

Nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner

Jean Vallès

Algebraic Geometry

RÉSUMÉ — Soit $\mathcal{S}_{n,k}$ la famille des fibrés de Steiner S sur \mathbf{P}_n définis par une suite exacte ($k > 0$)

$$0 \rightarrow kO_{\mathbf{P}_n}(-1) \longrightarrow (n+k)O_{\mathbf{P}_n} \longrightarrow S \rightarrow 0$$

Nous montrons le résultat suivant : *Soient $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ et H_1, \dots, H_{n+k+2} des hyperplans distincts tels que $h^0(S_{H_i}^\vee) \neq 0$. Alors il existe une courbe rationnelle normale $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ telle que $H_i \in C_n$ pour $i = 1, \dots, n+k+2$ et $S \simeq E_{n+k-1}(C_n)$, où $E_{n+k-1}(C_n)$ est le fibré de Schwarzenberger sur \mathbf{P}_n appartenant à $\mathcal{S}_{n,k}$ associé à la courbe $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$.*

On en déduit qu'un fibré de Steiner $S \in \mathcal{S}_{n,k}$, s'il n'est pas un fibré de Schwarzenberger, possède au plus $(n+k+1)$ hyperplans instables; ceci prouve dans tous les cas un résultat de Dolgachev et Kapranov ([DK], thm. 7.2) concernant les fibrés logarithmiques.

ABSTRACT — Let $\mathcal{S}_{n,k}$ denote the family of Steiner's bundle S on \mathbf{P}_n defined by the exact sequence ($k > 0$)

$$0 \rightarrow kO_{\mathbf{P}_n}(-1) \longrightarrow (n+k)O_{\mathbf{P}_n} \longrightarrow S \rightarrow 0$$

We show the following result : *Let $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ and H_1, \dots, H_{n+k+2} distinct hyperplanes such that $h^0(S_{H_i}^\vee) \neq 0$. Then it exists a rational normal curve $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ such that $H_i \in C_n$ for $i = 1, \dots, n+k+2$ and $S \simeq E_{n+k-1}(C_n)$, where $E_{n+k-1}(C_n)$ is the Schwarzenberger's bundle on \mathbf{P}_n which belongs to $\mathcal{S}_{n,k}$ associated to $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$.*

It implies that a Steiner's bundle $S \in \mathcal{S}_{n,k}$, if it isn't a Schwarzenberger's bundle, possesses no more than $(n+k+1)$ unstable hyperplanes; this proves in any case a result of Dolgachev and Kapranov ([DK], thm 7.2) about logarithmic bundles.

1 Introduction

Soient $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_{n+k+1}\}$ un arrangement de $(n+k+1)$ -hyperplans de $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ (on dira aussi par abus de langage qu'un hyperplan H de \mathbf{P}_n est un point de \mathbf{P}_n^\vee) en position linéaire générale et $E(\mathcal{H}) = \Omega_{\mathbf{P}_n}(\log \bigcup H_i)$ le fibré logarithmique associé à \mathcal{H} (i.e. le fibré vectoriel des 1-formes différentielles sur \mathbf{P}_n à pôles logarithmiques sur le diviseur $\bigcup H_i$, voir [De]). Dans [DK] les auteurs montrent que $E(\mathcal{H}) \in \mathcal{S}_{n,k}$ (théorème 3.5) où $\mathcal{S}_{n,k}$ est la famille des fibrés de Steiner S définis par une suite exacte

$$0 \rightarrow kO_{\mathbf{P}_n}(-1) \longrightarrow (n+k)O_{\mathbf{P}_n} \longrightarrow S \rightarrow 0$$

Dolgachev et Kapranov conjecturent que pour $k > 0$ l'association $\mathcal{H} \rightarrow E(\mathcal{H})$ est bijective sauf si $\mathcal{H} \in C_n$ où $C_n \in \mathbf{P}_n^\vee$ est une courbe rationnelle normale; dans ce cas le fibré logarithmique est le fibré de Schwarzenberger $E_{n+k-1}(C_n)$ ([Sch1]) associé à C_n . Ils montrent

ce résultat pour $k \geq n + 2$, en étudiant les droites de saut de $E(\mathcal{H})$ (théorème 7.2, dit de Torelli).

Dans cet article nous prouvons ce résultat pour tout $k > 0$ (corollaire 3.1). Notre preuve repose sur l'étude des restrictions de $E(\mathcal{H})$, non pas aux droites, mais aux hyperplans de \mathbf{P}_n . En effet il résulte de [DK] prop.2.3 que $h^0(E(\mathcal{H})_{H_i}^\vee) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n + k + 1$. Plus généralement on définit dans \mathbf{P}_n^\vee l'ensemble $W(S)$ des hyperplans instables d'un fibré de Steiner $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ de la manière suivante

$$H \in W(S) \Leftrightarrow h^0(S_H^\vee) \neq 0$$

Le résultat de Dolgachev et Kapranov est une conséquence directe du théorème suivant qui affirme qu'un fibré de Steiner $S \in \mathcal{S}_{n,k}$, s'il n'est pas un fibré de Schwarzenberger, possède au plus $(n + k + 1)$ hyperplans instables.

Théorème 3.1. *Soient $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ et H_1, \dots, H_{n+k+2} des hyperplans distincts tels que $h^0(S_{H_i}^\vee) \neq 0$. Alors il existe une courbe rationnelle normale $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ telle que $H_i \in C_n$ pour $i = 1, \dots, n + k + 2$ et $S \simeq E_{n+k-1}(C_n)$.*

On vérifie par ailleurs que $W(E_{n+k-1}(C_n)) = C_n$ (proposition 2.2).

Dans la première partie on montre (proposition 2.1) que si $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ avec $k > 1$ et $H_1 \in W(S)$ alors l'homomorphisme $S \rightarrow O_{H_1}$ induit par une section non nulle de $S_{H_1}^\vee$ est surjectif et son noyau T_1 vérifie $T_1 \in \mathcal{S}_{n,k-1}$ et $W(S) \subset W(T_1) \cup H$.

Après $k - 2$ réductions on se ramène ainsi à un fibré de Steiner $T_{k-2} \in \mathcal{S}_{n,2}$. Comme tout fibré de Steiner de $\mathcal{S}_{n,2}$ est un fibré de Schwarzenberger associé à une courbe rationnelle normale $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ ([DK], prop 6.8) on en déduit que $T_{k-2} \simeq E_{n+1}(C_n)$ et que les hyperplans instables de S sont des points de C_n .

On conclut en utilisant la proposition 2.3 établie dans la deuxième partie qui affirme qu'un fibré de Steiner $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ qui possède $n + k + 1$ hyperplans instables osculateurs d'une même courbe rationnelle normale est un fibré de Schwarzenberger (ce résultat généralise le théorème 6.4 de [DK] concernant les fibrés logarithmiques).

Dans la suite de ce texte nous écrirons c.r.n. pour courbe rationnelle normale.

Ce problème d'existence d'un nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner m'a été posé par V.Ancona et G.Ottaviani. Je tiens à les remercier très chaleureusement pour cela ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur ce thème.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un contrat de recherche européen (programme capital humain et mobilité) entre La Scuola Normale Superiore di Pisa et L'Université P.et M. Curie Paris VI.

2 Les fibrés de Steiner

Définition 2.1. *Un fibré vectoriel S de rang n sur \mathbf{P}_n est appelé fibré de Steiner s'il existe une suite exacte ($k > 0$)*

$$0 \rightarrow kO_{\mathbf{P}_n}(-1) \longrightarrow (n + k)O_{\mathbf{P}_n} \longrightarrow S \rightarrow 0$$

Notation: On note $\mathcal{S}_{n,k}$ la famille des fibrés de Steiner définis comme ci-dessus.

Remarque. Pour $k > 0$ on a $h^0(S^\vee) = 0$. Pour $k = 1$, le fibré S est isomorphe à $\Omega_{\mathbf{P}_n}^\vee(-1)$.

Rappelons qu'un fibré vectoriel E est stable si pour tout sous-faisceau cohérent sans torsion $F \subset E$ on a

$$\frac{\deg(F)}{\operatorname{rg}(F)} < \frac{\deg(E)}{\operatorname{rg}(E)}$$

et que les fibrés de Steiner S ainsi définis sont stables ([BS], théorème 2.7).

On dira qu'un hyperplan est instable pour le fibré S s'il appartient à l'ensemble suivant

$$W(S) = \{H \in \mathbf{P}_n^\vee / h^0(S_H^\vee) \neq 0\}$$

Proposition 2.1. *Soient $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ et $H \in W(S)$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

- 1) $S_H = O_H \oplus T$ où T est un fibré de Steiner sur H (ou $T = 0$ si $n = 1$).
- 2) L'homomorphisme $S \rightarrow O_H$ (induit par une section non nulle de S_H^\vee) est surjectif et, pour $k > 1$, son noyau, noté S' , vérifie $S' \in \mathcal{S}_{n,k-1}$ et $W(S) \subset W(S') \cup \{H\}$.

Remarque. Il résulte de 1) que $h^0(S_H^\vee) = h^0(O_H) = 1$ et que cette section est partout non nulle.

Preuve proposition 2.1. 1) Une section non nulle de $t \in H^0(S_H^\vee)$ induit un homomorphisme non nul $t^\vee : S_H \rightarrow O_H$; notons T son noyau. L'homomorphisme composé

$$H^0(S) \otimes O_H \rightarrow S_H \xrightarrow{t^\vee} O_H$$

est non nul donc il est surjectif. Ceci prouve que t^\vee est surjectif et que l'application $H^0(S_H) \rightarrow H^0(O_H)$ est surjective. On en déduit que T est un fibré vectoriel de rang $n - 1$ sur H et que $S_H = O_H \oplus T$.

Le lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif suivant prouve que T est un fibré de Steiner sur H .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & kO_H(-1) & \longrightarrow & (n+k)O_H & \longrightarrow & S_H & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & O_H & \xlongequal{\quad} & O_H & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

- 2) Il résulte de 1) que l'homomorphisme composé $S \rightarrow S_H \rightarrow O_H$ induit par la section $t \in H^0(S_H^\vee)$ est surjectif. Son noyau (noté S') est un fibré de rang n sur \mathbf{P}_n . Le lemme du

serpent appliqué au diagramme commutatif suivant prouve que S' est un fibré de Steiner

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & 0 & \\
& & & & & \downarrow & \\
& & & & & S' & \\
& & & & & \downarrow & \\
& & & & & S & \\
0 & \longrightarrow & kO_{\mathbf{P}_n}(-1) & \longrightarrow & (n+k)O_{\mathbf{P}_n} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & O_{\mathbf{P}_n}(-1) & \longrightarrow & O_{\mathbf{P}_n} & \longrightarrow & O_H \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

La suite exacte (duale de la dernière colonne du diagramme ci-dessus)

$$0 \longrightarrow S^\vee \longrightarrow S'^\vee \longrightarrow O_H(1) \longrightarrow 0$$

montre que $W(S) \subset W(S') \cup \{H\}$.

2.1 Les fibrés de Schwarzenberger

Soient \mathbf{F} la variété d'incidence point-hyperplan de \mathbf{P}_n , p et q les morphismes de projections sur \mathbf{P}_n et \mathbf{P}_n^\vee .

Considérons le diagramme d'incidence suivant (où \bar{p} et \bar{q} sont les morphismes de projections p et q restreints à $X = q^{-1}(C_n)$)

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\bar{q}} & C_n \\
\bar{p} \downarrow & & \\
\mathbf{P}_n & &
\end{array}$$

On note $O_{C_n}(\frac{m}{n})$ le fibré en droite sur C_n de degré m correspondant à $O_{\mathbf{P}_1}(m)$ via l'isomorphisme $\mathbf{P}_1 \simeq C_n$.

Définition 2.2. Soit m un entier relatif, on appelle fibré de Schwarzenberger associé à C_n le fibré vectoriel de rang n suivant

$$E_m(C_n) = \bar{p}_* \bar{q}^* O_{C_n}(\frac{m}{n})$$

Cette définition est donnée par Schwarzenberger ([Sch1], théorème 4). Pour $m \geq n$ les fibrés $E_m(C_n)$ sont des fibrés de Steiner ([DK], prop. 6.3 ou [Sch1], prop.2).

Pour $n = 2$ le résultat qui suit est démontré par Schwarzenberger ([Sch1], prop.8). Cependant comme sa preuve ne semble pas se généraliser facilement aux cas $n > 2$, nous en donnons brièvement une démonstration.

Proposition 2.2. *Lorsque $m > n$ on a $W(E_m(C_n)) = C_n$.*

Preuve de la proposition 2.2. Notons (X_0, \dots, X_n) les coordonnées homogènes de \mathbf{P}_n et considérons la résolution suivante de $E_m(C_n)$

$$0 \rightarrow (m - n + 1)O_{\mathbf{P}_n}(-1) \xrightarrow{M} (m + 1)O_{\mathbf{P}_n} \rightarrow E_m(C_n) \rightarrow 0$$

où un représentant de la matrice M s'écrit sous la forme connue ([Sch1], prop.2)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & X_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & X_0 & X_1 \\ \cdots & 0 & \cdots & X_1 & X_2 \\ 0 & X_0 & \cdots & X_2 & \cdot \\ X_0 & X_1 & \cdots & \cdots & X_n \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_n & 0 \\ X_2 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & X_n & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair qu'un hyperplan H est instable pour $E_m(C_n)$ si et seulement s'il existe un vecteur non nul $(x_0, \dots, x_m) \in \mathbf{C}^{m+1}$ tel que les formes linéaires $(\sum_{i=0}^n x_{i+j} X_i)_{j=0, \dots, m-n}$ soient proportionnelles à H . On vérifie alors sans difficulté qu'il existe $(t_0, t_1) \in \mathbf{C}$ tel que $(x_0, \dots, x_m) = (t_0^m, \dots, t_0^{m-i} t_1^i, \dots, t_1^m)$. Ceci prouve, après factorisation de la j -ième équation par $t_0^{m-n-j} t_1^j$, que l'équation de H est

$$\sum_{i=0}^n t_0^{n-i} t_1^i X_i = 0.$$

Réciproquement on montre qu'un fibré de Steiner $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ qui possède $n+k+1$ hyperplans instables osculateurs d'une c.r.n. est un fibré de Schwarzenberger.

Proposition 2.3. *Soient $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ et H_1, \dots, H_{n+k+1} des hyperplans instables pour S . Alors,*

$$H_1, \dots, H_{n+k+1} \in C_n \Rightarrow S \simeq E_{n+k-1}(C_n)$$

Preuve de la proposition 2.3. Considérons le diagramme d'incidence déjà introduit précédemment

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{q}} & C_n \\ \bar{p} \downarrow & & \\ \mathbf{P}_n & & \end{array}$$

Appliquons le foncteur $\bar{q}_* \bar{p}^*$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow S^\vee \rightarrow (n+k)O_{\mathbf{P}_n} \rightarrow kO_{\mathbf{P}_n}(1) \rightarrow 0$$

Comme $\bar{q}_* \bar{p}^* O_{\mathbf{P}_n}(1) = \Omega_{\mathbf{P}_n^\vee}(-1)|_{C_n} = nO_{C_n}(\frac{1}{n})$, on obtient un homomorphisme

$$(n+k)O_{C_n} \xrightarrow{M} nkO_{C_n}(\frac{1}{n})$$

Par hypothèse les mineurs maximaux de M s'annulent tous aux points H_1, \dots, H_{n+k+1} de C_n . Comme un seul mineur définit au plus $n+k$ points sur C_n on en déduit que M n'est pas de rang maximal i.e. que l'application possède un noyau qui par functorialité est $\bar{q}_* \bar{p}^* S^\vee$. Comme (d'après la proposition 2.1) $h^0(S_H^\vee) = 1$ pour tout hyperplan $H \in C_n$, on a $\bar{q}_* \bar{p}^* S^\vee = O_{C_n}(-\frac{m}{n})$ pour un entier $m \geq 0$ que l'on va déterminer.

L'image de M est un fibré sur C_n de rang $n+k-1$ décomposé défini par $n+k-1$ entiers a_1, \dots, a_{n+k-1} tels que $0 \leq a_i \leq 1$ et $m = \sum a_i$. On en déduit que $m \leq n+k-1$.

Comme l'unique section $s_H \in H^0(S_H^\vee)$ est partout non nulle (proposition 2.1) la suite exacte canonique sur X

$$0 \rightarrow \bar{q}^* O_{C_n}(-\frac{m}{n}) \rightarrow \bar{p}^* S^\vee \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$$

est localement scindée, i.e. le faisceau \mathcal{T} est localement libre sur X . On en déduit que l'homomorphisme dual

$$\bar{p}^* S \rightarrow \bar{q}^* O_{C_n}(\frac{m}{n})$$

est surjectif. Il induit un homomorphisme non nul sur \mathbf{P}_n

$$S \rightarrow E_m(C_n)$$

Remarquons que $m \geq n$. Sinon $E_m(C_n) = (m+1)O_{\mathbf{P}_n} \oplus (n-m-1)O_{\mathbf{P}_n}(-1)$ ([DK], proposition 2.10) donc $h^0(S^\vee) \neq 0$ ce qui est faux. Par conséquent $E_m(C_n)$ est stable (car pour $m \geq n$ c'est un fibré de Steiner).

Comme $c_1(S) \geq c_1(E_m)$, c'est une conséquence immédiate de la stabilité des fibrés S et $E_m(C_n)$ que l'homomorphisme ci-dessus est un isomorphisme. C'est à dire $m = n+k-1$ et $S \simeq E_{n+k-1}(C_n)$.

Enfin, nous rappelons, sans le démontrer, le résultat suivant dû à Dolgachev et Kapranov.

Proposition 2.4. ([DK], prop. 6.8) *Tout fibré de Steiner $S \in \mathcal{S}_{n,2}$ est un fibré de Schwarzenberger $E_{n+1}(C_n)$ pour une c.r.n $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$.*

Contrairement au cas du fibré tangent $\Omega_{\mathbf{P}_n}^\vee(-1) \simeq E_n(C_n)$, tous les hyperplans ne sont pas instables pour $E_{n+1}(C_n)$. En effet on a, d'après la proposition 2.2, $W(E_{n+1}(C_n)) = C_n$.

3 Le résultat central

Théorème 3.1. *Soient $S \in \mathcal{S}_{n,k}$ et H_1, \dots, H_{n+k+2} des hyperplans distincts tels que $h^0(S_{H_i}^\vee) \neq 0$. Alors il existe une c.r.n. $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ telle que $H_i \in C_n$ pour $i = 1, \dots, n+k+2$ et $S \simeq E_{n+k-1}(C_n)$.*

Corollaire 3.1. *Soient \mathcal{H} et \mathcal{K} deux arrangements de $m \geq n+2$ hyperplans en position linéaire générale dans \mathbf{P}_n . Supposons que $E(\mathcal{H}) \simeq E(\mathcal{K})$. Alors une des deux possibilités se produit.*

1) $\mathcal{H} = \mathcal{K}$

2) Il existe une c.r.n. $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ telle que $E(\mathcal{H}) \simeq E(\mathcal{K}) \simeq E_{m-2}(C_n)$

Preuve du corollaire 3.1. Soit $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_m\}$ un arrangement de m hyperplans en position linéaire générale dans \mathbf{P}_n et $E(\mathcal{H})$ le fibré logarithmique associé; rappelons qu'il existe une suite exacte ([DK], prop.2.3)

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbf{P}_n} \longrightarrow E(\mathcal{H}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{H_i} \rightarrow 0$$

Ceci prouve que $H_i \in W(E(\mathcal{H}))$; si $E(\mathcal{H}) \simeq E(\mathcal{K})$ et $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ on a aussi $K_i \in W(E(\mathcal{H}))$ pour $i = 1, \dots, m$.

Supposons que $\mathcal{H} \neq \mathcal{K}$ alors le fibré $E(\mathcal{H})$ possède au moins $m + 1$ hyperplans instables distincts. D'après le théorème 3.1 on en déduit qu'il existe une courbe rationnelle normale $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ telle que les $m + 1$ hyperplans soient des points de C_n et $E(\mathcal{H}) \simeq E_{m-2}(C_n)$.

Preuve du théorème 3.1. Comme les fibrés vectoriels de $\mathcal{S}_{n,1} = \{\Omega_{\mathbf{P}_n}^\vee(-1)\}$ et de $\mathcal{S}_{n,2}$ sont des fibrés de Schwarzenberger on peut supposer $k \geq 3$.

Soient H_1, \dots, H_{k-2} , $(k - 2)$ hyperplans parmi les $n + k + 2$ hyperplans H_1, \dots, H_{n+k+2} instables de S . En utilisant 2) de la proposition 2.1 on construit une suite de fibrés de Steiner $S = T_0, T_1, \dots, T_{k-2}$

$$0 \rightarrow T_i \longrightarrow T_{i-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{H_i} \rightarrow 0 \quad (i = 1, \dots, k - 2)$$

où $T_i \in \mathcal{S}_{n,k-i}$ et en particulier $T_{k-2} \in \mathcal{S}_{n,2}$. Il existe donc, d'après la proposition 2.4, une c.r.n $C_n \subset \mathbf{P}_n^\vee$ telle que $T_{k-2} \simeq E_{n+1}(C_n)$.

D'après la proposition 2.1 les $(n + 4)$ hyperplans restant $H_{k-1}, \dots, H_{n+k+2}$ sont instables pour T_{k-2} . Par conséquent les $(n + 4)$ points $H_{k-1}, \dots, H_{n+k+2}$ sont des points de C_n . Il faut maintenant vérifier que $H_1, \dots, H_{k-2} \in C_n$. Pour ce faire on remarque que parmi $(n + 4)$ points de C_n tout choix de $(n + 3)$ points détermine C_n . Fixons H_k, \dots, H_{n+k+2} . En permutant H_{k-1} avec chacun des points H_i pour $i = 1, \dots, k - 2$ on prouve que les $n + k + 2$ points sont sur la courbe C_n .

La proposition 2.3 permet de conclure.

References

- [BS] G.Bohnhorst, H.Spindler, The stability of certain vector bundles on \mathbf{P}_n , in Lecture Notes in Math., **1507**, p.39-50, Springer-Verlag, 1992.
- [De] P.Deligne, Théorie de Hodge II, Publ.Math. IHES, **40** (1971), 5-58.
- [DK] I.Dolgachev et M.Kapranov, Arrangements of hyperplanes and vector bundles on \mathbf{P}_n , Duke Math.J. **71**, (1993), 633-664..
- [Sch1] R.L.E.Schwarzenberger, Vector bundles on the projective plane, London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.
- [Sch2] R.L.E.Schwarzenberger, The secant bundle of a projective variety, Proc. London Math. Soc. **14** (1964), 369-384.