

Stratégies et Modèles de Calculs pour les Structures en Béton.

Christian La Borderie

Thèse présentée pour l'obtention de
L'habilitation à diriger les recherches



Laboratoire de Sciences Appliquées au Génie Civil
Institut supérieur Aquitain du Bâtiment et des Travaux Publics
Faculté des Sciences et Techniques de la Côte Basque
Université de Pau et des Pays de l'Adour
France
Décembre 2003

À

Frédérique, Paul, Antoine et Laura avec tout mon amour.

Résumé

Dans ce document, je tente d'établir le bilan de mes activités de recherche depuis la fin de mon doctorat en 1991. Durant ces années j'ai été successivement ingénieur de recherche au CEA de Saclay, maître de conférences à l'École Normale Supérieure de Cachan puis maître de conférences au sein de l'Institut Supérieur Aquitain du Bâtiment et des Travaux Publics de l'université de Pau et des Pays de l'Adour.

Dans ces différents contextes, j'ai essayé de concentrer mes efforts vers la mise à disposition de la communauté scientifique d'outils de modélisation pour la description du comportement de structures du génie civil.

Cet effort passe souvent par la réalisation d'expériences, la mise au point de modèles de comportement pour le matériau suivi d'une implémentation numérique associée aux outils adaptés puis d'une validation.

(Je considère que chaque étape possède son importance dans le processus, et que particulièrement la partie expérimentale, si elle est menée avec la rigueur et les soins nécessaires, qui n'est pas toujours évaluée à sa juste valeur.)

Un modèle de comportement ne peut à mon sens se baser que sur des faits expérimentaux constatés ; d'autre part il n'a un intérêt que s'il est implémenté numériquement dans un contexte qui permette de faire du calcul prévisionnel ; son intérêt est d'autant plus important qu'il est capable de prédire des comportements dans des situations diverses.

Il est important de situer un point de départ à l'évolution des travaux présentés. Le modèle de comportement pour le béton, qui fait encore référence aujourd'hui, est le modèle présenté par Jacky Mazars il y a près de 20 ans lors de son doctorat d'état. De nombreux modèles d'endommagement ont vu le jour depuis, mais aucun n'a eu le succès de celui de J. Mazars. Facile à implémenter, explicite et d'une capacité de prévision correcte dans de nombreux cas, ce modèle n'est néanmoins pas parfait et comporte un certain nombre de lacunes. Un deuxième modèle a servi de base à d'autres développements, c'est le modèle unilatéral développé durant ma thèse. Les bases de ces deux modèles sont rappelées en annexe.

Les trois premiers chapitres concernent l'élaboration de modèles d'endommagement pour matériaux fragiles, avec des degrés de sophistication et des objectifs divers : introduction des effets de vitesses ; prise en compte des effets hystériques et modélisation de l'anisotropie.

Le quatrième chapitre est relatif aux couplages entre l'endommagement mécanique et le transfert de fluides.

Le dernier chapitre concerne le développement d'un nouveau modèle de comportement qui tente de tirer avantage de l'ensemble modèles présentés sans en avoir les désagréments. Une nouvelle procédure expérimentale qui est associée au développement du modèle est également présentée.

Tous les modèles présentés ici sont implémentés dans CASTEM 2000 ou dans EFiCoS, la majorité des calculs sont effectués avec CASTEM2000.

Chaque chapitre sera ponctué par les références aux travaux de doctorats que j'ai encadrés ou co-encadrés.

Stratégies et Modèles de Calculs pour les Structures en Béton

La Borderie Christian

Soumis pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger les
Recherches

Le 18 Décembre 2003

Devant le jury composé de :

Jacky Mazars	Président
Alain Combescure ¹	Rapporteur
Alain Millard	Rapporteur
Mathieu Mory	Rapporteur
Patrick André	Examineur
René de Borst	Examineur
Ghassan Mounajed	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier ceux qui ont contribué à m'orienter vers les activités de la recherche du génie civil, Jacky qui m'a accueilli en DEA qui toujours montré le chemin du progrès; Gilles qui a su donner ses lettres de noblesses à la recherche dans le domaine du génie civil en France. Merci également à Jean, à Pierre, pour avoir fait du L.M.T. ce qu'il était lorsque j'en faisais partie. Merci encore aux deux Xavier et à Jean Pierre pour leur travail au centre d'essais; Merci à Stéphanie, Abdellah, Atef, Bruno, Christophe, Frédéric, Hocine, Jean-François, et Mohammed pour avoir travaillé avec moi au cours de leur doctorat; Merci à Patrick pour m'avoir accueilli au sein de l'ISA-BTP; Merci enfin à toute l'équipe de l'ISA-BTP pour l'énergie qu'ils fournissent dans ce projet si passionnant.

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	vi
I Modèles d'Endommagement pour Matériaux Fragiles	1
1 Introduction	2
2 Modèles pour calculs dynamiques :	4
2.1 Modélisation du comportement visco-endommageable.	6
2.1.1 Formulation générale	7
2.1.1.1 Application au modèle unilatéral	8
2.1.2 Régularisation du problème dynamique	10
2.1.3 Application du modèle à différentes vitesses de sollicitations :	12
2.1.3.1 Calcul statique :	12
2.1.3.2 Dynamique :	12
2.1.4 Conclusions :	16
2.2 Prise en compte des effets hystérétiques :	17
2.2.1 Introduction :	17
2.2.2 Concepts du modèle :	18
2.2.3 Modèle uniaxial :	20
2.2.4 Développements du modèle et résultats	21
2.2.5 Conclusions :	23
3 Modélisation de l'anisotropie induite.	25
3.1 Introduction :	25
3.2 Présentation de la famille de modèles :	26
3.2.1 Couplage avec la plasticité :	28
3.2.2 Cinématiques :	29
3.3 Évolution de l'endommagement :	31
3.4 Activation de l'endommagement et effet de l'endommagement en compression :	32

3.5	Calcul de l'opérateur élastique :	36
3.6	Implémentation numérique :	38
3.6.1	Étude des intégrales	38
3.6.2	Interpolation de intégrales.	38
3.6.2.1	Conclusion	39
3.6.3	Paramètres du modèle :	39
3.7	Applications :	40
3.7.1	Comportement uniaxial :	40
3.7.2	Influence de l'anisotropie matérielle sur l'anisotropie structurelle :	42
3.7.3	Calculs de structures :	42
3.8	Conclusions :	46
4	Écoulements dans les fissures.	47
4.1	Introduction :	47
4.2	Détermination des profils de fissuration.	48
4.2.1	Échelle de la mécanique du solide.	48
4.2.2	Échelle de l'écoulement :	50
4.2.2.1	Échelle pertinente :	50
4.2.2.2	Modèle géométrique bidimensionnel :	50
4.2.2.3	Étude expérimentale :	50
4.2.2.4	Étude statistique des résultats :	51
4.3	Simulation des écoulements :	53
4.4	Validation du modèle géométrique :	54
4.4.1	Stabilité statistique.	54
4.4.2	Critique de l'approche bidimensionnelle :	56
4.5	Quelques résultats :	57
4.5.1	Influence de $\bar{\alpha}$:	57
4.5.2	Influence de $\bar{\mu}$:	57
4.5.3	Application au calcul du taux de fuite pour le projet CESA :	59
4.6	Conclusion :	62
5	Nouvelle modélisation :	63
5.1	Introduction :	63
5.2	Éléments de base :	64
5.2.1	Modélisation de l'endommagement :	64
5.2.2	Création des déformations anélastiques :	65
5.2.3	Prise en compte des effets unilatéraux :	65
5.3	Expérience de traction compression :	65
6	Conclusions et perspectives :	68

II	Annexes	70
7	Modèle d'endommagement de J. Mazars :	71
7.1	La relation de comportement :	71
7.2	La déformation équivalente :	71
7.3	Calcul de l'endommagement :	74
7.4	Implémentation numérique du modèle :	75
8	Modèle d'endommagement unilatéral :	78
8.1	Introduction :	78
8.2	Effet unilatéral :	78
8.3	Déformations anélastiques :	79
8.4	Potentiel d'état :	81
8.5	Lois d'état :	82
8.6	Lois d'évolution.	82
8.7	Réponse uniaxiale du modèle :	83
8.8	Implémentation numérique :	83
8.9	Conclusion :	85
9	Code aux éléments finis EFiCoS :	86
9.1	Introduction :	86
9.2	Principe :	86
9.3	Utilisations :	87
9.4	Conclusion	87
	Bibliographie	89
III	Curriculum Vitae	96

Table des figures

2.1	Influence de la vitesse de chargement sur la contrainte ultime	6
2.2	Évolution de la surface seuil pour un matériau standard	8
2.3	Réponse uniaxiale du modèle viscoendommageable	9
2.4	Propagation d'une onde dans un barreau	10
2.5	Modèle de base	11
2.6	Modèle visco-endommageable	13
2.7	Traction sur éprouvette entaillée	14
2.8	Courbes ouverture d'entaille – effort	14
2.9	Maquette CAMUS	15
2.10	Endommagement de la maquette après un séisme d'intensité 0,5g	16
2.11	Courbes temporelles du déplacement en tête de la maquette.	17
2.12	Comportement hystérétique du béton	18
2.13	Endommagement uniaxial suivant Kachanov	19
2.14	Microfissuration dans le béton	19
2.15	Représentation phénoménologique	20
2.16	Principe de comportement uniaxial	21
2.17	Comportement uniaxial	22
2.18	Évolution de l'énergie dissipée en fonction de l'endommagement.	22
2.19	Balance énergétique	23
3.1	Mise en évidence de l'anisotropie structurelle	27
3.2	Surface seuil de plasticité	29
3.3	Représentation de la surface d'endommagement	30
3.4	Comparaison des représentations de l'endommagement anisotrope	30
3.5	Surfaces seuil d'endommagement et de plasticité	33
3.6	Activation de l'endommagement pour un chargement normal au plan de fissuration	34
3.7	expérience de compression d'après [61]	35
3.8	Identification de l'influence de l'endommagement en compression.	36
3.9	évolution de I_{0320} en fonction de x_1 et x_2	39
3.10	Interpolation de I_{0320} en fonction de x_2 et x_3 pour $x_1 = 0.5$	40
3.11	Comportement uniaxial	41
3.12	Apport de l'anisotropie matérielle sur l'anisotropie structurelle	42

3.13	Corps d'épreuve essais de fissuration mixte	43
3.14	Comparaison des faciès de rupture trajet 1	44
3.15	Comparaison des faciès de rupture trajet 2	45
3.16	Comparaison des faciès de rupture trajet 3	45
3.17	Comparaison des faciès de rupture trajet 4	46
4.1	Ouverture de fissure	49
4.2	Modèle géométrique de fissure(Photo d'après [10])	50
4.3	Processus de traitement d'image	51
4.4	Étude d'un profil de fissuration	52
4.5	Partie de maillage correspondant à 8mm de fissure	54
4.6	Exemple de trois tirages	55
4.7	Comparaison des résultats	55
4.8	Maillage tridimensionnel	56
4.9	Comparaison 2D / 3D	57
4.10	Influence de $\bar{\alpha}$ sur le coefficient de débit	58
4.11	Types d'écoulement	58
4.12	3 configurations	59
4.13	Influence de $\bar{\mu}$ sur le coefficient de débit.	60
4.14	Maquette MAEVA	61
4.15	Fissure traversante (ouvertures amplifiées)	61
5.1	Schéma de l'expérience PIEL	67
5.2	Prototype de l'essai PIEL	67
7.1	Représentation du critère de Mazars dans l'espace des contraintes principales	72
7.2	Trace du critère dans les plans de contraintes planes	73
7.3	Représentation des coefficients α_t et α_c dans le plan des contraintes planes.	76
7.4	Surface d'élasticité du modèle Mazars	77
8.1	Représentation de potentiels élastiques	80
8.2	Réponse uniaxiale du modèle unilatéral	84
9.1	Élément de poutre à couches superposées	87

Liste des tableaux

2.1	Variables du modèle hystérétique	20
3.1	Évolution des raideurs pour les modèles isotrope et anisotrope .	43
8.1	Variables du modèle unilatéral	81

Première partie

**Modèles d'Endommagement
pour Matériaux Fragiles**

Chapitre 1

Introduction

Bien que pour de multiples raisons, les industries du génie civil ne soient encore que très peu friandes de modélisations permettant des calculs de structures mettant en oeuvre des moyens scientifiques avancés, certains domaines précis demandent une expertise qui ne peut exister sans s'appuyer sur les développements les plus récents tant en calculs de structures qu'en modélisation du comportement des matériaux.

Il en est par exemple du domaine du nucléaire qui au travers d'EDF, du CEA, de l'ANDRA a fortement participé à l'émancipation de laboratoires et d'équipes de recherches dans le domaine du génie civil. Les organismes de certification comme le CSTB ou le CEBTP s'intéressent de plus en plus à la modélisation dans un objectif de compléter judicieusement les études expérimentales qui sont de plus en plus coûteuses.

La particularité des structures du génie civil en béton armé est que le béton est largement utilisé dans son domaine non linéaire. Ce matériau étant fragile, les non linéarités s'accompagnent de micro-fissures et parfois de macro-fissures. Pour reproduire correctement le comportement de ces structures, il faut porter une attention particulière au comportement mécanique du matériau.

Ma participation au progrès effectués dans les calculs de structures du génie civil s'est essentiellement illustrée par des développements de modèles de comportement pour le béton.

Après certains modèles de plasticité et de fissuration distribuée, le modèle de Jacky Mazars (voir annexe 7) a été le premier modèle d'endommagement à être utilisé pour prédire le comportement de structures du génie civil. Rapidement, les objectifs se sont élargis et ce modèle a montré des insuffisances, particulièrement dans le cas de chargements cycliques. Un nouveau modèle, unilatéral, adapté aux chargements cycliques a vu le jour (voir annexe 8), au fur et à mesure de l'élargissement des objectifs et de la volonté d'obtenir des résultats de plus en plus proches de la réalité, et ceci pour des cas de chargement de plus en plus complexes, de nouveaux modèles ont vu le jour. Chaque modèle a apporté à l'édifice des connaissances une pierre supplémentaire et a

eu ses applications plus ou moins nombreuses, certains sont restés et d'autres seront rapidement oubliés.

Chapitre 2

Modèles pour calculs dynamiques :

Après avoir obtenu des résultats convaincants dans la prédiction du comportement de structures en béton armé dans des situations de chargement statique monotone avec le modèle d'endommagement de J. Mazars et de chargement statique alterné en utilisant le modèle d'endommagement unilatéral et le code de calcul EFiCoS développés lors de mon doctorat, nous nous sommes naturellement tournés vers le calcul dynamique temporel pour répondre aux besoins de calcul dans le domaine du parasismique. Ces besoins ont tout d'abord été matérialisés par le projet CASSBA (Conception et Analyse Sismique de Structures en Béton Armé) monté en 1991 par J. Mazars au sein du GRECO géomatériaux, et regroupant les efforts du LCPC, du CEA, de l'École Centrale de Paris, de l'INSA de Lyon et de l'ENS de Cachan, puis par une étude sur le calcul de structures en béton armé sollicitées par des souffles pour le centre d'études de Grammat. Bien que les algorithmes de calcul dynamique temporel soient connus depuis longtemps l'état de l'art dans l'estimation de la résistance ultime d'une structure sollicitée sismiquement, était relativement limité aussi bien en France qu'à l'étranger.

- Utilisation de la dynamique temporelle sur structures élastiques ou prenant en compte de façon grossière la non linéarité du comportement du matériau à l'aide de rotules plastiques, de modèles élastiques non linéaires ou de modèles globaux.
- Méthode "statique équivalente" utilisée encore aujourd'hui dans les bureaux d'études :

Une analyse modale de la structure dans son état vierge permet de calculer les efforts d'inertie correspondant à une excitation d'un spectre déterminé. Ces efforts correspondent à une structure vierge dont le comportement est élastique ; une structure réelle se dégrade, dissipe de l'énergie et voit ses fréquences propres évoluer avec la dégradation. Pour prendre en compte cet effet, la méthode prévoit de pondérer uniformément les ef-

forts calculés par un coefficient appelé coefficient de comportement. Les efforts pondérés sont ensuite utilisés dans un calcul statique pour dimensionner la structure.

Il est évident que ces deux méthodes sont basées sur des modèles trop simplistes et ne sont pas satisfaisantes tant scientifiquement qu'au niveau des résultats. Nous avons donc projeté de développer une méthode permettant d'effectuer des calculs non linéaires tant du point de vue temporel que matériel.

L'introduction de la dynamique impose la prise en compte du point de vue matériel :

- les effets de refermetures de fissures ou effet unilatéral.
- des éventuels effets de vitesse constatés expérimentalement.
- des algorithmes optimisés de façon à ne pas rendre trop lourds les calculs.
- une bonne modélisation de l'amortissement.

Deux études ont démarré à peu d'intervalle :

La thèse de Jean-François Dubé [15] sur le calcul de structures sous charge-ments sismiques.

Jean François Dubé a travaillé en DEA puis en thèse sur un sujet en conti-nuité avec les résultats obtenus lors de mon doctorat. Les points majeurs abor-dés dans ce travail sont :

- L'implémentation des effets de la dynamique temporelle dans le code aux éléments finis EFiCoS.
- La prise en compte dans le modèle de comportement d'effets de vitesse introduits pour reproduire une modification des caractéristiques de dé-gradation du matériau avec la vitesse de sollicitation mais permettant également de régulariser le problème lié à l'adoucissement du matériau dans des conditions dynamiques. Ce sujet fait l'objet de la première par-tie de ce chapitre.
- La mise en évidence de l'importance des liaisons et une modélisation de liaison semi-rigide dans le cadre des éléments poutres.
- La prise en compte de la distorsion pour les éléments de poutre courts.

Cette première thèse de l'équipe génie civil du LMT dédiée aux calculs dy-namiques a également permis de mettre le doigt sur un certain nombres de facteurs comme la modélisation de l'amortissement qui sera abordée plus tard.

La thèse de Christophe Pontiroli [57] sur le calcul de structures sollicités par un souffle. Cette étude a été menée en collaboration avec la DGA et devait aboutir au développement d'un processus intégré dans le code ABAQUS. Les calculs devant être effectués sur des cinématiques complètes en 2D ou 3D, et donc avec un nombre de degrés de liberté important, nous avons porté notre ef-fort sur le développement d'un modèle qui demande temps de calcul minimal. En partant du modèle de J. Mazars, nous avons introduit les effets unilatéraux et l'anélasticité en conservant le caractère explicite du modèle.

La thèse de Frédéric Ragueneau [58] Le problème de l'amortissement soulevé lors des deux précédentes études sera étudié de manière plus approfondie lors du doctorat de Frédéric Ragueneau. L'introduction des phénomènes hystérétiques dans le comportement du matériau permet de participer à l'amortissement de la structure. C'est l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

2.1 Modélisation du comportement visco-endommageable.

Les simulations de problèmes dynamiques dans le régime de comportement non linéaire demandent une attention particulière si on veut s'assurer de l'aspect prédictif de la simulation.

Comme pour la résolution de problèmes statiques, il est nécessaire d'utiliser des modèles de comportement qui soient représentatifs de la dégradation du matériau dans la gamme de sollicitation à laquelle il est soumis, il faut aussi s'assurer que le problème discret est bien posé.

Des études expérimentales rassemblées par [5] montrent qu'à l'échelle à laquelle on observe le matériau (volume élémentaire représentatif), le comportement du matériau dépend de la vitesse de sollicitation (figure 2.1). C'est ce qu'on appelle l'effet de vitesse.

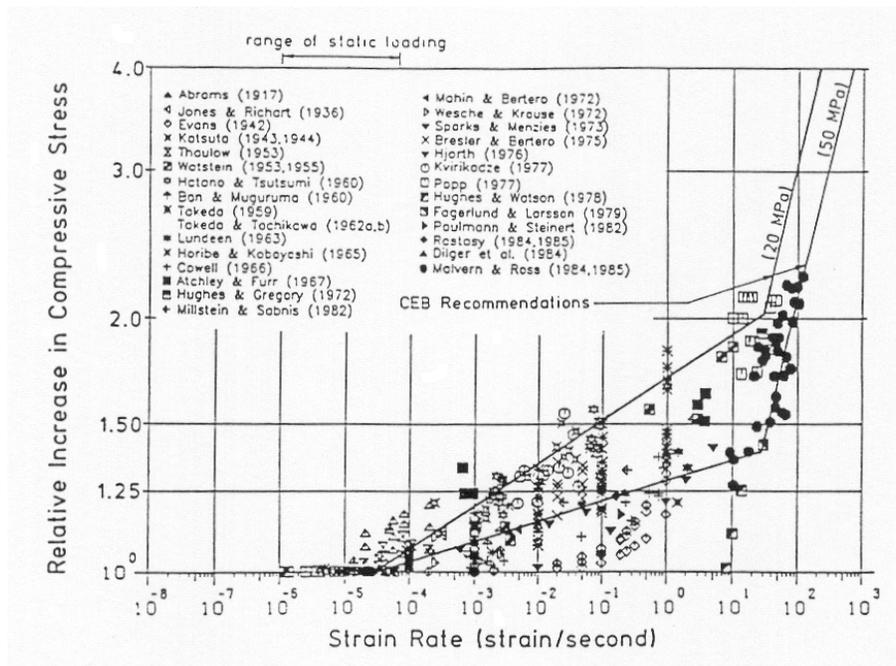


FIG. 2.1 – Influence de la vitesse de chargement sur la contrainte ultime

Ce point est à considérer dès que les vitesses de sollicitation imposent des vitesses de déformation supérieures à 10^{-2}s^{-1} . L'introduction des effets visqueux dans l'évolution des variables internes qui décrivent la dégradation du matériau (viscoplasticité, viscoendommagement) peut avoir deux objectifs .

L'objectif le plus facile à atteindre est de faire dépendre l'écroissage du matériau de la vitesse de sollicitation afin d'obtenir un effet de vitesse.

Le deuxième objectif est lié à la régularisation des calculs numériques et permet s'il est atteint de s'affranchir de la dépendance vis à vis du maillage dans les problèmes de dynamique. Cet objectif peut être atteint dans certains cas (on peut formuler des modèles avec effet de vitesse qui n'ont pas d'effet régularisateur) [52]. Une méthode similaire est utilisée pour les matériaux composites sous le nom d'endommagement avec effet de retard [1], cette appellation est d'ailleurs plus adaptée au modèle qui n'a absolument rien à voir avec la visco-élasticité.

2.1.1 Formulation générale

Pour un modèle de comportement développé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles et pour un matériau standard [41], nous pouvons écrire l'évolution des variables internes A_k en fonction des variables associées V_k à l'aide de la fonction seuil F et de la condition de consistance 2.2.

F est une fonction des variables associées et d'éventuels paramètres :

$$F = F(\sigma, V_k) \quad (\text{ou éventuellement } F = F(\epsilon, V_k)) \quad (2.1)$$

La condition de consistance est donnée par :

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \dot{F} = 0 \text{ avec } \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (2.2)$$

L'évolution des variable internes est alors donnée par les équations 2.3

$$\dot{A}_k = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial V_k} \quad (2.3)$$

Où $\dot{\lambda}$ est un multiplicateur scalaire toujours positif.

On peut représenter ces relations par le point de charge qui entraîne la surface seuil dans son mouvement figure 2.2 a))

Pour introduire un effet de vitesse, il suffit de faire en sorte que le point de charge entraîne la surface seuil en ayant la possibilité de sortir de la surface (Figure 2.2 b)) on obtient ainsi un matériau viscoplastique ou viscoendommageable.

On peut obtenir cet effet en remplaçant simplement la condition de consistance 2.2 par l'équation inspirée du modèle de Perzina [55] 2.4 donnant la va-

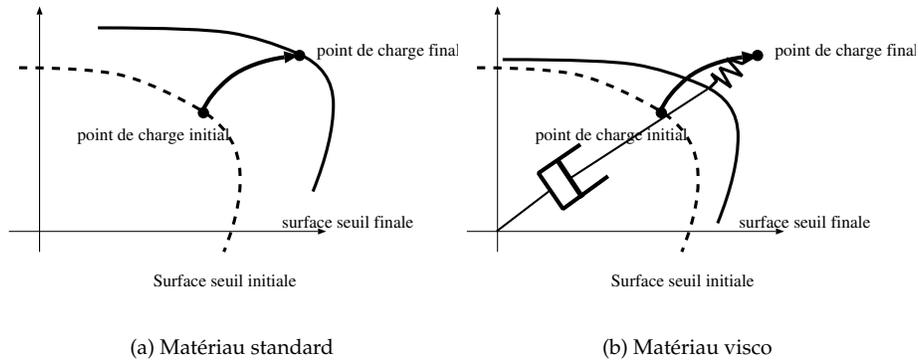


FIG. 2.2 – Évolution de la surface seuil pour un matériau standard

leur du multiplicateur¹.

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{m} \left\langle \frac{F}{K_v} \right\rangle^N \quad (2.4)$$

Où K_v qui a la même dimension que F est introduit pour des raisons de compatibilité de dimensions, N est un paramètre sans dimension et m est un temps caractéristique.

Cette méthode est applicable à la plupart des modèles de plasticité et d'endommagement.

2.1.1.1 Application au modèle unilatéral

On applique la méthode au modèle d'endommagement unilatéral (Voir annexe 8)

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'introduction de l'effet de vitesse rend ici le problème plus simple.

On obtient directement le multiplicateur plastique par l'équation qui devient dans notre cas :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{m} \left\langle \frac{Y_i - Y_{0i} - Z_i}{Y_{0i}} \right\rangle^N \quad (2.5)$$

Cette équation différentielle peut être intégrée numériquement par des méthodes classiques. Les paramètres m et N sont à identifier sur des courbes du style de celles données en figure 2.1. La réponse uniaxiale du modèle est donnée sur la figure 2.3 pour différentes vitesses de chargement.

¹Cette idée a été inspirée par Jean Lemaitre lors d'une après-midi de travail qu'il a bien voulu nous consacrer, merci Jean!

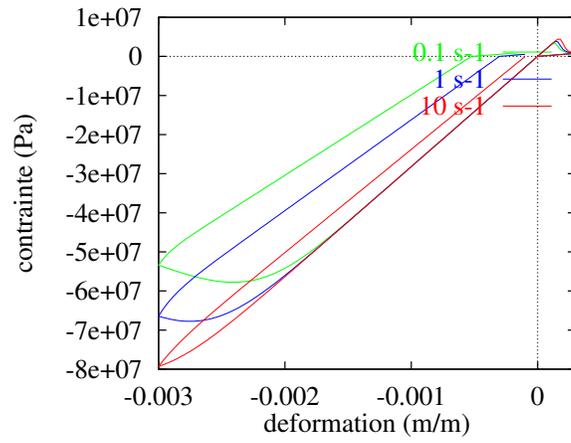


FIG. 2.3 – Réponse uniaxiale du modèle viscoendommageable

2.1.2 Régularisation du problème dynamique

Lorsque l'écroûissage du modèle de comportement est négatif, la nature des équations différentielles d'équilibre est généralement modifiée, ce phénomène se traduit par une perte d'objectivité du problème aux éléments finis (le résultat dépend fortement de la discrétisation).

On peut montrer [16] que l'introduction de l'effet de vitesse tel qu'il a été précédemment exposé permet de conserver la nature hyperbolique des équations d'équilibre.

Un exemple simple permet d'illustrer cette propriété. Cet exemple proposé par Bazant et Belytschko [3] consiste à étudier la réponse uniaxiale d'un barreau encastré à une extrémité sur lequel on applique un échelon d'effort égal au $3/4$ de sa résistance à l'autre extrémité (figure 2.4).

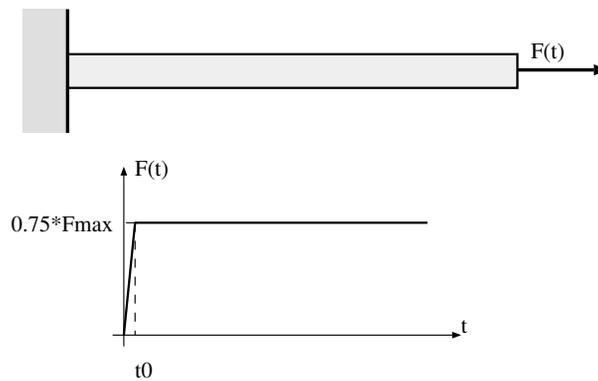


FIG. 2.4 – Propagation d'une onde dans un barreau

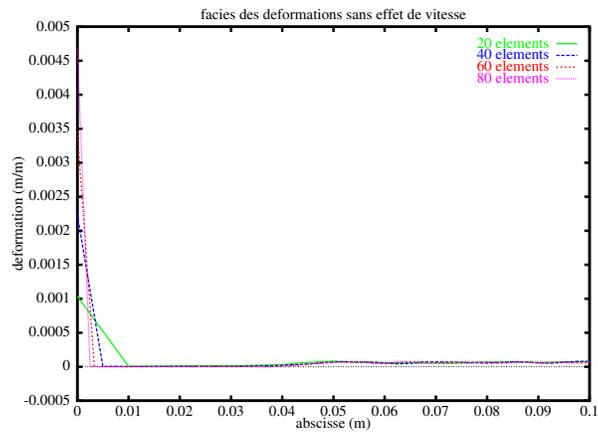
La déformation double lorsque l'onde se réfléchit sur l'encastrement, ce qui produit la rupture du barreau.

Pour mettre en évidence l'aspect régularisateur de l'effet de vitesse, nous avons simulé cet exemple pour le modèle de base et le modèle avec effet de vitesse avec 20, 40 80 et 160 éléments.

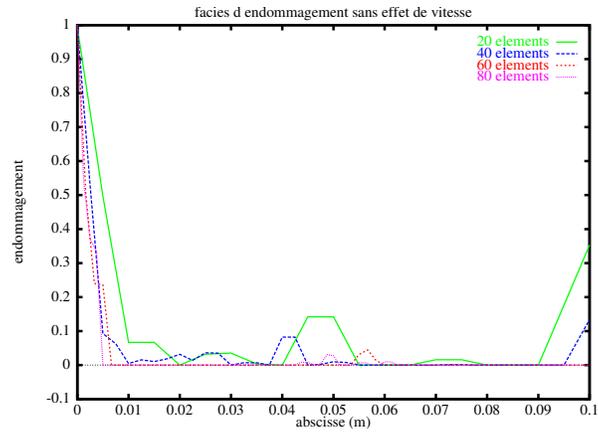
Les résultats obtenus pour les profils des déformations et de l'endommagement lorsque l'onde a parcouru la moitié de la longueur du barreau après sa réflexion sont reportés respectivement sur les figures 2.5 et 2.6.

Visiblement, les résultats ne sont pas objectifs pour le modèle de base tant en déformation qu'en endommagement et dépendent fortement de la discrétisation.

La régularisation attendue est obtenue et les différents profils sont indépendants de la discrétisation. La discrétisation avec 20 éléments ne permet pas toutefois de capter la valeur maximale d'endommagement dans la partie centrale. Sur le faciès de déformation, un effet de masque est visible dans la zone la plus endommagée. Il est important de noter que les paramètres utilisés dans



(a) déformation



(b) Endommagement

FIG. 2.5 – Modèle de base

cet exemple sont ceux identifiés sur l'effet de vitesse.

2.1.3 Application du modèle à différentes vitesses de sollicitations :

Le modèle a été utilisé pour des applications allant de la statique à la dynamique rapide.

2.1.3.1 Calcul statique :

Même en cas de chargement statique, lorsqu'il y a localisation des déformations, les vitesses de déformation sont importantes dans la zone de localisation et on peut s'attendre à obtenir un effet régularisateur de l'introduction du viscoendommagement. C'est ce que nous avons vérifié sur un exemple simple d'une éprouvette de traction entaillée (Figure 2.7). Les calculs ont été effectués avec trois maillages de différentes densités.

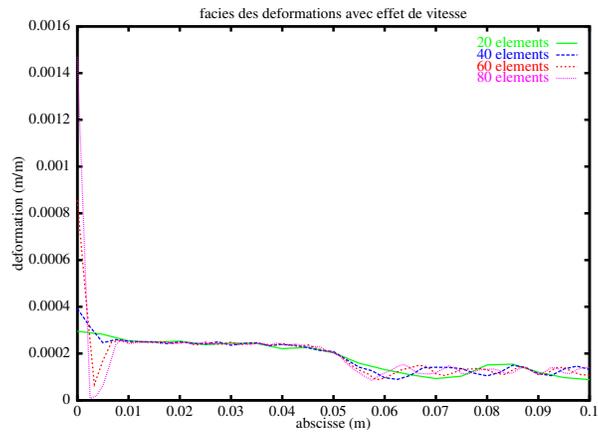
Le calcul effectué avec le modèle original sans effet de retard donne des résultats complètement différents pour les trois maillages (Figure 2.8).

Les résultats du modèle visco-endommageable semblent corrects mais pour obtenir un effet régularisateur, nous avons du prendre des valeurs importantes pour l'exposant N du modèle de viscoplasticité (Équation 2.5) qui ne correspondent plus aux effets de vitesses constatés expérimentalement.

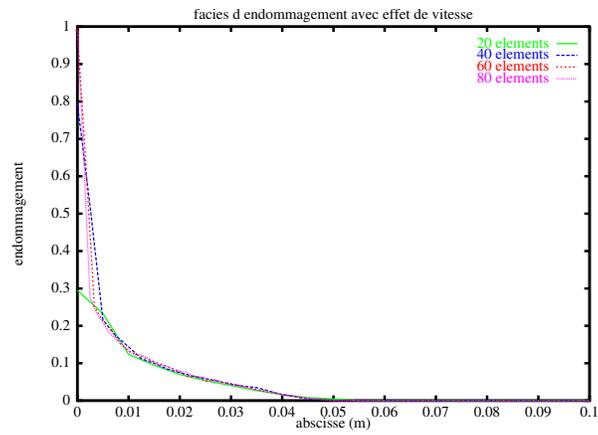
Les résultats sont objectifs, mais dans l'exemple utilisé, les efforts obtenus sont alors trop importants et le modèle perd sa capacité de prédiction. Il faut également garder en tête que pour que la méthode soit correcte, les effets de la dynamique doivent obligatoirement être pris en compte pour capter correctement les effets créés lors de la localisation. Cette méthode peut paraître séduisante face aux approches non-locales, surtout au regard du coût de calcul ; mais même si le pas de temps sera beaucoup plus rapide que lors d'un calcul non-local, il faudra effectuer beaucoup plus de pas de temps de façon à capter le front dynamique créé lors de la localisation. D'autre part les paramètres introduits n'ont plus vraiment de signification physique. On peut donc conclure que dans le cas de chargements statiques, la méthode n'a pas beaucoup d'intérêt, et on préférera les modèles non-locaux, avec gradient ou la méthode de Hillerborg pour traiter les problèmes de localisation.

2.1.3.2 Dynamique :

Le modèle a été largement utilisé pour les calculs de pré-dimensionnement et les calculs prédictifs en condition de Benchmark sur la maquette CASSBA (Conception et Analyse Sismique des Structures en Béton Armé). Le projet CASSBA, piloté par J. Mazars au sein du groupe GEO était organisé autour de l'expérimentation d'un bâtiment de 8 étages à voiles porteurs faiblement armé, réalisé à l'échelle 1/3 et sollicité par un séisme sur la dalle sismique Azalée du CEA de Saclay. Ces études ont été suivies par de nouvelles confrontation essais-calculs autour du projet CAMUS de conception plus simple (Figure 2.9).



(a) déformation



(b) endommagement

FIG. 2.6 – Modèle visco-endommageable

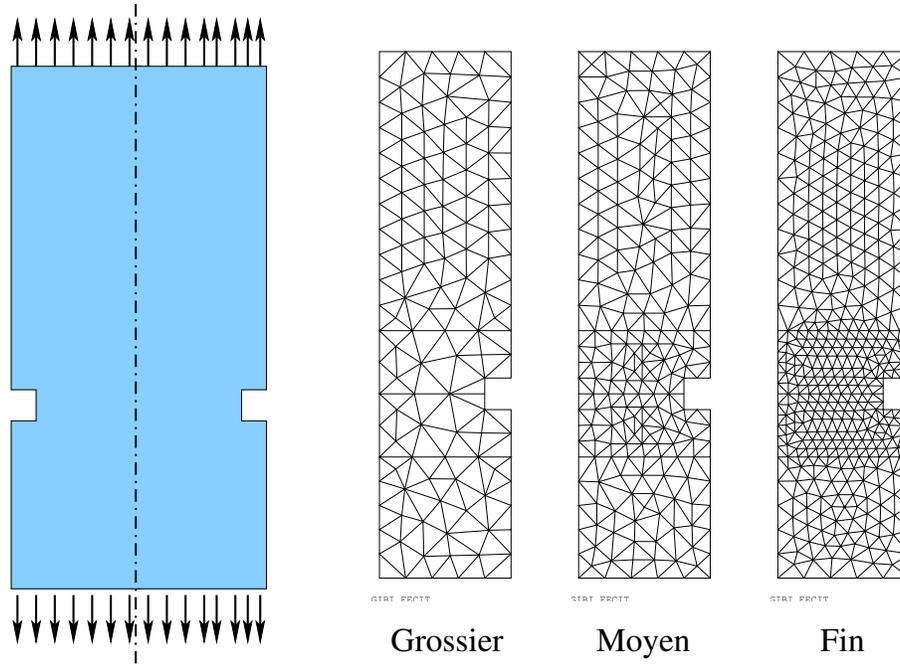


FIG. 2.7 – Traction sur éprouvette entaillée

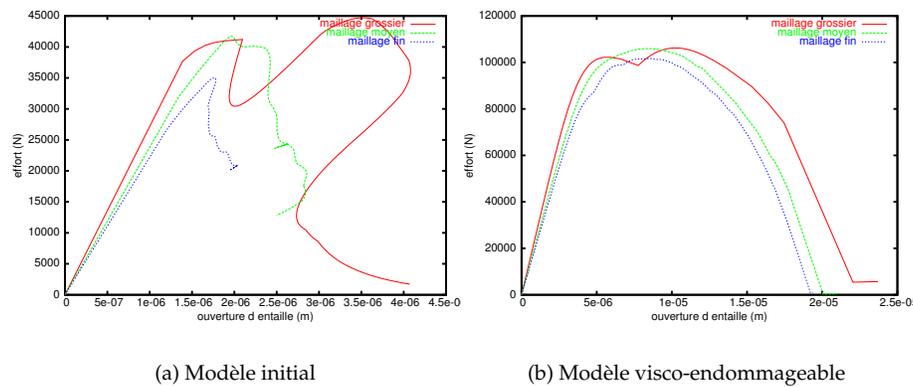


FIG. 2.8 – Courbes ouverture d'entaille – effort



FIG. 2.9 – Maquette CAMUS

Les calculs sur le projet CASSBA ont été menés à l'aide du logiciel EFiCoS avec un amortissement structurel de 5% calé sur les deux premiers modes et une modélisation du contact entre le support maquette utilisant une liaison semi-rigide. Les résultats montrent un bon pouvoir de prédiction (Figure 2.11 a)) du modèle et une bonne adéquation de la méthode employée.

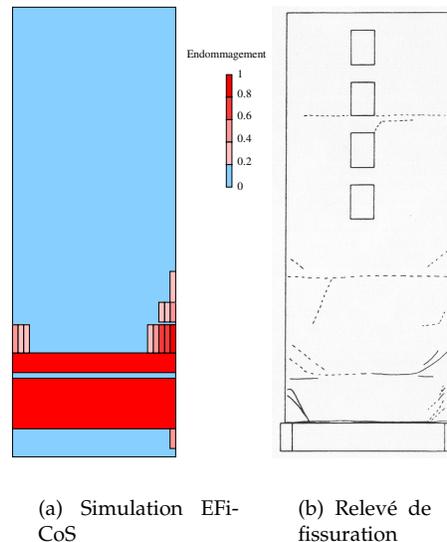


FIG. 2.10 – Endommagement de la maquette après un séisme d'intensité 0,5g

On remarque que pour ce type d'application, l'apport de l'endommagement avec retard n'est pas visible (Figure 2.11 b)), néanmoins le processus converge plus rapidement et que les calculs, du coup se mènent plus facilement.

D'autres applications impliquant des vitesses de déformation plus rapides comme les effets de souffle ou les impacts ont conduit aux mêmes conclusions.

2.1.4 Conclusions :

L'introduction de la viscosité dans l'évolution de l'endommagement apporte théoriquement une régularisation du problème en dynamique et permet de reproduire les effets de vitesse observés expérimentalement. Pratiquement, le modèle comporte quatre paramètres supplémentaires qui peuvent être identifiés à l'aide de résultats d'expériences de la littérature. L'emploi du modèle dans ces conditions n'apporte pas de changements visibles dans les résultats, mais permet d'améliorer les capacités de convergence des problèmes en dynamique lente et rapide. L'utilisation de la méthode pour régulariser les problèmes en statique est possible mais n'est pas à mon avis satisfaisante.

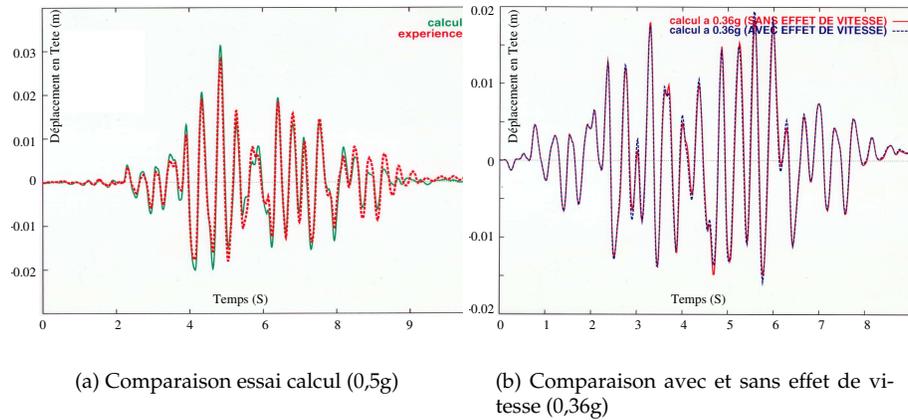


FIG. 2.11 – Courbes temporelles du déplacement en tête de la maquette.

Le couple modèle unilatéral (ou modèle visco-unilatéral) EFiCoS s’est montré très performant pour effectuer les calculs de bâtiments soumis à des séismes. La simulation directe d’un séisme de 10 secondes avec un pas de temps de l’ordre de 10^{-4} s peut être effectuée en quelques heures sans aucune intervention de l’utilisateur, alors que des modélisations en contraintes planes, ou avec des éléments de coques ont demandé plusieurs semaines d’attention continue sans obtenir des résultats aussi proches de la réalité. Certains paramètres ont énormément d’influence sur les résultats, comme la liaison entre le bâtiment et le sol (ou la dalle sismique dans notre cas) et l’amortissement.

2.2 Prise en compte des effets hystérétiques :

2.2.1 Introduction :

L’expérience acquise autour du doctorat de Jean François Dubé [15] et du projet CASSBA, nous a montré l’importance de la modélisation de l’amortissement et des conditions aux limites.

Les approches classiques basées sur la méthode de Rayleigh ou de décomposition sur base modale mettent en oeuvre des paramètres qui sont pris la plupart du temps forfaitairement.

Or on peut constater expérimentalement que des phénomènes hystérétiques sont observables dans le comportement cyclique du béton, même sous chargement statique.

- La figure 2.12 a) représente une série de cycles stabilisés lors d’un essai de flexion trois points cyclique sur une poutre en béton armé [32].

- La figure 2.12 b) représente la courbe contrainte déformation identifiée à partir d'un essai de compression répété [61].

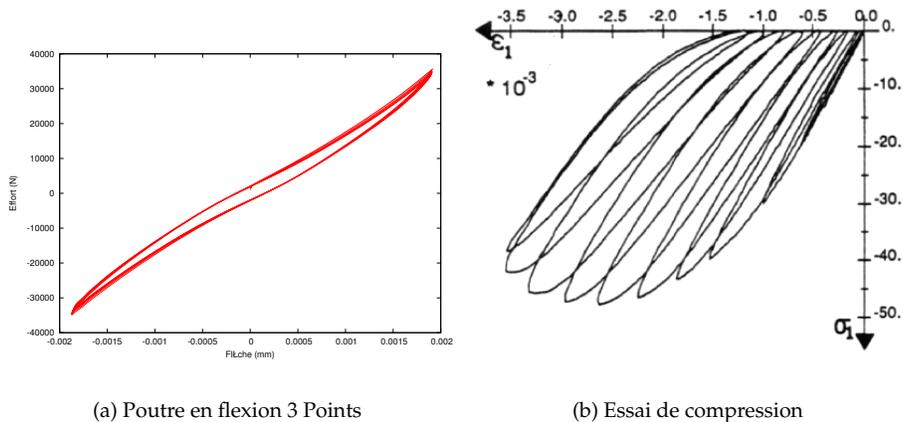


FIG. 2.12 – Comportement hystérétique du béton

Ces phénomènes hystérétiques ne semblent pas primordiaux quand il s'agit de modéliser le comportement statique de structures en béton. Par contre, il semble évident que lors de chargements dynamiques cycliques - comme ceux provoqués par des séismes - la dissipation engendrée par les hystérésis va participer à l'amortissement.

Un des objectifs de la thèse de Frédéric Ragueneau [60] était de développer un modèle de comportement permettant de prendre en compte les phénomènes hystérétiques et d'évaluer leur influence sur le comportement dynamique de structures.

2.2.2 Concepts du modèle :

Les concepts de base de l'endommagement établis par Katchanov [30, 31], repris puis développés par Jean Lemaître [42, 41], stipulent que pour un volume élémentaire de matériau, on peut mesurer l'endommagement dans la direction représentée par une normale \vec{n} par le rapport entre l'aire de la surface initiale de matériau δ_S et l'aire de la surface des défauts δ_{SD_n} :

$$D(\vec{n}) = \frac{\delta_{SD_n}}{\delta_S}$$

Si on observe au microscope, (Figure 2.14) le développement de la microfissuration dans le béton, on se rend compte que :

- La représentation bidimensionnelle de la microfissuration est fortement réductrice.

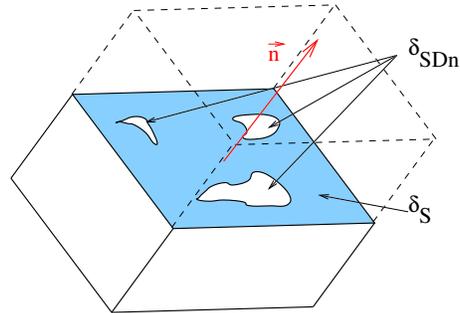


FIG. 2.13 – Endommagement uniaxial suivant Kachanov

- Les bifurcations et les embranchements de microfissures sont particulièrement complexes.

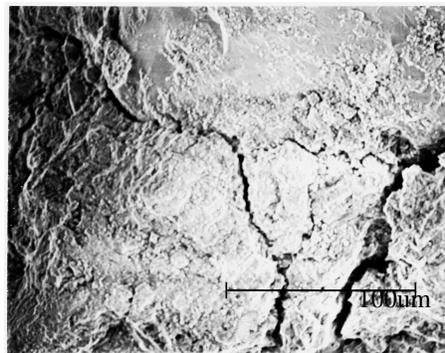


FIG. 2.14 – Microfissuration dans le béton

Lors de l'ouverture ou de la fermeture des microfissures, les lèvres des microfissures frottent et provoquent une dissipation à laquelle on peut attribuer les phénomènes hystérétiques observés. Sur cette base, on peut faire la représentation schématique de la figure 2.15.

Le comportement correspondant est représenté par l'équation suivante :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon + ED(\varepsilon - \varepsilon_s) \quad (2.6)$$

où ε_s est une variable homogène à une déformation représentant le glissement entre lèvres de fissures ou l'ouverture unitaire de fissure (O.U.F.), E est le module d'Young du matériau vierge, ε est la déformation, σ la contrainte et D la variable d'endommagement.

On remarque que l'équation 2.6 peut également s'écrire :

$$\sigma = E\varepsilon - ED\varepsilon_s \quad (2.7)$$

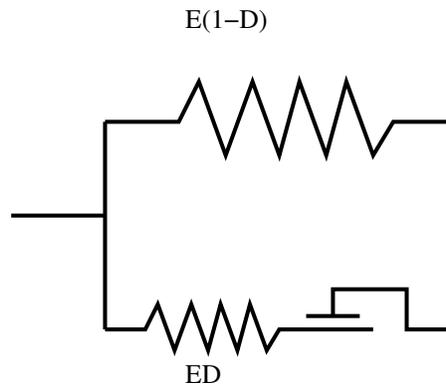


FIG. 2.15 – Représentation phénoménologique

Ce qui peut être présenté par une façon originale de coupler l'endommagement et les déformations anélastiques. L'endommagement est en fait activé ou désactivé par la variable ε_s .

2.2.3 Modèle uniaxial :

Le modèle est construit à partir des variables d'état suivantes :

Variables d'état		Variables associées
Observable	Internes	
Déformation ε		σ
	Endommagement 1 D	Y
	O.U.F. ε_s	σ_s
	Autres V_k	A

TAB. 2.1 – Variables du modèle hystérétique

On se base sur la forme particulière de l'énergie libre de Helmholtz :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\varepsilon(1-D)E\varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_s)ED(\varepsilon - \varepsilon_s) + f(V_k)$$

où ρ est la masse volumique du matériau et ψ l'énergie libre et les V_k sont des variables internes relatives aux autres phénomènes.

L'énergie consommée par la création de l'endommagement est en partie bloquée par les phénomènes de glissement/adhérence entre les lèvres de fissures.

On en déduit les lois d'état :

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{d\rho\psi}{d\varepsilon} = E(1-D)\varepsilon + ED(\varepsilon - \varepsilon_s) \\ Y &= -\frac{d\rho\psi}{dD} = \frac{1}{2}\varepsilon E(2\varepsilon - \varepsilon_s) \\ \sigma_s &= -\frac{d\rho\psi}{d\varepsilon_s} = ED(\varepsilon - \varepsilon_s)\end{aligned}$$

Un exemple de comportement uniaxial est représenté sur la figure 2.16.

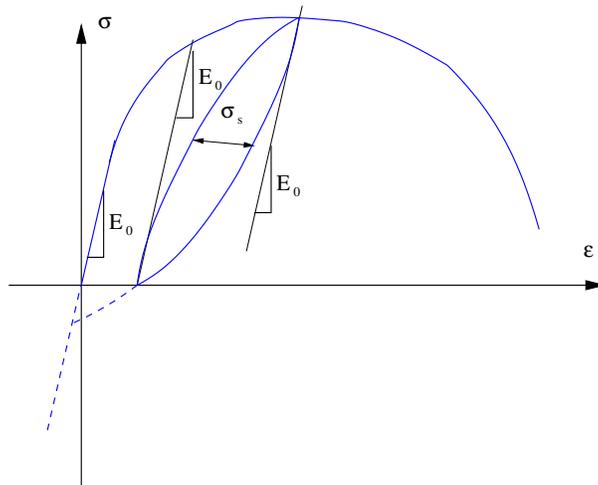


FIG. 2.16 – Principe de comportement uniaxial

L'évolution de l'endommagement peut être calculée classiquement à l'aide de la variable Y et l'ouverture unitaire de fissure ε_s à partir d'une évolution basée sur un écrouissage cinématique calculé à partir d'une fonction seuil déduite de σ_s .

2.2.4 Développements du modèle et résultats

Le modèle a été développé en 3D avec un endommagement anisotrope et les effets unilatéraux ont été étudiés sur une version uniaxiale, il a été implémenté dans EFiCoS et utilisé lors du projet CAMUS[59].

Le comportement uniaxial est reporté sur la figure 2.17.

Le modèle dissipe clairement de l'énergie lors de cyclages et l'énergie dissipé varie en fonction de l'intensité de l'endommagement.

Appliqué aux calculs sismiques, le modèle peut être utilisé sans amortissement et permet d'obtenir des résultats comparables à ceux obtenus avec un modèle sans hystérésis avec un amortissement structurel de 2%.

L'énergie fournie au système par le séisme se transforme en :

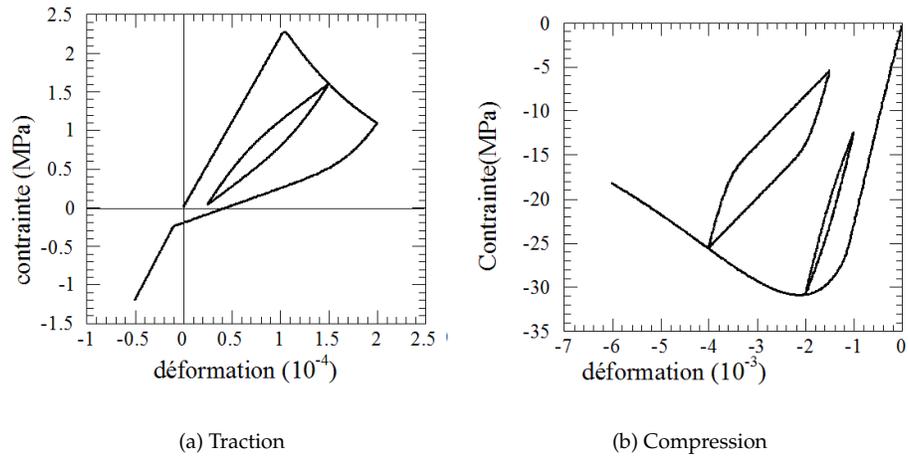


FIG. 2.17 – Comportement uniaxial

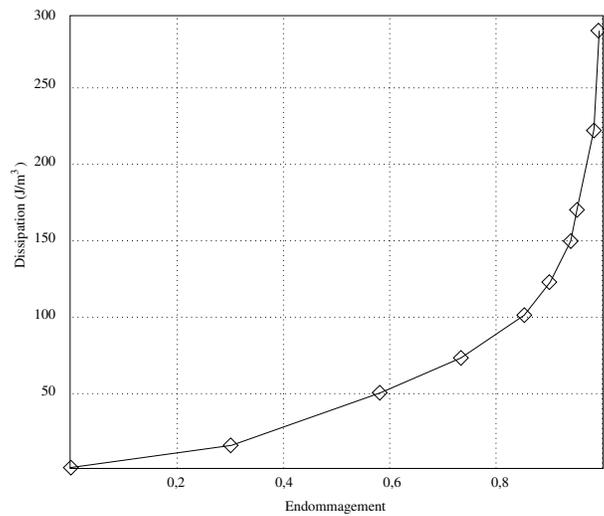


FIG. 2.18 – Évolution de l'énergie dissipée en fonction de l'endommagement.

- Énergie cinétique
- Énergie dissipée par le matériau par création d'endommagement ou de plasticité et par frottement.
- Énergie dissipée en amortissement.

Les balances énergétiques (Figure 2.19 a) pour le modèle unilatéral avec un amortissement structurel de 2% montrent que l'énergie habituellement dissipée par l'amortissement structurel est supérieure à celle dissipée par le modèle.

L'utilisation du modèle avec hystérésis permet d'éliminer l'amortissement forfaitaire, et l'énergie dissipée par le matériau prend en charge la partie initialement allouée à l'amortissement (Figure 2.19 b).

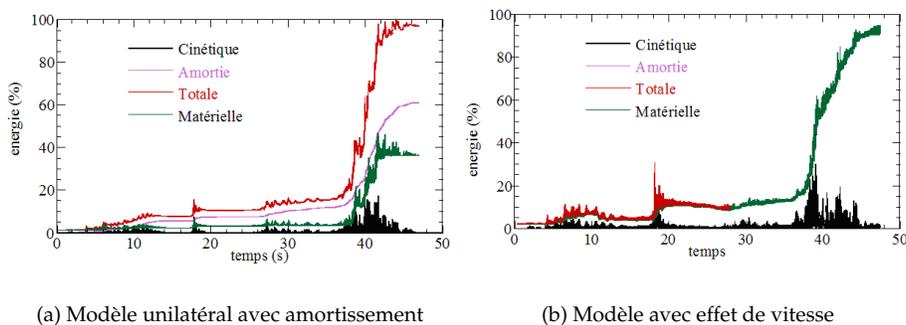


FIG. 2.19 – Balance énergétique

2.2.5 Conclusions :

De nombreux efforts ont déjà été effectués pour représenter correctement le comportement des matériaux. Lors de calculs sismiques avec un modèle de comportement classique, il est nécessaire d'utiliser un amortissement structurel, faute de quoi les résultats risquent de ne pas représenter correctement la réalité. Dans la philosophie d'un calcul prédictif, les valeurs utilisées pour l'amortissement structurel ne peuvent être que forfaitaires. Finalement, malgré tous les efforts effectués dans la modélisation, les résultats dépendent largement de valeurs forfaitaires et du coup perdent une grande partie de leur pouvoir prédictif.

Le modèle développé permet de prendre en compte les phénomènes hystériques créés par le frottement entre les lèvres des microfissures. Lors de calculs dynamiques, l'énergie dissipée par le modèle participe à l'amortissement structurel et peut même aller jusqu'à le remplacer. Même si je pense que l'on ne puisse pas attribuer l'ensemble de l'amortissement aux phénomènes hystériques dans le matériau, l'approche proposée permet de lever a moins une partie du voile sur l'amortissement.

L'idée du modèle telle qu'elle est exposée dans le modèle uniaxial est originale, et pose de nouveaux jalons dans les possibilités de couplage entre l'endommagement et la plasticité. L'application que nous en avons faite à l'époque pour le développement du modèle tridimensionnel est trop complexe et ne permet pas d'aller jusqu'au bout de l'idée.

Quelques indications sur un développement possible de cette idée sont données dans le chapitre 5: Nouvelle-modélisation- : page 63.

Chapitre 3

Modélisation de l'anisotropie induite.

3.1 Introduction :

La dégradation du béton sous chargement mécanique est un phénomène complexe, l'effet de la microfissuration puis la macrofissuration peut être modélisé par de l'endommagement accompagné de déformations anélastiques. En fonction des sollicitations, la fissuration prendra une orientation privilégiée qui va créer de toute évidence de l'anisotropie¹.

Les travaux auxquels j'ai participé au travers de l'encadrement de doctorats sont ceux de Stéphanie Fichant [19] auquel je fais référence dans ce chapitre et de Frédéric Ragueneau [58] avec lequel nous avons utilisé une méthode beaucoup plus classique et, à mon avis, trop complexe et pas suffisamment robuste.

Si les chargements sur la structure étudiée sont proportionnels, et si le comportement de la structure est relativement simple, on peut espérer que l'anisotropie ainsi créée n'aie que peu d'effets. Dans le cas de structures réelles, les charges sont souvent combinées et dans l'optique de calculs prédictifs, on doit prévoir toutes les possibilités de chargements. Il semble donc indispensable de se poser la question de la modélisation de l'anisotropie.

Comme on peut le constater de façon expérimentale [7], l'échelle d'observation joue un rôle fondamental dans la description de l'anisotropie. Suivant l'échelle à laquelle on regarde le phénomène, on peut considérer que cette anisotropie doit être modélisée au niveau du comportement du matériau, ou que c'est un effet structurel.

Observons par exemple un élément de matière Ω représenté par un carré de côté L (Figure 3.1a), traversé par une zone de fissuration modélisée par une

¹Et comme le disait justement mon grand père, agriculteur à La Toulzanie (46) en regardant un poteau de son hangar qui avait une fente qui le traversait de bas en haut : « *tout ce qui est fendu n'est pas défendu* »

répartition d'endommagement correspondant à une longueur caractéristique L_c [37, 6].

Nous nous proposons d'observer Ω à une échelle, appelée ici échelle du matériau, inférieure à L_c en utilisant un maillage de densité $\frac{L_c}{10}$; puis à l'échelle de Ω , appelée échelle de la structure, mesurée par $L = 5L_c$ dans l'exemple proposé.

Nous utilisons pour le matériau un modèle de comportement élastique endommageable isotrope.

On peut donner une mesure de l'anisotropie de Ω en évaluant la variation de raideur normale dans la direction \vec{n} en fonction de son orientation par rapport à la direction de la fissuration.

Ω est sollicité sur sa frontière par une densité d'effort compatible avec un champ de contraintes normales uniaxial $T(\vec{n}) = \sigma_n \vec{n}$. De façon à rester cinématiquement compatible avec l'échelle d'observation structurelle, les arêtes de Ω sont astreintes à rester rectilignes (mais déformables). La figure 3.1 b représente la variation de raideur normale en fonction de l'orientation de la sollicitation par rapport à celle de la fissuration et permet bien de mettre en évidence l'anisotropie structurelle créée par une bande d'endommagement, même si celui-ci est isotrope.

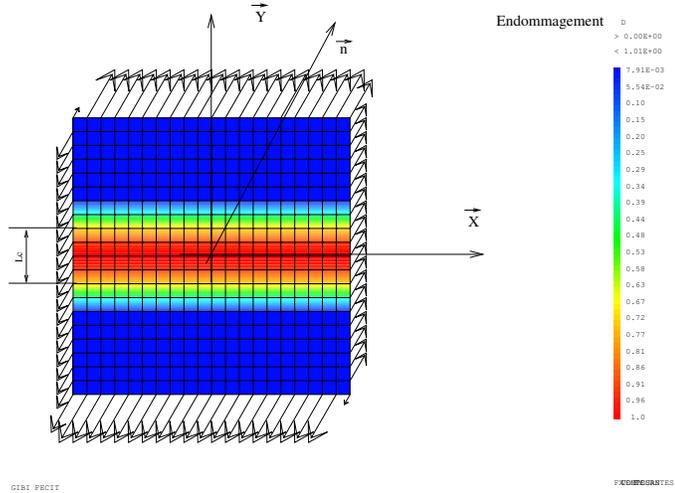
La question posée autour du doctorat de Stéphanie Fichant est de savoir s'il est nécessaire de modéliser l'anisotropie induite par l'endommagement au niveau du matériau ou si l'arrangement structurel de l'endommagement isotrope est suffisant pour représenter correctement les effets de l'anisotropie induite.

Nous avons donc développé une famille de modèles d'endommagement possédant le mêmes ingrédients mais déclinée en un modèle d'endommagement isotrope et un modèle orthotrope. Dans les deux cas, le couplage est réalisé avec la plasticité et les effets unilatéraux sont pris en compte.

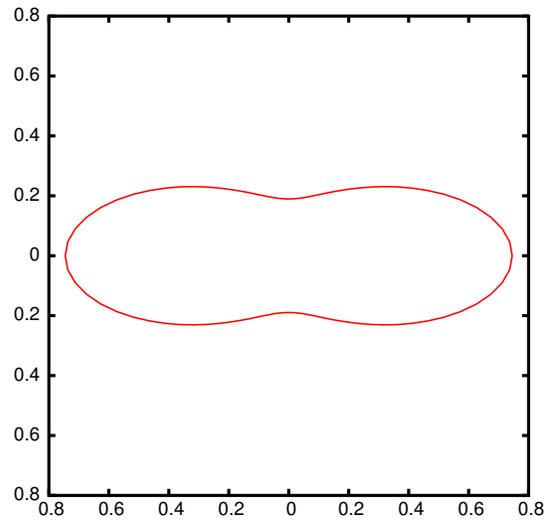
3.2 Présentation de la famille de modèles :

De nombreuses difficultés peuvent apparaître lors du développement d'un modèle d'endommagement anisotrope prenant en compte les effets unilatéraux et couplé avec la plasticité. Même développé en dehors du cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, le modèle doit être en accord avec ses principes, et en particulier, le tenseur d'élasticité doit respecter les symétries du premier et second ordre. Un certain nombre de méthodes existent pour que ces exigences soient satisfaites, mais elles sont particulièrement contraignantes et rendent l'écriture du modèle très lourde.

Nous avons choisi, dans un premier temps de développer un modèle basé sur des considérations physiques et mécaniques sans nous soucier de sa validité thermodynamique; puis en nous inspirant des méthodes utilisées pour les modèles microplans [4], de calculer le tenseur d'élasticité, choisi dans un ensemble d'opérateurs thermodynamiquement valides, qui s'en approche le plus au sens énergétique.



(a) représentation de l'endommagement



(b) Evolution de la raideur en fonction de la sollicitation

FIG. 3.1 – Mise en évidence de l'anisotropie structurelle

3.2.1 Couplage avec la plasticité :

Les déformations plastiques sont calculées comme pour un modèle de plasticité classique en utilisant les contraintes effectives $\tilde{\sigma}$ pour calculer la fonction seuil [29, 40].

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p)$$

On peut de cette manière utiliser un modèle de plasticité classique sans se soucier de l'endommagement. Nous avons choisi l'écoulement de Nadai [51, 48] inspiré du critère de Drucker-Prager. Cette fonction d'écoulement permet d'approximer de manière suffisamment précise les réponses du matériau en traction et compression uniaxiale. Le critère de Nadai est la combinaison de deux fonctions de Drucker-Prager F_1 et F_2 ayant la même forme :

$$F_i = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2' + A_i \frac{I_1'}{3} - B_i w$$

où J_2' et I_1' sont respectivement le second invariant du déviateur des contraintes effectives et le premier invariant des contraintes effectives. w est la variable d'écrouissage et $(A_i, B_i, i = 1, 2)$ sont quatre paramètres qui sont initialement définis, de façon à assurer la continuité entre F_1 et F_2 , à partir du rapport entre la résistance en traction et la résistance en compression γ et du rapport entre la résistance en compression biaxiale et la résistance en compression uniaxiale β .

$$A_1 = \sqrt{2} \frac{1-\gamma}{1+\gamma}, \quad A_2 = \sqrt{2} \frac{\beta-1}{2\beta-1}, \quad B_1 = 2\sqrt{2} \frac{\gamma}{1+\gamma}, \quad B_2 = \sqrt{2} \frac{\beta}{2\beta-1}$$

Et la surface obtenue peut être représentée dans l'espace des contraintes principales (Figure 3.2)

Comme l'endommagement peut affecter la réponse du matériau en régime durcissant, les significations des rapports γ et β sont légèrement changées. Par exemple en compression, l'endommagement devrait déjà se développer quand la contrainte maximale est atteinte et donc modifier sa valeur. Dans le modèle développé, les deux rapports sont tenus constants : $\beta = 1,16$ et $\gamma = 0,4$.

L'évolution de la déformation plastique est associée à ces surfaces. La loi d'écrouissage est donnée par :

$$w = qp^{1/2} + w_0 \quad (3.1)$$

où q est le paramètre du modèle, w_0 représente le domaine initial réversible dans l'espace des contraintes, p est la contrainte effective plastique.

L'endommagement sera calculé dans un second temps en utilisant les déformations élastiques pour évaluer la fonction seuil d'endommagement.

Cette méthode offre l'avantage de la facilité, mais on verra plus tard que l'endommagement et la plasticité n'étant pas directement liés peuvent devenir concurrents dans certains cas.

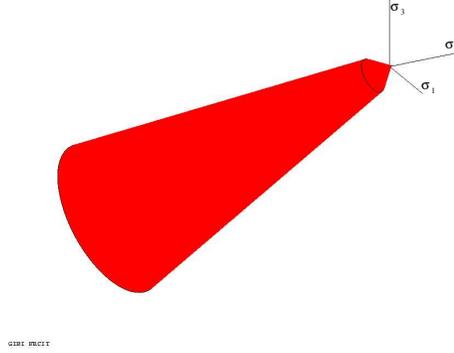


FIG. 3.2 – Surface seuil de plasticité

3.2.2 Cinématiques :

Soit $d(\vec{n})$, l'endommagement scalaire intervenant sur un vecteur contrainte calculé sur une facette orientée par le vecteur \vec{n} :

$$\sigma_{ij}n_j = (1 - d(\vec{n})) \tilde{\sigma}_{ij}n_j, \quad j = 1..3$$

Le modèle est développé autour de 2 cinématiques :

-Cinématique d'ordre 0 pour un endommagement isotrope, représenté par une variable scalaire $d(\vec{n}) = D$.

-Cinématique d'ordre 1 pour un endommagement anisotrope représenté par un tenseur d'ordre 2.

$$1 - d(\vec{n}) = \|\vec{\omega}(\vec{n})\| \text{ avec } \vec{\omega}(\vec{n}) = (I_d - D) \vec{n}$$

ou en notation indicielle :

$$1 - d(\vec{n}) = \sqrt{[(\delta_{ij} - D_{ij}) n_i] [(\delta_{ij} - D_{ij}) n_i]}$$

Le vecteur $\vec{\omega}(\vec{n})$ de norme $1 - d(\vec{n})$ décrit l'ellipsoïde ayant pour axes les vecteurs propres de $(I_d - D)$ et pour rayons les valeurs propres de $(I_d - D)$ (Figure 3.3). Cette hypothèse sur l'évolution de l'endommagement en fonction de la normale est légèrement différente de l'hypothèse faite par Ladevèze [38] qui basait également la cinématique sur une ellipsoïde, mais avec la relation suivante :

$$\frac{1}{1-d(\vec{n})} = \vec{n} (I_d - D)^{-1} \vec{n}.$$

On peut comparer les deux approches aux résultats obtenus lors du calcul fait en introduction (Figure 3.1), en prenant bien soin de signaler que les résultats du calcul se sont pas forcément la bonne représentation de la réalité.

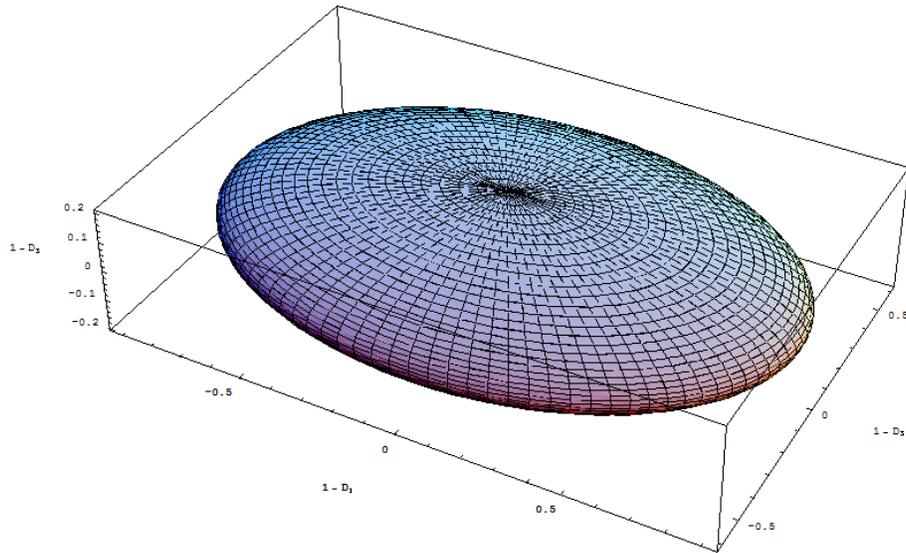


FIG. 3.3 – Représentation de la surface d'endommagement

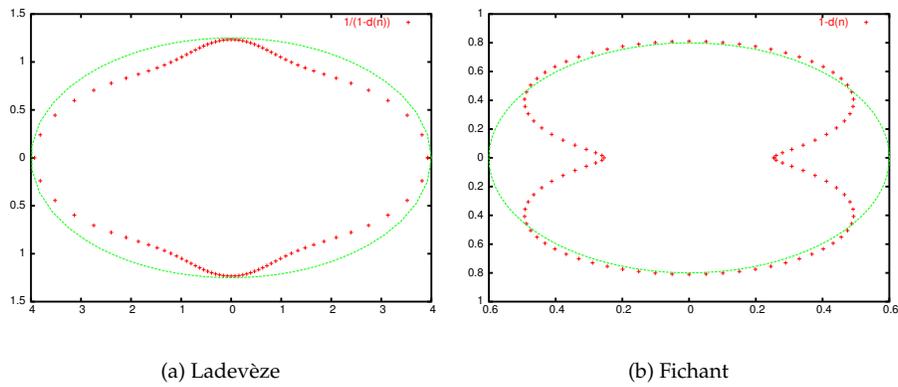


FIG. 3.4 – Comparaison des représentations de l'endommagement anisotrope

Plaçons nous dans la base propre commune à D et $(I_d - D) : D \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}$.

Pour une normale $\vec{n} \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$, l'endommagement est

$$d(\vec{n}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{(1-D_1)^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{(1-D_2)^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{(1-D_3)^2}}} \quad (3.2)$$

3.3 Évolution de l'endommagement :

On reprend l'idée que l'endommagement est créée par les extensions [44] et on supposera que l'endommagement s'identifie à l'effet mécanique de l'endommagement pour un chargement de traction.

Pour le modèle isotrope : On reprend la déformation équivalente calculée à partir des déformations élastiques ε^e :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1^e \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2^e \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3^e \rangle_+^2}$$

Par contre nous utilisons pour la fonction d'écrouissage, une loi d'évolution qui permettra ultérieurement l'utilisation de l'énergie de fissuration pour identifier les paramètres de la loi. Cette loi d'évolution est inspirée de celle utilisé par Feenstra pour un modèle du type rotating crack [18] :

$$D = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\tilde{\varepsilon}} \exp(B_t(\varepsilon_{d0} - \tilde{\varepsilon})), \dot{D} > 0 \quad (3.3)$$

Cette loi d'évolution peut d'ailleurs être avantageusement utilisée avec le modèle de Mazars.

Le paramètre B_t peut être calculé en fonction de l'énergie de fissuration G_f et de la taille de l'élément h [49] par l'équation suivante : $B_t = \frac{h f_t}{G_f}$ où f_t est la contrainte de rupture du matériau en traction.

Pour le modèle orthotrope : Les extensions dans la direction \vec{n} sont mesurés par :

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{n}) = n_i \varepsilon_{ij}^e n_j$$

Si on calcule $d(\vec{n})$ par l'équation 3.3, on n'est plus assuré que l'application $d(\vec{n})$ soit linéaire en \vec{n} et du coup, l'endommagement ne pourrait plus être représenté par un tenseur.

On souhaite que l'endommagement puisse évoluer autant en intensité qu'en direction, mais la rotation de la base propre du tenseur d'endommagement doit être contrôlée de façon à ce que l'énergie dissipé reste positive.

Le respect du second principe de la thermodynamique sera assuré si :

$$\dot{d}(\vec{n}) \geq 0 \quad \forall \vec{n}$$

Partons d'un état d'endommagement D connu, on suppose que l'incrément d'endommagement possède les mêmes directions principales que l'incrément de déformations élastiques. Soit $B(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ la base des vecteurs propres de l'incrément de déformation et (D_{ij}) la décomposition de D dans cette base. Les valeurs de l'endommagement pour chaque vecteur propre sont $d(\vec{V}_i) = D_{ii}$ (pas de somme). On peut alors appliquer la relation de l'équation 3.3 pour chaque direction \vec{V}_i :

$$\text{si } \varepsilon_{ii}^e > \varepsilon_{d0} \text{ alors } D_{ii} = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{ii}^e} \exp(B_t(\varepsilon_{d0} - \varepsilon_{ii}^e)), \quad \dot{D}_{ii} > 0 \quad (3.4)$$

Seuls les éléments de la diagonale de D écrite dans la base des vecteurs propres de l'incrément de déformations élastiques peuvent évoluer.²

On peut représenter les surfaces seuil d'endommagement et de plasticité dans l'espace des contraintes principales (Figure 3.5)

3.4 Activation de l'endommagement et effet de l'endommagement en compression :

Lors de la modélisation de l'endommagement isotrope, Jacky Mazars [44] a utilisé une seule variable d'endommagement représentant des effets mécaniques de l'endommagement identiques lors de chargements de traction ou de compression. Par contre l'évolution de l'endommagement est par contre différentié suivant le signe de la sollicitation.

Pour modéliser les effets unilatéraux [32] avec des variables scalaires, il a fallu utiliser deux variables internes pour prendre en compte de façon différentiée les endommagements en traction et compression.

A partir du moment où l'endommagement est représenté par une variable tensorielle, il semble inutile d'utiliser deux variables.

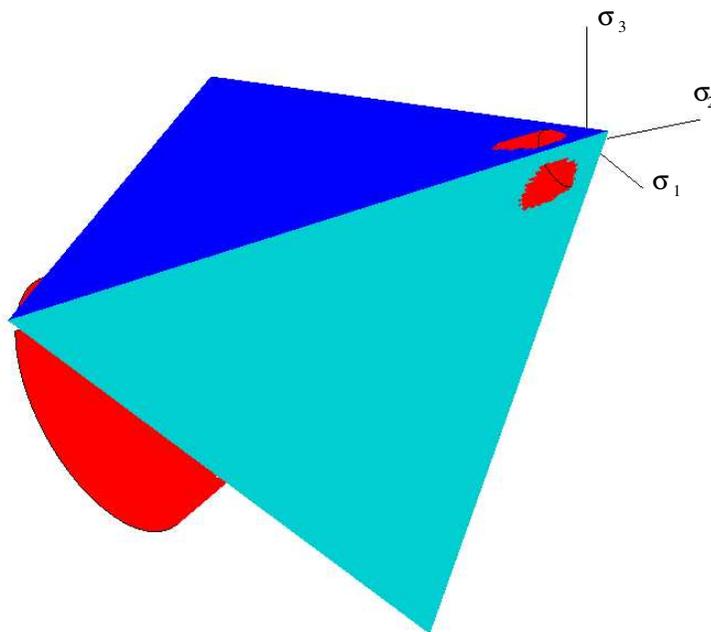
Le processus d'activation de l'endommagement pour un chargement dans la direction normale au plan de fissuration est identique à celui de l'endommagement unilatéral isotrope (Figure 3.6 a).

Lorsque le chargement se situe dans le plan de fissuration, le processus d'activation se trouve inversé (Figure 3.6 b)

L'effet de l'endommagement sur la compression est donc couplé avec l'effet de l'endommagement sur la traction.

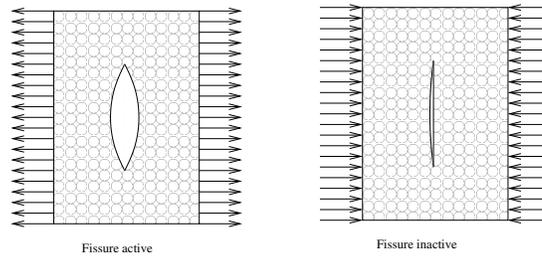
Lors d'un essai de compression dans la direction notée \vec{X}_1 , les extensions transversales ε_2^e et ε_3^e génèrent de l'endommagement $d(\vec{X}_2)$ et $d(\vec{X}_3)$ qui se traduit par un réseau de microfissures approximativement situées dans des plans

²Ce processus est mal justifié dans la thèse de Stéphanie Fichant, ainsi que dans la plupart des publications se rapportant au modèle, mais la programmation du modèle a toujours été correcte.

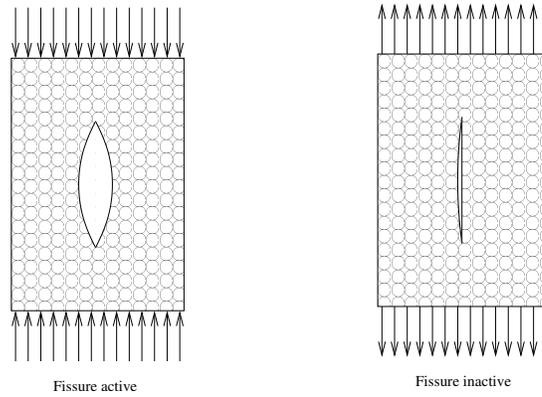


GIBI ECIT

FIG. 3.5 – Surfaces seuil d'endommagement et de plasticité



(a) traction



(b) compression

FIG. 3.6 – Activation de l'endommagement pour un chargement normal au plan de fissuration

passant par l'axe de l'éprouvette (Figure 3.7). A partir de résultats d'essais de compression alternée, pour lequel une mesure des déformations transversales a été réalisée [61]. On peut mesurer pour chaque décharge, la déformation élastique transversale $\varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e$. Si on suppose connue, l'évolution de l'endommagement en fonction des extensions (relation 3.4), on peut en déduire la valeur des endommagements $d(\vec{X}_2)$ et $d(\vec{X}_3)$. D'autre part on peut accéder à la valeur de l'effet de cet endommagement sur la compression D_c .

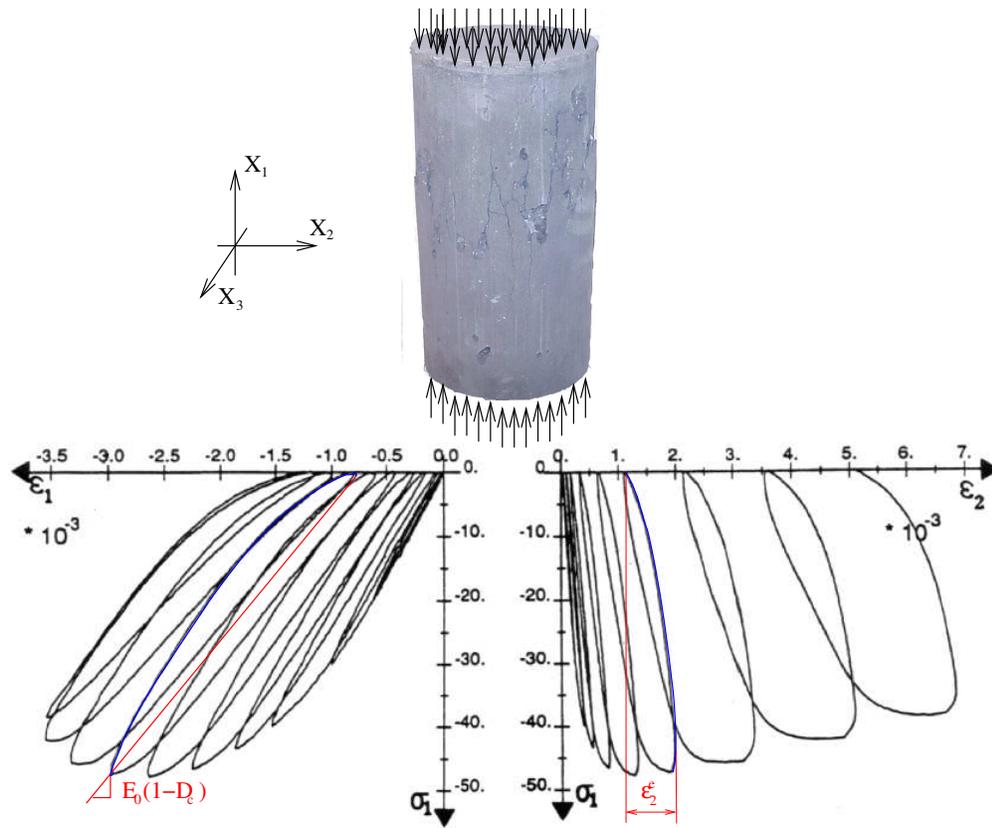


FIG. 3.7 – expérience de compression d'après [61]

Si on trace l'évolution de D_c en fonction de $d(\vec{X}_2) = d(\vec{X}_3)$, on peut identifier une fonction puissance : $D_c = d(\vec{X}_2)^\beta$

L'effet de l'endommagement sur le comportement en compression dans la direction \vec{X}_1

$$d_c = d(\vec{X}_2)^\beta = \left(\frac{d(X_2) + d(X_3)}{2} \right)^\beta$$

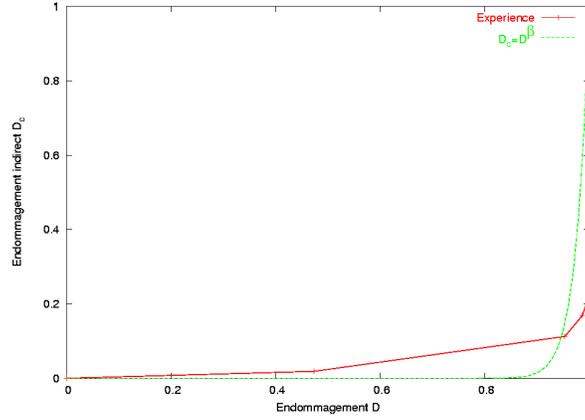


FIG. 3.8 – Identification de l'influence de l'endommagement en compression.

Si on écrit $D \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}$ dans sa base principale, on peut représenter l'effet de l'endommagement sur le comportement en compression par le tenseur

$$D_c \begin{bmatrix} \left(\frac{D_2+D_3}{2}\right)^\beta & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{D_3+D_1}{2}\right)^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{D_1+D_2}{2}\right)^\beta \end{bmatrix}$$

dans la même base.

Pour le modèle isotrope, on utilisera directement : $D_c = D^\beta$

La relation de comportement donne finalement :

$$\sigma_{ij} n_j = (1 - d(\vec{n})) \tilde{\sigma}_{ij}^+ n_j + (1 - d_c(\vec{n})) \tilde{\sigma}_{ij}^- n_j \quad (3.5)$$

où $\tilde{\sigma}^+$ et $\tilde{\sigma}^-$ sont les décompositions du tenseur des contraintes effectives en parties positives et négatives dans sa base propre [38]. Cette relation n'est de toute évidence pas compatible avec les hypothèses classiques de la mécanique des milieux continus.

3.5 Calcul de l'opérateur élastique :

Nous allons calculer la relation d'élasticité qui s'approche le plus de la relation 3.5 au sens énergétique par une formulation variationnelle :

Soit Ω le domaine défini par l'ensemble des vecteurs unitaires \vec{n} :

L'énergie élastique virtuelle obtenue pour le tenseur des contraintes recherché et un domaine défini par l'ensemble des vecteurs unitaires est égale à l'énergie virtuelle obtenue sur le même domaine pour la contrainte définie par la relation 3.5 ; ceci pour tout champ de déformation virtuel cinématiquement admissible.

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \left[(1 - d(\vec{n})) \tilde{\sigma}_{ij}^+ n_j \right] \varepsilon_{ij}^* n_j + \left[(1 - d_c(\vec{n})) \tilde{\sigma}_{ij}^- n_j \right] \varepsilon_{ij}^* n_j \quad \forall \varepsilon^* \text{ tq } \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ji}^*$$

En introduisant l'expression 3.2, on trouve :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{0320} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{0302} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{0300}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{0120} + I_{2102}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{0102} + I_{2120}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^+ \\ \tilde{\sigma}_{22}^+ \\ \tilde{\sigma}_{33}^+ \\ \tilde{\sigma}_{12}^+ \\ \tilde{\sigma}_{13}^+ \\ \tilde{\sigma}_{23}^+ \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} J_{0320} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{0302} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{2100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_{0300}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{0120} + J_{2102}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{0102} + J_{2120}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^- \\ \tilde{\sigma}_{22}^- \\ \tilde{\sigma}_{33}^- \\ \tilde{\sigma}_{12}^- \\ \tilde{\sigma}_{13}^- \\ \tilde{\sigma}_{23}^- \end{pmatrix}$$

avec

$$I_{ijkl} = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\cos^i \theta \sin^j \theta \cos^k \varphi \sin^l \varphi}{\sqrt{\sin^2 \theta \left\{ \frac{\sin^2 \varphi}{(1-D_1)^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{(1-D_2)^2} \right\} + \frac{\cos^2 \theta}{(1-D_3)^2}} d\varphi d\theta \quad (3.6)$$

et

$$J_{ijkl} = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\cos^i \theta \sin^j \theta \cos^k \varphi \sin^l \varphi}{\sqrt{\sin^2 \theta \left\{ \frac{\sin^2 \varphi}{(1-D_{c1})^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{(1-D_{c2})^2} \right\} + \frac{\cos^2 \theta}{(1-D_{c3})^2}} d\varphi d\theta \quad (3.7)$$

La symétrie imposée sur le tenseur ε^* impose la symétrie du tenseur des contraintes σ , ce qui nous permet de trouver un opérateur élastique \mathbf{C} qui vérifie les symétries mineures $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$. La symétrie majeure $C_{ijkl} = C_{klij}$ découle de la symétrie des relations entre σ et $\tilde{\sigma}^+$ et $\tilde{\sigma}^-$ puis des relations démontrées par Ladevèze [38] pour l'introduction de l'effet unilatéral.

3.6 Implémentation numérique :

Un inconvénient majeur de ce modèle est son coût qui le rend quasiment inutilisable sur des ordinateurs courants pour des calculs 3D. Ce coût est principalement dû au temps nécessaire pour calculer les intégrales de surface I_{ijkl} et J_{ijkl} sur une demi sphère à chaque point de Gauss.

Ces intégrales n'ayant pas de solutions analytiques connues, il est nécessaire de les calculer numériquement en utilisant par exemple une méthode de Simpson. On se propose par la suite, d'approximer les intégrales par des polynômes.

3.6.1 Étude des intégrales

Les intégrales sont des fonctions de trois variables D_1 , D_2 et D_3 , si on les étudie en fonction des variables $x_1 = 1 - D_1$, $x_2 = 1 - D_2$ et $x_3 = 1 - D_3$, on remarque que :

$$I_{ijkl}(0, x_2, x_3) = 0 \quad (3.8)$$

$$I_{ijkl}(x_1, 0, x_3) = 0 \quad (3.9)$$

$$I_{ijkl}(x_1, x_2, 0) = 0 \quad (3.10)$$

$$I_{ijkl}(1, 1, 1) = 1 \quad (3.11)$$

Les intégrales sont premièrement évaluées par la méthode de Simpson prenant 80×80 points d'intégration pour des valeurs des abscisses x_i variant de 0 à 1 par pas de 0.05 (soit 9262 points par intégrale). On peut par exemple représenter (figure 3.9) I_{0302} en fonction de x_1 et x_2 pour des valeurs de x_3 constantes.

Ces fonctions sont monotones croissantes dans l'intervalle d'étude et semblent suffisamment régulières pour être interpolées par des polynômes.

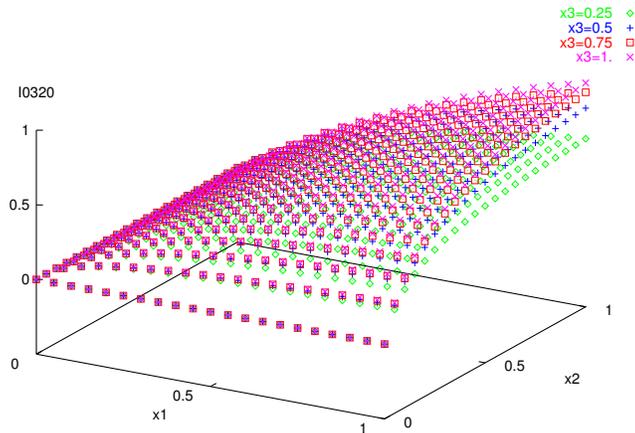
3.6.2 Interpolation de intégrales.

Méthode d'interpolation. Parmi différents essais de polynômes (algébriques, Fourier, sinusoidaux), les polynômes sinusoidaux sont ceux qui convergent le plus rapidement.

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijkl} \sin^i \left(\frac{\pi x_1}{2} \right) \sin^j \left(\frac{\pi x_2}{2} \right) \sin^k \left(\frac{\pi x_3}{2} \right)$$

Deux conditions sur les valeurs de P_n , correspondant aux équations 3.8 à 3.10, permettent de calculer les valeurs des coefficients des deux premiers monômes. Les autres coefficients sont obtenus par une méthode des moindres carrés.

L'utilisation de polynômes d'ordre 8 permet d'obtenir un coefficient de corrélation proche de 1 à la précision de la machine près.

FIG. 3.9 – évolution de I_{0320} en fonction de x_1 et x_2

Stabilité de la solution Étant donné le degré relativement élevé des polynômes et les valeurs grandes des coefficients par rapport à 1, on peut s'attendre à une oscillation de la fonction interpolée autour des points d'interpolation. Une représentation graphique des fonctions interpolées discrétisées avec un pas cinq fois plus petit que le pas d'interpolation nous permet de nous assurer du caractère non oscillant de la solution. La figure 3.10 représente par exemple la fonction $I_{0320}(0.5, x_2, x_3)$.

3.6.2.1 Conclusion

L'implémentation numérique du modèle d'endommagement anisotrope par une méthode de régression permet d'utiliser le modèle pour des calculs bidimensionnels et tridimensionnels utilisant un grand nombre de degrés de libertés sans être pénalisé par la complexité du modèle.

Les temps de calculs sont entièrement comparables à ceux obtenus avec un modèle isotrope.

Les écarts par rapport à la solution de référence sont insignifiants.

3.6.3 Paramètres du modèle :

Le modèle comporte donc en plus des paramètres élastiques E et ν , deux paramètres d'écouissage pour la plasticité, le seuil initial w_0 et le module d'écouissage q , trois paramètres pour l'endommagement : le seuil en déformation ε_{d0} , le paramètre d'écouissage B_t et le coefficient de couplage avec la

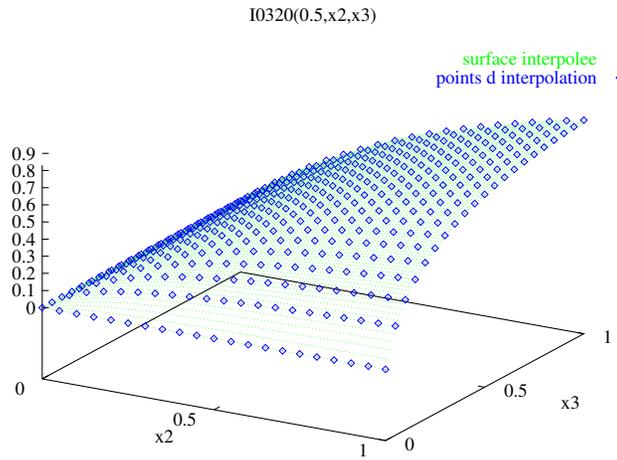


FIG. 3.10 – Interpolation de I_{0320} en fonction de x_2 et x_3 pour $x_1 = 0.5$

compression β . Ces paramètres s'identifient facilement à partir du comportement désiré en traction et compression.

3.7 Applications :

3.7.1 Comportement uniaxial :

On soumet un élément de volume à un chargement uniaxial cyclique, les effets attendus tels que l'endommagement en traction et compression, l'effet unilatéral.

Les paramètres utilisés pour ce calcul sont :

$$\varepsilon_{d0} = 1 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha = 49$$

$$q = 850 \text{ MPa}$$

$$w_0 = 9.5 \text{ MPa}$$

$$B_t = 25000$$

On constate que le résultat correspond à ce que nous recherchions, et en particulier, les évolutions des déformations transversales et volumiques sont plus conformes à la réalité que celles obtenues pour des modèles isotropes.

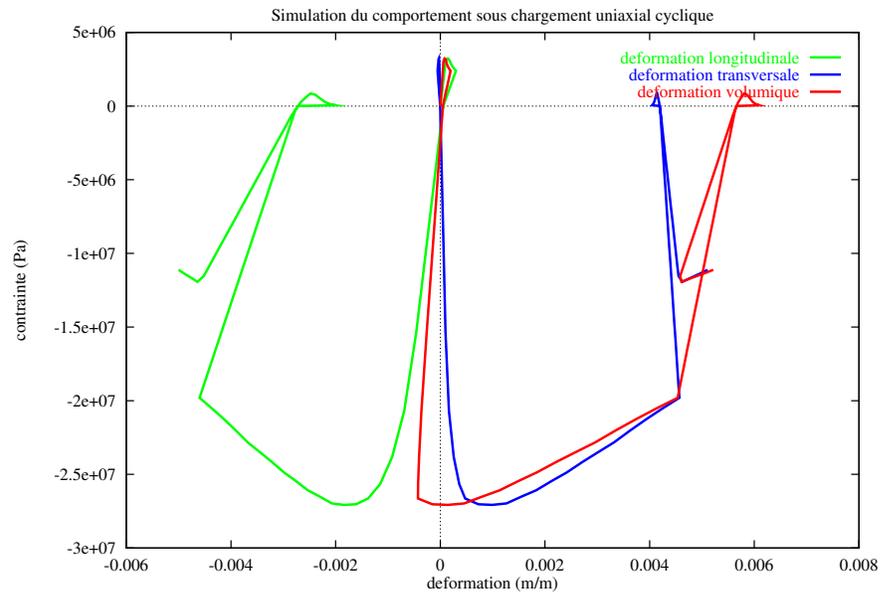


FIG. 3.11 – Comportement uniaxial

3.7.2 Influence de l'anisotropie matérielle sur l'anisotropie structurelle :

On peut maintenant reprendre l'exemple de l'introduction et comparer l'évolution des raideurs en fonction de l'angle entre l'axe de la sollicitation et le plan d'endommagement. Pour le modèle anisotrope, seul l'endommagement D_{yy} est distribué, les autres composantes du tenseurs étant nulles.

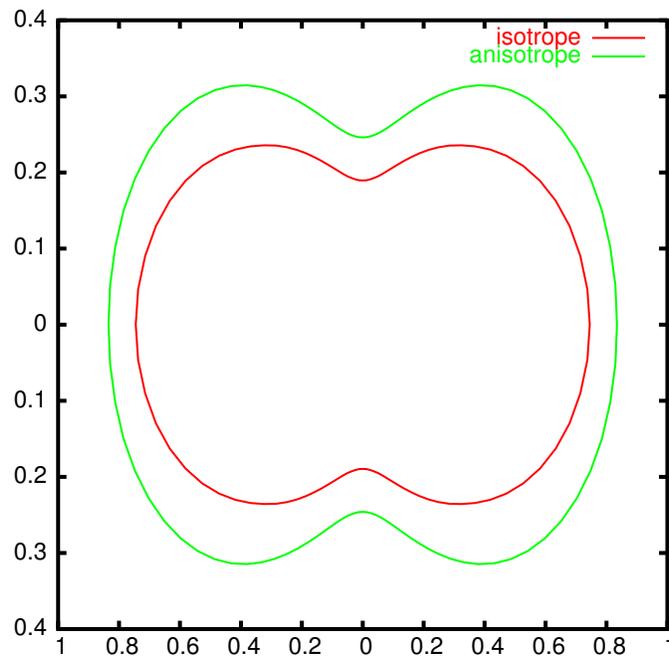


FIG. 3.12 – Apport de l'anisotropie matérielle sur l'anisotropie structurelle

On constate (Figure 3.12) que le modèle anisotrope donne des résultats globalement plus raides, mais que l'évolution des raideurs en fonction de l'angle de la sollicitation semble identique. Plus précisément, on peut calculer la moyenne des raideurs et l'écart type par rapport à la moyenne pour chacun des cas. La part de l'anisotropie matérielle sur l'anisotropie structurelle, dans le cas considéré est donc inférieure à 9%, alors que son influence sur la raideur est proche de 20%.

3.7.3 Calculs de structures :

Le modèle a été testé avec satisfaction sur différentes structures classiques comme des poutres en béton armé ou non armé en 2D ou en 3D [20, 9]. Je vais simplement présenter une série de calculs qui montrent les forces et les

	Isotrope	Anisotrope	Différence
Moyenne	0,392	0,490	19,9%
Écart type	0,190	0,209	8,9%

TAB. 3.1 – Évolution des raideurs pour les modèles isotrope et anisotrope

faiblesses du modèle. Il s'agit de calculs effectués lors d'un benchmark piloté par EDF, autour des essais réalisés par Nooru-Mohamed [53], il ont été menés dans une philosophie correspondant à une démarche prédictive. Les paramètres du modèle ont été identifiés à partir des caractéristiques matérielles disponibles et aucune modification n'a été réalisée afin de coller au mieux aux expériences. A noter que nous avons également vérifié que dans un cas de traction, la maîtrise de l'énergie de fissuration par l'équation 3.3 permettait d'obtenir un résultat objectif par rapport à la taille des mailles.

Le corps d'épreuve, réalisé en béton contenant des granulats d'une dimension maximale de 16mm est une plaque carrée de 50mm d'épaisseur de 200 mm de côté entaillée sur deux côtés opposés (Figure 3.13). Les actions P et P_s sont exercés par l'intermédiaire de cadres supposés infiniment rigides par rapport au spécimen.

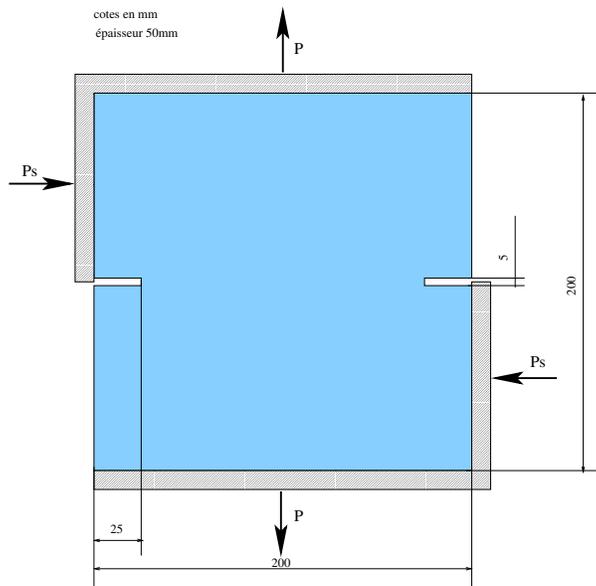


FIG. 3.13 – Corps d'épreuve essais de fissuration mixte

Nous avons effectué les calculs pour différents trajets de chargement :

Trajet 1 : Cisaillement à effort normal nul.

Le spécimen est d'abord sollicité en tension jusqu'à une ouverture de fissure désirée, puis la charge P est imposée nulle et un déplacement de cisaillement est imposé.

Trajet 2 : Cisaillement à effort de compression constant.

Ce cas est identique au précédent sauf qu'une charge $P = -1kN$ est imposée pendant le chargement de cisaillement.

Trajet 3 : Traction sous effort de cisaillement constant.

Un effort de cisaillement $P_s = 5kN$ est imposé, puis l'éprouvette est chargée en traction.

Trajet 4 : Traction sous effort de cisaillement maximal.

Un effort de cisaillement P_s correspondant à la charge maximale que peut supporter le spécimen est imposé, puis l'éprouvette est chargée en traction.

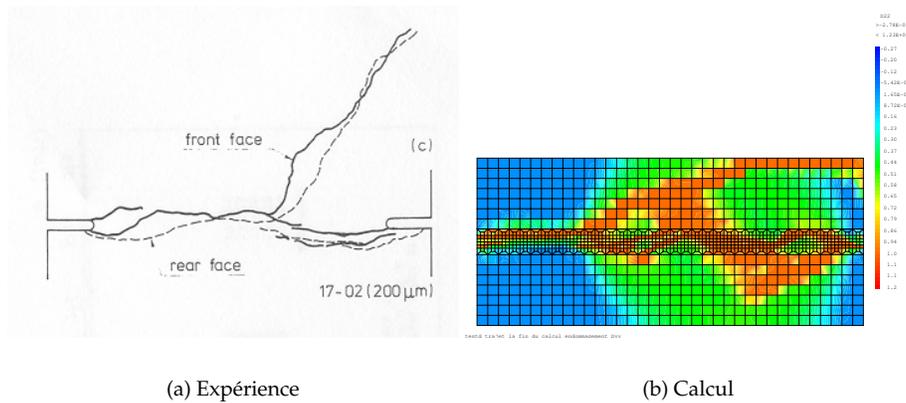


FIG. 3.14 – Comparaison des faciès de rupture trajet 1

La comparaison des faciès de rupture expérimentaux avec les résultats de calculs montrent que le modèle est capable de reproduire les modes de ruine pour des cas de chargements variés. La comparaison des courbes globales obtenues montre que d'une façon générale la charge de rupture est correctement obtenue, mais la phase post-pic sous-estime l'énergie dissipée durant le processus de ruine.

D'autre part, les calculs menés avec les versions isotrope et anisotrope du modèle ont présenté des résultats pratiquement identiques.

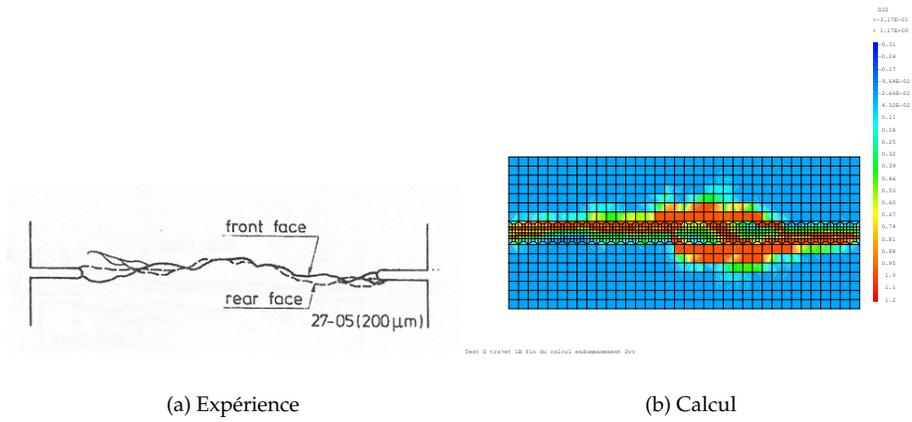


FIG. 3.15 – Comparaison des faciès de rupture trajet 2

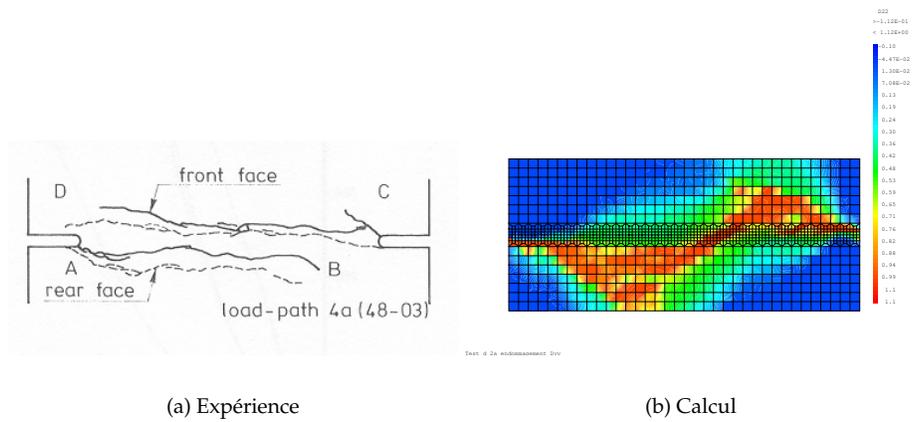


FIG. 3.16 – Comparaison des faciès de rupture trajet 3

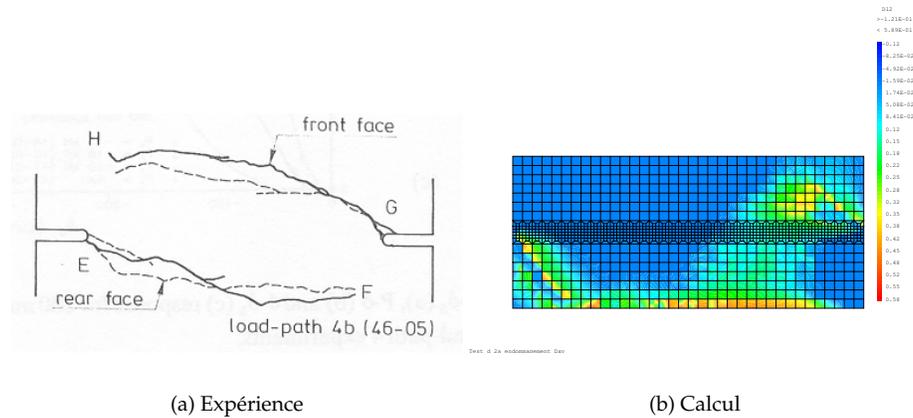


FIG. 3.17 – Comparaison des faciès de rupture trajet 4

3.8 Conclusions :

Le modèle développé a été sûrement le premier modèle d'endommagement unilatéral anisotrope couplé à l'endommagement pour le béton qui aie été suffisamment stable pour être implémenté dans un code de calculs aux éléments finis.

Les calculs effectués ne nous ont pas permis de discriminer les approches isotrope et anisotrope. Dans les cas que nous avons abordés, l'anisotropie structurale a été suffisante pour représenter correctement le comportement à l'échelle de la structure. Par contre, l'anisotropie des déformations anélastiques (ou plastiques) est essentielles, ne serait-ce que pour représenter correctement un essai de compression.

Contrairement à certains a priori, l'introduction de l'anisotropie ne rend pas le modèle plus complexe à utiliser ni à identifier, et finalement le dépouillement des résultats peut être plus aisé qu'avec le modèle isotrope.

Le choix de la facilité pour le couplage entre l'endommagement et la plasticité pose finalement des problèmes car dans certains cas, les deux phénomènes se trouvent concurrents et par exemple, le développement de déformations plastiques importantes diminue indirectement les déformations élastiques et peut empêcher le développement de l'endommagement. D'autre part, l'énergie de fissuration G_f n'est couplée qu'avec l'endommagement et est du coup mal maîtrisée lors de l'apparition de plasticité.

Chapitre 4

Écoulements dans les fissures.

4.1 Introduction :

Les structures du génie civil sont conçues pour résister mécaniquement aux sollicitations qui leur sont exercées, mais ont dans certains cas un rôle de barrière : Elles doivent empêcher les échanges entre plusieurs milieux.

C'est le cas des barrages, des enceintes de confinement, des structures permettant le stockage de déchets, mais aussi d'autres structures plus courantes.

L'étude effectuée part de la constatations d'un manque de prédictivité dans les méthodes employées pour quantifier les écoulements de fluides ou de gaz au travers de structures fissurées.

Des outils de simulation existent pour prédire l'état d'endommagement ou de fissuration de structures sollicitées mécaniquement, d'autres outils permettent de calculer les écoulements de fluides ou de gaz dans des canaux dont on connaît la géométrie [54], mais les calculs d'écoulements dans les milieux fissurés utilisent des modélisations extrêmement simplifiées basées sur un écoulement de Poiseuille pondéré par un coefficient de débit ξ représentant la tortuosité de la fissure. De nombreux essais permettent de déterminer la valeur de ce coefficient de tortuosité dans des situations différentes [50, 63, 64, et autres].

Les conditions d'écoulement étant très variables en fonction des paramètres de pression, d'ouverture de fissure, de tortuosité et de caractéristiques du fluide considéré ; les résultats des modèles développés sont rarement extrapolables en dehors des conditions pour lesquelles ils ont été établis.

Nous proposons d'utiliser le même niveau de sophistication pour les calculs d'écoulement que pour les calculs mécaniques non linéaires, ce qui impose de discrétiser les équations de Navier Stokes et d'avoir une connaissance suffisante de la géométrie dans laquelle s'effectue l'écoulement.

La position et l'ouverture des fissures est déterminée à parti de calculs mécaniques non linéaires, à partir de ces résultats et de données sur la microstructure du matériau, on génère un profil de fissuration compatible avec

l'échelle de l'écoulement. Ce profil de fissuration est ensuite utilisé pour calculer l'écoulement au travers des fissures considérée. Une des originalités de cette approche multi-échelle est que le passage ne se fait pas du "micro" vers le "macro" mais du "macro" vers le "micro".

L'étude s'est appuyée sur l'expérience CESA pilotée par EDF SEPTEN [25], cofinancé par la communauté Européenne et a été le sujet de doctorat de Hocine Boussa [8].

4.2 Détermination des profils de fissuration.

4.2.1 Échelle de la mécanique du solide.

Il s'agit de l'échelle à laquelle on peut considérer que les propriétés mécaniques du matériau sont homogènes, pour un béton armé la dimension d'un Volume Élémentaire Représentatif est de l'ordre de 3 fois la taille du plus gros granulat. Comme on se place délibérément à cette échelle pour faire les calculs de structure, les échelles inférieures ne sont pas représentées.

Lors du calcul de structure, on aura pris le soin d'utiliser une méthode de régularisation pour représenter les phénomènes de localisation. Quelque soit la méthode utilisée, on pourra l'utiliser pour évaluer la position et l'ouverture de fissure à partir d'un champ de variable internes, et de contraintes.

Dans le cas de l'adoption de la méthode de Hillerbog [28, 27], on fait l'hypothèse de la formation d'une seule macrofissure dans un élément fini, et on peut déterminer son ouverture et sa position dans l'élément de la manière suivante :

- On calcule les déformations inélastiques ε^{in} à partir des déformations ε , de la contrainte σ et du tenseur de souplesse élastique S^e :

$$\varepsilon_{ij}^{in} = \varepsilon_{ij} - S_{ijkl}^e \sigma_{kl}$$

- Pour une direction orientée par le vecteur \vec{n} on peut calculer l'ouverture δ_n dans chaque élément fini Ω_e :

$$\delta_n = \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ij}^{in} n_i n_j dx_n$$

- La position X_c de la fissure dans l'élément fini suivant l'abscisse x_n est calculée comme un centre de pression :

$$M_n = \int_{\Omega_e} x_n \varepsilon_{ij}^{in} n_i n_j dx_n \quad X_c = \frac{M_n}{\delta_n}$$

Le calcul de la position dans l'élément est nécessaire pour avoir un réseau de fissures continues entre deux éléments adjacents.

L'ouverture de fissure dépend naturellement des valeurs des variables internes (endommagement et déformations plastiques) mais aussi de l'état de sollicitation, et la méthode est capable de détecter si une fissure existante est ouverte ou fermée. Un exemple de calcul relatif au benchmark organisé autour de MAEVA est représenté sur la figure 4.1.

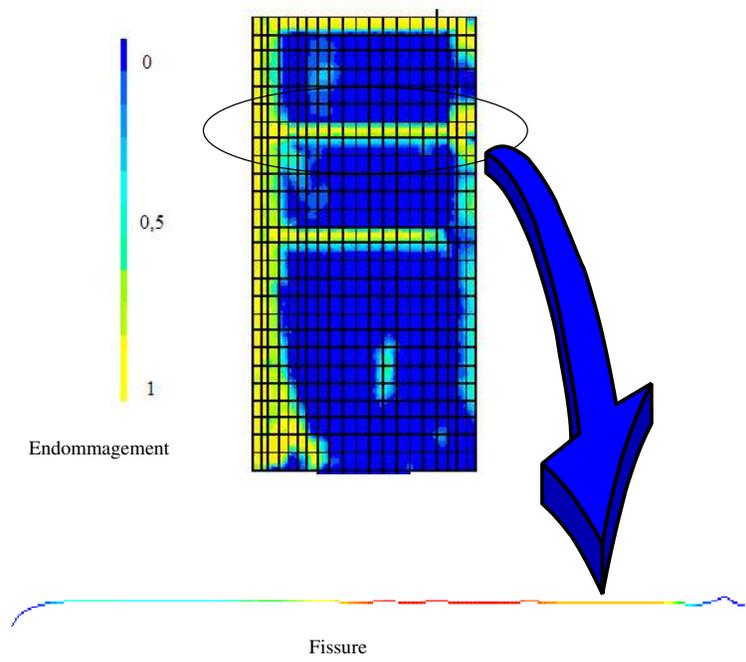


FIG. 4.1 – Ouverture de fissure

4.2.2 Échelle de l'écoulement :

4.2.2.1 Échelle pertinente :

La structure de la fissure est complexe et peut être considérée comme fractale [43, 12, 2], nous ne nous attacherons qu'à la partie de la géométrie que nous considérons comme pertinente au niveau de l'écoulement dans les fissures. Les fissures susceptibles d'être traversés par des écoulements ont des ouvertures supérieures à $0,1\text{mm}$ et les géométries "pertinentes" ont des dimensions supérieures au dixième de l'ouverture de fissure soit $0,01\text{mm}$. Les anfractuosités de dimension inférieures à cette limite pourront être considérées dans la couche limite de l'écoulement.

4.2.2.2 Modèle géométrique bidimensionnel :

Si on observe une fissure dans le béton au microscope, on peut constater que la géométrie peut être modélisée par une succession de segments de droites de longueurs l_i et d'orientations α_i par rapport à la ligne moyenne de fissuration différentes.

On supposera que les deux lèvres de fissure ont la même géométrie et que pour des raisons mécaniques les angles α_i sont tous inférieurs à $\frac{\pi}{2}$.

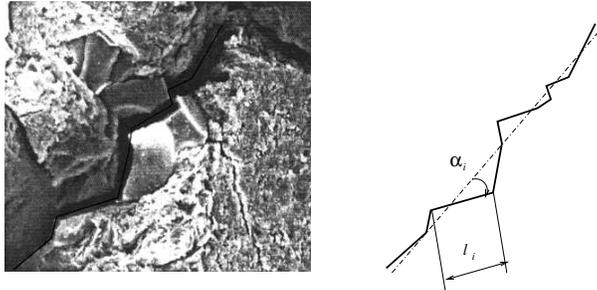


FIG. 4.2 – Modèle géométrique de fissure (Photo d'après [10])

4.2.2.3 Étude expérimentale :

Cette étude a été menée par Claire Lawrence au LMDC de Toulouse avec l'appui de Erick Ringot, elle a permis de dégager les éléments essentiels permettant de caractériser un profil de fissuration à l'échelle "pertinente" que nous avons définie. Nous avons choisi de faire varier un certain nombre de paramètres susceptibles d'influencer la géométrie des fissures à cette échelle :

- La résistance caractéristique du béton avec trois formulations basées sur des granulométries identiques :
Un béton ordinaire B30.

Un béton à hautes performantes B60
 Un béton à très hautes performances B80.

- Le gradient de contraintes lors de la création de la fissuration avec des essais en flexion 3 points et en flexion 4 points.

Par contre de façon à limiter l'ampleur de l'étude expérimentale, nous n'avons pas testé différentes distributions granulométriques dont l'influence sur le profil de fissuration paraît évidente.

Quatre essais en flexion 3 points et un en flexion 4 points ont été réalisés sur des éprouvettes $10 \times 10 \times 50 \text{ cm}^3$ pour chaque formulation. Chaque partie d'éprouvette rompue est ensuite contre-moulée avec une pâte de ciment colorée en rouge puis découpée en cinq tranches (ce qui fait au total 120 profils et contre profils à étudier) qui seront ensuite observées.

Les profils de fissuration sont ensuite scannés simplement avec un scanner à plat offrant une résolution optique de $40 \mu\text{m}$, les images sont binarisées de façon à obtenir détourer le profil de fissuration puis le profil binaire est extrait sous la forme d'une suite de pixels, finalement le résultat est vectorisé pour obtenir une succession de segments de droite (Figure 4.3) L'ensemble des opérations de binarisation et de profilage ont été effectués avec le logiciel VISILOG et de développements effectués au LMDC, la vectorisation a été effectuée avec un logiciel que nous avons spécialement développé.

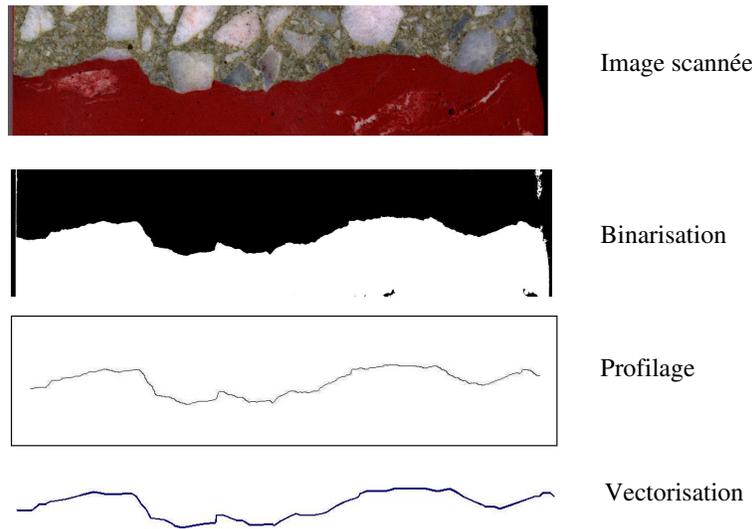
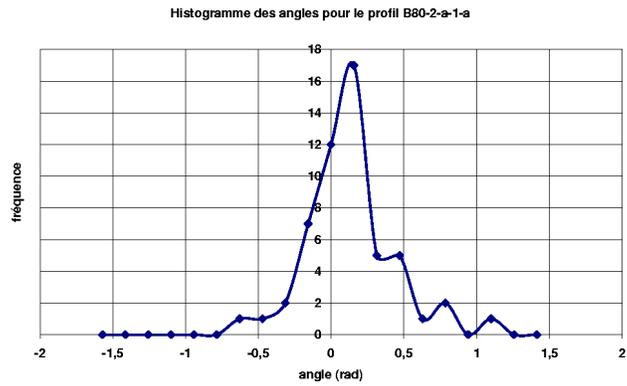


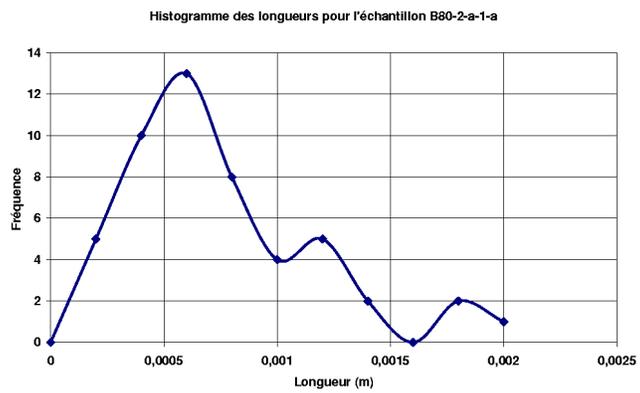
FIG. 4.3 – Processus de traitement d'image

4.2.2.4 Étude statistique des résultats :

On peut tracer par exemple la distribution des angles et des longueurs pour un échantillon de B80 testé en flexion 3 points (Figure 4.4)



(a) Angles



(b) Longueurs

FIG. 4.4 – Étude d'un profil de fissuration

Nous avons choisi de modéliser les distributions par une loi normale pour les angles et une loi log-normale pour les longueurs permettant dans chaque cas d'obtenir des coefficients de corrélation supérieurs à 95%. Les résultats significatifs sont pour chaque condition d'essai : la moyenne et l'écart type des longueurs de segments et l'écart type des distributions angulaires, sachant que la moyenne des angles est théoriquement nulle.

Les résultats importants de cette campagne d'essai sont :

- Les analyses n'ont pas permis de discriminer les essais de flexion 4 points des essais de flexion 3 points. On aurait pu penser qu'un gradient de contrainte plus important aurait "canalisé" la fissuration, mais l'hétérogénéité du matériau est sûrement trop importante pour que ce phénomène soit visible.
- Nous n'avons pas trouvé de corrélation entre les distributions angulaires et celles des longueurs.
- Les B60 et B80 donnant tous les deux des ruptures transgranulaires ont des distributions équivalentes.
- Les écarts types $\bar{\alpha}$ des angles sont de 31° pour le B30 et de 24° pour les B60 et B80.
- La moyenne des longueurs $\bar{\mu}$ est de $0,56 \text{ mm}$ pour les B30 et de $0,65 \text{ mm}$ pour les B60 et B80 avec un écart type $\bar{\sigma}$ de $0,28 \text{ mm}$ pour les B30 et de $0,15 \text{ mm}$ pour les B60 et B80.

Ces résultats sont conformes avec les hypothèses de travail, en particulier, la longueur des segments est compatible avec la précision de mesure. Les ruptures transgranulaires provoquées dans le bétons B60 et B80 se traduisent par des distributions angulaires de plus faible écart type et des distributions de longueur dont la moyenne est plus grande que pour les B30. On remarque que l'écart type $\bar{\sigma}$ des distributions de longueurs est approximativement égal à la moitié de la moyenne, et dans l'utilisation du modèle on prendra ensuite

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\mu}}{2}$$

4.3 Simulation des écoulements :

Les simulations sont effectuées avec le code aux éléments finis CASTEM2000 en utilisant la résolution directe des équations de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

avec :

- U et V sont les composantes du vecteur vitesses dans les directions d'abscisses x et y .
- P^* est la pression motrice $P^* = P + \rho gh$
- ρ est la masse volumique du fluide
- ν est la viscosité cinématique

La validité de l'hypothèse d'incompressibilité du fluide est vérifiée à posteriori pour l'air si le nombre de Mach est inférieur à 0,3 [13].

Le maillage utilise des éléments isoparamétriques à 8 noeuds, les vitesses sont nulles sur les lèvres de la fissure et les pressions sont imposées en entrée et en sortie de fissure.

Pour une ouverture de fissure w , une vitesse d'intensité V et une viscosité cinématique ν , le nombre de Reynolds $Re = \frac{Vw}{\nu}$ caractérise la turbulence de l'écoulement ; pour de faibles nombres de Reynolds, l'écoulement est laminaire et une densité de 10 éléments dans l'épaisseur est suffisante pour simuler l'écoulement, par contre pour une turbulence de l'écoulement plus prononcée, il faut utiliser un maillage plus fin ou utiliser une modélisation macroscopique du type $K - \epsilon$ [39]. Pour des raisons de capacité des ordinateurs utilisés, nous avons limité le nombre d'éléments à 20 dans l'épaisseur.

Le maillage d'une fissure de 50mm de long avec 16 éléments dans l'épaisseur comporte 38000 éléments et un peu plus de noeuds et il faut à peu près 10000 itérations avant d'atteindre un régime établi.



FIG. 4.5 – Partie de maillage correspondant à 8mm de fissure

4.4 Validation du modèle géométrique :

4.4.1 Stabilité statistique.

Les résultats précédents peuvent être utilisés pour obtenir des profils de fissuration générés aléatoirement. Pour savoir si le modèle est statistiquement stable vis à vis des résultats escomptés, nous pouvons simuler des écoulements dans plusieurs fissures tirés statistiquement avec les mêmes paramètres. Les résultats obtenus pour ces différents tirages doivent peu différer. Par exemple, sur la figure 4.6, on a représenté 3 tirages pour un écart type de l'angle de 30° , une longueur moyenne de 0,3mm et une longueur de 50mm.

Des simulations d'écoulement d'air ont été effectués pour chacun des profils obtenus avec des conditions proches de celles que nous devrions trouver pour le projet MAEVA :

- Gradient de pression : $\frac{dP}{dx} = 2 \cdot 10^2 ; 2 \cdot 10^4 ; 5 \cdot 10^4 ; 5 \cdot 10^5 ; 8 \cdot 10^5 Pa/m ;$

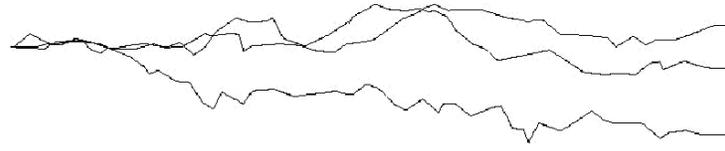


FIG. 4.6 – Exemple de trois tirages

– Ouverture de fissure constante sur sa longueur :

$$w = 0,1\text{mm} ; 0,15\text{mm} ; 0,25\text{mm} ; 0,5\text{mm}$$

Pour chaque simulation, on mesure le rapport entre le débit calculé et le débit de Poiseuille ou le coefficient de débit

$$\xi = \frac{Q}{Q_{\text{Poiseuille}}}$$

Les plus grands écarts constatés entre deux tirages concernent les faibles pressions et les petites ouvertures (Figure 4.7) et sont inférieurs à 10%. Nous pouvons donc affirmer que la méthode présente des résultats peu sensibles à l'aléa et statistiquement fiables.

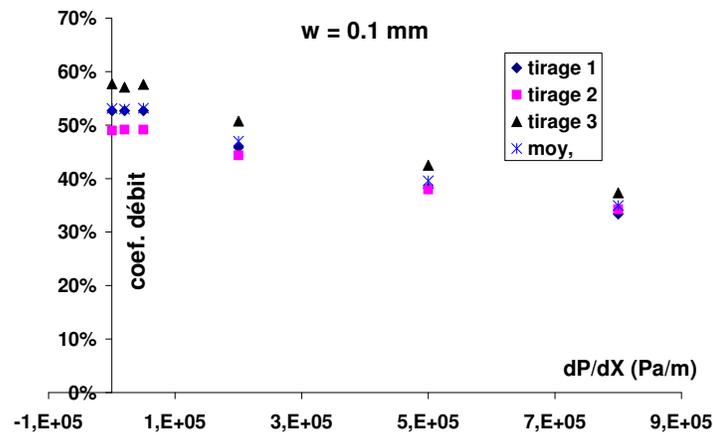


FIG. 4.7 – Comparaison des résultats

4.4.2 Critique de l'approche bidimensionnelle :

De toute évidence, l'approche bidimensionnelle est réductrice pour le type de calculs effectués, et le fluide a dans la réalité tendance à contourner les obstacles, ce qui provoque un effet de chenalisation bien connu des géologues¹. Nous avons constaté, en effet que certains tirages contenant des éléments dont l'angle avec la ligne moyenne s'approche de 90° provoquent un bouchage et les débits obtenus s'écartent nettement des valeurs moyennes.

De toute évidence, il serait préférable d'effectuer des simulations tridimensionnelles de l'écoulement, mais les temps de calculs sont alors tellement longs que nous en avons limité le nombre. Ces simulations ont permis d'évaluer la différence entre les écoulements bidimensionnels et tridimensionnels.

Nous avons opté pour une géométrie simplifiée pour le modèle tridimensionnel. La surface de fissuration est générée par des facettes carrées dont la dimension est la moyenne $\bar{\mu}$ des longueurs du modèle bidimensionnel. La distribution angulaire α est représentée par un déplacement hors plan $z = \bar{\mu}\alpha$ des noeuds du maillage (Figure 4.8).

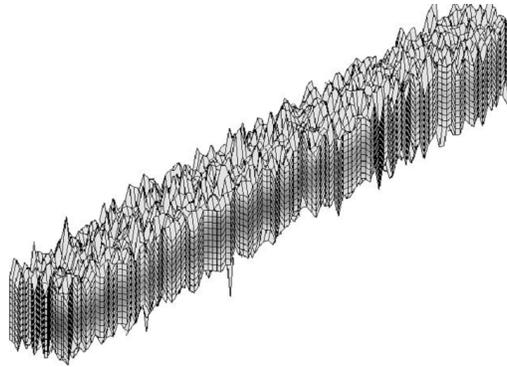


FIG. 4.8 – Maillage tridimensionnel

Des simulations ont été effectuées pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Pour chaque calcul, nous avons effectué les simulations bidimensionnelles basées sur des géométries obtenues à partir de 10 tranches du modèle tridimensionnel. La moyenne des résultats obtenus pour les calculs 2D est comparée au résultat du calcul 3D pour différentes conditions d'écoulement (figure 4.9).

Contrairement à ce que l'on aurait initialement pu imaginer, les écoulements moyens en 2D sont légèrement (à peu près 50%) supérieurs aux ceux obtenus en 3D, cet écart ayant tendance à diminuer pour les nombres de Reynolds plus importants, malheureusement, nous n'avons pas trouvé de résultats dans la littérature qui confirment ou infirment cette observation. D'autres cal-

¹D'après une conversation privée avec Joëlle Riss de CDGA de Bordeaux

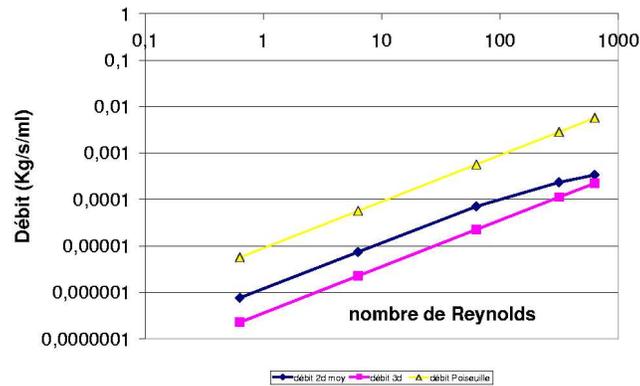


FIG. 4.9 – Comparaison 2D / 3D

culs devront être effectués sur des ordinateurs plus puissants pour s'assurer que ce n'est pas un effet de la discrétisation.

4.5 Quelques résultats :

Des simulations ont été effectuées pour des fissures de 50mm de long et d'ouverture constante en faisant évoluer l'ensemble des paramètres géométriques et d'écoulement dans leur plage de variation. Les résultats obtenus sont nombreux et je vais simplement en indiquer quelques uns :

4.5.1 Influence de $\bar{\alpha}$:

L'écart type de la distribution des angles est le facteur géométrique le plus déterminant, nous avons fait des simulations pour des valeurs de $\bar{\alpha}$ comprises entre 15° et 45° .

Pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire sans recirculation et le coefficient de débit est approximativement constant. à partir d'une valeur de transition du nombre de Reynolds dépendant de $\bar{\alpha}$ des recirculations se produisent et le coefficient de débit varie fortement.

4.5.2 Influence de $\bar{\mu}$:

L'influence de la longueur moyenne des segments est finalement relativement faible par rapport à celle de l'écart type de l'angle. On peut néanmoins

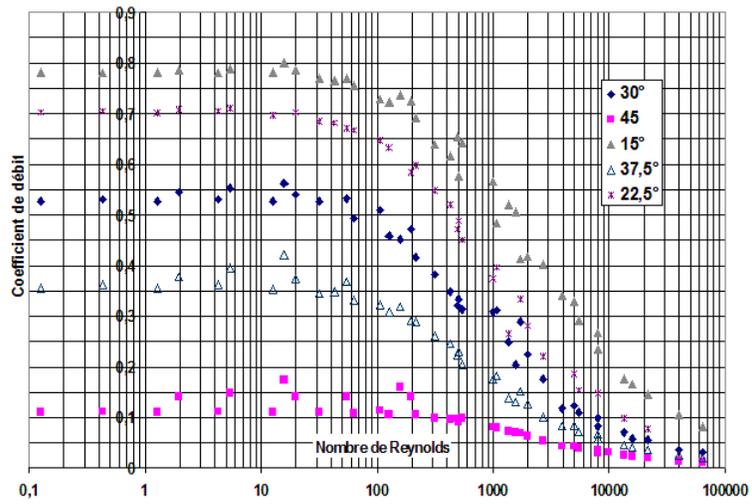


FIG. 4.10 – Influence de $\bar{\alpha}$ sur le coefficient de débit

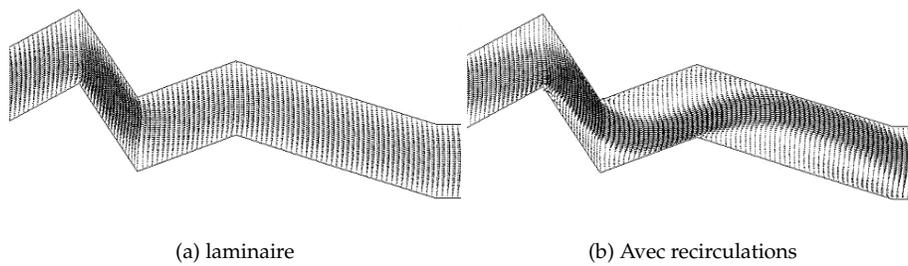


FIG. 4.11 – Types d'écoulement

constater 3 types d'écoulements (figure 4.12) :

- $\bar{\mu} \ll w$: les irrégularités de la géométrie de la fissure se comportent comme de la rugosité.
- $\bar{\mu} \sim w$: le cheminement est tortueux et des recirculations se forment rapidement, c'est finalement le cas pour lequel les coefficients de débit sont les plus faibles.
- $\bar{\mu} \gg w$: La ligne moyenne suit l'irrégularité de la géométrie de la fissure, l'écoulement reste laminaire longtemps.

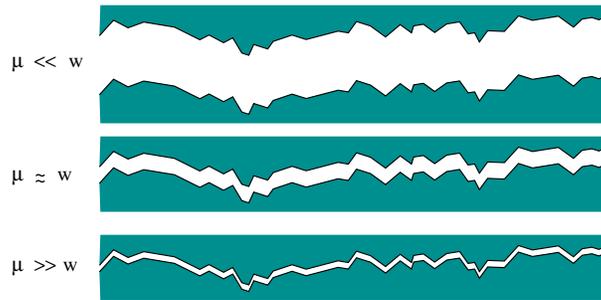


FIG. 4.12 – 3 configurations

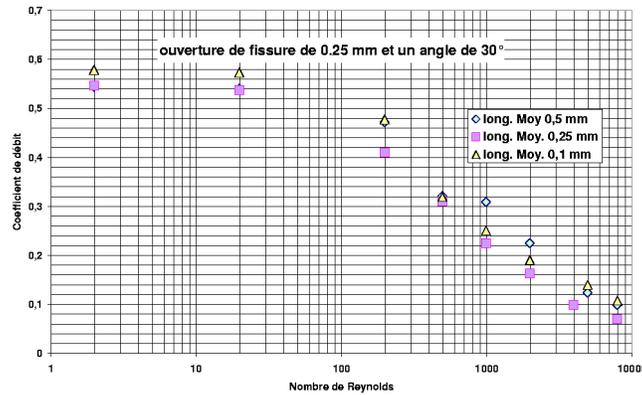
Concrètement les différences observées sur les coefficients de débit sont peu importantes, mais on constate que le coefficient de débit est le plus faible lorsque $\bar{\mu} = w$

4.5.3 Application au calcul du taux de fuite pour le projet CESA :

Le benchmark organisé autour du projet CESA consistait à calculer le taux de fuite en air et en vapeur de la maquette MAEVA (Figure 4.14) représentant une enceinte de confinement constitué essentiellement d'un mur cylindrique en béton armé précontraint de 1,2m d'épaisseur et de 16m de diamètre. Le processus de sollicitation correspond à une série de chargements thermomécaniques (Figure 4.14 b)) combinés provoqués par de l'air (Séquences 1, 3 et 4) ou de la vapeur (Séquences 2 et 5) sous pression représentant différents niveaux d'accident graves sur le réacteur.

A l'issue du calcul thermomécanique correspondant à chaque niveau de sollicitation, nous avons trouvé un champ d'endommagement et calculé les ouvertures de fissures maximales 4.1. La seule possibilité de fuite correspondait à l'existence de une à trois fissures traversantes. En utilisant le modèle statistique de profil de fissuration on peut générer des fissures réalistes sur la base des ouvertures précédemment calculées (Figure 4.15).

La difficulté étant de calculer le débit dans une fissure d'une longueur de 1,2m dont l'ouverture varie avec l'abscisse. La simulation directe de l'écoulement dans la fissure aurait demandé la résolution d'un problème dont le

FIG. 4.13 – Influence de $\bar{\mu}$ sur le coefficient de débit.

nombre de degrés de liberté est proche de 2 millions et n'était pas à la portée des ordinateurs de l'université. Nous avons donc identifié le coefficient de débit correspondant aux conditions moyennes d'écoulement dans la fissure, à partir des résultats précédents en adoptant la définition suivante pour l'ouverture de fissure équivalente W_e (Équation 4.2).

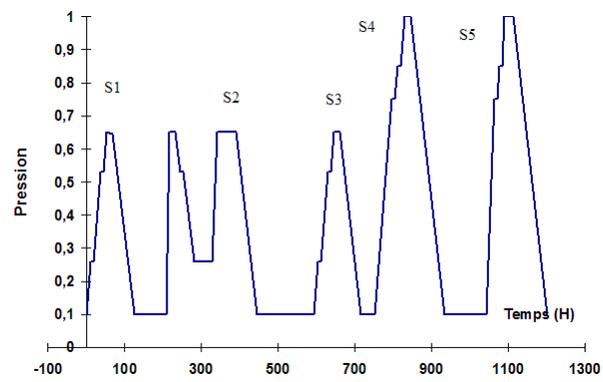
$$W_e^3 = \frac{L}{\int_0^L \frac{dx}{w^3}} \quad (4.2)$$

Malheureusement, l'expérience étant très complexe à mettre en oeuvre, les séquences utilisées lors du benchmark n'ont pas pu être reproduites expérimentalement, et il est relativement difficile de comparer les résultats prédits aux expériences.

On peut néanmoins constater que les résultats obtenus par les différents partenaires varient dans une fourchette contenant trois ordres de grandeur, ce qui démontre la difficulté du problème abordé. Les seuls éléments de comparaison disponibles concernent le ratio entre les débits de fuites calculés pour les séquences 4 et 5. Ce ratio a une importance particulière pour EDF qui doit démontrer que les débits existant lors d'un réel accident sont plus faibles que ceux obtenus lors des tests réguliers que subissent les enceintes de confinement et qui se font avec de l'air sous pression. Nous avons été les seuls avec l'équipe du CEA à trouver l'ordre de grandeur de ce ratio, les autres équipes ayant donné des valeurs éloignées d'au moins deux ordres de grandeur.



(a) Maquette



(b) Chargement en pression

FIG. 4.14 – Maquette MAEVA



FIG. 4.15 – Fissure traversante (ouvertures amplifiées)

4.6 Conclusion :

A l'occasion de cette étude, nous avons mis en place les éléments permettant de prévoir les écoulements dans des structures en béton en partant de la création de la fissuration jusqu'à la prévision du taux de fuite. Les méthodes utilisées sont originales pour les calculs d'écoulement dans des fissures mais semblent se rapprocher d'études effectuées par des hydrogéologues pour déterminer des écoulements dans les fractures géologiques.

Le travail entamé ici laisse encore énormément de place aux développements et on se rend compte que de nombreux problèmes ne sont pas résolus. Malheureusement les développements se sont arrêtés à la fin du projet MAEVA et du doctorat de Hocine Boussa par manque de support complémentaire ; le LaSaGeC étant un très jeune laboratoire ne pouvant pas se permettre de financer une bourse de thèse sur ses fonds propres. Des études complémentaires devraient être soutenues par l'IRSN à partir de l'année 2004.

Chapitre 5

Nouvelle modélisation :

5.1 Introduction :

De nombreuses modélisations du comportement du béton ont déjà vu le jour, mais comme j'ai pu en faire part dans ce document, aucune jusqu'à présent n'a atteint la perfection. Je vais commencer par dresser un cahier des charges du modèle que je considérerais "parfait".

C'est un modèle tout d'abord simple, robuste dont les paramètres sont faciles à identifier ; faute de quoi, comme beaucoup d'autres, il ne sera utilisé que par son auteur et son entourage.

Ce modèle qui est le sujet de doctorat de Mohammed Matallah, devra prendre en compte les effets suivants :

L'endommagement : C'est l'élément essentiel de description de la dégradation du béton, il peut être isotrope ou éventuellement anisotrope.

Les déformations anélastiques : Elles accompagnent l'endommagement, leur description devra être anisotrope pour représenter correctement tous les cas de sollicitation et particulièrement la compression.

Refermetures de fissures : C'est un point très important même lorsque la sollicitation est monotone, par exemple une semelle d'appui, doit toujours résister en compression après un endommagement dû au cisaillement.

Régularisation : La modélisation du comportement non linéaire du béton, ne peut pas se passer de la prise en compte de la localisation des déformations provoquée par l'adoucissement. La méthode utilisée est souvent une pièce rapportée et la formulation du modèle peut être particulièrement adaptée comme c'est le cas pour le modèle de J. Mazars [44, 45, 34] et l'endommagement non

local [56, 33], ou moins bien adaptée comme pour l'endommagement unilatéral [32, 36] qui ne peut s'appuyer que sur son évolution viscoendommageable [15, 17] - peu efficace dans le cas de chargements statiques - ou le modèle d'endommagement anisotrope "microplans" [19, 20] qui s'appuie sur une régulation de type Hillerborg [27], mais qui est incomplète à cause du couplage avec la plasticité ; ou même inexistante comme dans beaucoup d'autres modèles.

D'autres remarques pratiques viennent de l'expérience acquise lors de l'implémentation numérique de différents modèles et de leur utilisation dans des cas relativement variés :

- La relation contrainte déformation doit, tant que faire se peut, être continûment dérivable, ce qui impose une évolution mesurée de la matrice de raideur tangente et améliore les capacités de convergence.
- Pour la plupart des modèles le matériau est totalement dégradé devient mécaniquement absent, c'est à dire que les contraintes sont nulles quelle que soit la sollicitation. La réalité est toute autre, et même si sous certains cas de sollicitations, on peut parler de compaction [23, 11, 10], le comportement du béton endommagé se rapproche sûrement plus de celui d'un fluide incompressible que de celui du vide. Cet aspect avait déjà été abordé par Ladevèze [38] qui avait introduit une variable d'endommagement concernant la partie hydrostatique du tenseur des contraintes, puis repris en partie dans le modèle d'endommagement unilatéral pour lequel, une partie du tenseur des contraintes n'est pas affectée par l'endommagement (Equation 8.6).

5.2 Éléments de base :

Je propose de développer un modèle basé sur l'idée le couplage entre l'endommagement et les déformations anélastiques, notées ici ε^s , exploitée en partie lors du doctorat de Frédéric Ragueneau (Equation 2.6).

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon + ED(\varepsilon - \varepsilon^s) \quad (5.1)$$

Cette équation pourrait devenir en 3D :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} (\varepsilon_{ij} - D\varepsilon_{ij}^s) + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{kk} - D\varepsilon_{kk}^s) \delta_{ij}$$

5.2.1 Modélisation de l'endommagement :

La modélisation de l'endommagement se fera comme dans le modèle isotrope de Stéphanie Fichant, avec comme dans le modèle de Jacky Mazars une seule variable scalaire directement liée aux extensions. Son effet mécanique étant modulé par la présence de déformations anélastiques, on pourra obtenir un effet différent par exemple en traction et compression.

En traction directe : L'endommagement est directement créé par les extensions dans la direction de la sollicitation, les déformations anélastiques existant dans cette direction activent naturellement l'endommagement.

En compression : L'endommagement est créé par les déformations radiales, mais les déformations anélastiques sont majoritairement radiales, les déformations anélastiques axiales activent une partie de l'endommagement.

5.2.2 Création des déformations anélastiques :

Les déformations anélastiques représentent dans le modèle, les discontinuités de déplacement aux lèvres de fissures homogénéisées à l'échelle du volume élémentaire représentatif du matériau. Elles doivent apparaître en même temps que l'endommagement, leur anisotropie permettra de moduler les effets de l'endommagement sur la traction et la compression. Ces déformations doivent pouvoir s'annuler avec l'équivalent d'une fonction de refermeture de fissure - lorsque par exemple une fissure créée en traction est sollicitée en compression - mais leur histoire doit être conservée.

5.2.3 Prise en compte des effets unilatéraux :

Une des grosses difficultés dans les modèles d'endommagement unilatéraux est la prise en compte des refermetures de fissures à partir de la séparation du tenseur des contraintes ou d'endommagement en parties positives et négatives. Cette séparation entraîne des possibilités de perte de propriétés essentielles du tenseur d'élasticité, et de toute manière, les discontinuités provoquées dans le tenseur d'élasticité au changement de signe des contraintes (ou déformations) ne sont pas favorables à un processus convergeant facilement. Ici, plus question de partitionnement, c'est simplement l'annulation progressive des déformations anélastiques créées qui restaurent naturellement la raideur.

Si on reprend l'équation 5.1 avec $\varepsilon_s = 0$, on obtient

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon + ED\varepsilon = E\varepsilon$$

5.3 Expérience de traction compression :

Le comportement uniaxial cyclique du béton, et particulièrement la manière dont les fissures se referment est à mon avis un aspect essentiel de la modélisation. Les expériences mettant en évidence le caractère unilatéral du béton sont finalement peu nombreuses [62].

La méthode utilisée pour l'essai PIED est particulièrement remarquable. Elle consiste à adjoindre au spécimen en béton des barres dans un matériau dont on connaît parfaitement les caractéristiques, de façon à obtenir une structure dont le comportement est durcissant [46]. De cette manière, on évite les

problèmes de localisation qui entraînent des aléas expérimentaux importants. Malheureusement, la technique expérimentale est relativement délicate à mettre en oeuvre, particulièrement lorsqu'on utilise un chargement cyclique, et à ma connaissance, il n'y a eu qu'un essai cyclique publié. Sans mettre en doute la validité des résultats, il est difficile de baser une théorie sur un essai, si sa reproductibilité n'a pas été démontrée¹

J'ai donc décidé de concevoir une expérience ayant pour objectif de caractériser le comportement uniaxial cyclique du béton. Cette expérience est basée sur le même principe que l'essai PIED, à la différence près que je n'ai pas la volonté de diffuser l'endommagement, mais au contraire de le localiser, on pourrait d'ailleurs appeler cette expérience PIEL. Cette expérience doit être aisée à mettre en oeuvre.

La composante additionnelle permettant de conserver le caractère durcissant de la structure est pour l'essai PIED un ensemble de 12 barrettes en aluminium collées sur deux faces d'un parallélépipède en béton. Ce point est en fait la difficulté majeure de l'essai car il faut utiliser un dispositif spécial pour coller les barrettes puis pour solliciter l'éprouvette au travers des barrettes.

Le nouveau dispositif (Figure 5.1) sera simplement composé d'un cylindre en béton traversé par une barre d'acier servant à solliciter indirectement le béton, comme pour l'essai tirant utilisé pour identifier l'adhérence acier béton. A la différence de l'essai tirant, on ne doit pas mobiliser de glissement à l'interface entre les deux matériaux et à cet effet, la barre d'acier comporte une diminution de diamètre dans sa partie centrale et un insert sphérique (une pelote basque dans les premiers essais effectués) est ajouté de façon à localiser la fissuration dans la partie centrale. Les éléments de cet essai ont été optimisés par un calcul aux éléments finis non linéaires.

La mesure de la déformation dans la partie médiane de la barre d'acier permet de calculer la contrainte dans l'acier σ_a et si A_a est l'aire de la section d'acier et A_b est l'aire de la section de béton, on peut obtenir simplement la moyenne de la contrainte axiale σ_b dans le béton dans la section médiane à partir de l'effort appliqué F :

$$\sigma_b = \frac{F - \sigma_a A_a}{A_b}$$

Le déformation axiale moyenne dans la zone de fissuration sera directement mesurée à l'aide d'un capteur de déformation.

Un essai a été réalisé sur un prototype (Figure 5.2), et on peut voir que le mode de rupture escompté s'est bien produit. Le matériel de mesure est en cours d'acquisition et nous pensons obtenir les premiers résultats au début de l'année 2004.

¹Le Professeur Gyögy Balazs me confiait récemment que la plus grande différence entre un résultat expérimental et un résultat de calcul aux éléments finis est que dans le premier cas, tout le monde excepté l'auteur, fait confiance aux résultats.

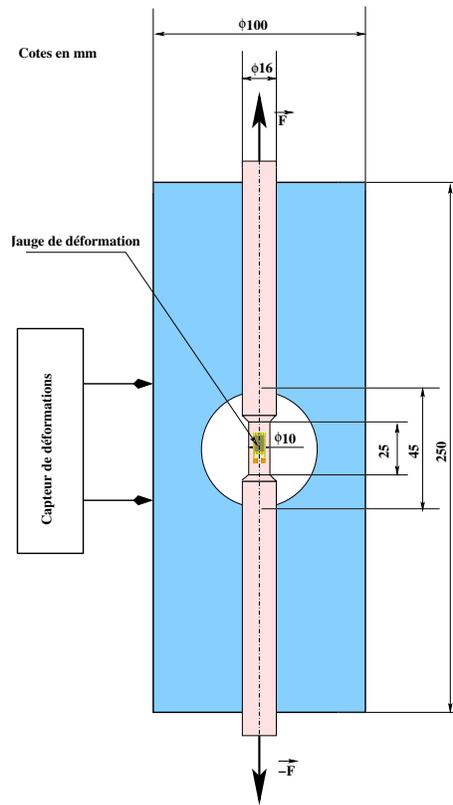


FIG. 5.1 – Schéma de l'expérience PIEL



FIG. 5.2 – Prototype de l'essai PIEL

Chapitre 6

Conclusions et perspectives :

Chaque année 8 milliards de tonnes de béton sont produits et placés dans notre environnement (Statistiques rapportées dans l'appel à participation de FRAMCOS'5). Un tel engouement est premièrement dû au faible coûts de production et de mises en oeuvre, mais les qualités intrinsèques du matériau sont également un atout. Si dans la plupart des cas, l'utilisation d'un modèle de comportement non linéaire n'est pas utile au dimensionnement ou à la justification du dimensionnement de structures en béton ; dans un nombre limité de cas, la mise en oeuvre d'un calcul non linéaire permet de faire l'économie d'expériences sur des structures ou de les compléter et mieux les concevoir ; et dans des situations exceptionnelles, les problèmes de sécurité exigent une bonne connaissance de la fiabilité de la structure considérée sur le plan expérimental et théorique. Je citerais par exemple quelques cas qui m'ont été soumis récemment :

La fiabilité des ancrages sur les structures minces : De nombreux éléments de structures minces en béton précontraint ou armé comme les pré-dalles ou les tuyaux sont réalisées dans des usines de préfabrication puis transportées sur leur lieu d'implantation. Des inserts sont coulés dans ces éléments afin de faciliter leur transport. Il se trouve que la fiabilité de ces ancrages n'est pas celle attendue et qu'un certain nombre d'accidents a eu lieu. L'approche numérique de ce problème permet d'appréhender correctement l'ensemble des éléments pouvant influencer sur la fiabilité de l'ancrage et de cerner les causes du problème plus facilement, je pense qu'une campagne expérimentale et en tout cas de la compléter et de l'optimiser si celle ci doit avoir lieu. Ce problème devrait faire partie d'un sujet de doctorat sur un support du CERIB en octobre 2004.

Résistance au cisaillement de dalles alvéolés : Les dalles alvéolées sont des éléments de structures de longueur supérieures à 8m et d'une largeur de l'ordre du mètre. Elles sont généralement posées sur des poutres à leur extrémités. Dans certains cas, la flexion des poutres génère des contraintes de cisaillement

non prévues dans les dalles et peut provoquer des désordres. Le CERIB a prévu de mettre en place une campagne expérimentale qui sera conçue à partir de simulations numériques qui permettront de l'optimiser.

Parallèlement au problème de la modélisation du comportement mécanique du béton, interviennent différentes possibilités de couplages avec d'autres grandeurs physiques.

Ces couplages doivent être pris en compte, soit parce que le phénomène physique considéré est la source de dommages mécaniques, soit parce que c'est celui qui nous intéresse et que les modifications des propriétés mécaniques, interfèrent avec celles du phénomène considéré. Dans le cas le plus complexe, les couplages se font dans les deux sens. Dans tous cas, la représentation du matériau devra se faire à deux échelles représentatives de chaque phénomène. Deux exemples permettent à nouveau d'illustrer ces problèmes de couplage.

Couplages thermomécaniques : Depuis les récents problèmes d'incendies dans les tunnels, une réglementation oblige les concessionnaires à justifier leur dimensionnement sous un chargement thermique forfaitaire. Chaque tunnel étant spécifique, la mise en place d'une campagne expérimentale exhaustive est impossible, et les concessionnaires préfèrent s'appuyer sur des simulations. A cet effet, de nouveaux outils doivent être créés et leur fiabilité doit être sans faille.

Le doctorat de Abdellah Menou sur le couplage entre l'endommagement et la thermique à haute température sur un encadrement en collaboration entre le CSTB et le LaSAGeC doit se terminer en janvier 2004. Les résultats serviront de base aux outils de calculs développés par la cellule MOCAD du CSTB. Toujours en collaboration avec le LaSAGeC un doctorat débute cette année sur ce sujet.

Couplage fissuration perméabilité : Après le projet CESA, le sujet des écoulements dans les fissures est loin d'être clos et les premiers résultats ont apporté au moins autant de questions que de réponses. Le doctorat de Hocine Boussa a ouvert de nombreux chemins qui n'ont pas encore été explorés.

Par la richesse et la diversité des domaines explorés, ce sujet est à mon avis d'un grand intérêt scientifique. Une collaboration avec l'IRSN doit commencer par un stage de DEA en janvier 2004 et se concrétiser par un doctorat débutant en octobre 2004.

Deuxième partie

Annexes

Chapitre 7

Modèle d'endommagement de J. Mazars :

C'est sûrement le modèle de comportement pour le béton le plus utilisé dans le milieu scientifique. Je vais tâcher d'en faire une présentation simple, complète et détachée du formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles qui n'a pas grand intérêt ici.

7.1 La relation de comportement :

Le modèle de comportement est élastique endommageable isotrope . On représente l'endommagement par son effet sur la raideur du matériau [41] :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E(1-D)}{1+\nu} \left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \right]$$

On démontre facilement que la seule condition que doit vérifier ce modèle de comportement pour qu'il soit thermodynamiquement acceptable est que la variable d'endommagement D soit croissante.

Le modèle de comportement est donc isotrope sans effet de refermeture de fissures et sans déformation anélastique. Il a pour vocation d'être utilisé dans des cas de sollicitations radiales et monotones. Cette limitation qui devrait être théoriquement vérifiée en chaque point de la structure, doit l'être au moins au niveau de la structure.

7.2 La déformation équivalente :

La fonction équivalente $\tilde{\varepsilon}$ est la variable qui permet de définir l'endommagement et la fonction seuil.

C'est en grande partie le choix de la déformation équivalente qui a fait le succès du modèle. Jacky Mazars stipule que ce sont les déformations d'extension qui sont à l'origine de l'endommagement. Ce choix est adapté aux matériaux fragiles et particulièrement aux bétons. On peut définir la déformation équivalente à l'aide du deuxième invariant de la partie positive du tenseur des déformation.

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}$$

Où les ε_i désignent les valeurs propres du tenseur des déformations et $\langle x \rangle_+$ est la partie positive de x : $\langle x \rangle_+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ce critère est particulièrement performant dans la zone des traction mais est complètement ouvert dans la zone des tricompressions.

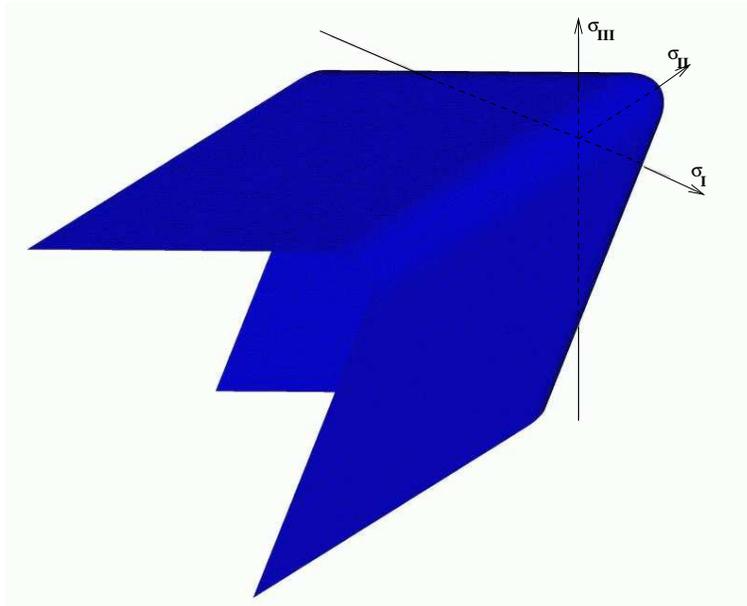


FIG. 7.1 – Représentation du critère de Mazars dans l'espace des contraintes principales

La trace du critère dans les plans de contraintes planes donne les lignes suivantes :

Afin de se conformer aux résultats expérimentaux dans le domaine des bicompresseions, Mazars a pondéré la valeur de $\tilde{\varepsilon}$ par le coefficient γ défini de la manière suivante :

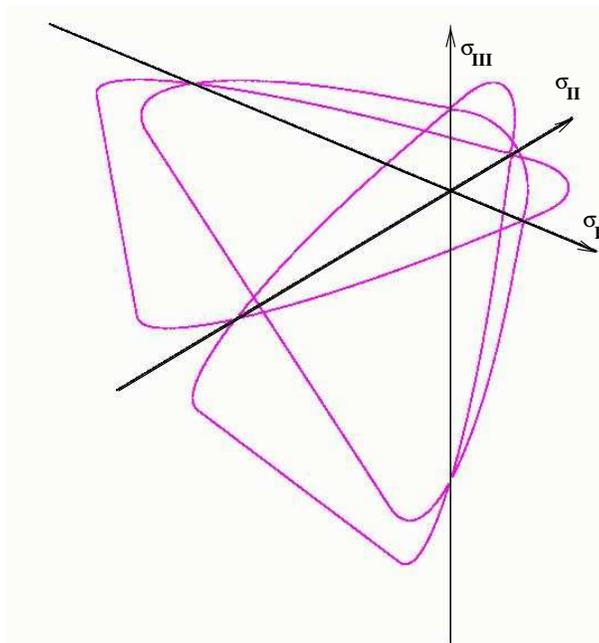


FIG. 7.2 – Trace du critère dans les plans de contraintes planes

$$\gamma = -\frac{\sqrt{\sum \langle \sigma_i \rangle_-^2}}{\sum \langle \sigma_i \rangle_-}$$

où les σ_i sont les contraintes principales.

Ce coefficient ne modifie pas le critère lorsque le nombre de contraintes principales négatives n'excède pas un, il diminue la valeur de $\tilde{\varepsilon}$ avec la "triaxialité" de l'état de compression :

- si $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $\sigma_3 > 0$ alors $\gamma = 1$
- si $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et $\sigma_3 < 0$ alors $\gamma = 1$
- si $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$ et $\sigma_3 = \sigma_2$ alors $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- si $\sigma_1 < 0$, et $\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1$ alors $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Le calcul de γ nécessite la connaissance de la contrainte, ce qui n'est pas le cas dans le cadre de l'utilisation du modèle dans des calculs éléments finis.

L'intervention de la variable d'endommagement dans le calcul des contraintes ne modifiant ni les vecteurs propres du tenseur des contraintes, ni les rapports entre les contraintes principales et on peut donc avantageusement calculer la valeur de γ en substituant la contrainte $\underline{\sigma}$ par la contrainte effective $\underline{\bar{\sigma}}$ qui est confondue ici avec la contrainte qui existerait dans le matériau vierge pour une même déformation :

$$\underline{\bar{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left[\underline{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{\mathbf{1}} \right]$$

Il faut noter que la surface d'élasticité du matériau vierge - ou surface seuil d'endommagement initiale - est confondue avec la surface définie par $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_{d0}$ où ε_{d0} est un paramètre du modèle qui peut être identifié à l'aide de la contrainte limite en traction et du module d'élasticité : $\varepsilon_{d0} = \frac{f_t}{E}$. Le calcul de l'endommagement à partir de $\tilde{\varepsilon}$ étant relativement complexe, la surface seuil d'endommagement ne peut pas s'identifier d'une manière générale à une surface isovaleur de $\tilde{\varepsilon}$.

7.3 Calcul de l'endommagement :

La variable d'endommagement D est la variable interne du modèle, pour le matériau vierge $D = 0$ et pour le matériau rompu, $D = 1$, D varie de façon continue entre ces deux bornes, et la seule condition pour respecter le second principe de la thermodynamique [42] est que D soit croissant, on peut donc calculer son évolution sans recourir à une surface seuil ou aux habituelles conditions de "Kuhn Tucker" employées classiquement en plasticité.

Comme il est déjà indiqué dans le précédent paragraphe 7.2, les extensions sont la cause majeure de l'endommagement du béton, la variable $\tilde{\varepsilon}$ représente les extensions et permet d'accéder naturellement à l'endommagement dans un état de traction. En compression simple, il y a également des extensions dans

les directions transversales à l'axe de compression, mais le calcul de l'endommagement à partir de ces extensions mènerait ici à un comportement qui n'est pas représentatif de la réalité. L'isotropie du modèle ne permet pas d'utiliser cette idée, qui a été exploitée pour des modèles mettant en oeuvre de l'anisotropie ou des phénomènes unilatéraux [21]. Mazars a donc été obligé de recourir à un subterfuge qui conduit à calculer deux fonctions d'endommagement D_t et D_c , la variable d'endommagement D s'identifiant à D_t dans le cas d'une sollicitation de traction pure et à D_c en compression pure.

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_t}{\exp(B_t(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{d0}))}$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_c)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_c}{\exp(B_c(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{d0}))}$$

Les coefficients A_t , A_c , B_t et B_c sont à identifier en fonction du matériau.

Il faut de plus introduire un coefficient qui discriminera l'état de traction de celui de compression, et permettra également de décrire tous les états intermédiaires. Ce coefficient est basé sur le signe des contraintes principales ou des contraintes effectives principales.

Notons ε_{ti} la déformation normale dans la direction principale i calculée à partir des contraintes effectives principales positives :

$$\varepsilon_{ti} = \frac{1+\nu}{E} \langle \bar{\sigma}_i \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \left(\langle \bar{\sigma}_i \rangle_+ + \langle \bar{\sigma}_j \rangle_+ + \langle \bar{\sigma}_k \rangle_+ \right)$$

on a alors

$$\alpha_t = \frac{\sum \varepsilon_{ti} \langle \varepsilon_i \rangle_+}{\tilde{\varepsilon}^2}$$

et

$$\alpha_c = 1 - \alpha_t$$

L'endommagement est finalement donné par l'expression :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + \alpha_c^\beta D_c, \quad \dot{D} > 0$$

où β est un paramètre introduit pour améliorer le comportement du modèle en cisaillement. A noter que ce coefficient est très sensible et qu'il est déconseillé de s'éloigner de la valeur par défaut $\beta = 1.06$.

La surface d'élasticité est donc donnée par l'équation $\dot{D} > 0$ et n'est pas confondue avec une isovaleur de $\tilde{\varepsilon}$. La représentation faite dans les publications se rapportant au modèle est la plupart du temps erronée. On trouve sur la figure suivante, la représentation de la surface d'élasticité pour différentes valeurs de l'endommagement ainsi que de la surface de rupture, le tout étant représenté dans le plan des contraintes planes.

7.4 Implémentation numérique du modèle :

L'implémentation numérique du modèle a été réalisée dans les cadres bidimensionnels, tridimensionnel avec des éléments massifs et de coques multicouches dans le code aux éléments finis CASTEM2000 [34].

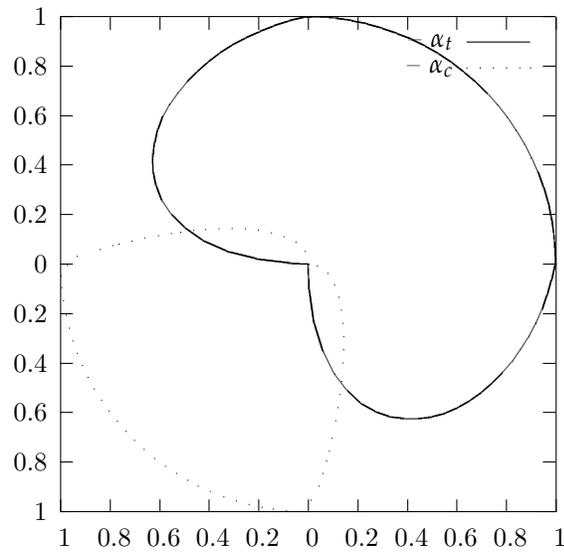


FIG. 7.3 – Représentation des coefficients α_t et α_c dans le plan des contraintes planes.

L'utilisation de ce modèle est possible avec la plupart de limiteurs de localisation connus, l'approche non-locale étant la plus courante. L'utilisation de l'énergie de fissuration ou méthode de Hillerborg, demande une modification de la loi d'évolution de D_t conformément à l'équation 3.3.

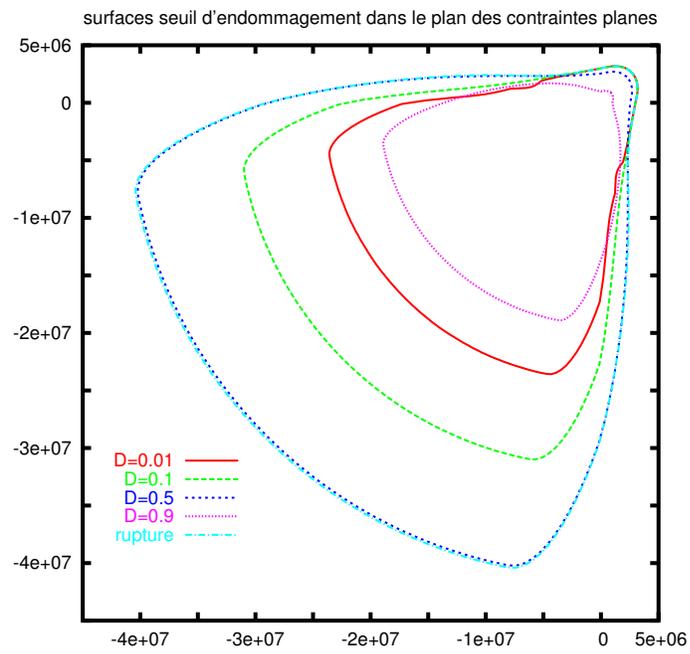


FIG. 7.4 – Surface d'élasticité du modèle Mazars

Chapitre 8

Modèle d'endommagement unilatéral :

8.1 Introduction :

Confortés par les résultats encourageants obtenus à l'aide du modèle de Mazars, nous nous sommes intéressés au développement d'un modèle d'endommagement qui puisse simuler des chargements cycliques. Les applications en vue pour ce modèle sont bien sûr liés aux calculs sismiques. Peu d'auteurs s'étaient penchés sur la question à l'époque et le seul travail faisant référence aux effets unilatéraux de l'endommagement était un rapport interne [38] qui a servi de base aux développements du modèle. Aujourd'hui encore, les nombreux problèmes intervenant lorsqu'on couple l'endommagement unilatéral et les déformations anélastiques ne sont pas totalement résolus [14].

Avant de se lancer dans les calcul sismiques proprement dits, la question de mettre au point un modèle permettant de calculer des structures sous chargements cycliques était posée. Après plusieurs tentatives, il est apparu que les effets unilatéraux n'étaient pas suffisants dans la majorité des cas et qu'il fallait introduire également des déformations permanentes.

Pour faire face aux nouvelles difficultés introduites par l'effet unilatéral, le modèle est développé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles.

8.2 Effet unilatéral :

C'est un phénomène qui se produit lors de chargements cycliques. Lorsque la matière endommagée par des extensions se trouve dans un état de compression, les micro et macro-fissures se referment et la raideur du matériau est restaurée.

Ce phénomène a été mis en évidence expérimentalement par des essais uniaxiaux [47] ou sur structures [35, 36]. La prise en compte de ce phénomène est généralement faite en utilisant deux variables d'endommagement, que nous appellerons D_1 et D_2 , qui interviennent indépendamment sur des partitions de l'énergie élastique :

$$\psi = \psi_1(D_1) + \psi_2(D_2)$$

Si on ne prête pas garde, la combinaison des deux variables d'endommagement sur les termes de ψ_1 et de ψ_2 mène à une énergie élastique qui n'est plus inconditionnellement convexe par rapport à la variable d'état principale (contrainte ou déformation) (Figure 8.1), ce qui provoque des instabilités dans le comportement élastique du matériau. Ces anomalies apparaissent généralement pour de grandes différences entre les deux variables d'endommagement et n'affectent donc pas les modèles développés pour des matériaux ductiles pour lesquels les endommagements critiques sont relativement faibles. Certains auteurs interprètent cette instabilité comme un état critique menant à la ruine. Dans le cas particulier, qui nous intéresse, de modèles développés pour des matériaux fragiles comme le béton, le potentiel élastique doit être inconditionnellement convexe, et le modèle doit être suffisamment robuste pour être utilisé dans le cadre de calculs de structures.

Les premières études [66] m'ont orienté sur une décomposition de l'énergie basée sur le signe des contraintes. Les conditions de convexité du potentiel, mènent à l'écriture suivante :

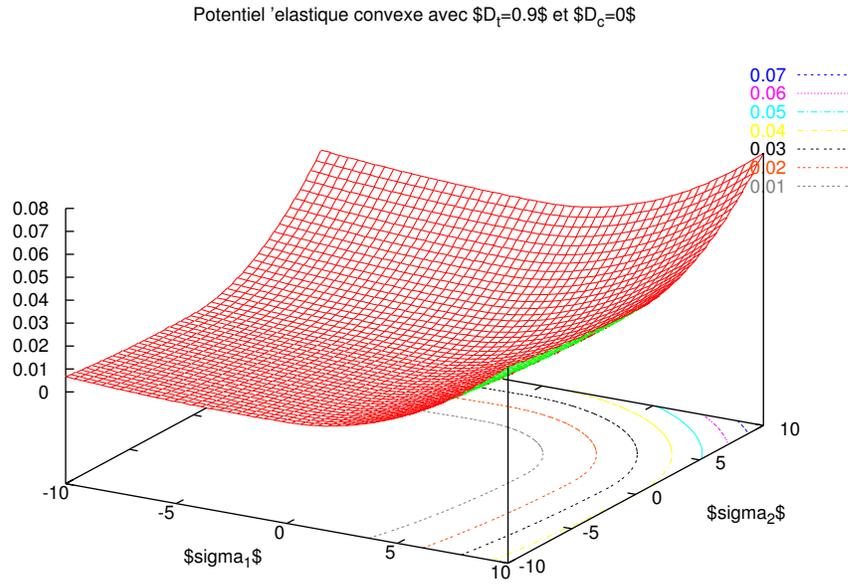
$$2\chi_e = \frac{\sigma_{ij}^+ \sigma_{ij}^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma_{ij}^- \sigma_{ij}^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\nu}{E_0} [\sigma_{ij} \sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2] \quad (8.1)$$

La partition du tenseur des contraintes en partie positive $\underline{\sigma}^+$ et $\underline{\sigma}^-$ s'effectue, conformément aux prescriptions de [38], dans le repère principal des contraintes. Les propriétés essentielles sur les dérivées des partitions de l'énergie ont également été démontrées par Ladevèze.

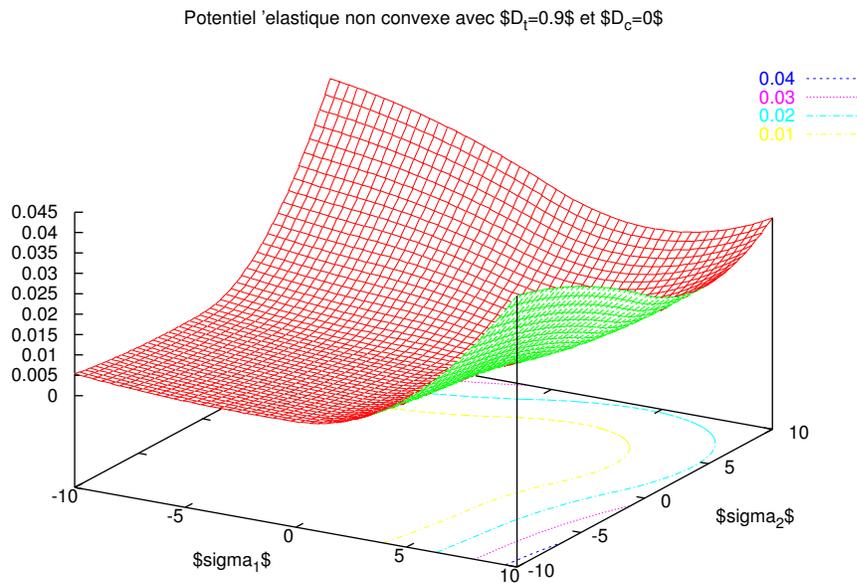
A noter que le potentiel obtenu (équation 8.1) reste en partie élastique (troisième terme). Dans une première écriture, le troisième terme du potentiel était affecté d'une variable d'endommagement δ , mais son apport n'étant pas jugé significatif, et par souci de simplification, j'ai abandonné cette variable.

8.3 Déformations anélastiques :

L'endommagement du béton s'accompagne de déformations anélastiques dues à l'ouverture de microfissures. La modélisation proposée pour représenter ces déformations sont adaptées des travaux de [26]. La déformation anélastique est une fonction de l'endommagement, dans l'approche proposée, le tenseur de déformations anélastiques est sphérique, ce qui est peut être valable en traction, mais ne permet pas de représenter correctement l'évolution des déformations volumiques en compression. Par contre une originalité a été introduite



(a) potentiel convexe



(b) potentiel non convexe

FIG. 8.1 – Représentation de potentiels élastiques

sur l'évolution des déformations anélastiques créées en traction. Une fonction de refermeture de fissure a été adoptée pour représenter correctement ce phénomène. On constate en fait que l'utilisation d'une telle fonction est nécessaire pour représenter correctement le comportement cyclique de structures.

$$\chi_{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E_0 (1 - D_1)} f(\sigma_{kk}) + \frac{\beta_2 D_2}{E_0 (1 - D_2)} \sigma_{kk} \quad (8.2)$$

où f est une fonction scalaire définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} x \in]-\infty, -\sigma_f] & \rightarrow f(x) = 0 \\ x \in]-\sigma_f, 0] & \rightarrow f(x) = x \left(1 + \frac{x}{2\sigma_f}\right) \\ x \in]0, \infty[& \rightarrow f(x) = x \end{cases}$$

avec σ_f est un paramètre du modèle représentant la contrainte de refermeture de fissure : on considère que lorsque $\sigma_{kk} < -\sigma_f$, les microfissures créées en traction sont totalement refermées.

La refermeture de fissure est traitée ici comme de l'élasticité non linéaire et n'entraîne aucune dissipation d'énergie. Les deux paramètres $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 < 0$ sont homogènes à des contraintes. Les valeurs des paramètres liés à l'anélasticité pour un béton classique sont : $\sigma_f = 3MPa$ $\beta_1 = 1MPa$ et $\beta_2 = -40MPa$

8.4 Potentiel d'état :

Nous avons donc choisi comme variables d'état, la contrainte $\underline{\sigma}$, les deux variables d'endommagement D_1 et D_2 . Le potentiel d'état est l'énergie libre de Gibbs χ .

Variables d'état		Variables associées
Observable	Internes	
Contrainte σ		ϵ
	Endommagement 1 D_1	Y_1
	Endommagement 2 D_2	Y_2
	Écrouissage 1 z_1	Z_1
	Écrouissage 2 z_2	Z_2

TAB. 8.1 – Variables du modèle unilatéral

On verra que les variables d'écrouissage z_1 et z_2 sont l'équivalent de la déformation plastique cumulée en plasticité.

Le potentiel est obtenu en ajoutant la partie élastique (équation 8.1) et la partie anélastique (équation 8.2) :

$$\chi = \frac{\sigma_{ij}^+ \sigma_{ij}^+}{2E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma_{ij}^- \sigma_{ij}^-}{2E_0(1-D_2)} + \frac{\nu}{2E_0} [\sigma_{ij} \sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2] + \quad (8.3)$$

$$+ \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} f(\sigma_{kk}) + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \sigma_{kk} \quad (8.4)$$

$$+ G_1(z_1) + G_2(z_2) \quad (8.5)$$

Ce potentiel est inconditionnellement convexe par rapport à la variable $\underline{\sigma}$.

E_0, ν, β_1 et β_2 sont des constantes matérielles ; $G_1(z_1)$ et $G_2(z_2)$ sont les fonctions d'écroutissage.

8.5 Lois d'état :

Le lois d'état dérivent naturellement du potentiel :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial \chi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma_{ij}^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma_{ij}^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\nu}{E_0} [\sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2 \delta_{ij}] \\ &+ \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} \frac{\partial f(\sigma_{kk})}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$Y_1 = \frac{\sigma_{ij}^+ \sigma_{ij}^+ + 2\beta_1 f(\sigma_{kk})}{2E_0(1-D_1)^2} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{\sigma_{ij}^- \sigma_{ij}^- + 2\beta_2 (\sigma_{kk})}{2E_0(1-D_2)^2}$$

$$Z_1 = \frac{\partial \rho \chi}{\partial z_1} = \frac{\partial G_1}{\partial z_1} = g_1(z_1) \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{\partial \rho \chi}{\partial z_2} = \frac{\partial G_2}{\partial z_2} = g_2(z_2)$$

8.6 Lois d'évolution.

On peut écrire les fonction seuil :

$$F_i = Y_i - Y_{0i} - Z_i (i = 1, 2) \quad (8.7)$$

Et les fonctions d'écroutissage :

$$g_i(z_i) = \left[Y_{0i} + \frac{1}{A_i} \left(\frac{-z_i}{1+z_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (8.8)$$

où Y_{0i} définit le seuil d'élasticité , A_i et B_i sont deux paramètres.

En introduisant 8.7 dans condition de consistance 2.2 on obtient :

$$Y_i - Y_{0i} - Z_i = 0 \quad (8.9)$$

$$\dot{Y}_i - \dot{Z}_i = \dot{Y}_i - \frac{\partial G_i}{\partial z_i} \dot{z}_i = 0 \quad (8.10)$$

L'évolution des variables internes 2.3 est donnée par :

$$\dot{z}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Z_i} = -\dot{\lambda} \quad (8.11)$$

$$\dot{D}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y_i} = \dot{\lambda} \quad (8.12)$$

Finalement en prenant la forme pour les fonctions d'érouissages 8.8, on trouve :

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i (Y_i - Y_{0i})]^{B_i}} \quad (8.13)$$

Cette méthode peut paraître un peu complexe pour arriver à ce simple résultat, mais l'évolution du modèle pour introduire les effets de vitesse nécessite ce formalisme.

On peut modifier de toute évidence ces lois d'évolutions en prenant garde au fait que les taux de restitutions d'énergie Y_1 et Y_2 ne sont pas inconditionnellement positifs, et pour que l'énergie dissipée soit positive, il faudra obligatoirement vérifier l'inégalité de Clausius Duhem :

$$Y_1 \dot{D}_1 + Y_2 \dot{D}_2 \geq 0$$

Il est donc suffisant dans tous les cas de vérifier : $\dot{D}_i \geq 0$ et si $Y_i < 0$ alors $\dot{D}_i = 0$.

8.7 Réponse uniaxiale du modèle :

Le modèle permet de reproduire les effets désirés (Figure 8.2) :

1. Endommagement de traction
2. Déformations anélastiques en traction
3. Refermeture progressive de la fissuration
4. Restauration de la raideur
5. Endommagement de compression
6. Réouverture des fissures
7. Endommagement de traction
8. ...

8.8 Implémentation numérique :

Le modèle a été implémenté dans le code EFiCoS (Voir chapitre 9:Code-aux=E9l=E9ments page 86) dans sa version unidimensionnelle, dans CAS-TEM 2000 en 2D contraintes planes[34] et dans LS DYNA 3D en 3D [23].

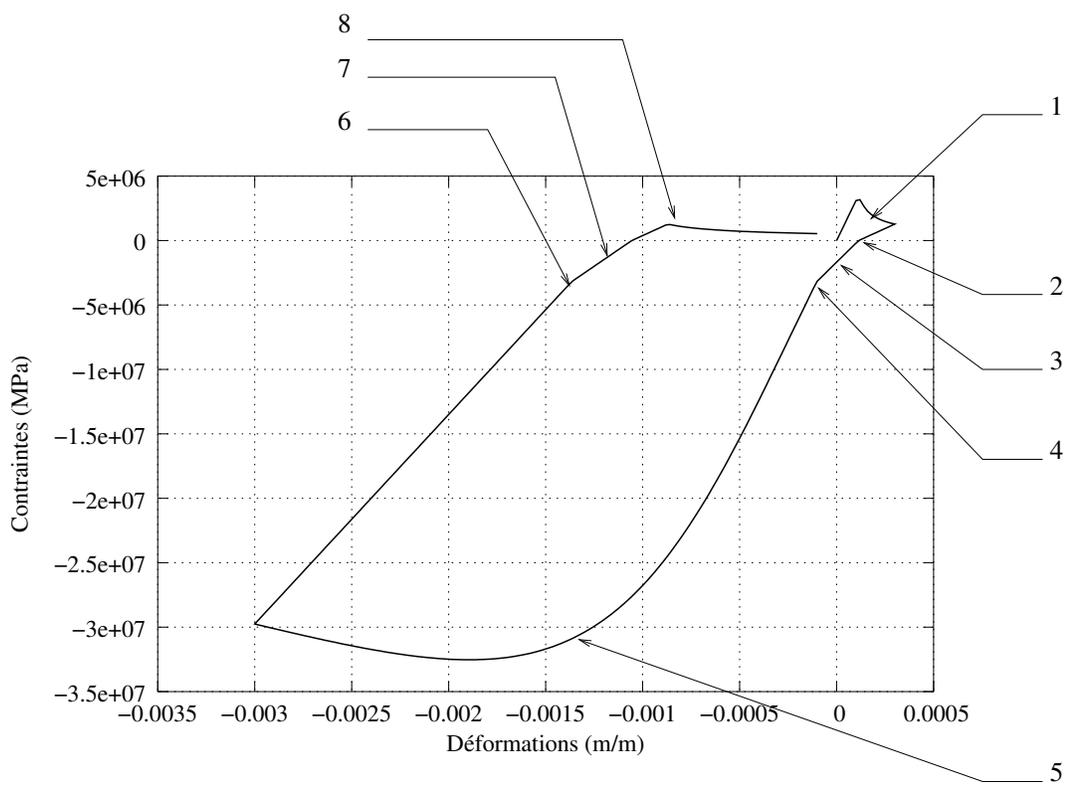


FIG. 8.2 – Réponse uniaxiale du modèle unilatéral

8.9 Conclusion :

Le modèle d'endommagement unilatéral est aujourd'hui encore un des seuls modèles fiables et robustes intégrant les effets de refermetures de fissures et les déformations anélastiques couplés à l'endommagement. Ce modèle a servi de base à plusieurs études dont la thèse de J.F. Dubé. Il est encore utilisé dans le domaine de la recherche mais également par des bureaux d'études et de conseils.

Les capacités de prédiction du modèle dans le cas de dégradations en compression multiaxiale sont à améliorer et difficultés d'implémentation dans des cas multidimensionnels limitent son utilisation dans de nouveaux codes de calculs.

A posteriori, on peut penser que l'idée de conserver l'isotropie pour les déformations anélastiques n'est pas réaliste, des approches plus élaborées couplant l'endommagement à la plasticité ont été abordées dans d'autres thèses.

Chapitre 9

Code aux éléments finis EFiCoS :

9.1 Introduction :

De nombreuses structures sont composées de poutres et de poteaux, les outils de dimensionnement et de vérification de telles structures étaient à l'époque de la création de EFiCoS : soit des programmes aux éléments finis basés sur de éléments de poutres utilisant des modèles de comportement globaux (Moment/courbure), soit des modèles éléments finis classiques 2D ou 3D intégrant le comportement local du matériau. Dans la première situation, les calculs sont rapides et peu coûteux, mais l'identification des modèles est particulièrement délicate et les résultats ne sont pas toujours réellement prédictifs. Dans le deuxième cas, si les modèles mis en oeuvre et les méthodes utilisées sont adaptés, on peut obtenir une prédiction de bonne qualité, mais les calculs deviennent très lourds et pratiquement inabornables quand il s'agit de calculer des structures réelles.

L'ambition de EFiCoS est d'allier les deux méthodes en conservant les avantages de chacune.

9.2 Principe :

Le programme aux éléments finis EFiCoS : (Éléments Finis à Couches Superposées) est basée sur une idée décrite par Owen et Bazant qui consiste à utiliser des éléments finis de poutres dont la matrice de raideur est calculée à l'aide d'une discrétisation de la poutre en couches ou fibres. Dans la version bidimensionnelle (poutres planes chargées dans leur plan) utilisée dans EFiCoS, les éléments sont discrétisés en couches. Chaque couche est affectée d'un comportement mécanique uniaxial qui est à priori quelconque. La raideur de chaque couche est intégrée en prenant en compte son excentricité par rapport

à la fibre moyenne pour obtenir les relations au niveau des degrés de liberté de l'élément poutre.

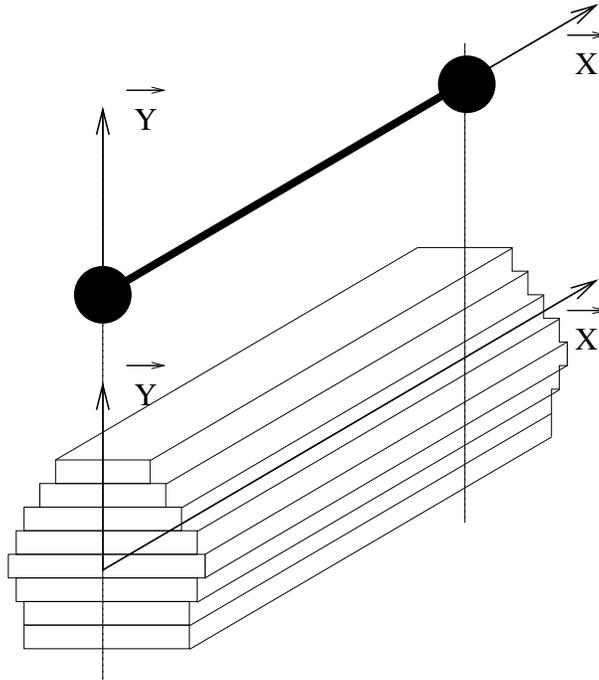


FIG. 9.1 – Élément de poutre à couches superposées

9.3 Utilisations :

Le programme EFiCoS a été utilisé dans de nombreuses thèses , en incluant à chaque fois de nouvelles fonctionnalités :

- Liaisons semi-rigides [22]
- Dynamique explicite et effets de vitesse[15].
- Fiabilité [65]
- Grands déplacements [24]

Il a été utilisé pour plusieurs contrats de recherche importants (CASSBA, CAMUS, CASSBA II) et a été diffusé dans de nombreux laboratoire de recherches.

9.4 Conclusion

Les choix des modèles de comportement pour les matériaux, des méthodes d'intégrations et des méthodes de résolution ont fait de EFiCoS un programme

fiable, robuste et d'une très bonne capacité de prédiction dans les domaines pour lesquels il est destiné.

On peut regretter que les développements du programme n'aie pas été suffisamment organisé. Il doit maintenant exister un nombre important de versions incluant des fonctionnalités différentes mais aucune incluant l'ensemble des possibilités.

Malgré les efforts de nombreuses personnes qui ont contribué au développement d'EFiCoS, aucune version réellement industrielle n'a vu le jour à ma connaissance.

Bibliographie

- [1] O. ALLIX, P. FEISSEL et P. THÉVENET : A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : Basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, 81(12):1177–1191, mai 2003.
- [2] Z. BAŽANT : Scaling of quasibrittle fracture : Hypothesis of invasive and lacunar fractality, their critique and weibull connection. *International Journal of Fracture*, (83):41–63, 1997.
- [3] Z. BAŽANT et T. BELYTSCHKO : Wave propagation in a strain softening bar - exact solution. *Journal of Engineering Mechanics*, 111:155–177, 1985.
- [4] Z. BAŽANT et P. PRAT : Microplane model for brittle-plastic material i : theory. *J. Engrg. Mech. ASCE*, 114:1672–1702, 1988.
- [5] P. BISCHOFF et S. PERRY : Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Material and Structures*, 24:425–450, 1991.
- [6] L. BODÉ, J. L. TAILHAN, G. PIJAUDIER-CABOT, C. LA BORDERIE et J. L. CLÉMENT : Failure analysis of initially cracked concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(11):1153–1160, Novembre 1997.
- [7] J.-P. BOEHLER : Anisotropie et comportement rhéologique de matériaux. Dans CEPADUES, éd. : *Rhéologie de Matériaux Anisotropes*, num. 19 dans Colloque GFR, p. 19–51, Paris, Novembre 1984.
- [8] H. BOUSSA : *Structures en Béton Soumises à des Sollicitations Sévères. Évolution des Dommages et des Perméabilités*. Thèse de doctorat, E.N.S. Cachan, LaSAGeC, UPPA, Janvier 2000.
- [9] H. BOUSSA et C. LA BORDERIE : Structural integrity computation of de maeva mock-up. Dans R. de BORST, N. BIČANIČ, H. MANG et M. GUNTER, éd. : *Computational Modelling of Concrete Structures*, p. 549–557, Badgastein, Austria, Avril 1998. EUROCC, Balkema.
- [10] N. BURLION : *Compaction des Bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale*. Thèse de doctorat, E.N.S. Cachan, 1998.
- [11] N. BURLION, F. GATUINGT, G. PIJAUDIER-CABOT et L. DAUDEVILLE : Compaction and tensile damage in concrete : Constitutive modelling and application to dynamics. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, (183):291–308, 2000.

- [12] A. CARPINTERI : Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. *Mechanics of Materials*, (18):89–101, 1994.
- [13] P. CHASSAING : *Cours de Mécaniques des Fluides, Éléments d'un Premier Parcours*. Collection Polytechniques, capadues édn, 1997.
- [14] F. CORMERY et H. WELEMANE : A critical review of some damage models with unilateral effects. *Mechanics Research Communications*, 29:391–395, 2002.
- [15] J. F. DUBÉ : *Modélisation simplifiée et comportement visco-endommageable des structures en béton*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, décembre 1994.
- [16] J. F. DUBÉ, G. PIJAUDIER-CABOT et C. LA BORDERIE : A rate dependant damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 122(10):939–947, Octobre 1996. And closure of discussion Décembre 1997.
- [17] J. F. DUBÉ, G. PIJAUDIER-CABOT, C. LA BORDERIE et J. GLYNN : Rate dependant damage model for concrete. wave propagation and localisation. Dans B. d. B. MANG, éd. : *EURO-C*, vol. 1, p. 313–323, Innsbruck, Austria, Avril 1994. Pineridge press.
- [18] P. FEENSTRA : *Computational aspects of biaxial stress in plain or reinforced concrete*. Disertation, Delft University of Technology, The Netherlands, 1993.
- [19] S. FICHANT : *Endommagement et anisotropie induite du béton de structures. Modélisation approchée*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, France, 1996.
- [20] S. FICHANT, C. LA BORDERIE et G. PIJAUDIER-CABOT : Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures. *Mechanics of Cohesive-Frictional Material*, 4(4):339–359, Juillet 1999.
- [21] S. FICHANT, G. PIJAUDIER-CABOT et C. LA BORDERIE : Continuum damage modelling : Approximation of crack induced anisotropy. *Mechanics Research Communications*, 24(2):109–114, mars 1997.
- [22] J. L. FLÉJOU : *Comportement Dynamique de Structures du Génie Civil avec Liaisons Semi-rigides*. Thèse de doctorat, E.N.S. Cachan / Paris VI, 1993.
- [23] F. GATUINGT : *Prévision de la Rupture d'Ouvrages en Béton sollicités en Dynamique Rapide*. Thèse de doctorat, E.N.S. Cachan, 1999.
- [24] S. GHAVAMIAN : *Méthode Simplifiée pour la Simulation du Comportement Sismique des Structures en Béton Armé. Traitement des effets d'Élancement et Estimateur d'Erreurs*. Thèse de doctorat, E.N.S. Cachan, 1998.
- [25] L. GRANGER, C. RIEG, T. J.P., F. FLEURY, N. GEORGES, R. DANISH, L. BRUSA, A. MILLARD, C. LA BORDERIE et F. ULM : Containment evaluation under severe accidents (cesa) : Synthetisis of the predictive calculations and analysis of the experimental results obtained on the civaux mock-up. *Nuclear Engineering and design*, 209(1-3):155–163, Novembre 2001.

- [26] G. HERMMAN et J. KESTIN : On thermodynamics foundations of damage theory in elastic solids. Dans J. MAZARS et Z. P. BAŽANT, édés : *Strain Localization and Size Effects due to damage and Cracking*, p. 228–232, Cachan, 1988. CNRS-NSF.
- [27] A. HILLERBORG : *Fracture Mechanics of Concrete*, chap. Analysis of a Single Crack, p. 223–251. Elsevier Science, 1983.
- [28] A. HILLERBORG, M. MODEER et P. G. PETERSON : Analysis of crack formation and crack growth by fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–786, 1976.
- [29] J. JU : On energy-based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modelling and computational aspects. *Int.J. Solids and Struct.*, 25:803–833, 1989.
- [30] L. KACHANOV : On the creep rupture time (in russian). *Otd Thn. Nauk.*, (8):26–31, 1958.
- [31] L. KACHANOV : *Introduction to Damage Mechanics*. Kluwer Acad., 1986.
- [32] C. LA BORDERIE : *Phénomènes Unilatéraux dans un Matériau Endommageable : Modélisation et Application à l'Analyse de Structures en Béton*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, École Normale Supérieure de Cachan, mai 1991.
- [33] C. LA BORDERIE : Implantation du concept non local dans castem2000. Rap. tech. 630, Commissariat à l'Énergie Atomique, DRN/DMT, 1992.
- [34] C. LA BORDERIE : Modèles d'endommagement pour matériaux fragiles. Rap. tech. 631, Commissariat à l'Énergie Atomique, Direction des Réacteurs Nucléaires, 1992.
- [35] C. LA BORDERIE, Y. BERTHAUD et G. PIJAUDIER-CABOT : Crack closure effect in continuum damage mechanics, numerical implementation. Dans N. BICANIC et H. MANG, édés : *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, p. 975–986, Zell am Zee, Austria, 1990.
- [36] C. LA BORDERIE, J. MAZARS et G. PIJAUDIER-CABOT : Damage mechanics model for reinforced concrete structures under cyclic loading. *A.C.I.*, 134:147–172, 1994. edited by W. Gerstle and Z.P. Bažant.
- [37] C. LA BORDERIE, G. PIJAUDIER-CABOT et J. L. TAILHAN : Verification of the residual strength of pre-damaged structures. Task Report Brite-Euram Project P3275 7, L.M.T. Cachan, 1994.
- [38] P. LADEVÈZE : Sur une théorie de l'endommagement anisotrope. Rap. tech. 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie, École Normale Supérieure de Cachan, mars 1983.
- [39] B. LAUNDER et D. SPALDING : The numerical computation of turbulent flow. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:269–289, 1974.
- [40] J. LEMAITRE : How to use damage mechanics. *Nuclear Engrg. and Design*, 80:233–245, 1984.

- [41] J. LEMAÎTRE : *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, 1992.
- [42] J. LEMAÎTRE et J. L. CHABOCHE : *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod, 1985.
- [43] A. MANDELBROT, B.B.and Passoja et A. PAULLAY : Fractal character of fractures surfaces of metals. *Nature*, (6):721–722, Avril 1984.
- [44] J. MAZARS : *Application de la Mécanique de l'Endommagement au Comportement Non-Linéaire et à la Rupture du Béton de Structures*. Doctorat d'état, Université Paris 6, 1984.
- [45] J. MAZARS : A description of micro and micro scale damage of concrete structure. *Journal of Engineering Fracture of Mechanics*, 25(5–6):729–737, 1986.
- [46] J. MAZARS et Y. BERTHAUD : Une technique expérimentale appliquée au béton pour créer un endommagement diffus et mettre en évidence son caractère unilatéral. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 308(II):579–584, 1989.
- [47] J. MAZARS, Y. BERTHAUD et S. RAMTANI : The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(4-5):629–635, 1990.
- [48] O. MERABET : *Modélisation des structures planes en béton armé sous chargements monotone et cyclique - Construction et validation d'un modèle numérique*. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1990.
- [49] A. MILLARD : *Contribution à la Modélisation à Plusieurs Échelles des Matériaux et des Structures*. Habilitation à diriger les recherches, INSA Lyon, 1996.
- [50] P. MIVELAZ : *Étanchéité des Structures planes en Béton Armé – Fuites au Travers d'un Élément Fissuré*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1996.
- [51] A. NADAI : *Theory of flow and fracture of solids*, vol. 1. Mc Graw Hill, 2nd éd., 1950.
- [52] A. NEEDLEMAN : Material dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, p. 69–86, 1988.
- [53] M. B. NOORU-MOHAMED : *Mixed-Mode Fracture of Concrete : an Experimental Approach*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, mai 1992.
- [54] J. PADET : *Fluides en Écoulement, Méthodes et Modèles*. Masson, 1990.
- [55] P. PERZINA : Fundamentals problems in visco-plasticity. Dans A. PRESS, éd. : *Recent Advances in Applied Mechanics*, vol. 9, p. 147–172, 1966.
- [56] G. PIJAUDIER-CABOT et Z. BAŽANT : Non local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 133:1512–1533, 1987.
- [57] C. PONTIROLI : *Comportement au souffle des structures en béton armé*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, juillet 1995.

- [58] F. RAGUENEAU : *Fonctionnement Dynamique des Structures en Béton - Influence des Comportements Hystérétiques Locaux*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, janvier 1999.
- [59] F. RAGUENEAU, J. MAZARS et C. LA BORDERIE : Damage model for concrete including residual hysteretic loops : Application to seismic and dynamic loading. Dans *3rd Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Gifu(Japon), 1998. Aedificatio.
- [60] F. RAGUENEAU, J. MAZARS et C. LA BORDERIE : Modèles locaux de comportement et influences structurales. Dans *5^e Colloque National sur le Génie Parasismique et la Réponse Dynamique des Ouvrages*, Cachan (France), 1999. AFPS.
- [61] S. RAMTANI : *Contribution à la Modélisation de Comportement Multiaxial du Béton Endommagé avec description de l'Effet Unilatéral*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1990.
- [62] H. W. REINHART, H. A. W. CORNELISSEN et D. HORDIJK : Tensile tests and failure analysis of concrete. *Journal of Structural Engineering*, 112(11), 1986.
- [63] P. RIVA, L. BRUSA, P. CONTRI et I. L. : Prediction of air steam leak rate through cracked reinforced concrete panels. *Nuclear Engineering and Design*, (192):13–30, 1999.
- [64] S. RIZKALLA, B. LAU et S. SIMMONDS : Air leakage characteristics in reinforced concrete. *Journal of Structural Engineering*, 110(5):1149–1162, May 1984.
- [65] A. SELLIER : *Comportement Probabiliste de Matériaux et de Structures du Génie Civil*. Thèse de doctorat, E.N.S. Cachan, 1995.
- [66] A. ZABORSKI : Modélisation des effets unilatéraux dans le béton. Rapport interne 55, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, France, 1985.

Index

- Activation, 20, 32, 65
Amortissement, 5, 6, 16–18, 21, 23
Anisotrope, 21, 25, 26, 29, 42, 46, 63
Anélastique, 20, 25, 63–65, 79
- Compression, 18, 28, 32, 40, 63, 65, 74, 79
Couplage, 24, 28, 64, 69
Cyclique, 17, 18, 40, 65, 78, 81
- Distribution, 51, 53, 56, 57
Dynamique, 4–6, 10, 12, 16, 18, 87
Débit, 47, 55–60
- Effet de vitesse, voir Viscoendommageable
EFiCoS, 4, 5, 16, 17, 21, 86
Endommagement, 1, 8, 18, 19, 24–26, 29, 31–33, 59, 63, 64, 69, 71, 74, 75, 78, 79, 81
Extension, 31, 32, 64, 74
Extension, 72
- Glissement, 19, 20, 66
- Hystérésis, 6, 17–19, 21, 23
- Isotrope, 26, 29, 32, 43, 46, 63, 71
- Localisation, voir Régularisation
- Microplan, 26
- O.U.F., 19, 20
Objectivité, voir Régularisation
Orthotrope, 26, 31
Ouverture, 48, 49
- Plasticité, 24, 26, 28, 29, 33, voir Anélastique
Profil, 47, 48, 50–52, 54, 59
- Retard, voir Viscoendommageable
Régularisation, 7, 10, 12, 16
- Seuil, 7, 29, 33, 71, 74, 82
Sismique, 12, 21, 23
Symétrie, 26, 37
- Tortuosité, 47
Traction, 12, 28, 31, 40, 65, 74, 83
- Unilatéral, 4, 5, 8, 17, 21, 26, 32, 40, 46, 65, 78, 85
- Viscoendommageable, 6, 7, 12
- Échelle, 6, 25, 48, 50, 65, 69
Écoulement, 47, 50, 53
Écrouissage, 7, 10, 21, 28, 31, 81, 82
Énergie de fissuration, 31, 46, 76

Index des auteurs

- Allix, O. 7
- Bažant, Z. 10, 26, 50, 64
Belytschko, T. 10
Berthaud, Y. 65, 79
Bischoff, P. 6
Bodé, L. 26
Boehler, J.-P. 25
Boussa, H. 42, 48
Brusa, L. 47, 48
Burlion, N. xi, 50, 64
- Carpinteri, A. 50
Chaboche, J. L. 18, 74
Chassaing, P. 54
Clément, J. L. 26
Contri, P. 47
Cormery, F. 78
Cornelissen, H. A. W. 65
- Danish, R. 48
Daudeville, L. 64
Dubé, J. F. 5, 10, 17, 64, 87
- Feenstra, P. 31
Feissel, P. 7
Fichant, S. 25, 42, 64, 75
Fléjou, J. L. 87
Fleury, F. 48
- Gatuingt, F. 64, 83
Georges, N. 48
Ghavamian, S. 87
- Glynn, J. 64
Granger, L. 48
- Hermman, G. 79
Hillerborg, A. 48, 64
Hordijk, D. 65
- J.P., T. 48
Ju, J. 28
- Kachanov, L. 18
Kestin, J. 79
- L., I. 47
La Borderie, C. 10, 17, 18, 21, 26, 32, 42, 48, 63, 64, 75, 79, 83
Ladevèze, P. 29, 36, 37, 64, 78, 79
Lau, B. 47
Lauder, B. 54
Lemaitre, J. 28
- Mandelbrot, A., B.B. and Passoja 50
Mazars, J. 18, 21, 31, 32, 63–65, 79
Merabet, O. 28
Millard, A. 31, 48
Mivelaz, P. 47
Modeer, M. 48
- Nadai, A. 28
Needleman, A. 7
Nooru-Mohamed, M. B. 43
- Padet, J. 47
Paullay, A. 50
Perry, S. 6
Perzina, P. 7
Peterson, P. G. 48
Pijaudier-Cabot, G. 10, 26, 42, 64, 75, 79
Pontirolli, C. 5
Prat, P. 26
- Ragueneau, F. 6, 18, 21, 25
Ramtani, S. x, 18, 35, 79
Reinhart, H. W. 65
Rieg, C. 48
Riva, P. 47
Rizkalla, S. 47

INDEX

96

Sellier, A. 87
Simmonds, S. 47
Spalding, D. 54
Tailhan, J. L. 26
Thévenet, P. 7

Ulm, F. 48
Weleman, H. 78
Zaborski, A. 79

Troisième partie
Curriculum Vitae