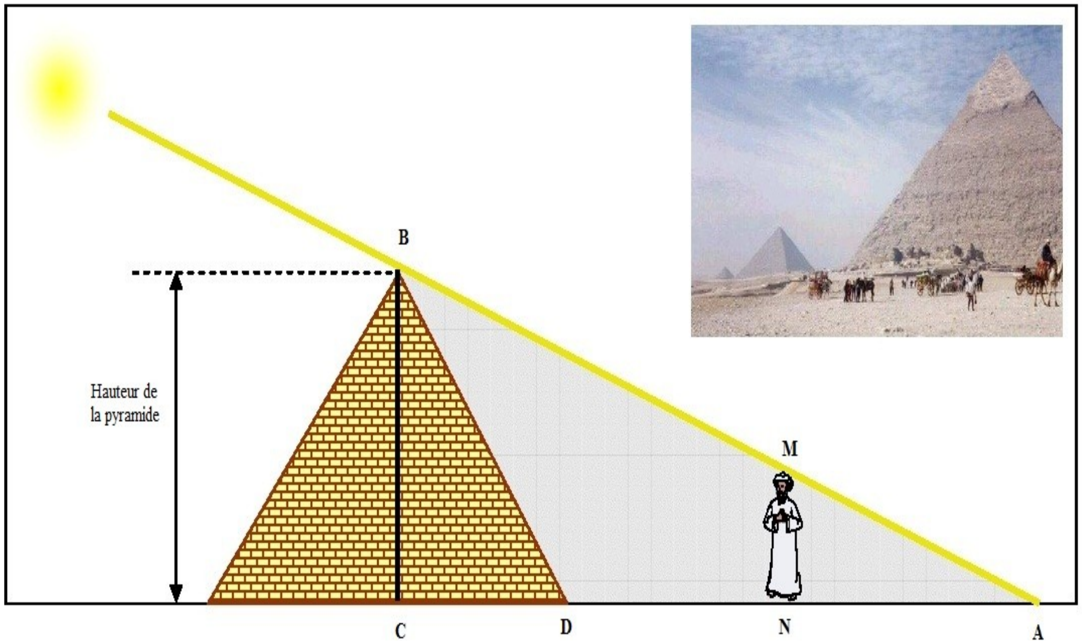
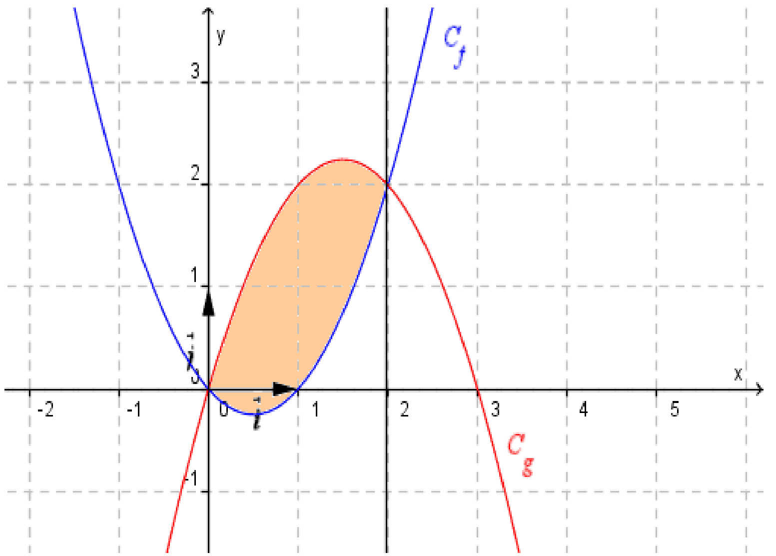
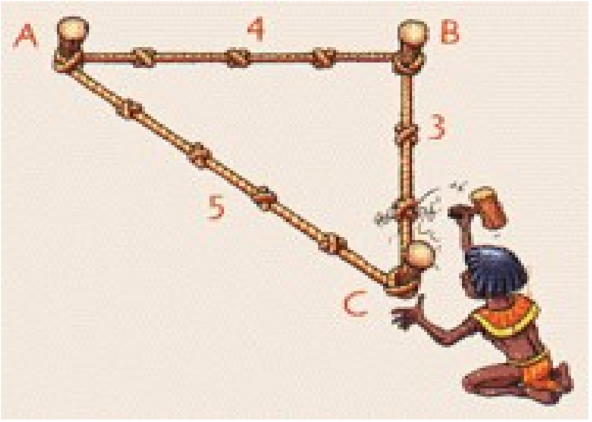
Quelques réponses à la question :

« À quoi servent les mathématiques ?»





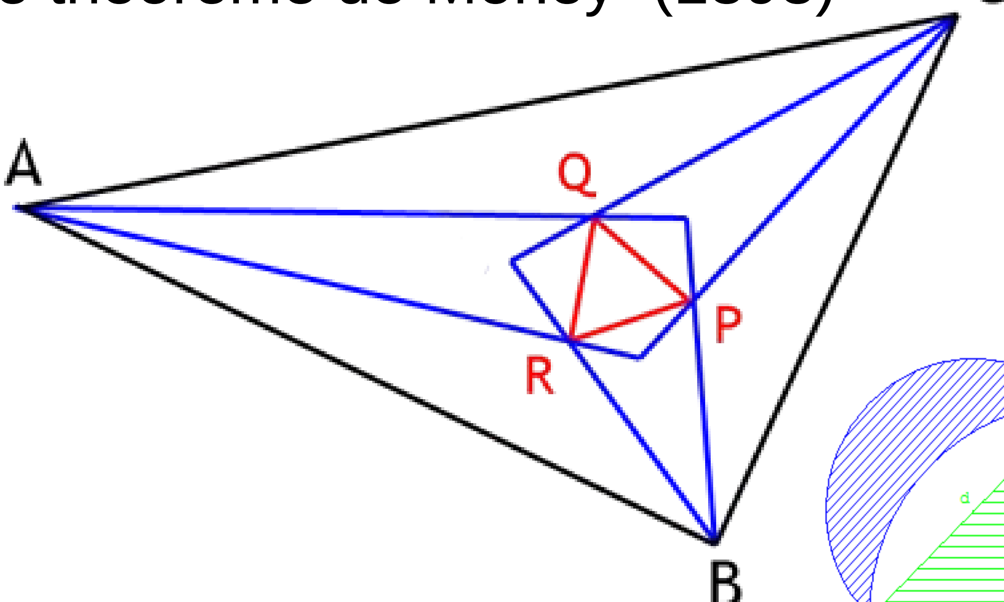
- Mesurer, calculer, se divertir
- Proposer des méthodes de calcul
- Conceptualiser (cercle, droite, nombre, graphe, fonction...)

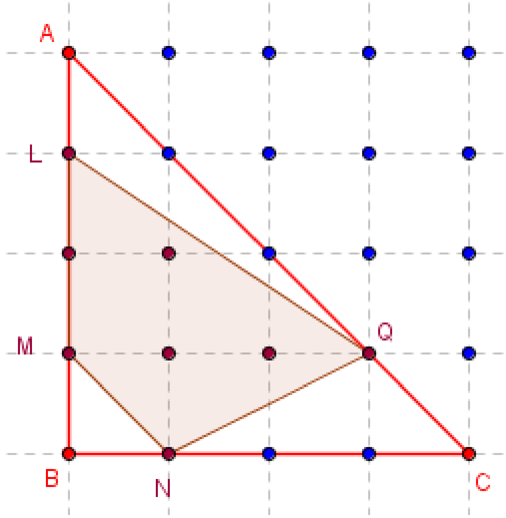


La corde à 13 nœuds des bâtisseurs

Mesurer, calculer, se divertir

Le théorème de Morley (1898)

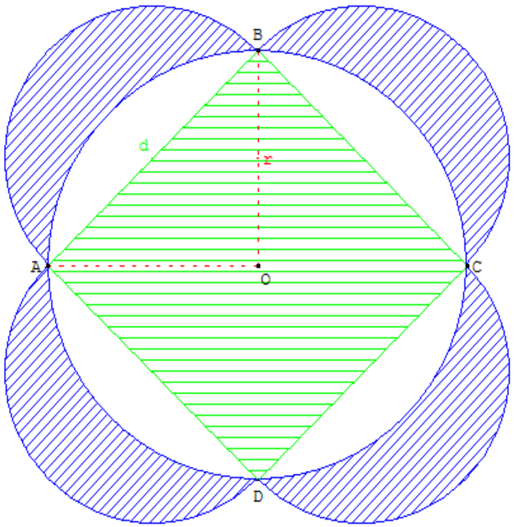




Formule de Pick
(1899)
A= i+b/2-1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

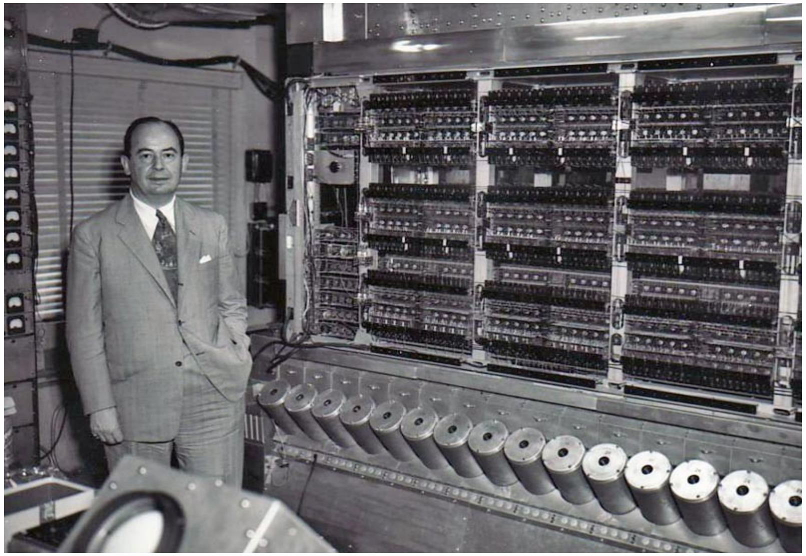
Formule d'Euler (1740)



Les lunules d'Hippocrate (-400)

La puissance de calcul des ordinateurs ont rendu les mathématiques indispensables dans toutes les disciplines scientifiques

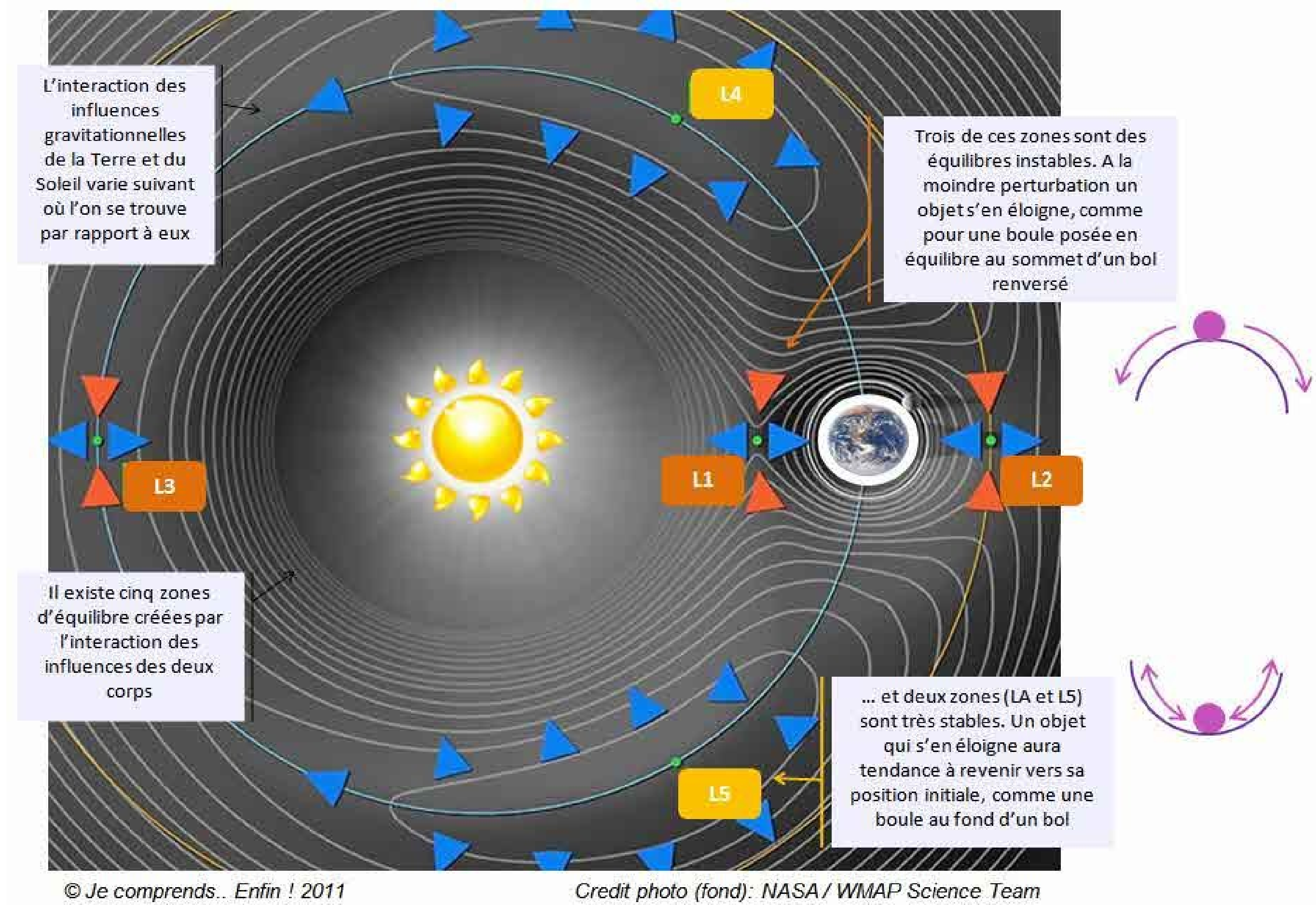
Turing et la machine Enigma



Von Neuman à Los Alamos

Les mathématiques de l'astronomie : les points de Lagrange

Mécanique céleste : les points de Lagrange

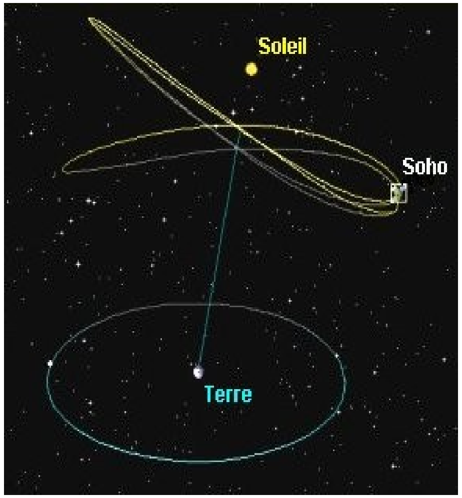


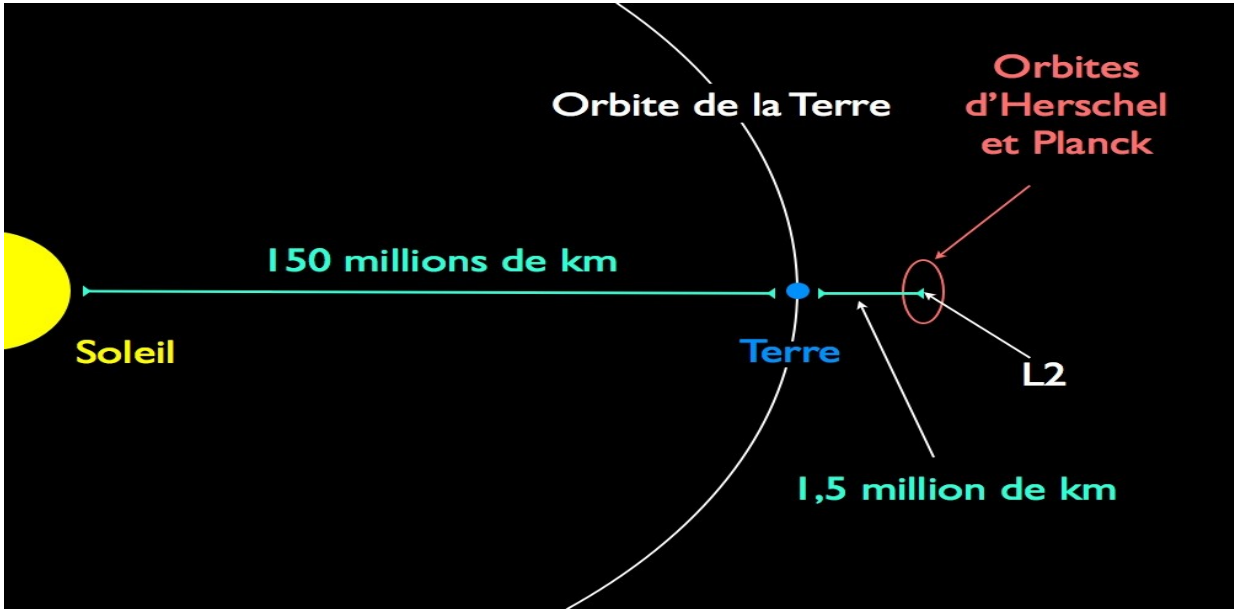
L'Anti-Terre

Points de Lagrange et théorie du contrôle

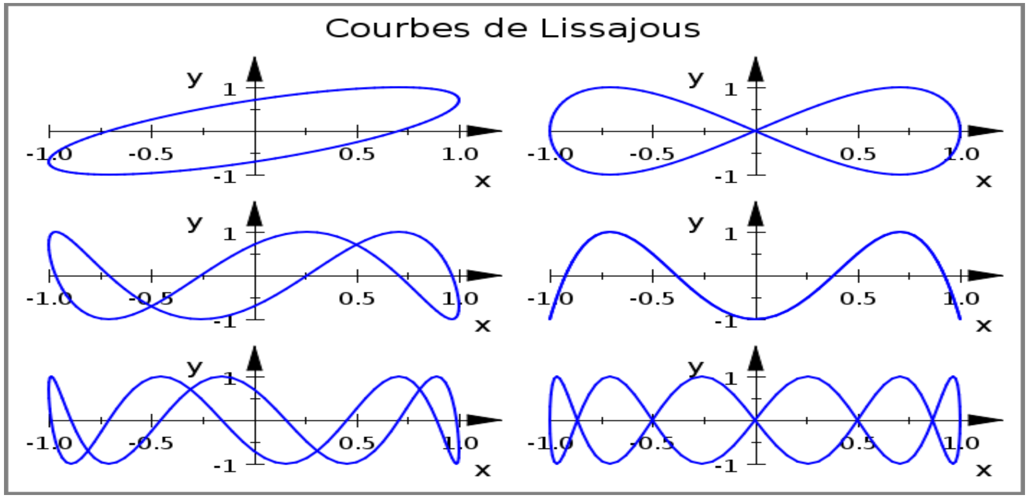
Le satellite SOHO (ESA)

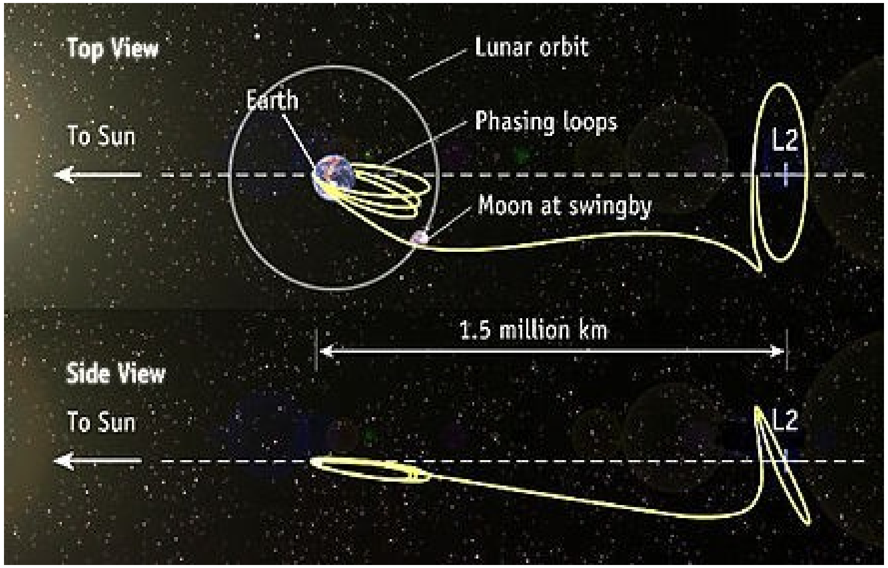
Images.maths.cnrs, Trélat, E.

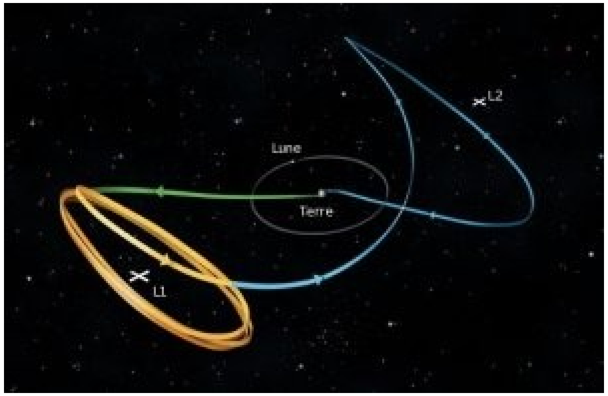


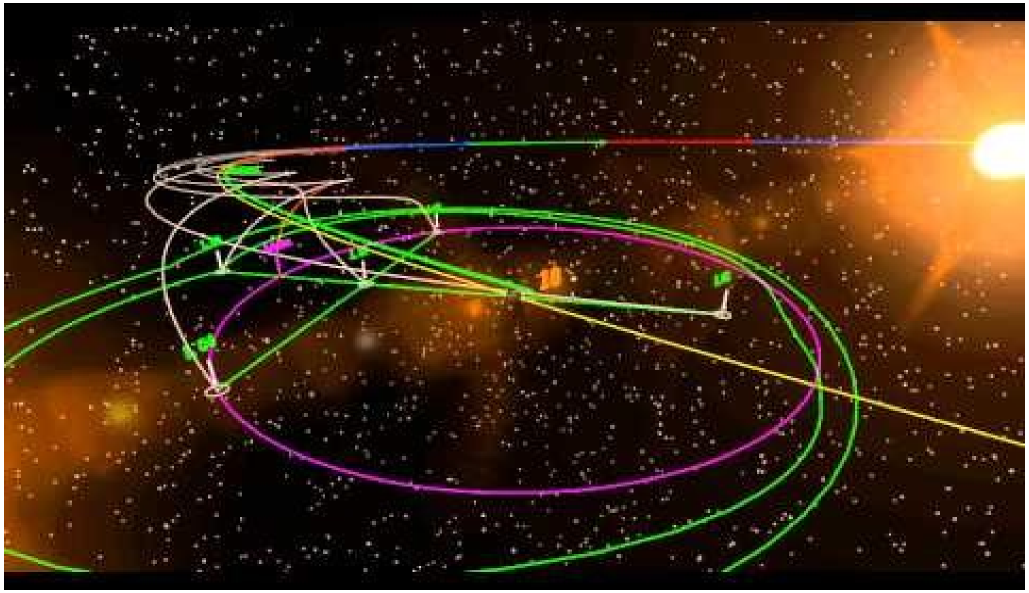


Les points de Lagrange, les courbes de Lissajous et la colonisation de l'Espace









Trajectoire de la sonde Genesis

https://www.youtube.com/watch?v=z52WWLE8bBo

Les mathématiques du codage des données : la cryptographie

Chiffrer et déchiffrer

- Chiffre de César : x :=x+3 (mod 26)
- Chiffre de Vigenère (résiste à l'analyse fréquence). Clé secrète, XVIe-XIXe

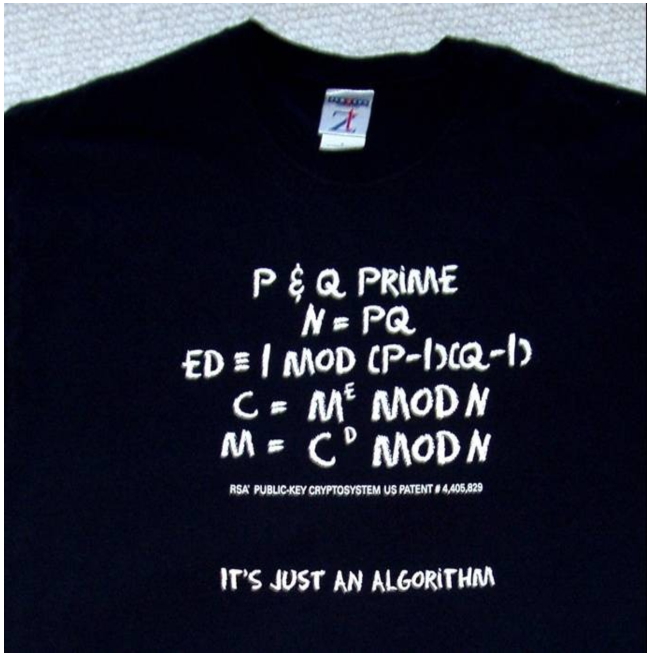
Klartext-Alphabet

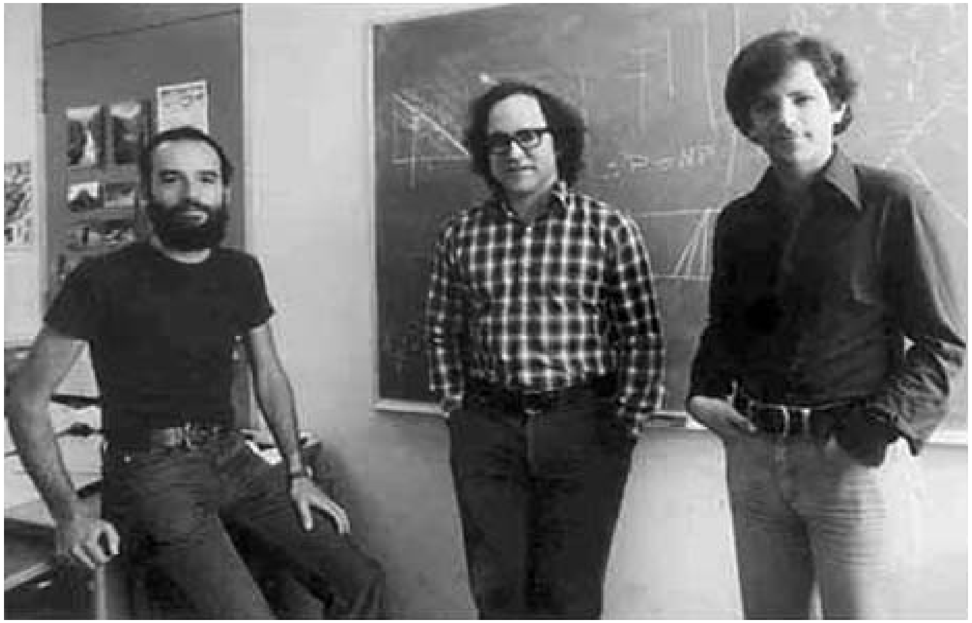
Schlüssel	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Geheimtext

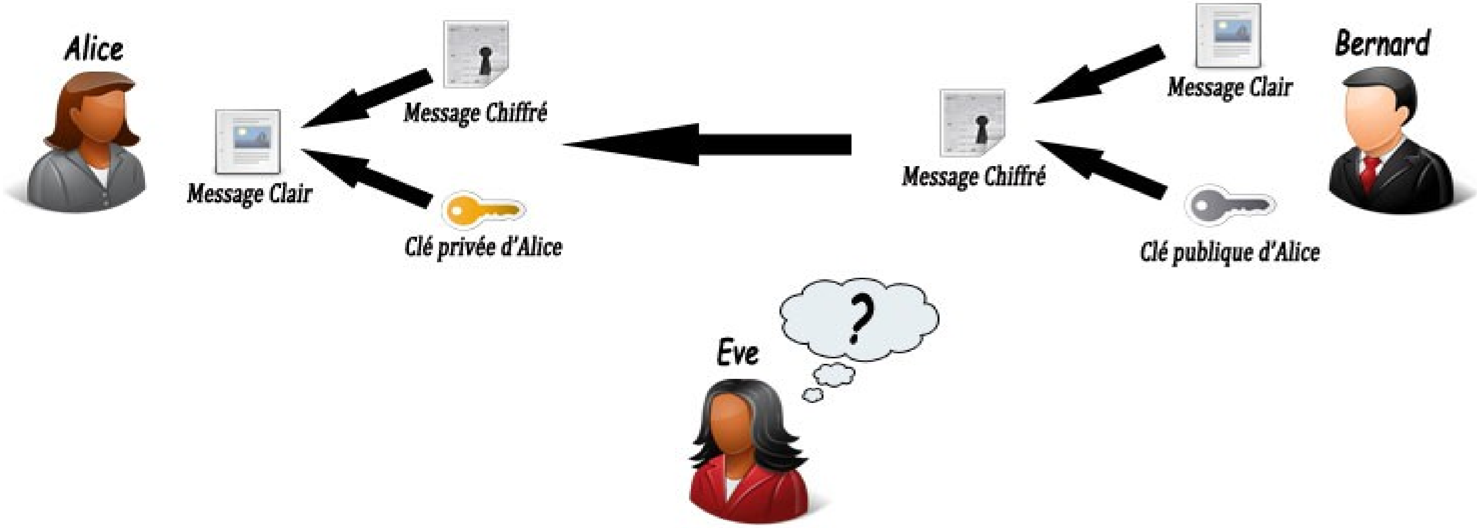
Clé : AKEY
GOMME → GYQKE

Code RSA





Shamir Rivest Adelman



Attaques de RSA

- Wikipédia : « En 1996, un algorithme permettant de factoriser les nombres en un temps non exponentiel a été écrit pour les ordinateurs quantiques.»

  D'autres attaques ont été efficaces lorsque la clé était mal choisie.

  Il faut une méthode de codage sûre !
- Répartition des nombres premiers (Clay Inst.: 1M$)
- Problème P=NP (Clay Inst: 1M$)

Cryptographie géométrique : addition sur courbe elliptique

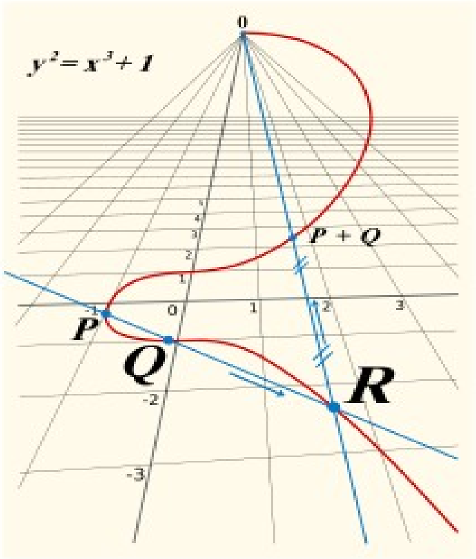
Données publiques : courbe

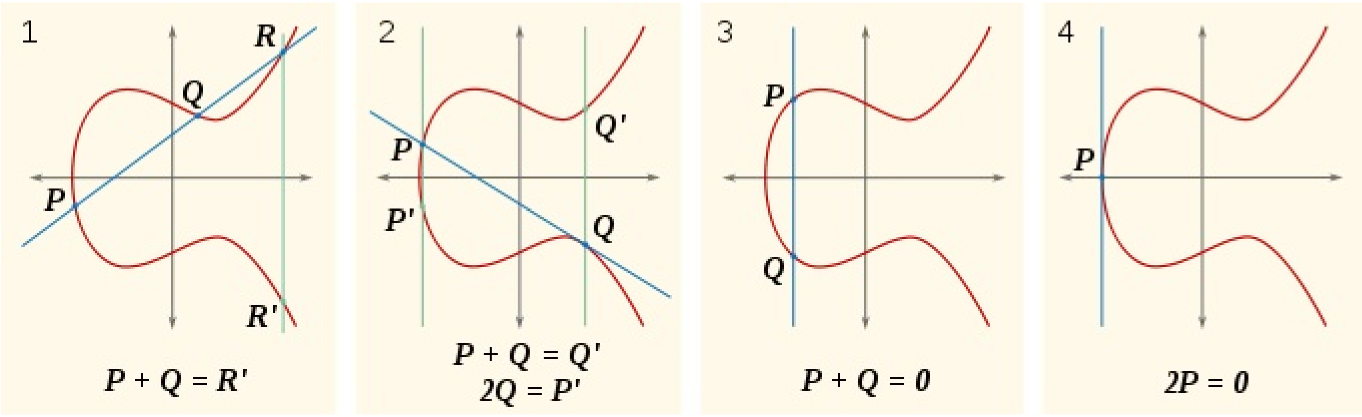
point P sur la courbe

Alice envoie nP,

Bob envoie mP.

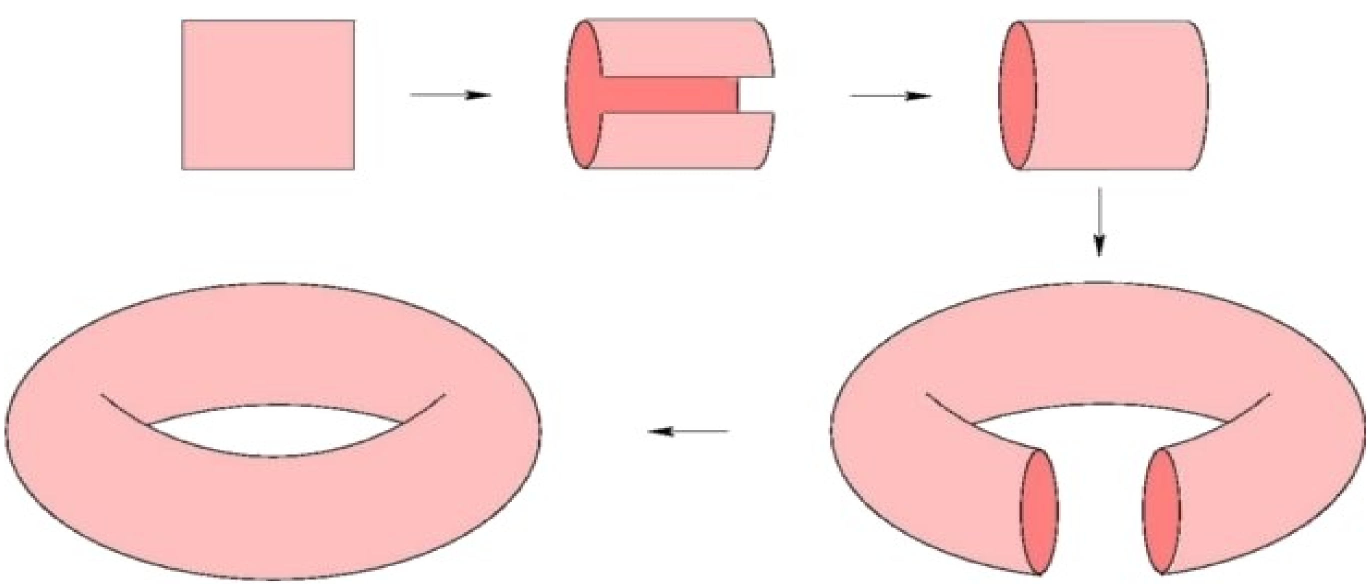
Leur clé secrète nmP=mnP

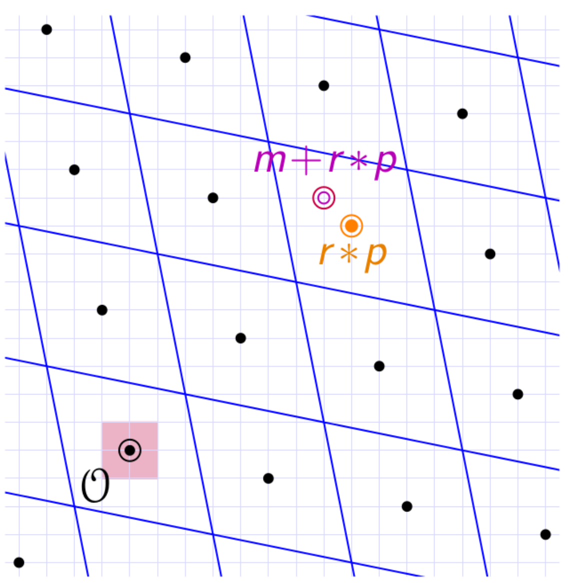




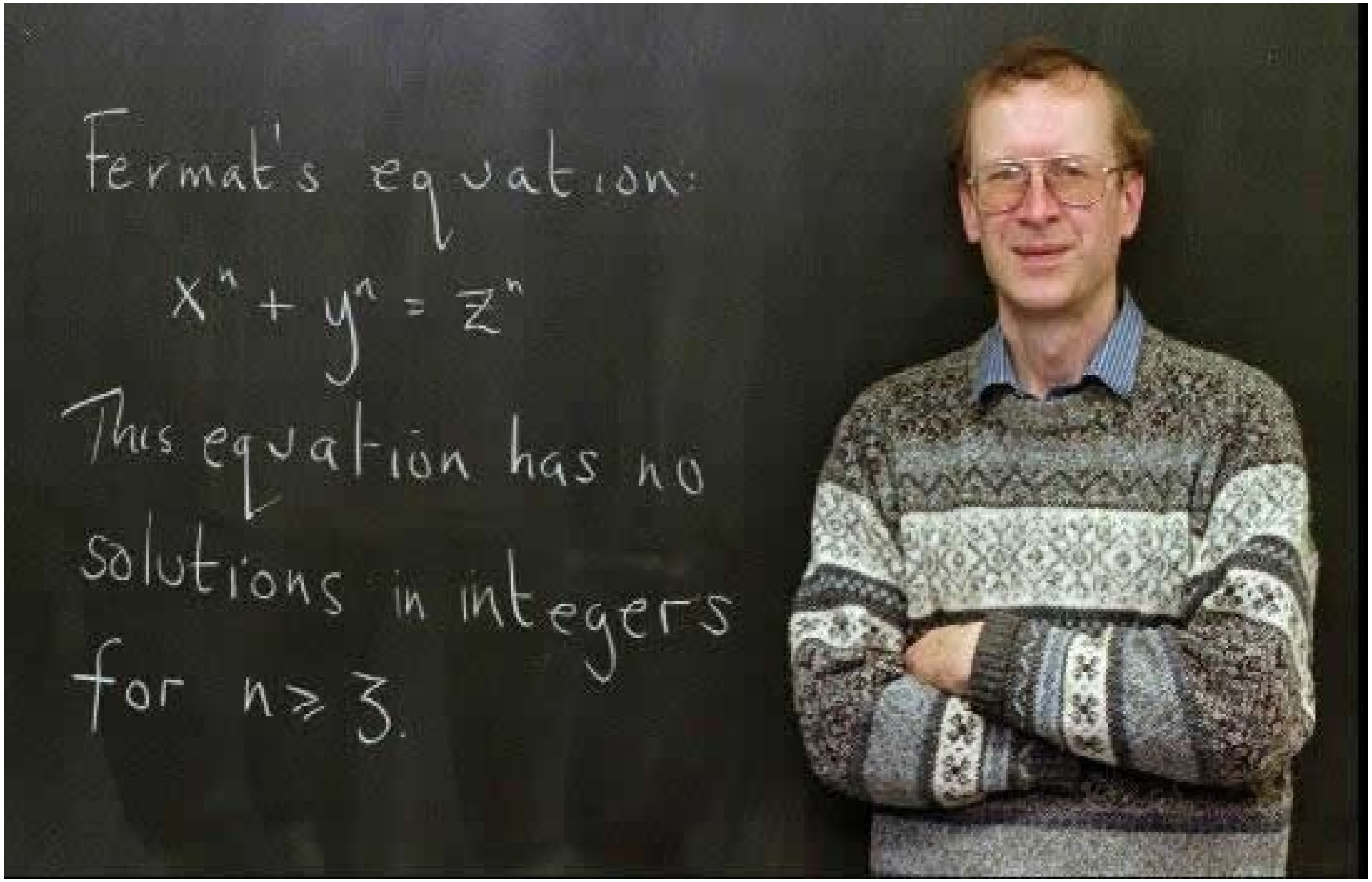
Addition sur les courbes elliptiques

La courbe **complexe** est une surface réelle qui topologiquement est un tore. On récupère, sur la courbe, l'addition des vecteurs du plan





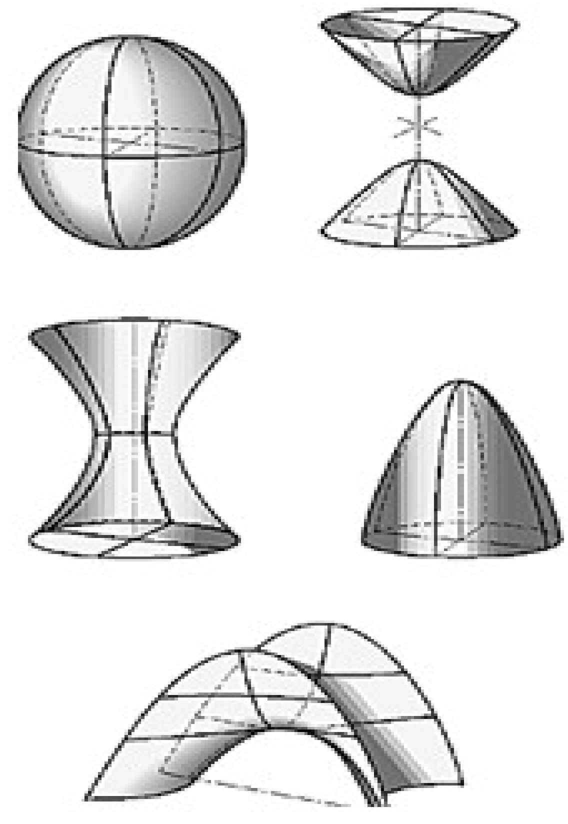
Les courbes elliptiques ont permis à Wiles de prouver la conjecture de Fermat, 350 ans après sa formulation !



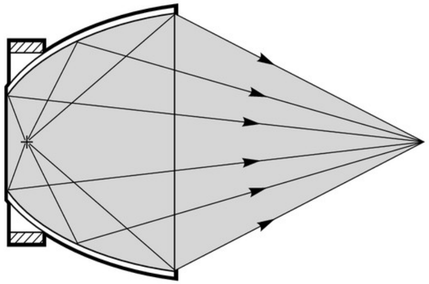
Les mathématiques pour capter les ondes, pour l'industrie nucléaire, pour l'architecture

Étude des quadriques

Les quadriques sont, après le plan, les surfaces les plus simples ; elles sont définies par des équations polynomiales de degré 2 à 3 variables.



Le foyer des paraboloïdes

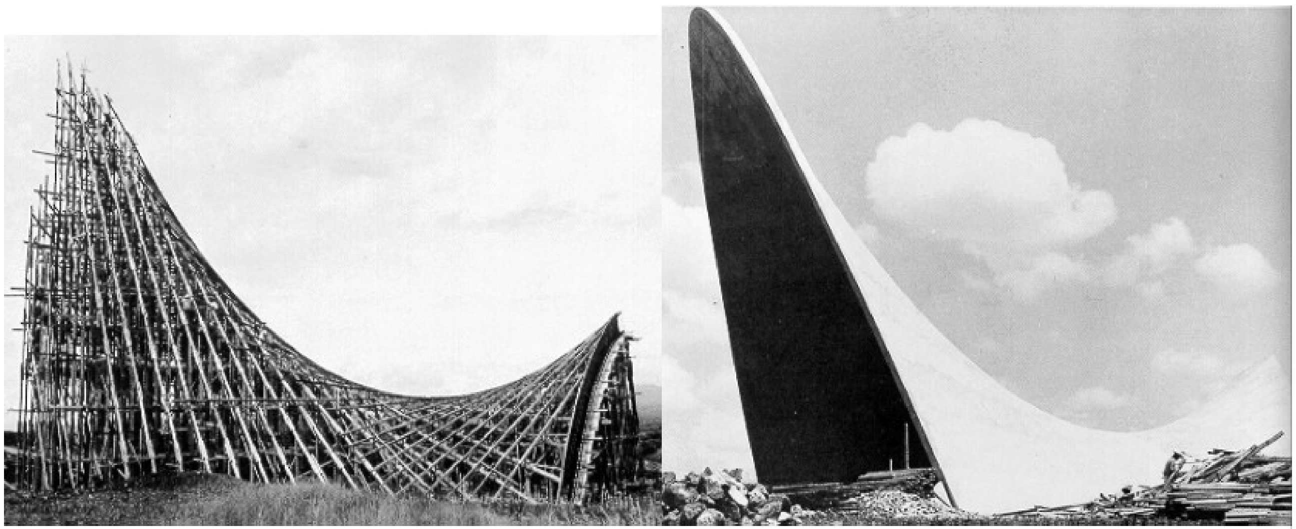


Les ondes réfléchies se concentrent sur le foyer de la parabole

Les droites des hyperboloïdes

Structures en béton armé très solides et légères, comme la coquille d'un œuf.

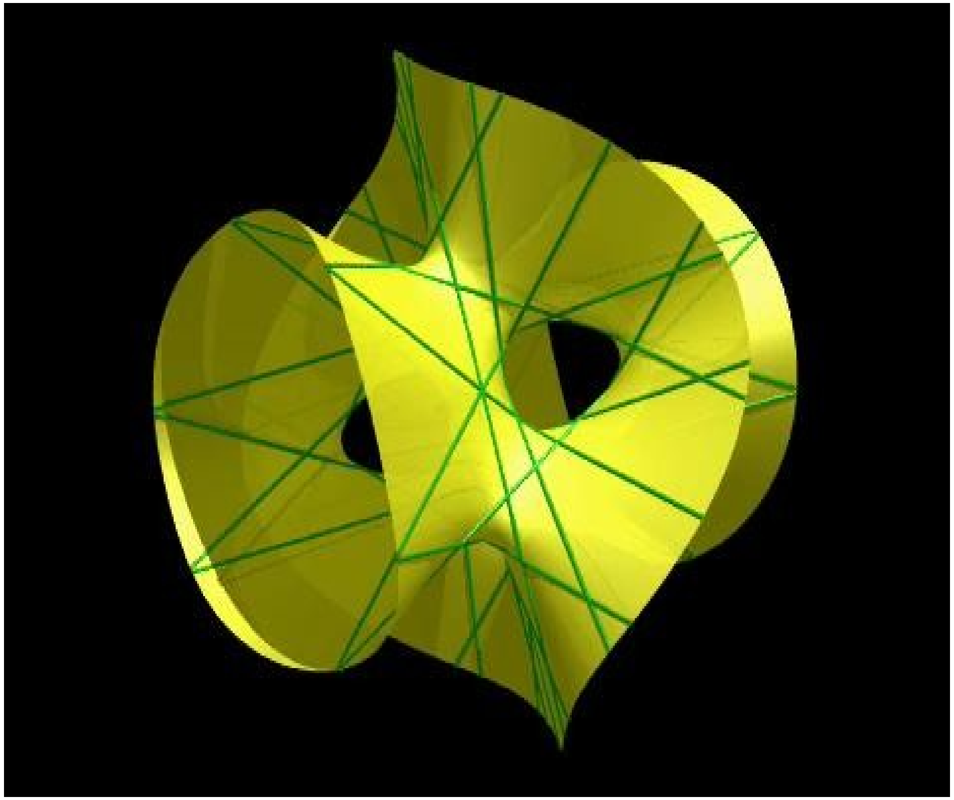
Les droites des paraboloïdes hyperboliques



Capilla abierta, Lomas de Cuernavaca, Mexique, 1958
arch. F. Candela

Comme les hyperboloïdes, ces quadriques sont tressées par deux familles de droites permettant de rigidifier les structures sans trop augmenter leur poids.

Les surfaces pour elles-mêmes

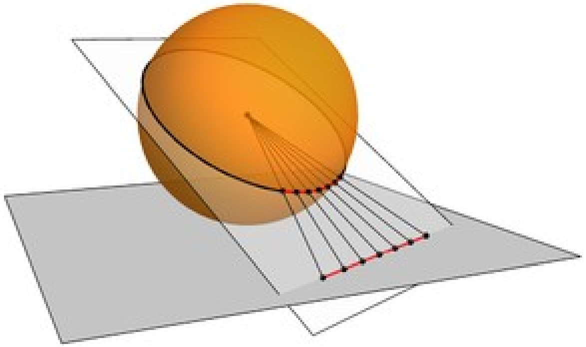


Cayley : 27 droites d'une surface cubique

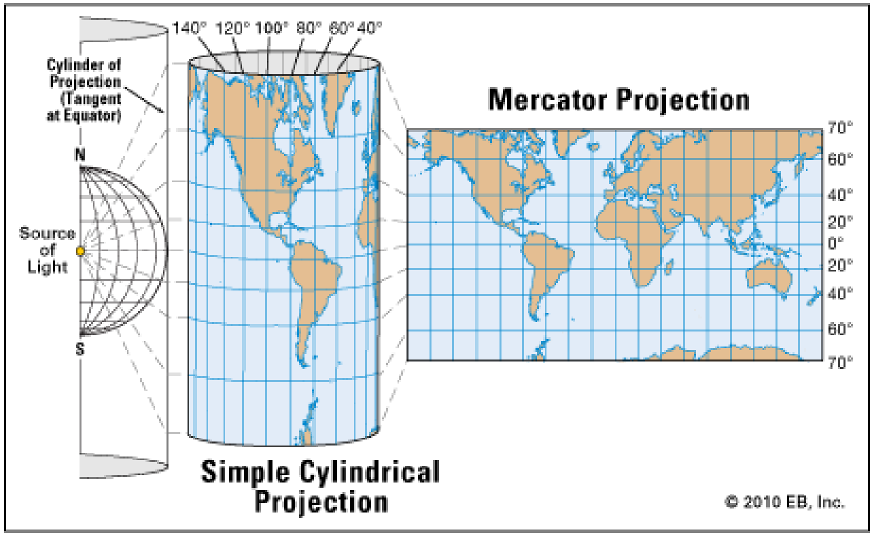
Déterminer les géodésiques

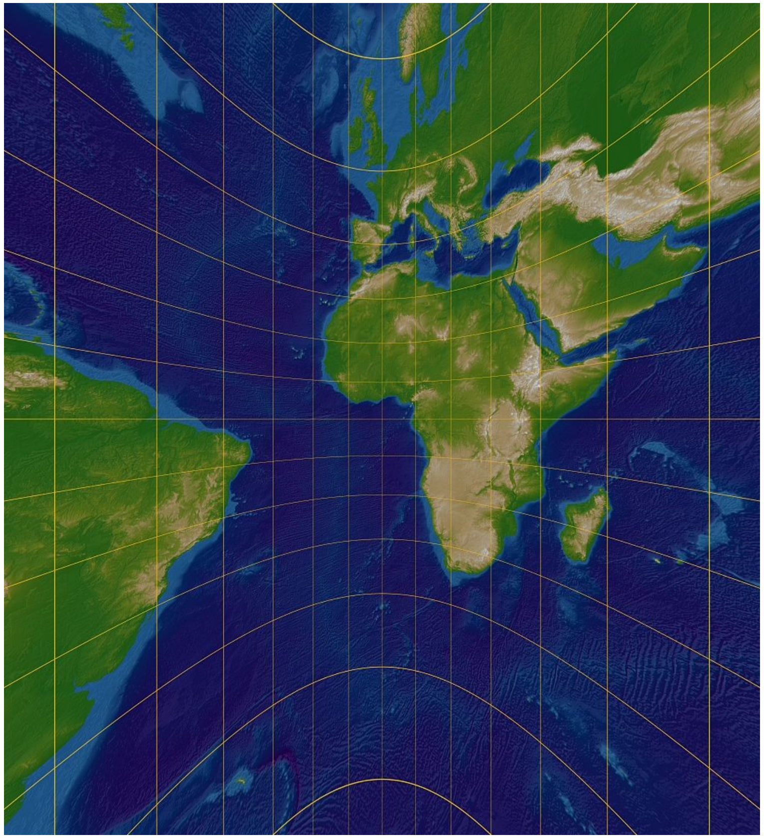
Les mathématiques de la cartographie

- Pas facile de se promener avec son globe terrestre !
- On préfèrerait une représentation plane
- Mais on ne peut pas conserver simultanément les distances, les aires, les angles



Mercator conserve les angles





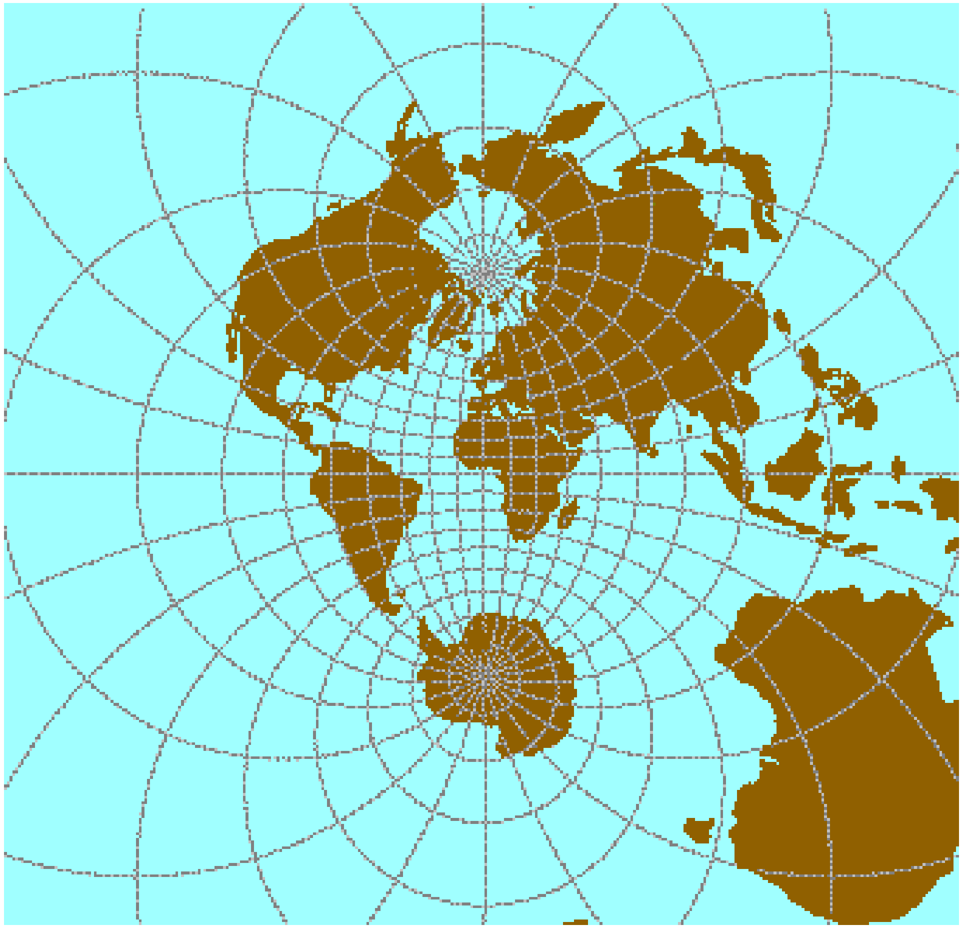
Projection gnomonique : Les grands cercles sont transformés en droites. Un seul hémisphère

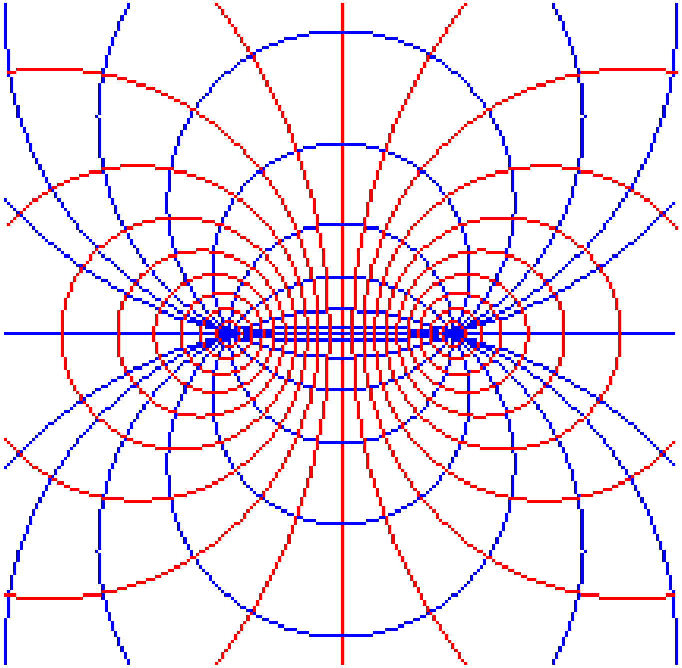
Le plus court chemin sur le planisphère

La projection stéréographique

- Les angles sont conservés, les distances et les aires non
- Ici, les méridiens sont des droites et les parallèles des cercles

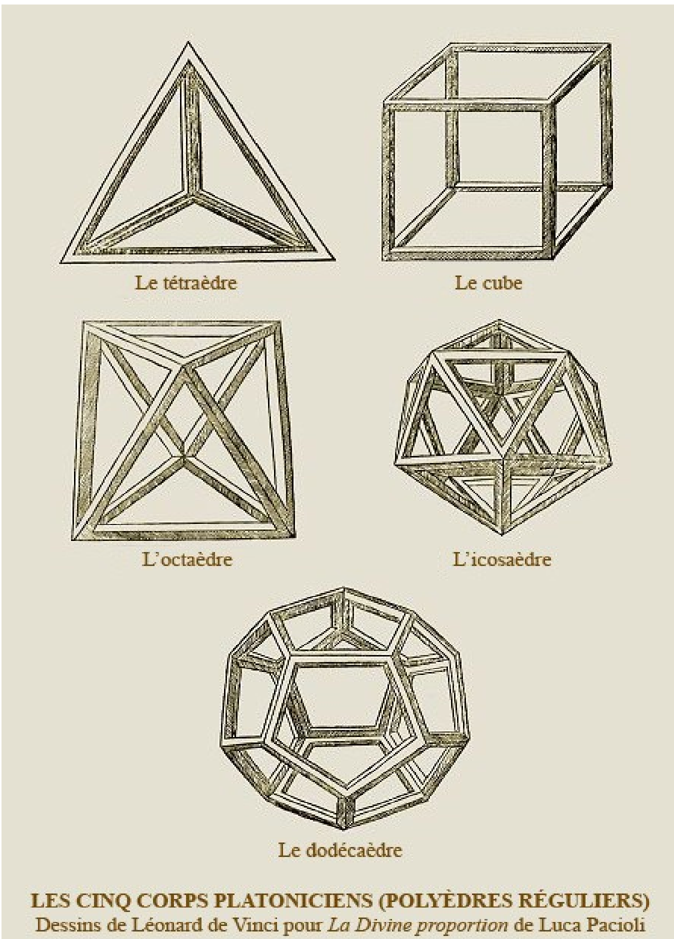
La projection stéréographique





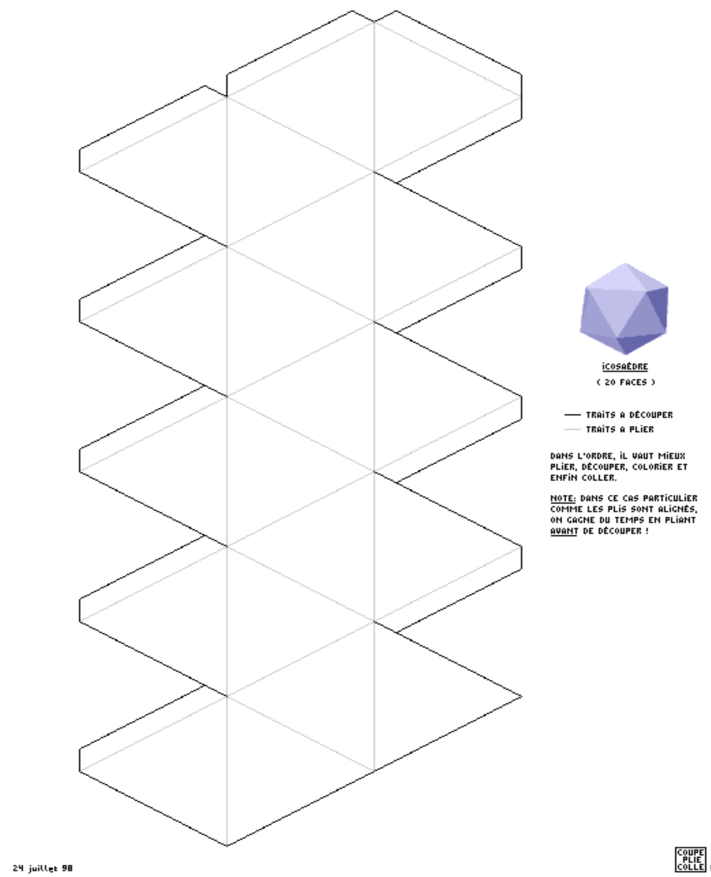
Depuis l'équateur, aux antipodes de l'Afrique de l'ouest.
Méridiens et parallèles sont transformés en deux faisceaux de cercles orthogonaux

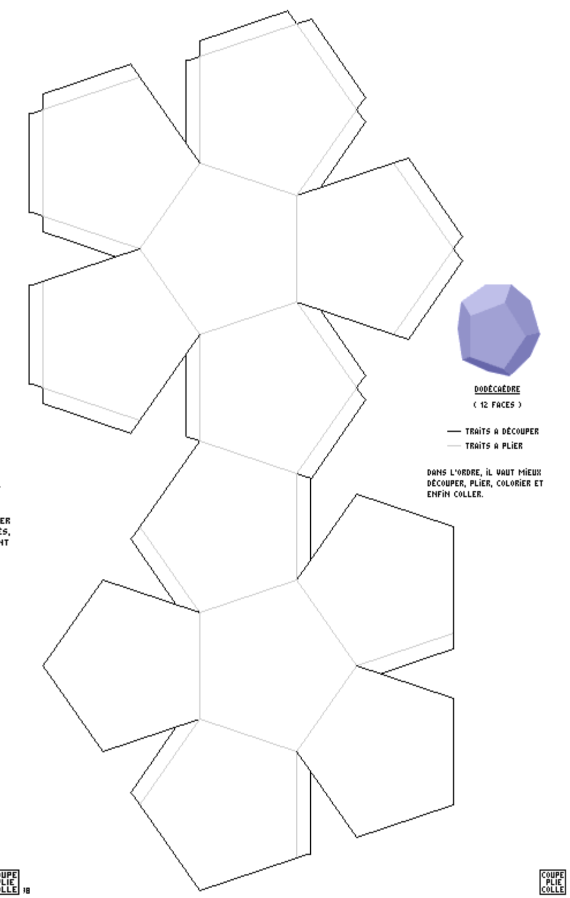
Les polyèdres réguliers



LES CINQ CORPS PLATONICIENS (POLYÈDRES RÉGULIERS)
Dessins de Léonard de Vinci pour *La Divine proportion* de Luca Pacioli

Les cinq polyèdres réguliers convexes (platoniciens) étaient déjà connus et décrits par Euclide et Platon.

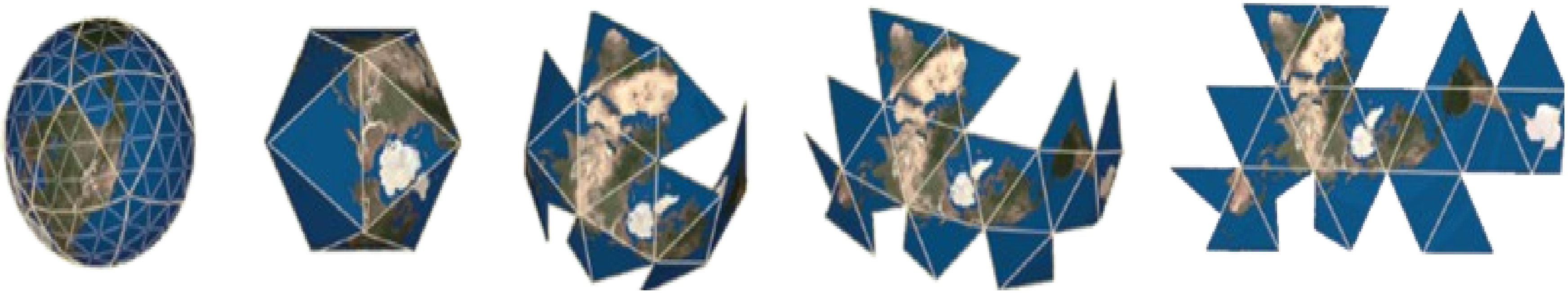


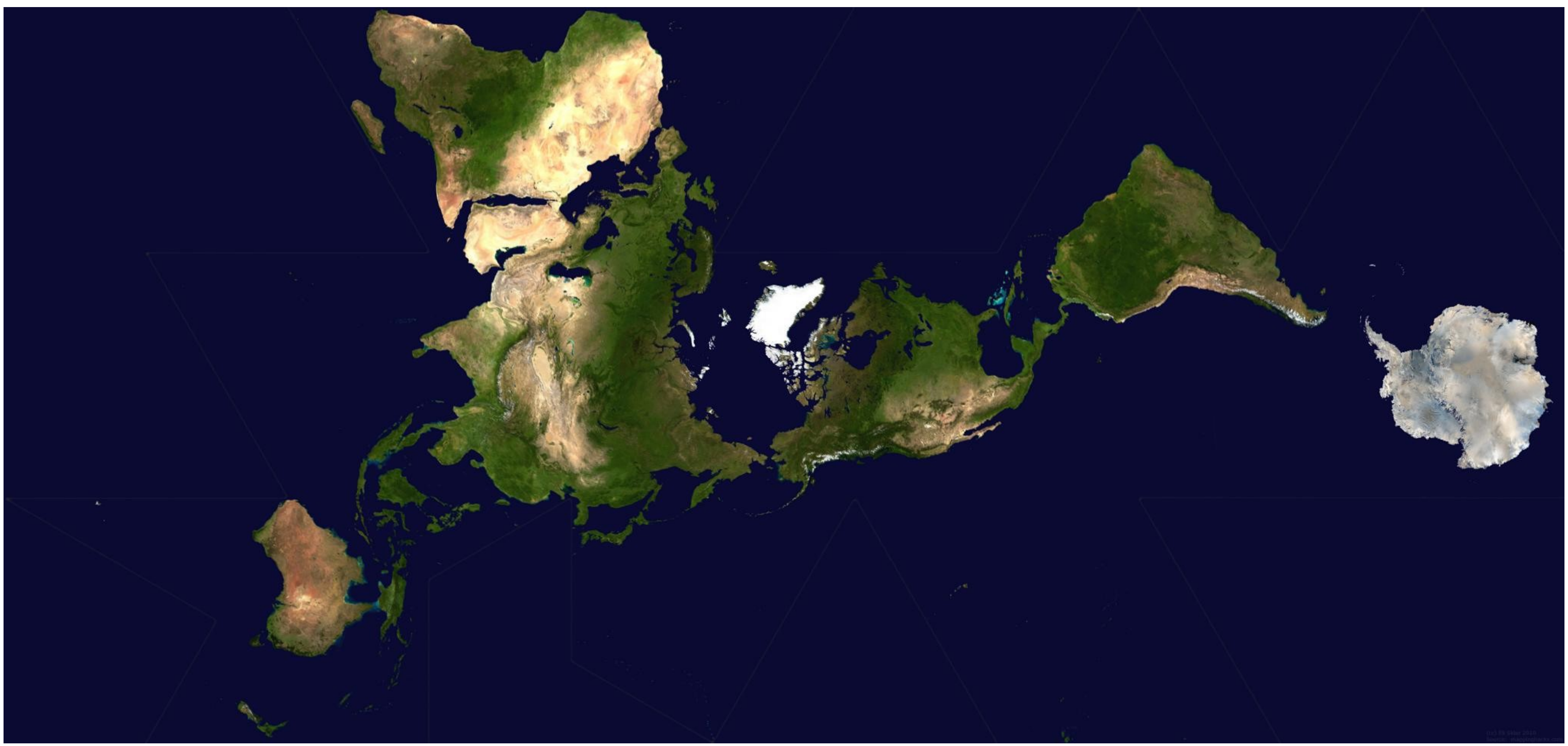


F-A+S=2

The Dymaxion Map

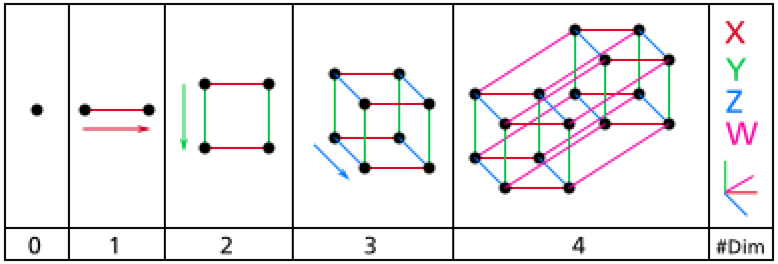
La projection de Fuller sur un icosaèdre





Peu de distorsion, les aires et distances sont à peu près préservées

Déterminer la forme de l'Univers : les variétés de dimension 3



Conjecture de Poincaré

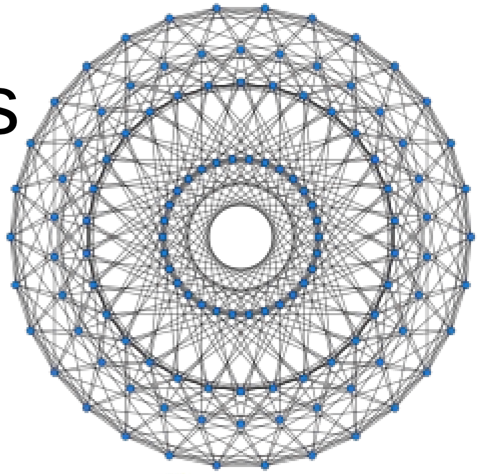
- Prix du Clay Institute en 2000 :

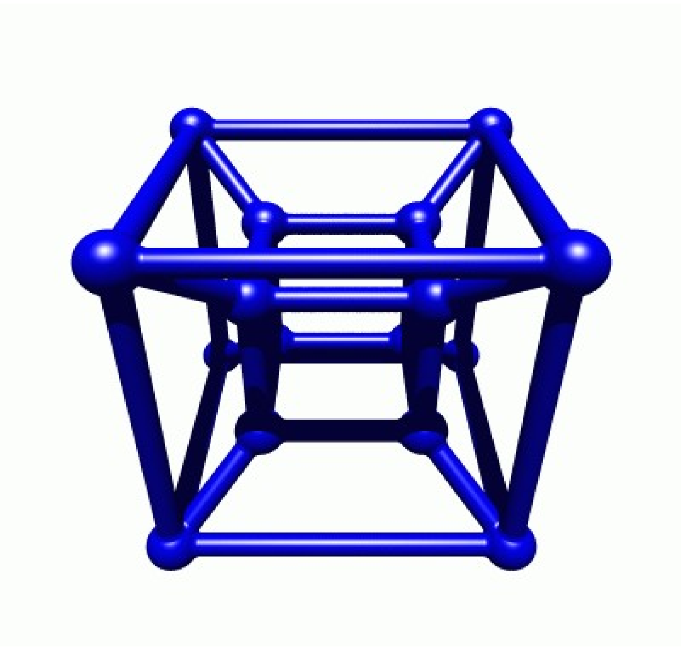
  1million de dollars

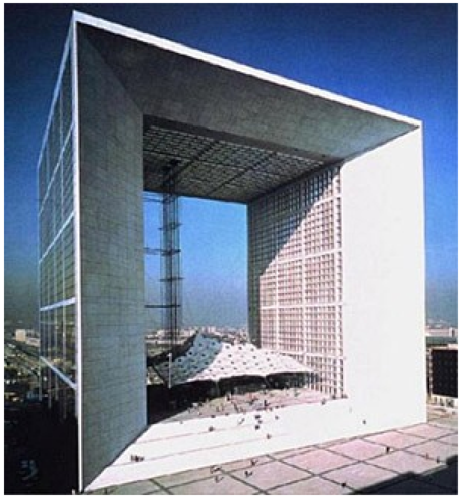
- Une variété compacte de dimension 3 sans trou et sans bord est topologiquement une hypersphère (prouvée par Perelman 2003)

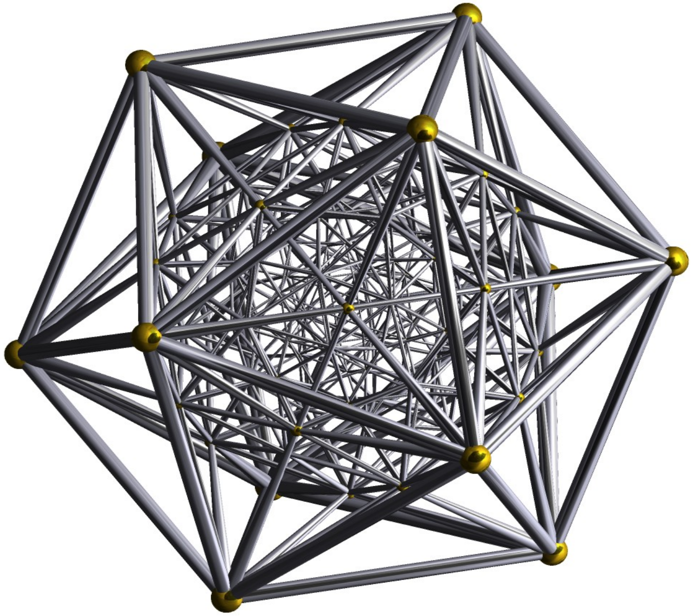
Étude des variétés de dimension 3

- Détermination de la forme de l'Univers
- Finitude de l'Univers
- Avenir à plus ou moins long terme





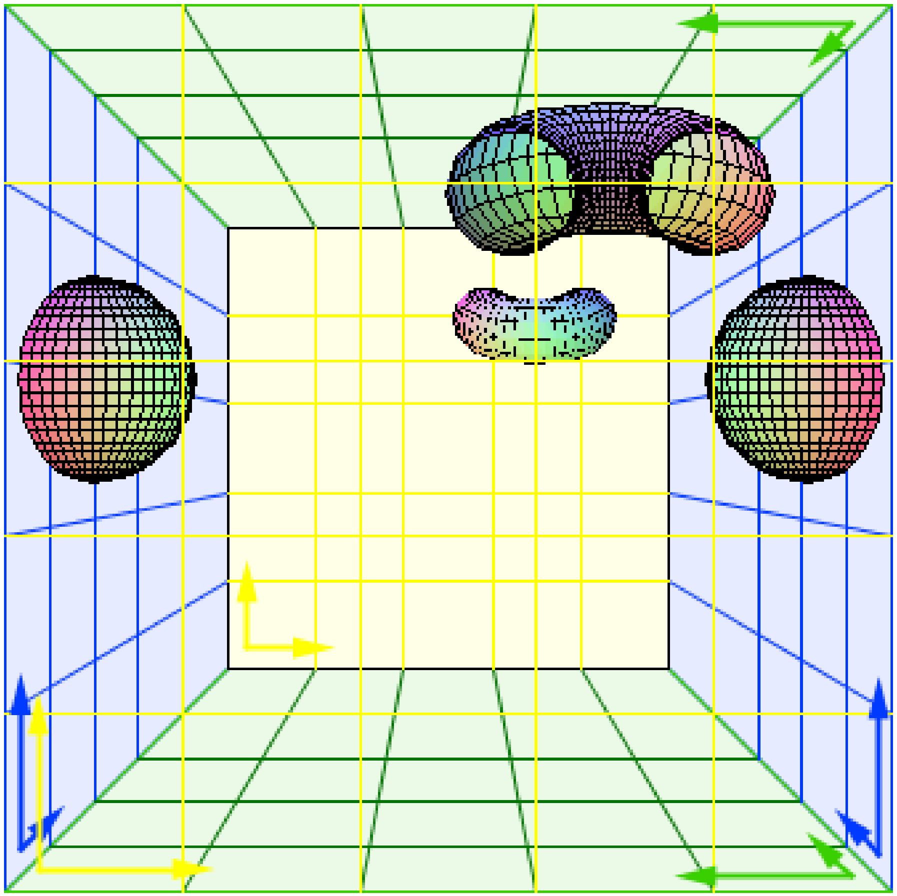




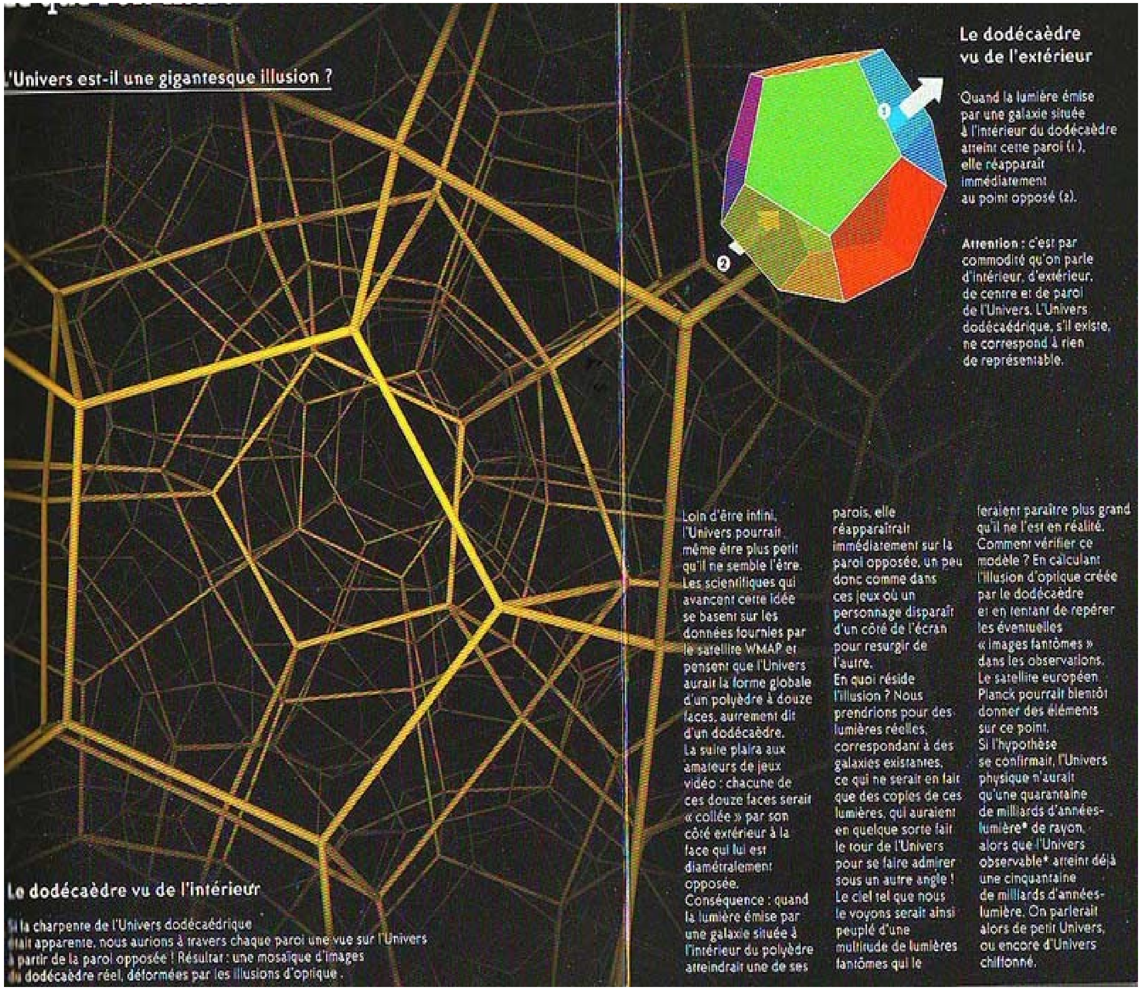
Hypercube : 16 sommets, 32 arêtes,
24 faces carrées, 8 cellules cubiques

Hexacosichore : 120 sommets,720 arêtes,
1200 faces triangulaires, 600 cellules tétraédriques

Et si l'Univers était un tore tridimensionnel ?



Un pacman en dimension 3



L'Univers est-il une gigantesque illusion ?

Le dodécaèdre vu de l'extérieur

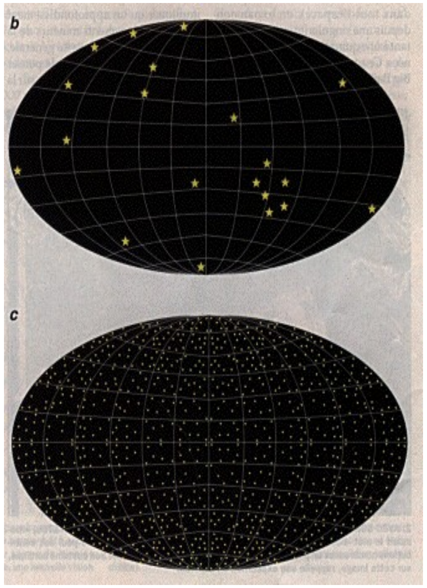
Quand la lumière émise par une galaxie située à l'intérieur du dodécaèdre atteint cette paroi (1), elle réapparait immédiatement au point opposé (2).

Attention : c'est par commodité qu'on parle d'intérieur, d'extérieur, de centre et de paroi de l'Univers. L'Univers dodécaédrique, s'il existe, ne correspond à rien de représentable.

Loin d'être infini, l'Univers pourrait même être plus petit qu'il ne semble l'être. Les scientifiques qui avancent cette idée se basent sur les données fournies par le satellite WMAP et pensent que l'Univers aurait la forme globale d'un polyèdre à douze faces, autrement dit d'un dodécaèdre. La suite plaira aux amateurs de jeux vidéo : chacune de ces douze faces serait « collée » par son côté extérieur à la face qui lui est diamétralement opposée. Conséquence : quand la lumière émise par une galaxie située à l'intérieur du polyèdre atteindrait une de ses parois, elle réapparaîtrait immédiatement sur la paroi opposée, un peu donc comme dans ces jeux où un personnage disparaît d'un côté de l'écran pour resurgir de l'autre. En quoi réside l'illusion ? Nous prendrions pour des lumières réelles, correspondant à des galaxies existantes, ce qui ne serait en fait que des copies de ces lumières, qui auraient en quelque sorte fait le tour de l'Univers pour se faire admirer sous un autre angle ! Le ciel tel que nous le voyons serait ainsi peuplé d'une multitude de lumières fantômes qui le feraient paraître plus grand qu'il ne l'est en réalité. Comment vérifier ce modèle ? En calculant l'illusion d'optique créée par le dodécaèdre et en tentant de repérer les éventuelles « images fantômes » dans les observations. Le satellite européen Planck pourrait bientôt donner des éléments sur ce point. Si l'hypothèse se confirmait, l'Univers physique n'aurait qu'une quarantaine de milliards d'années-lumière* de rayon, alors que l'Univers observable* atteint déjà une cinquantaine de milliards d'années-lumière. On parlerait alors de petit Univers, ou encore d'Univers chiffonné.

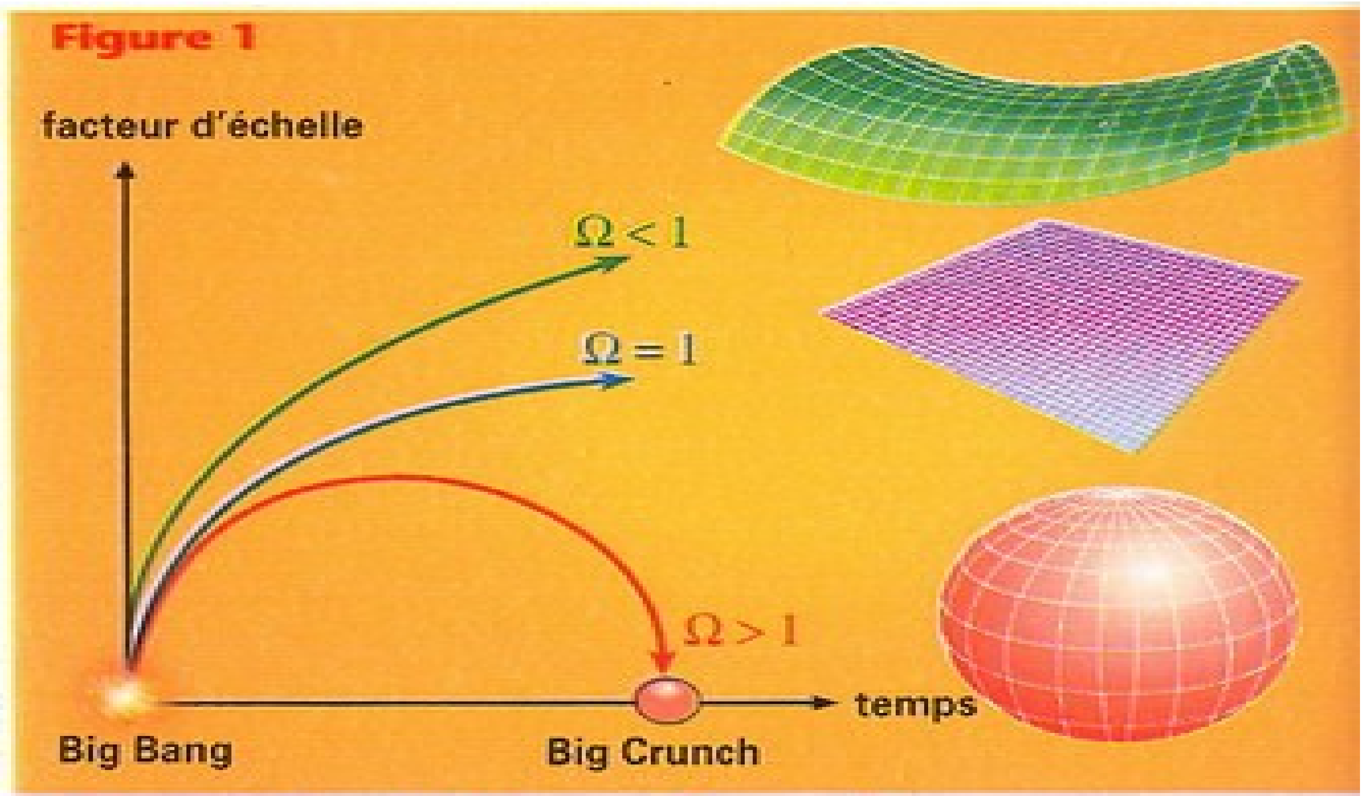
Le dodécaèdre vu de l'intérieur

Si la charpente de l'Univers dodécaédrique était apparente, nous aurions à travers chaque paroi une vue sur l'Univers à partir de la paroi opposée ! Résultat : une mosaïque d'images du dodécaèdre réel, déformées par les illusions d'optique.



J-P. Luminet et al. :Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background », Nature, vol. 425 (2003)

Et demain ?

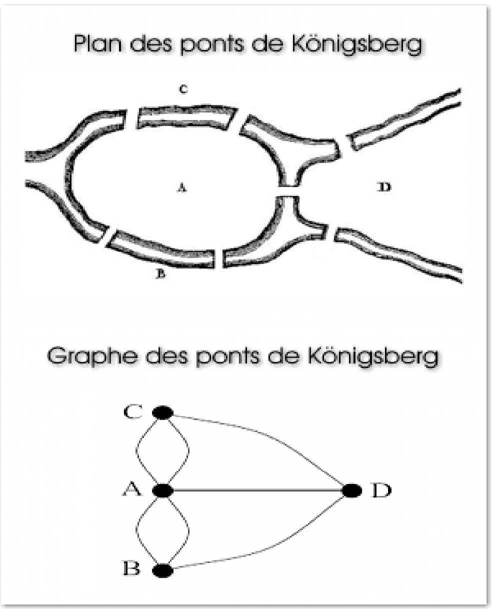


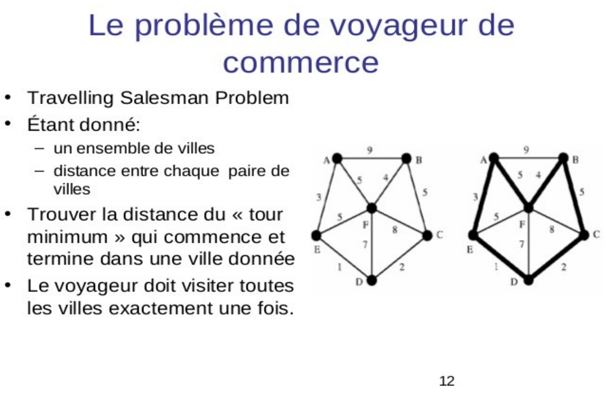
Ouvert, plat ou fermé

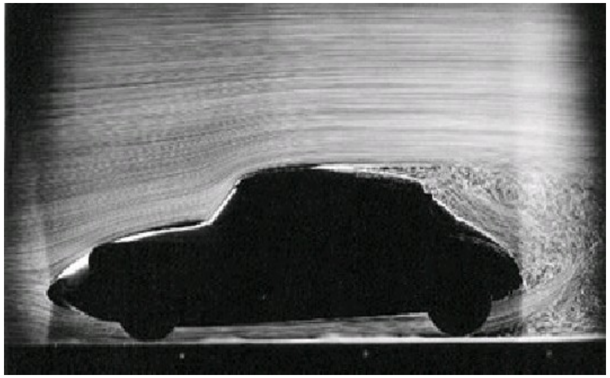
Selon la valeur du rapport de la densité de l'Univers à sa densité critique (Ω), la géométrie et l'évolution de l'Univers seront différentes. Pour $\Omega < 1$ et $\Omega = 1$, l'Univers est infini et son expansion éternelle. Pour $\Omega > 1$, il est fermé et finira par se recontracter dans un Big Crunch.

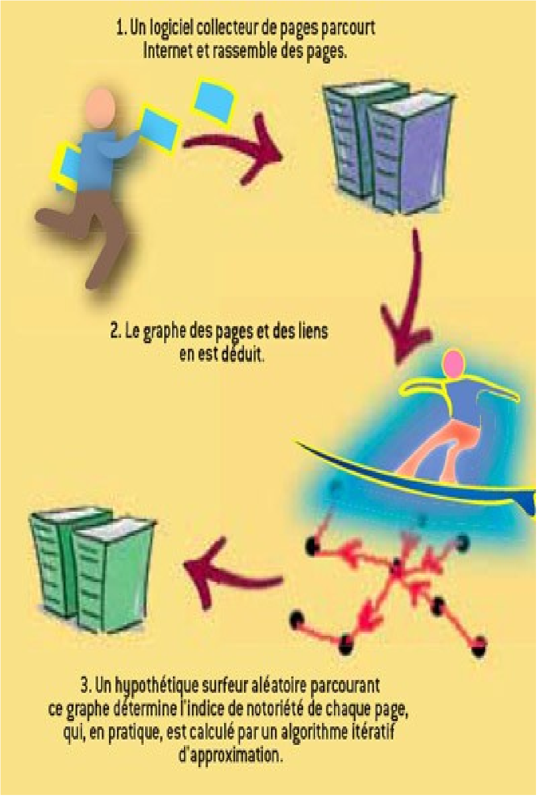
Quelques applications dont je n'ai pas parlé aujourd'hui

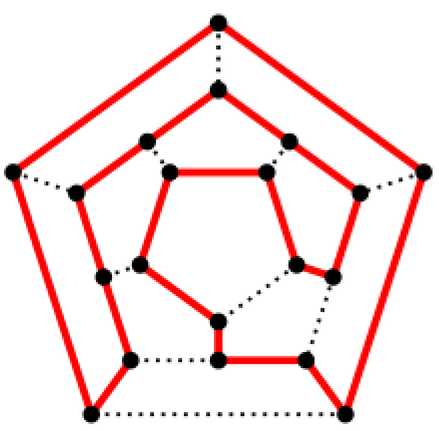
Graphes, turbulences, moteurs de recherches et banques de données

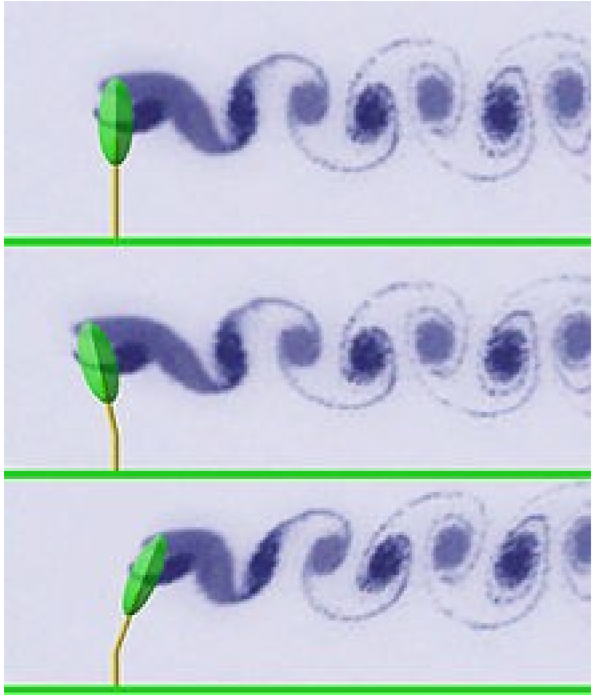




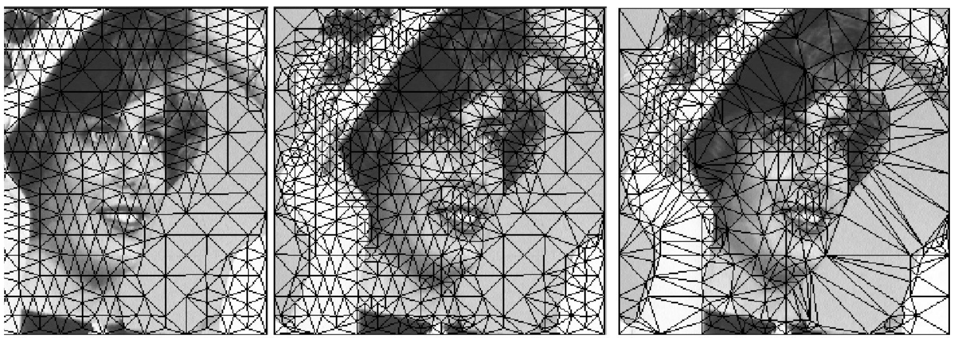


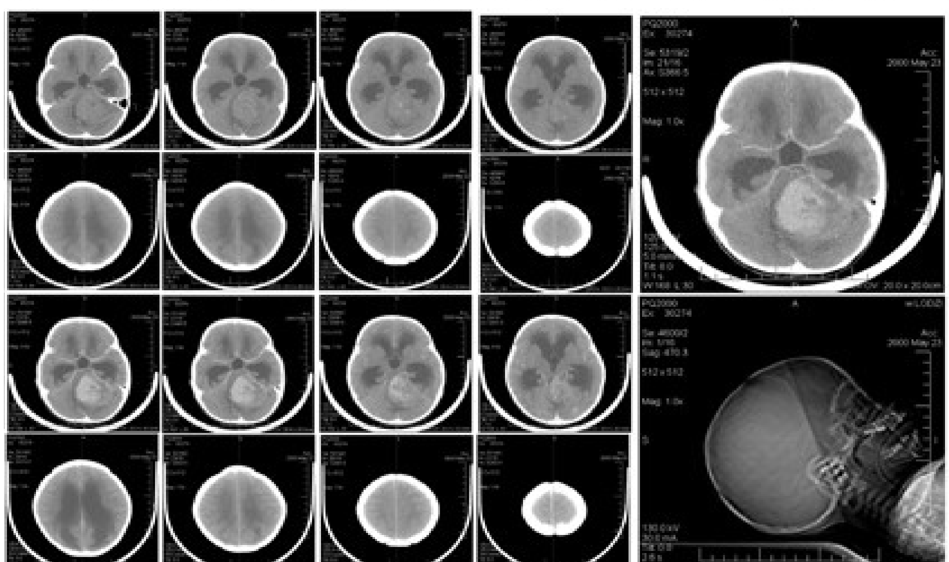


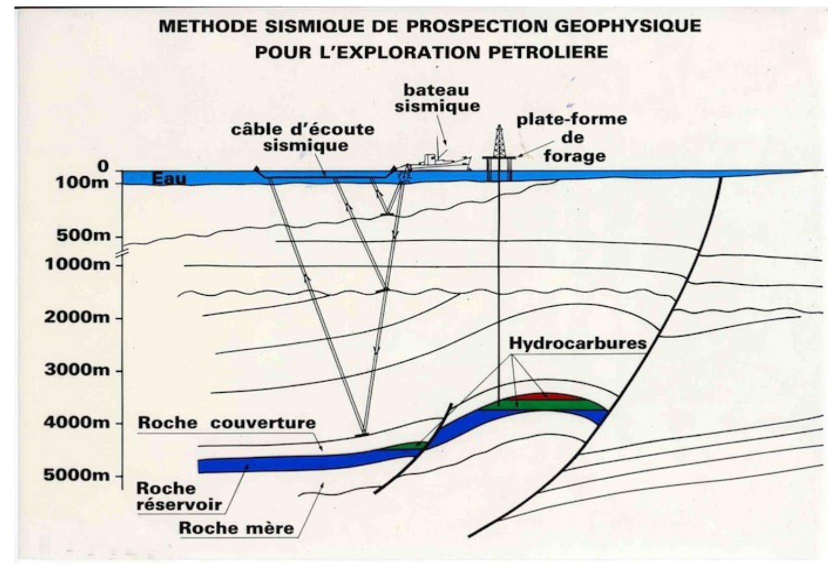


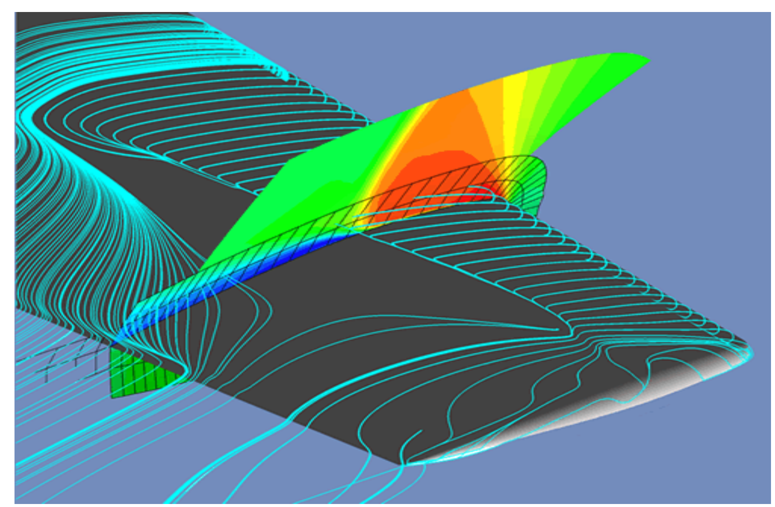


Maillage et traitement des images, animation et imagerie médicale, théorie de l'inversion

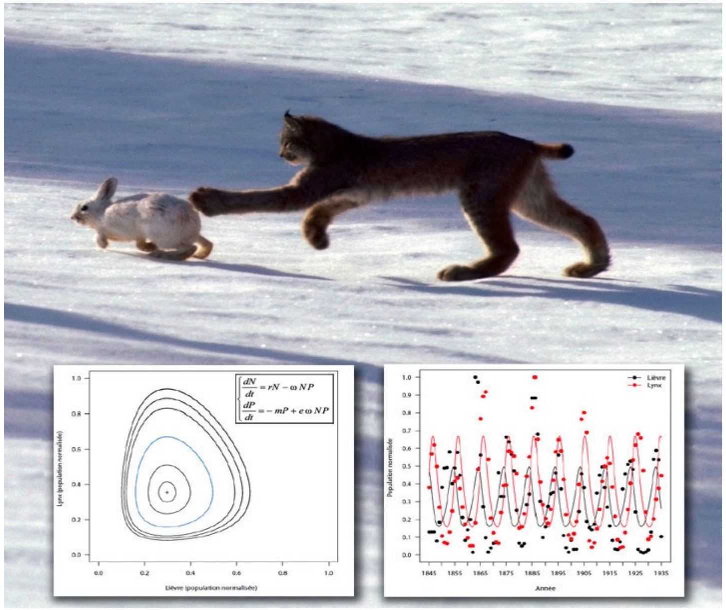






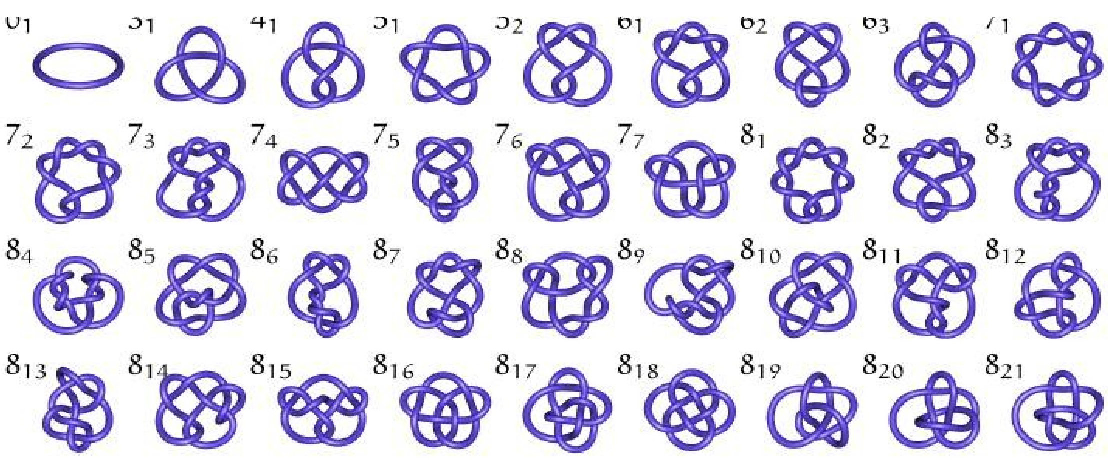


Dynamique des populations et génétique

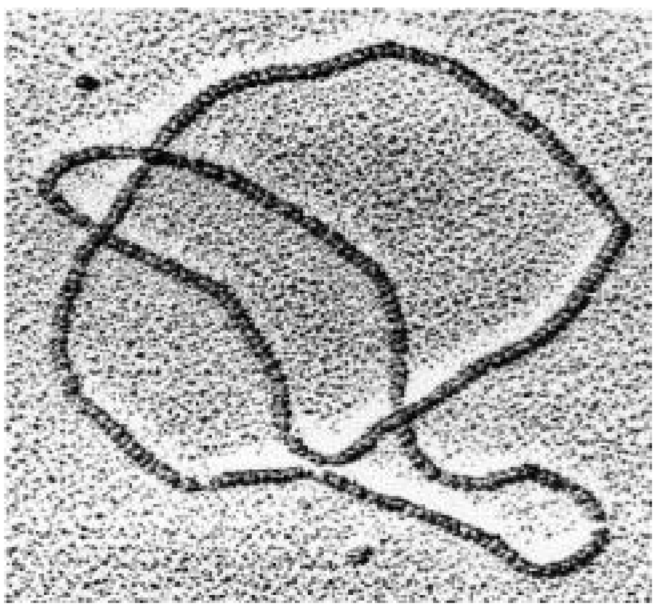


Le système dynamique
« Proies-Prédateurs »
de Lotka-Volterra

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} & = & x(t)\left(\alpha-\beta y(t)\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} & = & -y(t)\left(\gamma-\delta x(t)\right)\end{array}\right.$$



Noeuds et brins d'ADN



Finalement la question est :
« à quoi ne servent pas les mathématiques ? »