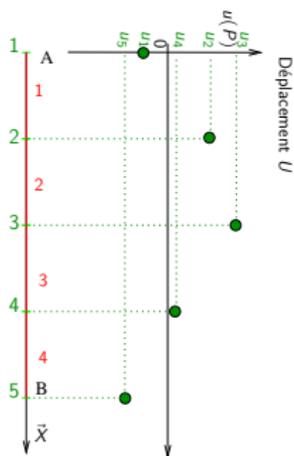
Espace dans lequel on cherche des solutions approchées



- La structure est découpée en morceaux appelés éléments
- Les nœuds apparaissent à la liaison des éléments
- Les inconnues du problème sont les déplacements des nœuds
- Le déplacement d'un point P est calculé par interpolation linéaire
- Pour $P \in [2]$
 - $U(x) = \psi_2(x)U_2 + \psi_3(x)U_3$
 - $\psi_2(x) = \frac{l-x}{l}$ et $\psi_3(x) = \frac{x}{l}$

Barre soumise à un effort concentré

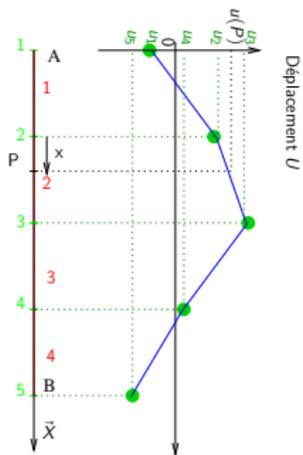
Espace dans lequel on cherche des solutions approchées



- La structure est découpée en morceaux appelés éléments
- Les nœuds apparaissent à la liaison des éléments
- Les inconnues du problème sont les déplacements des nœuds
- Le déplacement d'un point P est calculé par interpolation linéaire
- Pour $P \in [23]$
 - $U(x) = \psi_2(x)U_2 + \psi_3(x)U_3$
 - $\psi_2(x) = \frac{l-x}{l}$ et $\psi_3(x) = \frac{x-2l}{l}$

Barre soumise à un effort concentré

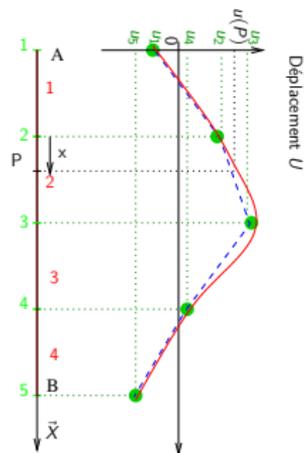
Espace dans lequel on cherche des solutions approchées



- La structure est découpée en morceaux appelés éléments
- Les nœuds apparaissent à la liaison des éléments
- Les inconnues du problème sont les déplacements des nœuds
- Le déplacement d'un point P est calculé par interpolation linéaire
- Pour $P \in [23]$
 - $U(x) = \psi_2(x)U_2 + \psi_3(x)U_3$
 - $\psi_2(x) = \frac{L-x}{l}$ et $\psi_3(x) = \frac{x-l}{l}$

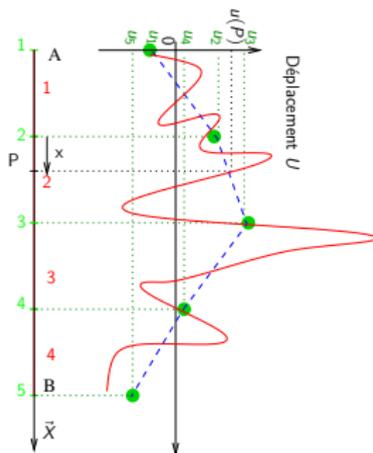
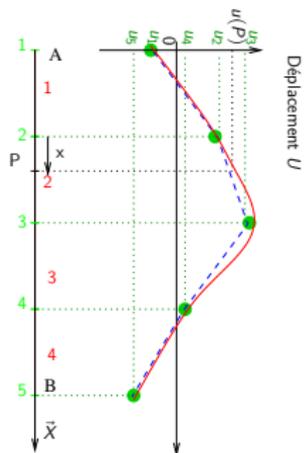
Barre soumise à un effort concentré

approximation



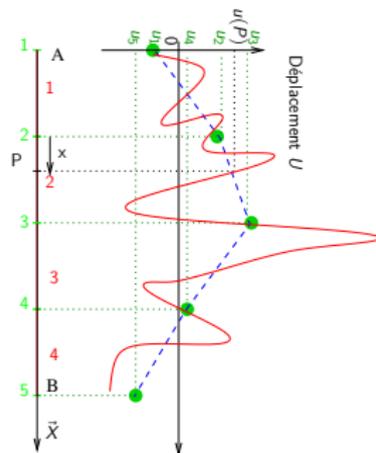
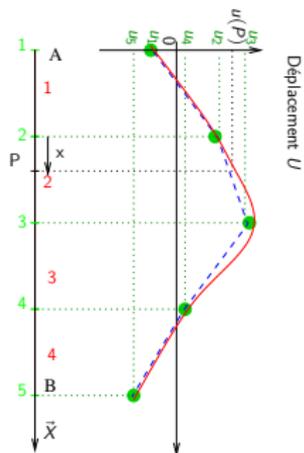
Barre soumise à un effort concentré

approximation



Barre soumise à un effort concentré

approximation



- $U_n(x) = \psi_2(x)U_2 + \psi_3(x)U_3$

- $\psi_2(x) = \frac{l-x}{l}$ et $\psi_3(x) = \frac{x}{l}$

- Soient

- $\mathbf{U}_e : \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux

- $\mathbf{N}(\xi) : \begin{bmatrix} \psi_i(\xi) & \psi_j(\xi) \end{bmatrix}$ la matrice des fonctions de forme

$$U_n(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{U}_e$$

- Problème : les fonctions de forme ψ dépendent de la longueur de l'élément

- On peut poser

$$\xi = \frac{2x-l}{l}, \quad \xi \in [-1, 1] \forall l$$

- $\psi_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$

$$\psi_j(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

- $U_n(x) = \psi_2(x)U_2 + \psi_3(x)U_3$

- $\psi_2(x) = \frac{l-x}{l}$ et $\psi_3(x) = \frac{x}{l}$

- Soient

- $\mathbf{U}_e : \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux

- $\mathbf{N}(\xi) : \begin{bmatrix} \psi_i(\xi) & \psi_j(\xi) \end{bmatrix}$ la matrice des fonctions de forme

$$U_n(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{U}_e$$

- Problème : les fonctions de forme ψ dépendent de la longueur de l'élément

- On peut poser

$$\xi = \frac{2x-l}{l}, \quad \xi \in [-1, 1] \forall l$$

- $\psi_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$

$$\psi_j(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

- $U_n(x) = \psi_2(x)U_2 + \psi_3(x)U_3$

- $\psi_2(x) = \frac{l-x}{l}$ et $\psi_3(x) = \frac{x}{l}$

- Soient

- $\mathbf{U}_e : \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux

- $\mathbf{N}(\xi) : \begin{bmatrix} \psi_i(\xi) & \psi_j(\xi) \end{bmatrix}$ la matrice des fonctions de forme

$$U_n(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{U}_e$$

- Problème : les fonctions de forme ψ dépendent de la longueur de l'élément

- On peut poser

$$\xi = \frac{2x-l}{l}, \quad \xi \in [-1, 1] \forall l$$

- $\psi_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$

$$\psi_j(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

Calcul de la déformation

- $\varepsilon(\xi) = \frac{dU_n(\xi)}{dx} = \frac{dU_n(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l} \frac{dU_n(\xi)}{d\xi}$

- $\varepsilon(\xi) = \frac{2}{l} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}$

- $\varepsilon(\xi) = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}$

- Soit $\mathbf{B}(\xi) = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{B}(\xi) = \frac{d\mathbf{N}(\xi)}{dx}, \quad \varepsilon(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{U}_e$$



Équilibre d'un élément

- $f_{ij} + f_{ji} = 0$

- $\begin{cases} f_{ij} = \frac{ES}{l} (u_i - u_j) \\ f_{ji} = \frac{ES}{l} (u_j - u_i) \end{cases}$

- soient

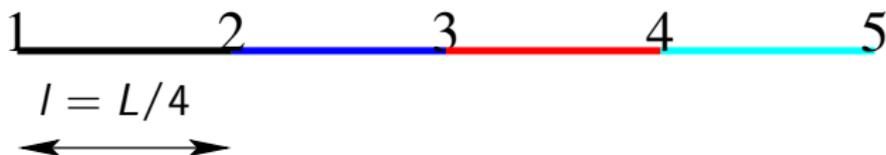
- $\mathbf{K}_e = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de rigidité élémentaire

- $\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} f_{ij} \\ f_{ji} \end{bmatrix}$ le vecteur des efforts élémentaires

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e$$

Remarque : Si N est l'effort normal, on a $N(I) = -f_{ij}$ et $N(J) = f_{ji}$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{34} \\ f_{43} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{34} \\ f_{43} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ f_{23} \\ f_{32} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{34} \\ f_{43} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ f_{34} \\ f_{43} \\ \cdot \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ u_3 \\ u_4 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{34} \\ f_{43} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

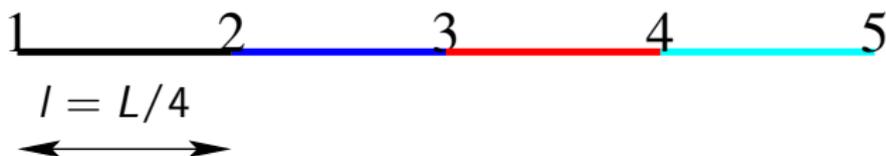
équilibre du système



$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \\ f_{34} \\ f_{43} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{32} \\ f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} + f_{23} \\ f_{32} + f_{33} \\ f_{34} + f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{32} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{34} \\ f_{43} \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_{45} \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

Calcul des déplacements

$$\begin{cases} f_{12} = -\frac{4ES}{L} u_2 \Rightarrow u_2 = -\frac{L}{4ES} f_{12} \\ 0 = \frac{4ES}{L} (2u_2 - u_3) \Rightarrow u_3 = 2u_2 \\ 0 = \frac{4ES}{L} (-u_2 + 2u_3 - u_4) \Rightarrow u_4 = -u_2 + 2u_3 = 3u_2 \\ 0 = \frac{4ES}{L} (-u_3 + 2u_4 - u_5) \Rightarrow u_5 = -u_3 + 2u_4 = 4u_2 \\ F = \frac{4ES}{L} (-u_4 + u_5) \Rightarrow u_2 = \frac{FL}{4ES} \end{cases}$$

Solution du problème EF

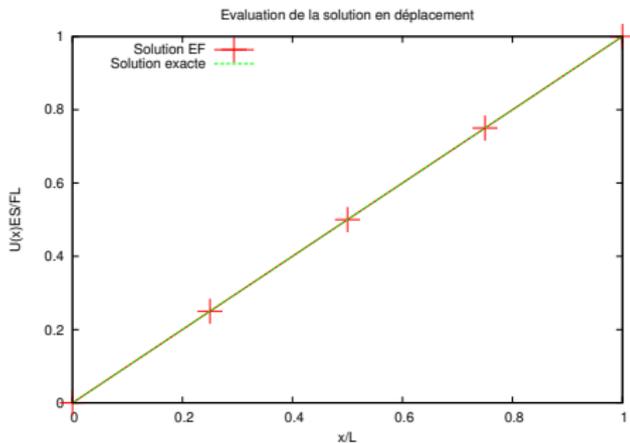
$$u_1 = 0, u_2 = \frac{FL}{4ES}, u_3 = \frac{FL}{2ES}, u_4 = \frac{3FL}{4ES}, u_5 = \frac{FL}{ES}$$

Calcul des déformations et des contraintes

- $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{F}{ES} = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$
- $\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{F}{S} = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$

Barre soumise à un effort concentré

Évaluation de la solution



Remarque

- Dans ce cas particulier la solution exacte appartient à la famille de solutions aux éléments finis.
- La solution éléments finis est exacte (ce qui est exceptionnel)
- Le champ de contrainte obtenu $\sigma_n(x) = \frac{F}{S}$ est SA

- 1 Introduction :
 - Énoncé du problème
 - Cas de la mécanique
 - Cas de la thermique

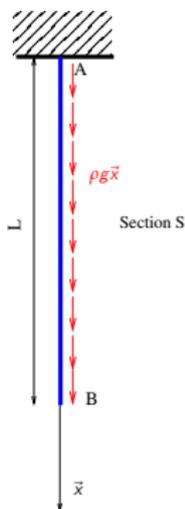
- 2 Cas de la mécanique en 1D
 - Barre soumise à un effort concentré
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution
 - Barre soumise à son poids propre
 - solution exacte
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution

- 3 Cas de la thermique en 1D
 - Barre soumise à un flux convectif
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation

Barre soumise à son poids propre

Solution exacte

Soit une barre $[AB]$ encastée en A et soumise son poids propre
soit une charge volumique $\vec{f} = \rho g \vec{x}$.



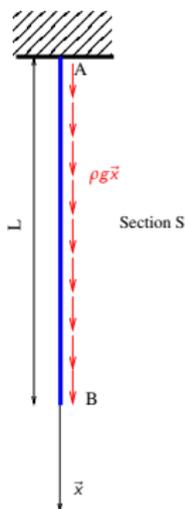
Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$ et $\sigma(L) = 0$
 - $\sigma(x) = \rho g(L - x) = E \frac{dU}{dx}$
- $U(x) = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + 0$

Barre soumise à son poids propre

Solution exacte

Soit une barre $[AB]$ encadrée en A et soumise son poids propre soit une charge volumique $\vec{f} = \rho g \vec{x}$.



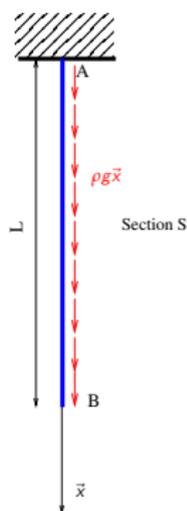
Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$ et $\sigma(L) = 0$
 - $\sigma(x) = \rho g(L - x) = E \frac{dU}{dx}$
- $U(x) = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + 0$

Barre soumise à son poids propre

Solution exacte

Soit une barre $[AB]$ encastrée en A et soumise son poids propre
soit une charge volumique $\vec{f} = \rho g \vec{x}$.



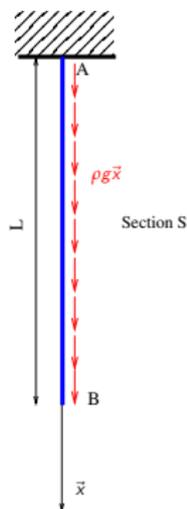
Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$ et $\sigma(L) = 0$
 - $\sigma(x) = \rho g(L - x) = E \frac{dU}{dx}$
- $U(x) = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + 0$

Barre soumise à son poids propre

Solution exacte

Soit une barre $[AB]$ encastée en A et soumise son poids propre
soit une charge volumique $\vec{f} = \rho g \vec{x}$.

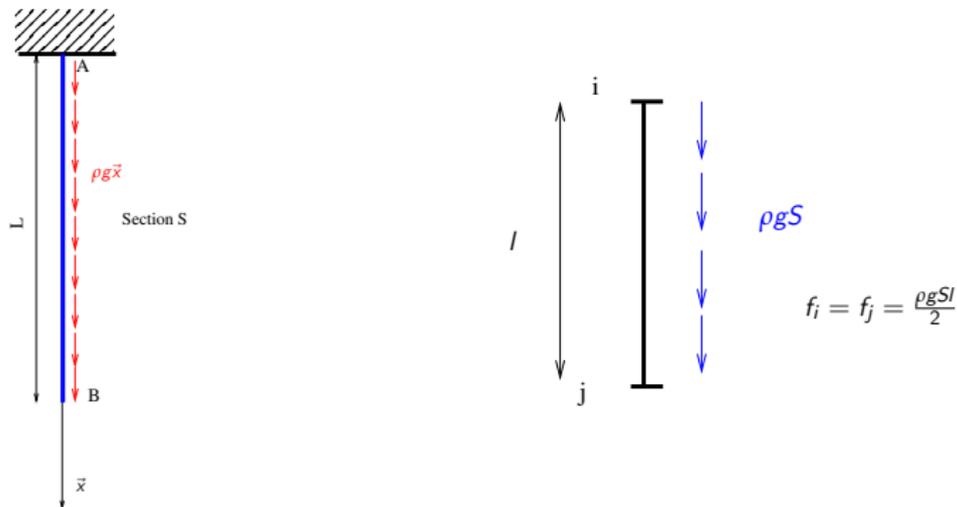


Solution exacte

- U est C.A.
 - Continu
 - $U(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $\sigma = E \frac{dU}{dx}$
- σ est S.A.
 - $\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$ et $\sigma(L) = 0$
 - $\sigma(x) = \rho g(L - x) = E \frac{dU}{dx}$
- $U(x) = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + 0$

Barre soumise à son poids propre

Discretisation des efforts extérieurs



- Le vecteur élémentaire des efforts nodaux est donc $\mathbf{F}_e^T = \rho g S \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- En assemblant le vecteur des effort nodaux on obtient : $\mathbf{F}^T = \rho g S \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Barre soumise à son poids propre

Solution du problème discrétisé

- Le champ u_n solution du problème discrétisé est solution du système d'équations :

$$\begin{bmatrix} f_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho g L S}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{4ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

Barre soumise à son poids propre

Solution du problème discrétisé

- La résolution du système peut se faire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 = -\frac{L}{4ES} \left(f_1^1 + \frac{\rho g L S}{8} \right) \\ u_3 = 2u_2 - \frac{\rho g L^2}{16E} \\ u_4 = 3u_2 - \frac{3\rho g L^2}{16E} \\ u_5 = 4u_2 - \frac{6\rho g L^2}{16E} \\ u_5 = u_4 + \frac{\rho g L^2}{32E} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{7\rho g L^2}{32E} \\ u_3 = \frac{3\rho g L^2}{8E} \\ u_4 = \frac{15\rho g L^2}{32E} \\ u_5 = \frac{\rho g L^2}{2E} \\ f_1^1 = -\rho g L S \end{array} \right.$$

Barre soumise à son poids propre

Solution du problème discrétisé

- La résolution du système peut se faire de la manière suivante :

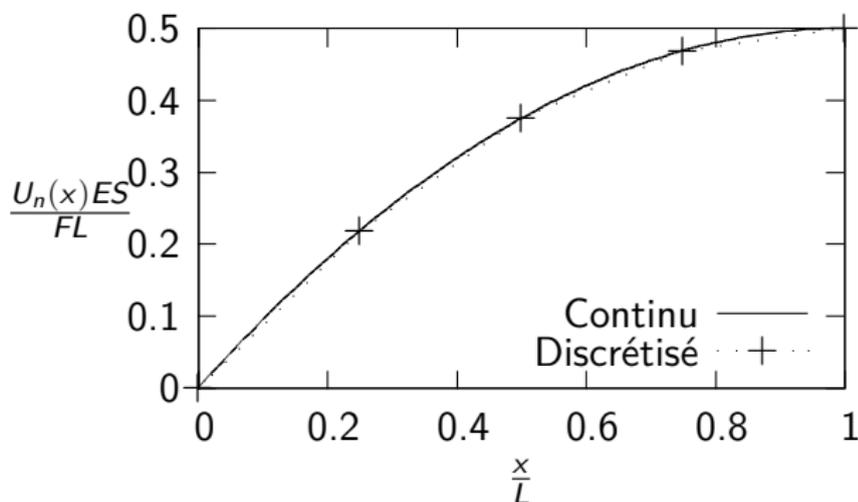
$$\begin{cases} u_2 = -\frac{L}{4ES} \left(f_1^1 + \frac{\rho g L S}{8} \right) \\ u_3 = 2u_2 - \frac{\rho g L^2}{16E} \\ u_4 = 3u_2 - \frac{3\rho g L^2}{16E} \\ u_5 = 4u_2 - \frac{6\rho g L^2}{16E} \\ u_5 = u_4 + \frac{\rho g L^2}{32E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{7\rho g L^2}{32E} \\ u_3 = \frac{3\rho g L^2}{8E} \\ u_4 = \frac{15\rho g L^2}{32E} \\ u_5 = \frac{\rho g L^2}{2E} \\ f_1^1 = -\rho g L S \end{cases}$$

- Les déformations sont obtenues à partir de la matrice **B** et du champ de déplacement u_n .

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{l} (u_2 - u_1) = \frac{28\rho g L}{32E}, \varepsilon_2 = \frac{20\rho g L}{32E}, \varepsilon_3 = \frac{12\rho g L}{32E}, \varepsilon_4 = \frac{4\rho g L}{32E}$$

Barre soumise à son poids propre

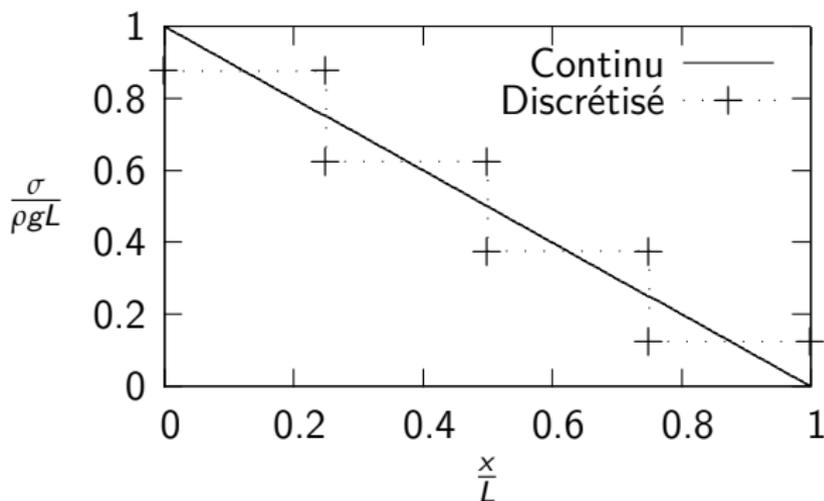
Évaluation de la solution



- La solution en déplacement approche la solution exacte
- La solution en contrainte est discontinue
- La solution EF converge vers la solution analytique lorsqu'on augmente le nombre d'éléments

Barre soumise à son poids propre

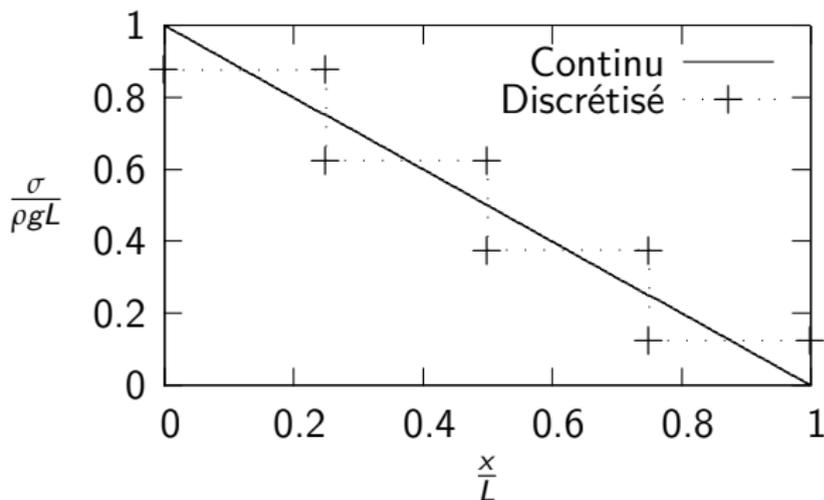
Évaluation de la solution



- La solution en déplacement approche la solution exacte
- La solution en contrainte est discontinue
- La solution EF converge vers la solution analytique lorsqu'on augmente le nombre d'éléments

Barre soumise à son poids propre

Évaluation de la solution



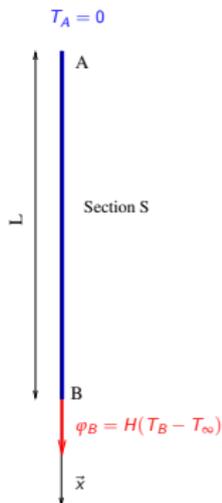
- La solution en déplacement approche la solution exacte
- La solution en contrainte est discontinue
- La solution EF converge vers la solution analytique lorsqu'on augmente le nombre d'éléments

- 1 Introduction :
 - Énoncé du problème
 - Cas de la mécanique
 - Cas de la thermique

- 2 Cas de la mécanique en 1D
 - Barre soumise à un effort concentré
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution
 - Barre soumise à son poids propre
 - solution exacte
 - Discrétisation
 - Évaluation de la solution

- 3 Cas de la thermique en 1D
 - Barre soumise à un flux convectif
 - Solution exacte (du modèle)
 - Discrétisation

Barre soumise à un flux convectif

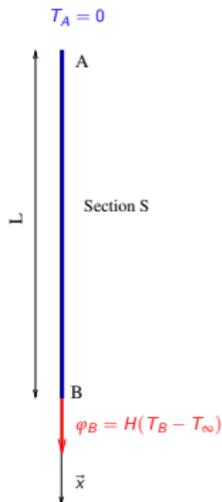


Soit une barre $[AB]$ de longueur L et de section S soumise à une température $T_A = 0$ à A un flux convectif $q_B = H(T_B - T_\infty)$ en B .

Solution exacte

- T est C.A.
 - Continu
 - $T(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S$
- Q est S.A.
 - $\frac{dQ}{dx} = 0$ et $Q(L) = \varphi_B$
 - $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{cste}$, or
 $-\lambda S \frac{dT}{dx}(L) = \varphi_b$
 - $\frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_b}{\lambda S}$
 - $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x + \text{Cste}$ et
 $T(0) = T_A = 0$
- $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x$
- $q(x) = \varphi_b = \frac{\lambda S H T_\infty}{\lambda S + H L}$

Barre soumise à un flux convectif

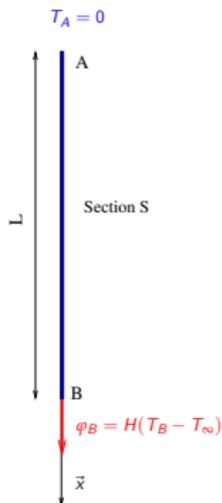


Soit une barre $[AB]$ de longueur L et de section S soumise à une température $T_A = 0$ A un flux convectif $q_B = H(T_B - T_\infty)$ en B.

Solution exacte

- T est C.A.
 - Continu
 - $T(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S$
- Q est S.A.
 - $\frac{dQ}{dx} = 0$ et $Q(L) = \varphi_B$
 - $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{cste}$, or
 $-\lambda S \frac{dT}{dx}(L) = \varphi_b$
 - $\frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_b}{\lambda S}$
 - $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x + \text{Cste}$ et
 $T(0) = T_A = 0$
- $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x$
- $q(x) = \varphi_b = \frac{\lambda S H T_\infty}{\lambda S + H L}$

Barre soumise à un flux convectif

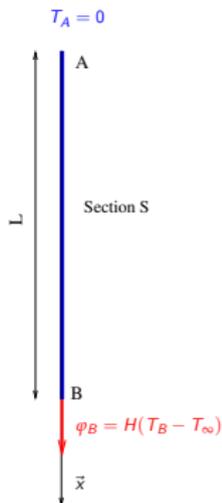


Soit une barre $[AB]$ de longueur L et de section S soumise à une température $T_A = 0$ A un flux convectif $\varphi_B = H(T_B - T_\infty)$ en B.

Solution exacte

- T est C.A.
 - Continu
 - $T(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S$
- Q est S.A.
 - $\frac{dQ}{dx} = 0$ et $Q(L) = \varphi_B$
 - $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{cste}$, or
 $-\lambda S \frac{dT}{dx}(L) = \varphi_b$
 - $\frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_b}{\lambda S}$
 - $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x + \text{Cste}$ et
 $T(0) = T_A = 0$
- $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x$
- $q(x) = \varphi_b = \frac{\lambda S H T_\infty}{\lambda S + H L}$

Barre soumise à un flux convectif

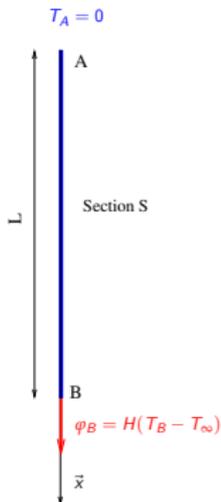


Soit une barre $[AB]$ de longueur L et de section S soumise à une température $T_A = 0$ à A un flux convectif $\varphi_B = H(T_B - T_\infty)$ en B .

Solution exacte

- T est C.A.
 - Continu
 - $T(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S$
- Q est S.A.
 - $\frac{dQ}{dx} = 0$ et $Q(L) = \varphi_B$
 - $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{cste}$, or
 $-\lambda S \frac{dT}{dx}(L) = \varphi_b$
 - $\frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_b}{\lambda S}$
 - $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x + \text{Cste}$ et
 $T(0) = T_A = 0$
- $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x$
- $q(x) = \varphi_b = \frac{\lambda S H T_\infty}{\lambda S + H L}$

Barre soumise à un flux convectif

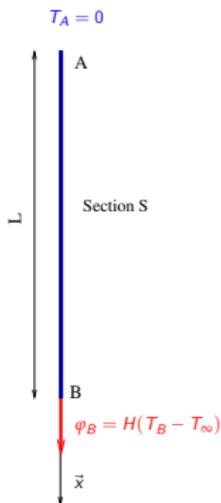


Soit une barre $[AB]$ de longueur L et de section S soumise à une température $T_A = 0$ à A un flux convectif $q_B = H(T_B - T_\infty)$ en B .

Solution exacte

- T est C.A.
 - Continu
 - $T(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S$
- Q est S.A.
 - $\frac{dQ}{dx} = 0$ et $Q(L) = \varphi_B$
 - $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{cste}$, or
 $-\lambda S \frac{dT}{dx}(L) = \varphi_b$
 - $\frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_b}{\lambda S}$
 - $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x + \text{Cste}$ et
 $T(0) = T_A = 0$
- $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x$
- $q(x) = \varphi_b = \frac{\lambda S H T_\infty}{\lambda S + H L}$

Barre soumise à un flux convectif



$$T_B = \frac{HLT_\infty}{\lambda S + HL}$$

Solution exacte

- T est C.A.
 - Continu
 - $T(0) = 0$
- Relation de comportement
 - $Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S$
- Q est S.A.
 - $\frac{dQ}{dx} = 0$ et $Q(L) = \varphi_B$
 - $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ donc $\frac{\partial T}{\partial x} = cste$, or
 - $-\lambda S \frac{dT}{dx}(L) = \varphi_b$
 - $\frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_b}{\lambda S}$
 - $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x + Cste$ et
 - $T(0) = T_A = 0$
- $T(x) = -\frac{\varphi_b}{\lambda S} x$
- $q(x) = \varphi_b = \frac{\lambda S H T_\infty}{\lambda S + HL}$

Discretisation

- $T_n(x) = \psi_i(\xi) T_i + \psi_j(\xi) U_j$
 - $\psi_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$ et $\psi_j(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$
 - Soient
 - $\mathbf{T}_e : \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux
 - $\mathbf{N}(\xi) : \begin{bmatrix} \psi_i(\xi) & \psi_j(\xi) \end{bmatrix}$ la matrice des fonctions de forme

Discretisation

- $T_n(x) = \psi_i(\xi) T_i + \psi_j(\xi) U_j$
 - $\psi_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$ et $\psi_j(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$
 - Soient
 - $\mathbf{T}_e : \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$ le vecteur des déplacements nodaux
 - $\mathbf{N}(\xi) : [\psi_i(\xi) \quad \psi_j(\xi)]$ la matrice des fonctions de forme

Calcul du flux

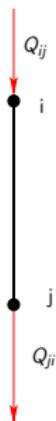
$$\bullet Q(\xi) = -\lambda S \frac{dT(\xi)}{dx} = -\lambda S \frac{dT(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{\lambda S}{l} \frac{dT(\xi)}{d\xi}$$

$$\bullet Q(\xi) = -\frac{2\lambda S}{l} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$$

$$\bullet Q(\xi) = -\frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ Soit } \mathbf{B}(\xi) = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\xi) = \frac{d\mathbf{N}(\xi)}{dx}, \quad q(\xi) = -\lambda \mathbf{S} \mathbf{B}(\xi) \mathbf{T}_e$$



Équilibre d'un élément

- $Q_{ij} + Q_{ji} = 0$
- $\begin{cases} Q_{ij} = -\frac{\lambda S}{l} (T_i - T_j) \\ Q_{ji} = -\frac{\lambda S}{l} (T_j - T_i) \end{cases}$
- soient
 - $\mathbf{K}_e = \frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de conductivité élémentaire
 - $\mathbf{Q}_e = \begin{bmatrix} Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix}$ le vecteur des efforts élémentaires

$$\mathbf{Q}_e = -\mathbf{K}_e \mathbf{T}_e$$

Barre soumise à un flux convectif

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{32} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{34} \\ Q_{43} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = -\frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{32} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{34} \\ Q_{43} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ Q_{23} \\ Q_{32} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = -\frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ T_2 \\ T_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{32} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{34} \\ Q_{43} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ Q_{34} \\ Q_{43} \\ \cdot \end{bmatrix} = -\frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ T_3 \\ T_4 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{32} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{34} \\ Q_{43} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = -\frac{\lambda S}{l} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{32} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{34} \\ Q_{43} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} + Q_{23} \\ Q_{32} + Q_{33} \\ Q_{43} + Q_{45} \\ -HT_\infty \end{bmatrix} = -\frac{\lambda S}{T} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} - H \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

équilibre du système



$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{32} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{34} \\ Q_{43} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_{45} \\ H(T_5 - T_\infty) \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_e \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -HT_\infty \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda S}{l} & 2\frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda S}{l} & 2\frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2\frac{\lambda S}{l} & -\frac{\lambda S}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda S}{l} & (\frac{\lambda S}{l} - H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix}$$

Barre soumise à un flux convectif

résolution

Calcul des températures

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{12} = \frac{4\lambda S}{L} T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{L}{4\lambda S} Q_{12} \\ 0 = -\frac{4\lambda S}{L} (2T_2 - T_3) \Rightarrow T_3 = 2T_2 \\ 0 = -\frac{4\lambda S}{L} (-T_2 + 2T_3 - T_4) \Rightarrow T_4 = -T_2 + 2T_3 = 3T_2 \\ 0 = -\frac{4\lambda S}{L} (-T_3 + 2T_4 - T_5) \Rightarrow T_5 = -T_3 + 2T_4 = 4T_2 \\ -HT_\infty = -\frac{4\lambda S}{L} (-T_4 + T_5) - HT_5 \Rightarrow T_2 = \frac{HLT_\infty}{4(HL + \lambda S)} \end{array} \right.$$

Températures

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{HLT_\infty}{4(HL + \lambda S)}, \quad T_3 = \frac{HLT_\infty}{2(HL + \lambda S)}$$

$$T_4 = \frac{3HLT_\infty}{4(HL + \lambda S)}, \quad T_5 = \frac{HLT_\infty}{(HL + \lambda S)} = T_B$$

Calcul du flux

$$Q_{12} = -\frac{4\lambda S}{L} (T_1 - T_2) = \frac{4\lambda S}{L} T_2 = \frac{\lambda S}{L} \frac{HLT_\infty}{\lambda S + HL} = \frac{\lambda SHT_\infty}{\lambda S + HL} = \varphi_B$$

Evaluation de la solution

- La solution est exacte en Températures
- Le flux calculé est exact