

À PROPOS DES VARIÉTÉS DE PONCELET

JEAN VALLÈS

RÉSUMÉ. On définit les variétés de Poncelet. Celles-ci généralisent très naturellement les célèbres courbes de Poncelet, qui, conformément à l'axiome d'Arnold, ne furent pas introduites par Poncelet mais par Darboux. On montre ensuite qu'une surface générale de degré ≥ 4 dans \mathbb{P}^3 n'est pas une surface de Poncelet mais, par contre, que toutes les quadriques et toutes les cubiques lisses de \mathbb{P}^3 sont des surfaces de Poncelet.

1. INTRODUCTION

La petite histoire des mathématiques croise souvent l'histoire plus rocambolesque des livres scolaires. Marie Stuart fut décapitée pour son goût du chiffre, goût qu'elle acquit à la cour du roi Charles IX auprès de Viète, Pascal décrit l'*esprit géométrique* pour instruire les petits élèves jansénistes avant que Louis XIV ne condamne Port-Royal, et, plus près de nous, Poncelet, jeune lieutenant de la grande armée de Napoléon posa les bases de la géométrie projective moderne dans une prison russe où il fut retenu prisonnier après la bataille de Krasnoïe, bataille restée célèbre car l'empereur des français réussit à passer entre les mailles serrées du filet tendu par Koutouzov. Dans les *Mémoires d'outre-tombe* Chateaubriand (cf. [2], page 211, tome 2) relate l'épisode avec emphase : “ *Les hauteurs environnantes au pied desquelles marchait Napoléon, se chargeaient d'artillerie et pouvaient à chaque instant le foudroyer ; il y jette un coup d'œil et dit : “Qu'un escadron de mes chasseurs s'en empare !” Les Russes n'avaient qu'à se laisser rouler en bas, leur masse l'eût écrasé ; mais, à la vue de ce grand homme et des débris de la garde serrée en bataillon carré, ils demeurèrent immobiles, comme fascinés : son regard arrêta cent mille hommes sur les collines.*”

Poncelet, quant à lui, resta sur le champ de bataille, “[...] d'où il n'est sorti vivant que par une faveur spéciale de Dieu, au milieu de ses chefs, de ses camarades tués ou atteints de blessures, toutes mortelles dans ce pernicieux climat” (cf. [11], Préface), et fut fait prisonnier le lendemain de la fuite de Napoléon.

Dans le manuscrit rédigé lors de son séjour russe [11], il démontre qu'une conique n -circonscrite à une conique lisse fixée lui est infiniment circonscrite. C'est le théorème appelé théorème de clôture. Quelques décennies plus tard, Darboux a montré qu'une courbe de degré $n - 1$ passant par les $\binom{n}{2}$ sommets d'un polygone dont les n côtés sont tangents à une conique lisse C passe par une infinité de sommets de tels polygones (cf. [3], p. 248). C'est aussi dire que tout point de la courbe est le sommet d'une configuration de n droites tangentes à C . Ces courbes sont appelées *courbes de Poncelet*. Pour les variétés de dimensions plus grandes introduites par Trautmann dans [13], et que l'on redéfinit ci-dessous comme déterminant de sections d'un certain fibré vectoriel (voir la définition 1), le théorème de Darboux ne s'applique plus ; plus précisément, il ne suffit plus de passer par les sommets d'un polytope $(n - 1)$ tangents à la courbe

2000 *Mathematics Subject Classification*. 14N15, 14N20, 14L35, 14L30.

Key words and phrases. Fibrés de Schwarzenberger, Courbes et surfaces de Poncelet.

L'auteur a été partiellement financé par les ANR-09-JCJC-0097-0 INTERLOW et ANR GEOLMI.

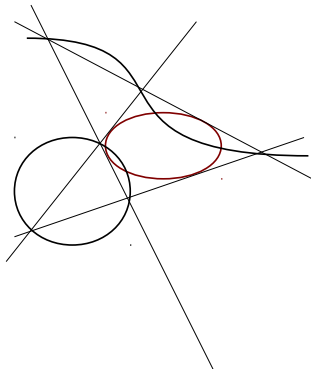


FIGURE 1. Un quadrilatère complet circonscrit et une cubique de Poncelet

rationnelle normale sous-jacente pour que chacun de ses points soit le sommet d'un tel polytope. On vérifie ci-dessous que pour qu'une hypersurface soit une hypersurface de Poncelet, il lui faudra, passer par les sommets d'une infinité de dimension $n - 1$ de tels polytopes (voir la proposition 1).

L'espace projectif des courbes planes de degré $n - 1$ passant par les $\binom{n}{2}$ sommets de n droites fixées est de dimension $n - 1$. La donnée de n droites tangentes à une conique lisse équivaut à la donnée d'un diviseur de degré n sur \mathbb{P}^1 . Sa dimension projective est n . Enfin l'espace des coniques du plan est de dimension projective 5. Ainsi un décompte naïf de dimension du schéma des courbes planes de degré $n - 1$ qui sont de Poncelet donne $(n - 1) + n + 5 = 2n + 4$. Mais ce décompte est faux d'après le théorème de Darboux. On vérifie en effet que cette dimension est $2n + 3$, ce qui correspond au choix d'une conique (dimension 5) et d'un pinceau de formes binaires de degré n (dimension de $\mathbb{G}(1, n)$ égale $2n - 2$) sur cette conique. Ainsi, contrairement aux cubiques planes et aux coniques (cf. [1], p. 90 et p. 85), la variété des quartiques de Poncelet (appelées quartiques de Lüroth) ne remplit pas l'espace des quartiques planes et forme un diviseur. Morley a prouvé que le degré de la sous-variété des quartiques de Lüroth était égal à 54 (cf. [9]). Barth, dans son article fondateur sur les fibrés vectoriels de rang deux sur le plan (cité ci-dessus), montre que cette hypersurface est l'image de l'espace de modules $M_{\mathbb{P}^2}(0, 4)$ (des faisceaux localement libres et semistables de première et seconde classes de Chern égales à 0 et 4) par l'application qui à un fibré associe sa courbe de droites de saut. Qui plus est, le degré de l'image est le nombre de Donaldson¹ q_{13} , ce qui accroît encore l'intérêt pour le diviseur des quartiques de Lüroth. En effet, comme le morphisme de Barth est génériquement injectif, ce degré coïncide avec q_{13} (cf. [8] et [10], ainsi bien-sûr que [9]).

Le même problème se pose en dimension plus grande. À un couple $(C_n, f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ formé d'une courbe rationnelle normale et de n formes binaires de degré $n+k$ on associe une hypersurface de Poncelet de degré $k + 1$ sur \mathbb{P}^n . Un décompte des dimensions attendues montre que cette application ne peut pas être dominante pour $n = 3$ dès que $k \geq 3$. Par contre elle peut l'être lorsque $n = 3$ pour $k = 1$ et $k = 2$. Et en effet, on

1. Ces nombres, et plus généralement les invariants de Donaldson, ont été introduits par Donaldson lui-même, en 1983, un an après que la classification des variétés topologiques compactes simplement connexes de dimension 4 a été établie par Freedman [5]. Donaldson, en introduisant ces invariants, a montré qu'il existe des surfaces complexes lisses homéomorphes qui ne sont pas difféomorphes [4].

montre qu'elle l'est, plus précisément, on montre qu'une surface quadrique quelconque ou une surface cubique lisse de \mathbb{P}^3 sont des surfaces de Poncelet (voir les théorèmes 2 et 3).

2. GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension 2. On note S_i les espaces vectoriels $\text{Sym}^i(V)$ (et $S_i^\vee = \text{Sym}^i(V^\vee)$) invariants sous l'action de $\text{SL}(V)$. La multiplication des formes binaires :

$$S_n^\vee \otimes S_k^\vee \longrightarrow S_{n+k}^\vee$$

permet de définir deux fibrés, dits de Schwarzenberger, $E_{k,n+k}$ sur $\mathbb{P}(S_k^\vee)$ et $E_{n,n+k}$ sur $\mathbb{P}(S_n^\vee)$ ainsi que la variété des espaces linéaires N sécants (avec $N = \inf(k, n) + 1$) à la courbe C_{n+k} , image de $\mathbb{P}(V)$ dans $\mathbb{P}(S_{n+k})$ par le morphisme de Veronese. Les fibrés projectivisés sont, pour l'un, l'éclatement de $\mathbb{P}(S_{n+k})$ le long de cette variété et pour l'autre, le modèle lisse de cette variété de sécantes, obtenu en l'éclatant le long de son lieu singulier. Tout ceci est connu et rédigé en plusieurs endroits (cf. par exemple [7]).

Dans l'article [14] consacré aux fibrés de Schwarzenberger, ces courbes sont interprétées comme des pincesaux de sections de ces fibrés. C'est cette interprétation que nous reprenons ci-dessous en la généralisant aux dimensions plus grandes.

Considérons le fibré de Schwarzenberger suivant :

$$0 \longrightarrow S_k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)}(-1) \longrightarrow S_{n+k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)} \longrightarrow E_{n,n+k} \longrightarrow 0.$$

Nous associons, à un système linéaire $\Lambda = \langle f_0, \dots, f_r \rangle \subset S_{n+k}$ de dimension $r+1 \leq n$, un sous-schéma de $\mathbb{P}(S_n^\vee)$ défini par les équations $f_0 \wedge \dots \wedge f_r = 0$ (l'écriture est abusive mais nous l'expliciterons plus loin). En effet, comme $H^0(E_{n,n+k}) \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+k))$, les formes binaires f_i s'interprètent comme des sections de $E_{n,n+k}$. Le diagramme commutatif suivant l'explique :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)} & \xlongequal{\quad} & \Lambda \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)}(-1) & \longrightarrow & S_{n+k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)} & \longrightarrow & E_{n,n+k} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)}(-1) & \longrightarrow & \frac{S_{n+k}}{\Lambda} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)} & \longrightarrow & \mathcal{L} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Le faisceau \mathcal{L} , défini sur $\mathbb{P}(S_n^\vee)$, cesse d'être localement libre le long de la sous-variété fermée d'équation $f_0 \wedge \dots \wedge f_r = 0$.

Définition 1. Les variétés définies par la donnée de $r \leq n$ sections linéairement indépendantes d'un fibré de Schwarzenberger $E_{n,n+k}$ au dessus de $\mathbb{P}(S_n^\vee)$ sont appelées *Variétés de Poncelet*.

Une section de $E_{n,n+k}$ correspond à la donnée de $n+k$ points sur la courbe rationnelle normale C_{n+k} et, par l'isomorphisme canonique $C_{n+k} \simeq C_n \simeq \mathbb{P}(S_1)$, sur la courbe rationnelle normale $C_n \subset \mathbb{P}(S_n)$; cette section s'annule le long des $\binom{n+k}{n}$ points d'intersection de n hyperplans qui ont un contact d'ordre $n-1$ avec C_n le long de n points choisis parmi les $n+k$ points. Ces variétés de Poncelet sont ainsi caractérisées par le fait de passer par les sommets d'un polytope à $n+k$ faces; celles-ci sont des hyperplans tangents d'ordre $n-1$ à C_n . Le cas des courbes est bien connu

(cf. par exemple [3] et [13]). En dimension supérieure, hormis quelques lignes à la fin de l'article [13], et quelques exemples dans [7], elles n'ont pas été étudiées².

La proposition suivante généralise le théorème de Darboux concernant les courbes.

Proposition 1. *Une hypersurface de degré $k + 1$ est une hypersurface de Poncelet sur \mathbb{P}^n si et seulement si elle contient une variété de Poncelet de codimension 2 définie par $(n - 1)$ sections linéairement indépendantes du fibré $E_{n,n+k}$.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)}^{n-1} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)}^{n-1} & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)}(-1) & \longrightarrow & S_{n+k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)} & \longrightarrow & E_{n,n+k} \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S_k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)}(-1) & \longrightarrow & \frac{S_{n+k}}{\mathbb{C}^{n-1}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_n^\vee)} & \longrightarrow & \mathcal{I}_X(k+1) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Le schéma X est de dimension $n - 2$ et il est défini par $n - 1$ sections indépendantes de $E_{n,n+k}$. Une section non nulle de $H^0(\mathcal{I}_X(k+1))$, c'est-à-dire une hypersurface de degré $k + 1$ passant par les sommets des $n - 1$ polytopes déterminés par les $n - 1$ sections, provient d'une section supplémentaire de $E_{n,n+k}$. En effet cela résulte de la surjectivité de l'application

$$H^0(E_{n,n+k}) \rightarrow H^0(\mathcal{I}_X(k+1)).$$

L'hypersurface est alors définie par n sections, autrement dit, son équation est le déterminant de ces n sections. \square

3. SURFACES DE PONCELET

Les cubiques planes sont toutes de Poncelet tandis que les quartiques planes de Poncelet ne forment qu'un diviseur. Plus généralement, les courbes de Poncelet de degré k forment une sous-variété de dimension $2(k + 1) + 3$ de l'espace des courbes de degré k . Pour les hypersurfaces de Poncelet de \mathbb{P}^n de degré k la dimension attendue est

$$\dim \mathbb{G}(k, n + k - 1) + \dim \frac{\mathrm{PGL}(n + 1)}{\mathrm{PGL}(2)}.$$

Ainsi la dimension attendue des surfaces de Poncelet de degré k est $3k + 12$. Ce qui fait 18 pour les quadriques, 21 pour les cubiques, 24 pour les quartiques. L'espace de toutes les quadriques est de dimension 9, celui des cubiques de dimension 19 et celui des quartiques 34. Pour $k \geq 4$, pour des raisons évidentes de dimension, une surface de degré k générale n'est pas de Poncelet. Par contre on attend a priori que toute surface quadrique et toute surface cubique soient de Poncelet (et plutôt deux fois qu'une). C'est ce que nous vérifions maintenant.

Le cas des quadriques est élémentaire.

Théorème 2. *Toute quadrique de \mathbb{P}^3 est une quadrique de Poncelet.*

Démonstration. Une quadrique de Poncelet est une section du fibré de Schwarzenberger défini par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow S_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)}(-1) \xrightarrow{M} S_4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)} \longrightarrow E_{3,4} \longrightarrow 0.$$

2. Je n'ai appris qu'a posteriori qu'elles sont étudiées plus substantiellement dans l'article [12] où elles sont définies de façon analogue. Article à la lecture duquel je convie le lecteur qui souhaiterait plus de détails.

Quitte à noter $\mathbb{P}(S_3) = \text{proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3])$ la matrice M est bien décrite :

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \\ x_3 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Les mineurs $\begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_1 & x_0 \\ 0 & x_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} x_0 & 0 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix}$ extraits de M définissent des quadriques de rangs respectivement égaux à 4, 3, 2 et 1. \square

Le cas des cubiques est un peu plus difficile.

Théorème 3. *Toute surface cubique lisse de \mathbb{P}^3 est une surface de Poncelet.*

Remarque 1. Il est certainement intéressant de déterminer les cubiques singulières qui ne sont pas de Poncelet. Par exemple, je pense que trois plans possédant une droite commune ne sont pas une surface de Poncelet.

Démonstration. Soit S une surface cubique lisse. Elle contient 27 droites exactement et on peut en choisir 6 droites parmi elles qui soient deux à deux disjointes. En contractant ces 6 droites on obtient un \mathbb{P}^2 et chacune des 6 droites a pour image un point ; de plus les 6 points ainsi obtenus, que l'on note Z , sont en position générale.

C'est classique. Les six points Z (et même le double six) et la surface cubique S proviennent d'un même 3-tenseur $\phi \in A \otimes B \otimes C$ avec $\dim_{\mathbb{C}}(A) = \dim_{\mathbb{C}}(B) = 3$ et $\dim_{\mathbb{C}}(C) = 4$. Sur $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}^3$, ce tenseur devient une matrice de formes linéaires

$$A^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(C)}(-1) \xrightarrow{\phi} B \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(C)},$$

dont le déterminant est une équation de S . Sur $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}^2$, ce même tenseur devient une matrice de formes linéaires

$$A^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(B)}(-1) \xrightarrow{\phi} C \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(B)},$$

dont les mineurs maximaux engendrent $H^0(\mathcal{I}_Z(3))$, où \mathcal{I}_Z est l'idéal des six points. L'éclatement du plan le long de Z , à savoir $\mathbb{P}(\mathcal{I}_Z(3)) \subset \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$, s'envoie isomorphiquement sur S par la seconde projection.

Pour montrer que S est une surface de Poncelet, il suffit de montrer que S est définie par un tenseur $\phi \in S_2 \otimes S_3 \otimes (\frac{S_5}{A})^\vee$ où $A = \mathbb{C}^3$ est un sous espace vectoriel de S_5 . Remarquons tout d'abord que si l'on considère le groupe de 6 points Z associés au tenseur :

$$0 \longrightarrow S_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\frac{S_5}{A})}(-1) \longrightarrow S_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\frac{S_5}{A})} \longrightarrow \mathcal{I}_Z(3) \longrightarrow 0,$$

la matrice des relations est persymétrique (ou de Haenkel). En effet, c'est la restriction à $\mathbb{P}(\frac{S_5}{A})$ de la matrice persymétrique canonique (cf. par exemple [6]) de dimension 3×4 sur $\mathbb{P}(S_5)$.

Réciproquement une matrice 3×4 persymétrique de formes linéaires sur \mathbb{P}^2 est toujours la restriction de la matrice persymétrique canonique sur \mathbb{P}^5 (puisque dès que les nombres de lignes et de colonnes sont fixés, il n'existe qu'une seule matrice persymétrique générique). Or les mineurs 2×2 de cette matrice persymétrique générique définissent une quintique rationnelle normale $C_5 \subset \mathbb{P}^5$, et via l'association décrite ci-dessus, une surface cubique de Poncelet. Le théorème sera donc prouvé lorsque le lemme suivant le sera.

Lemme 1. *Six points en position linéaire générale sont résolus par une matrice persymétrique.*

Démonstration du lemme. Considérons six points en position générale sur le plan. Le système linéaire des courbes de degré 5 passant doublement par chacun des points a dimension projective 2 $((21 - 6 \times 3) - 1)$. Une courbe générale Γ_5 de ce système est lisse hors des points bases et elle a genre 0. Elle est donc la projection d'une quintique rationnelle lisse de $C_5 \subset \mathbb{P}^5$ sur la quintique $\Gamma_5 \subset \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(A^\vee)$. En notant S_i l'ensemble des formes binaires de degré i sur $C_5 \simeq \mathbb{P}^1$, on a $C_5 \subset \mathbb{P}(S_5)$ et il existe un sous espace vectoriel $A \subset S_5$ de dimension 3 qui définit le centre de projection. Plus précisément, la suite exacte suivante d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow S_5 \longrightarrow \frac{S_5}{A} \longrightarrow 0,$$

induit la morphisme de projection : $\pi : \mathbb{P}(S_5) \setminus \mathbb{P}(\frac{S_5}{A}) \rightarrow \mathbb{P}(A^\vee)$. La projection restreinte $\pi|_{C_5} : C_5 \rightarrow \Gamma_5$ est ramifiée au-dessus des six points doubles de Γ_5 . (Les 6 points doubles de la projection sont les images des 6 points d'intersection de $\mathbb{P}(\frac{S_5}{A})$ avec la variété des droites bisécantes à C_5 .) Les points doubles de la quintique Γ_5 sont définis par le lieu de dégénérescence de la matrice de multiplication (par un élément variable de S_2) de S_3 dans $\frac{S_5}{A}$, ou encore un tenseur dans $S_2 \otimes S_3 \otimes (\frac{S_5}{A})^\vee$. Il est persymétrique. \square

Reprise de la démonstration du théorème. Le tenseur $S_2 \otimes S_3 \otimes (\frac{S_5}{A})^\vee$ définit aussi la surface cubique $S \subset \mathbb{P}(S_3)$ (plus exactement un faisceau \mathcal{L}_S de rang 1 sur S) associée aux six points, ainsi que le fibré de Schwarzenberger dont elle est le déterminant de trois sections indépendantes, comme le montre le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)} & \xlongequal{\quad} & A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)}(-1) & \longrightarrow & S_5 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)} & \longrightarrow & E_{3,5} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)}(-1) & \longrightarrow & \frac{S_5}{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_3^\vee)} & \longrightarrow & \mathcal{L}_S \longrightarrow 0. \end{array}$$

\square

Remarque 2. Pour établir ce dernier théorème, on peut aussi montrer que la surface cubique S contient une courbe de Poncelet de genre 3 et de degré 6. Cette courbe est le plongement dans \mathbb{P}^3 d'une quartique plane lisse ; est-elle une quartique spéciale, une quartique de Poncelet par exemple ?

Je remercie le rapporteur anonyme pour cette dernière remarque et Laurent Gruson qui m'a donné la preuve du lemme 1.

RÉFÉRENCES

- [1] BARTH, W. Moduli of vector bundles on the projective plane. *Invent. Math.* 42 (1977), 63–91.
- [2] CHATEAUBRIAND, F. R. Mémoires d'outre tombe. *Livre de poche*.
- [3] DARBOUX, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces. III, IV.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993.
- [4] DONALDSON, S. K. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.* 18, 2 (1983), 279–315.
- [5] FREEDMAN, M. H. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.* 17, 3 (1982), 357–453.

- [6] HARRIS, J. *Algebraic geometry*, vol. 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.
- [7] ILARDI, G., SUPINO, P., AND VALLÈS, J. Geometry of syzygies via Poncelet varieties. *Boll. Unione Mat. Ital. (9)* 2, 3 (2009), 579–589.
- [8] LE POTIER, J., AND TIKHOMIROV, A. Sur le morphisme de Barth. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 34, 4 (2001), 573–629.
- [9] MORLEY, F. On the Luroth Quartic Curve. *Amer. J. Math.* 41, 4 (1919), 279–282.
- [10] OTTAVIANI, G., AND SERNESI, E. On the hypersurface of Lüroth quartics. *Michigan Math. J.* 59, 2 (2010), 365–394.
- [11] PONCELET, J.-V. *Traité des propriétés projectives des figures. Tome I*. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1995. Reprint of the second (1865) edition.
- [12] SPINDLER, H., AND TRAUTMANN, G. Special instanton bundles on \mathbf{P}_{2N+1} , their geometry and their moduli. *Math. Ann.* 286, 1-3 (1990), 559–592.
- [13] TRAUTMANN, G. Poncelet curves and associated theta characteristics. *Exposition. Math.* 6, 1 (1988), 29–64.
- [14] VALLÈS, J. Fibrés de Schwarzenberger et coniques de droites sauteuses. *Bull. Soc. Math. France* 128, 3 (2000), 433–449.

E-mail address: jean.valles@univ-pau.fr

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR, AVENUE DE L'UNIVERSITÉ - BP 576 - 64012 PAU
CEDEX - FRANCE