Géométrie des matrices de Hankel

Jean Vallès

compilé le 23 janvier 2006

On note S_1 le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des polynômes homogènes de degré 1 en les variables u et v. Dans ce cas, une base de l'espace vectoriel S_n des polynômes homogène de degré n est donnée par

$$S_n = \mathrm{vect}\{u^n, u^{n-1}v, \cdots, u^{n-i}v^i, \cdots, v^n\}$$

Associer à un point de $\mathbb{P}^1$ la forme de degré 1 s'annulant en ce point permet de définir l'isomorphisme $S_1 \to S_1^*,\ (\alpha, \beta) \mapsto (-\beta, \alpha)$. Cet isomorphisme s'étend aux polynômes de degré supérieur, i.e en un isomorphisme $S_n \to S_n^*$ qui est, selon la parité de n, symétrique ou antisymétrique ; une base de l'espace dual est alors

$$S_n^* = \mathrm{vect}\{(v^n, -nv^{n-1}u, \cdots, (-1)^i \binom{n}{i} v^{n-i}u^i, \cdots, (-1)^n u^n)\}$$

Par convention les points de $\mathbb{P}(S_n)$ sont des formes linéaires sur S_n. On note C_n la courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}(S_n)$ image de $\mathbb{P}(S_1)$ par le morphisme de Veronese : $l \mapsto l^n$.

1. Fibrés sécants

L'objectif de cetexposé est de discuter de la géométrie attachée aux mineurs maximaux des matrices de Toeplitz et de Hankel

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n & 0 & & & \\ 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_n & 0 & & \\ & 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_n & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & & 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ z_1 & z_2 & \cdots & \cdots & z_{m+1} \\ z_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_{n+m-1} \\ z_n & \cdots & \cdots & z_{n+m-1} & z_{n+m} \end{pmatrix}$$

Elles proviennent d'une même multimatrice (trois entrées) $M = (a_{i,j,k})$ avec $a_{i,j,k} = 1$ lorsque $k = i + j$ et $i \in \{0, \cdots, n\},\ j \in \{0, \cdots, m\}$ et $k \in \{0, \cdots, n+m\}$, $a_{i,j,k} = 0$ sinon.

Ou encore, en termes d'applications linéaire, elles proviennent d'une même application trilinéaire

$$\sum_{i=0,\cdots,n} \sum_{j=0,\cdots,m} x_i y_j z_{i+j}$$

En notant $(x_i = u^i v^{n-i})$, $(y_j = u^j v^{m-j})$, et $(z_l = u^l v^{n+m-l})$ les bases respectives de S_n, S_m et S_{n+m} cette multimatrice correspond à la multiplication des polynômes homogènes à deux variables

$$S_n \otimes S_m \xrightarrow{\phi_\times} S_{n+m},\ (u^i v^{n-i}, u^{m-j}v^j) \mapsto u^{m-j+i}v^{n-i+j}$$

Comme le rang de la matrice des (x_i) est constant, on obtient un fibré vectoriel $E_{n,n+m}$ sur $\mathbb{P}(S_n)$ dont la fibre au dessus d'un point $(a_0, \cdots, a_n)$ est définie par les équations $\{\sum_{i=0,\cdots,n} a_i z_{i+j} = 0, j = 0, \cdots, m\}$.

La matrice des (z_{i+j}), quant à elle, provient de l'image inverse de la matrice $(m+1)\times(n+1)$ générique $(x_i \otimes y_j)$ via le plongement

$$\phi_\times : \mathbb{P}(S_{n+m}) \hookrightarrow \mathbb{P}(S_m \otimes S_n)$$

(en effet la matrice générique est la matrice $(x_i \otimes y_j = z_{i+j})$).
La sous-variété des matrices $(m+1) \times (n+1)$ de rang $\leq n$ définie par l'annulation des mineurs maximaux est la variété des $\mathbb{P}^{n-1}$ n sécants à la variété des matrices de rang 1 (car une matrice de rang $\leq n$ est la somme de n matrices de rang 1). Dans notre cas particulier, les mineurs 2×2 définissent la courbe rationnelle C_{n+m}. En effet, grâce à la forme particulière des matrices de Hankel, les mineurs 2×2 de la matrice (z_{i+j}) ci-dessus définissent la même variété que la variété des mineurs 2×2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n+m-1} \\ z_1 & z_2 & \cdots & \cdots & z_{n+m} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le lieu des zéros défini par les mineurs maximaux de (z_{i+j}) coïncide avec la variété des $\mathbb{P}^{n-1}$ qui rencontrent C_{n+m} (définie par les deux mineurs) le long de n points (on a supposé que $n \leq m$). Il s'agit de la sous-variété, notée $\mathcal{D}_{n,n+m}$, des formes binaires (polynômes homogènes à deux variables) de degré $n+m$ s'écrivant comme somme de n puissances $(n+m)$-ièmes.

Proposition : *La projection $\pi : \mathbb{P}(E_{n,n+m}) \to \mathbb{P}(S_{n+m})$ induit un isomorphisme de variétés algébriques $\mathbb{P}(E_{n,n+m}) \setminus \pi^{-1}(\mathcal{D}_{n-1,n+m}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}_{n,n+m} \setminus \mathcal{D}_{n-1,n+m}$.*

Exemple : Considérons l'application $S_2 \otimes S_2 \to S_4$. La projectivisation du fibré correspondant sur $\mathbb{P}(S_2)$ est birationnelle à la variété des bisécantes de C_4. Un point général de $\mathbb{P}(E_{2,4})$ correspond à une quartique binaire

$$q(u,v) = z_0 u^4 + 4z_1 u^3 v + 6z_2 u^2 v^2 + 4z_3 uv^3 + z_4 v^4$$

pour laquelle il existe deux formes linéaires $l_1(u,v)$ et $l_2(u,v)$ vérifiant

$$q(u,v) = (l_1(u,v))^4 + (l_2(u,v))^4$$

Ces quartiques forment une hypersurface de $\mathbb{P}(S_4)$ puisque leurs coefficients vérifient

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} = 0$$

Ces quartiques ne rencontrent la variété discriminant que le long de la courbe C_4. Lorsque les quatre points (racines de $q(u,v)$) sont distincts ils forment une division harmonique. En d'autres termes ce solide cubique est la clôture de Zariski de l'orbite sous $SL(2)$ de quatre points de $C_4 \simeq \mathbb{P}^1$ de birapport égal à -1 (l'orbite, par exemple, du polynôme $u^4 - v^4 = (u-v)(u+v)(u-iv)(u+iv)$).

Un point de ce solide cubique, s'il n'est pas sur C_4 n'appartient qu'à une seule bisécante à C_4. Sinon le plan contenant deux bisécantes rencontrerait C_4 le long de quatre points distincts de coordonnées $(1, t_i, t_i^2, t_i^3, t_i^4)$. Dire que ces quatre points sont dans un même plan projectif c'est dire que les mineurs 4×4 de la matrice de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \\ t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 & t_4^4 \end{pmatrix}$$

sont nuls. En particulier le premier d'entre eux, ce qui contredit le fait qu'ils sont distincts.

2. Courbes de Poncelet

Expliciter un fibré vectoriel à l'aide de variétés classiques (ici des variétés de sécantes de Veronese) permet de mieux comprendre certains résultats difficiles comme ceux concernant les courbes de Poncelet.

Sur $\mathbb{P}^2$ le fibré $E_{2,n+1}$ est le fibré des droites bisécantes à la courbe rationnelle C_{n+1}. Une droite bisécante à la courbe rationnelle s'identifie à la fibre projective de $E_{2,n+1}$ de la façon naturelle suivante : À un point de $\mathbb{P}^2$ on associe deux tangentes à la conique miroir $C_2^\vee$ de $\mathbb{P}^2$ ou encore deux points de C_{n+1}.

Ceci permet de donner la forme particulière du schéma des zéros Z d'une section (i.e une application régulière $\mathbb{P}^2 \setminus Z \to \mathbb{P}(E_{2,n+1})$) et de définir ainsi les courbes de Poncelet.

Une section correspond au choix d'un hyperplan H_s de $\mathbb{P}(S_{n+1})$ (application linéaire $S_{n+1} \to \mathbb{C}$). Celui ci rencontre C_{n+1} le long de $(n+1)$ points. L'image d'un point x de $\mathbb{P}^2$ est le point d'intersection de la fibre au dessus de ce point avec l'hyperplan H_s. Cette intersection est mal définie si la fibre au dessus du point x est contenue dans H_s. Une section correspond par ailleurs au choix d'une ligne à retirer de la matrice définissant le fibré. Ainsi l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la matrice extraite $n \times (n+1)$ sur $\mathbb{P}(S_2)$ est l'idéal des $\binom{n+1}{2}$ points d'intersection de $(n+1)$ droites tangentes à $C_2^\vee$.

Définition *Une courbe de degré n passant par les sommets d'un $(n+1)$-gône circonscrit à une conique lisse C est appelé courbe de Poncelet associée à C.*

On remarque, via la construction précédente que le déterminant d'une matrice extraite $n \times n$ est alors une courbe de Poncelet de degré n associée à $C_2^\vee$. Qui plus est elle passe par une infinité (de dimension projective 1) de sommets de $(n+1)$-gônes tangents à $C_2^\vee$. Ce qui constitue une preuve du théorème de Darboux

Théorème de Darboux *Soit S une courbe de Poncelet de degré n associée à une conique lisse C. Alors S passe par les sommets d'une infinité de $(n+1)$-gônes circonscrit à C.*

En guise d'exemple final considérons l'application $S_1 \otimes S_2 \to S_3$. D'un côté on a un fibré de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. C'est le fibré sécant de la cubique C_3 définie par l'annulation des deux mineurs de la matrice $\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$. Les coniques extraites de la première matrices sont triangulairement circonscrites à la conique duale (d'équation $x_1^2 + 4x_0x_2 = 0$) de la conique d'équation $z_1^2 - z_0z_2 = 0$.

Les points de la conique $C_2^\vee$ d'équation $x_1^2+4x_0x_2=0$ sont de la forme $(u^2,-2uv,v^2)$. Les trois tangentes $x_0=0, x_2=0$ et $x_0+x_1+x_2=0$ aux points $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ et $(1,-2,1)$ ont pour sommets les points $(0,1,0)$, $(1,-1,0)$ et $(0,1,-1)$. Sur la cubique C_3 les points correspondent aux points $(0,0,0,1)$, $(1,0,0,0)$ et $(1,1,1,1)$. L'hyperplan H_s engendré par ces trois points est $z_1-z_2=0$. En multipliant la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trouve la matrice extraite $\begin{pmatrix} 0 & x_0 \\ x_0+x_1+x_2 & x_0+x_1+x_2 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}$ dont les mineurs s'annulent simultanément aux points $(0,1,0)$, $(1,-1,0)$ et $(0,1,-1)$. La conique d'équation

$$\det\begin{pmatrix} x_2 & x_0 \\ x_0+x_1+x_2 & x_0+x_1+x_2 \end{pmatrix}=0$$

est Poncelet associée à la conique de départ. Elle passe par une infinité de sommets de triangles tangents à $C_2^\vee$.

Références

[AH] J. Alexander, A. Hirschowitz, Polynomial interpolation in several variables, J. Alg. Geom. 4 (1995), 201-222 (la papier dans lequel est donné la liste des exceptions pour la dimension attendue des variétés de sécantes aux Veronese, par exemple pour trois variables homogènes la dimension projective des quartiques qui sécrivent comme somme de 5 formes linéaires à la puissance 4 n'est pas 14 mais 13)

[Ba2] W.Barth, Moduli of vector bundles on the projective plane, Inv. Math. **42** (1977), 63-91. (dans ce papier Barth introduit les réseaux de quadriques associées aux fibrés sur le plan. Ce réseau de quadrique correspond à la donnée de trois matrices symétriques F_0, F_1, F_2 et d'une courbe $det(x_0F_0+x_1F_1+x_2F_2)=0$)

[DK] I.Dolgachev et M.Kapranov, Arrangements of hyperplanes and vector bundles on $\mathbf{P}_n$, Duke Math.J. **71**, (1993), 633-664. (de jolies constructions géométriques, à la Steiner, de fibrés vectoriels..)

[Dol] I. Dolgachev, Introduction to geometrical invariant theory, Notes of the Series of Lectures held at the Seoul Mational University, 1994

[GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants* Birkhäuser, Boston, 1994.

[GH1] Ph. Griffiths,J. Harris, *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, L'enseignement mathématique **24** (1978), 31-40. (on y trouve une magnifique formule de Cayley donnant les équations des hypersurfaces de coniques n-circonscrites à une conique fixée.)

[GP] L. Gruson, C. Peskine, Courbes de l'espace projectif, variétés de sécantes, Enumerative geometry, Progress in Math. **24** (1982), 1-33. (il y a dans ce papier difficile de belles manipulations de matrices de Hankel et une application aux courbes adjointes)

[Harris] J. Harris, Algebraic geometry, A first course, Springer 1992, GTM 133 (pas mal de choses sur les variétés de matrices, stratification par le rang, ...)

[Sch1] R.L.E. Schwarzenberger, Vector bundles on the projective plane, Proc. London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.

[Tr] G.Trautmann, Poncelet curves and associated theta characteristics, Expo. Math. **6** (1988), 29-64.

[Va1] J.Vallès, *Fibrés de Schwarzenberger et coniques de droites sauteuses*, Bull.Soc.Math. France, **128**, (2000), 433-449.