# Fibrés de Schwarzenberger
# et coniques de droites sauteuses

Jean Vallès

RÉSUMÉ.— À un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ stable de rang deux sur le plan projectif complexe $\mathbf{P}_2$ on associe son schéma des droites de saut $S(\mathcal{E})$ dans $\mathbf{P}_2^\vee$ [Ba1]. Quand le déterminant de $\mathcal{E}$ est pair $S(\mathcal{E})$ est une courbe. Dans [LP1] Le Potier demande quels sont les fibrés caractérisés par leurs courbes de saut. Dans cet article nous montrons que si $\mathcal{E}$ est un fibré de Schwarzenberger [Sch1] de déterminant pair alors $S(\mathcal{E})$ détermine $\mathcal{E}$; dans ce cas $S(\mathcal{E})$ est de la forme $nC$ òu $C$ est une conique lisse de $\mathbf{P}_2^\vee$. Nous donnons aussi une étude fine de la variété des zéros d'une section d'un fibré de Schwarzenberger. Cette étude permet d'ordonner et de simplifier la théorie bien connue des courbes de Poncelet.

ABSTRACT.— To a stable vector bundle $\mathcal{E}$ of rank 2 on the complex projective plane $\mathbf{P}_2$ Barth associates its scheme $S(\mathcal{E})$ of jumping lines in $\mathbf{P}_2^\vee$ [Ba1]. When the first Chern class of $\mathcal{E}$ is even $S(\mathcal{E})$ is a curve. In [LP1] Le Potier asks which bundles are characterized by their curve of jumping lines. In this paper we prove that if $\mathcal{E}$ is a Schwarzenberger's bundle [Sch1] with even first Chern class then $S(\mathcal{E})$ determine $\mathcal{E}$; in this case $S(\mathcal{E})$ is of the form $nC$ where $C$ is a smooth conic of $\mathbf{P}_2^\vee$. We also give a precise study of the zero-scheme of a section of a Schwarzenberger's bundle. This study gives a simplification of the well known Poncelet's curve theory.

## Introduction

Une méthode désormais classique lorsque l'on étudie les fibrés vectoriels stables de rang deux sur le plan projectif complexe est de considérer leur schéma de droites sauteuses. Les fibrés de rang deux stables (ceux dont les endomorphismes sont les constantes) de classes de Chern $(c_1, c_2)$ possèdent une variété de modules projective irréductible et normale de dimension $4c_2 - c_1^2 - 3$ notée $M(c_1, c_2)$. Une droite de saut de $F$ est une droite $L$ telle que $F_L = O_L(a) \oplus O_L(b)$ avec $|a-b| > 1$. L'entier $[|a-b|/2]$ est l'ordre de saut de $L$. Si $[|a-b|/2]$ ne dépend pas du choix de la droite de saut, on dira que le saut est uniforme. D'après Grauert et Mülich une droite générale n'est pas une droite de saut de $F$.

Soit $F \in M(c_1, c_2)$, on note $S(F)$ l'ensemble des droites de saut de $F$. Cet ensemble a une structure naturelle de sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_2^\vee$ ([Ba1], pour $c_1$ pair et [Hu] pour $c_1$ impair) .

— Pour un fibré $F \in M(c_1, c_2)$ de $c_1$ pair, $S(F)$ est une courbe de degré $c_2 - c_1^2/4$, image de $F$ par le "morphisme de Barth"

$$\gamma : M(c_1, c_2) \longrightarrow \mathbf{P}(H^0(O_{\mathbf{P}_2^\vee}(c_2 - c_1^2/4)))$$

Ce morphisme est génériquement fini sur son image, il est même quasi-fini lorsque l'on considère sa restriction à l'ouvert des fibrés vectoriels ([LP2], thm 6.11). Pour $(c_2 - c_1^2/4) =$

4, Le Potier ([LP1], cor. 5.16) a montré que $M(c_1, c_2)$ est birationnel à son image et il conjecture que c'est encore vrai pour $(c_2 - c_1^2/4) > 4$.

**Problème.** Pour $(c_2 - c_1^2/4) > 4$, existe t-il un fibré qui soit déterminé par sa courbe de saut.

La réponse est oui, nous montrons dans la deuxième partie de cet article que les fibrés de Schwarzenberger [Sch1] de déterminant pair sont déterminés par leur courbe de saut. Plus présisément nous montrons (thm. 2.4)

**Théorème.** *Soient $C$ une conique lisse de $\mathbf{P}_2^\vee$ d'équation $\{f = 0\}$ et $\mathcal{E}$ un fibré stable sur $\mathbf{P}_2$ de déterminant pair tels que $S(\mathcal{E})$ est le diviseur $nC$ d'équation $\{f^n = 0\}$. Alors $\mathcal{E}$ est un fibré de Schwarzenberger de la conique $C$.*

Une conséquence immédiate de ce théorème est que la courbe multiple $nC$ lorsque $n$ n'est pas un nombre binômial n'appartient pas à l'image de $M(0, 2n)$ par le morphisme de Barth.

La première partie est consacrée à une étude détaillée de la variété des zéros d'une section d'un fibré de Schwarzenberger. Cette étude permet d'ordonner et de simplifier la théorie bien connue des courbes de Poncelet.

Je remercie Christian Peskine pour ses conseils dans l'élaboration de ce travail.

# 1 Fibrés de Schwarzenberger

Schwarzenberger a montré que tout fibré vectoriel de rang deux sur $\mathbf{P}_2$ provient de la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur une surface lisse $X$ qui est un revêtement double de $\mathbf{P}_2$ ([Sch1], thm.3). Il étudie plus précisément le cas où le revêtement $\pi : X \to \mathbf{P}_2$ est ramifié le long d'une conique lisse de $\mathbf{P}_2$; on appelle fibrés de Schwarzenberger les fibrés vectoriels de rang deux $\pi_*\mathcal{L}$.

Plusieurs descriptions de cette surface $X$ existent, nous utiliserons la description qui suit.

Soit $\mathbf{F} \subset \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2^\vee$ la variété d'incidence points-droites de $\mathbf{P}_2$. Soit $C$ une conique lisse de $\mathbf{P}_2^\vee$, posons $X := \mathbf{F} \cap (\mathbf{P}_2 \times C)$ et considérons les diagrammes d'incidence :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & \xrightarrow{q} & \mathbf{P}_2^\vee \\ p \downarrow & & \\ \mathbf{P}_2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{q}} & C \\ \bar{p} \downarrow & & \\ \mathbf{P}_2 & & \end{array}$$

On sait que $X$ est un revêtement double de $\mathbf{P}_2$ ramifié le long de la conique duale $C^\vee \subset \mathbf{P}_2$.

**Définition 1.1** *On appelle fibrés de Schwarzenberger de la conique $C$, les fibrés vectoriels de rang 2 sur $\mathbf{P}_2$*

$$E_{n,C}(a) := (\bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L}_n(C))(a)$$

*où $\mathcal{L}_n(C)$ est le faisceau inversible de degré $n$ sur $C$ et $a$ est un entier.*

Les classes de Chern de ces fibrés sont : $c_1(E_{n,C}) = n - 1$, $c_2(E_{n,C}) = n(n-1)/2$.
Comme le morphisme $\bar{p}$ est fini on a : $H^i(E_{n,C}) = H^i(\mathcal{L}_n(C))$ pour tout $n$. En particulier, $h^0(E_{n,C}) = n + 1$ pour $n \geq 0$.

### 1.0.1 Suites de liaison

La suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}_{n-1}(C) \to \mathcal{L}_n(C) \to O_{L^\vee} \to 0$$

où $L^\vee$ est le point de $\mathbf{P}_2^\vee$ correspondant à la droite $L$ de $\mathbf{P}_2$ tangente à $C^\vee$, induit une suite exacte :

$$0 \to E_{n-1,C} \to E_{n,C} \to O_L \to 0 \tag{1}$$

Plus généralement on a, pour le choix de $k$ points distincts, $L_1^\vee, \cdots, L_k^\vee$ sur $C$ des suites de liaisons de la forme :

$$0 \to E_{n,C} \to E_{n+k,C} \to \bigoplus_{i=1}^{k} O_{L_i} \to 0$$

### 1.0.2 Résolution

Rappelons ([Sch1], prop. 2) que le fibré de Schwarzenberger $E_{n,C}$ $(n > 0)$ est décrit par

$$0 \to (n-1)O_{\mathbf{P}_2}(-1) \xrightarrow{M} (n+1)O_{\mathbf{P}_2} \longrightarrow E_{n,C} \to 0.$$

Les coordonnées, $(X_0, X_1, X_2)$, de $\mathbf{P}_2$ peuvent être choisies de telle manière qu'un représentant de $M$ soit la matrice $(n+1) \times (n-1)$ suivante

$$M = \begin{pmatrix} X_0 & & & & \\ X_1 & X_0 & & & \\ X_2 & X_1 & . & & \\ & X_2 & . & . & \\ & & . & . & . \\ & & & . & . & X_0 \\ & & & & . & X_1 \\ & & & & & X_2 \end{pmatrix}$$

*Remarque.* Dans ce cas l'équation de $C^\vee \subset \mathbf{P}_2$ est $X_1^2 - 4X_0X_2 = 0$.

### 1.0.3 Quelques remarques

On vérifie facilement que

$$E_{0,C} = O_{\mathbf{P}_2} \oplus O_{\mathbf{P}_2}(-1), \quad E_{1,C} = O_{\mathbf{P}_2} \oplus O_{\mathbf{P}_2} \text{ et } E_{2,C} = \Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1)$$

En utilisant les suites de liaison, on en déduit la relation de dualité suivante

$$E_{-i,C} = E_{i,C}^\vee(-1) = E_{i,C}(-i).$$

Il est clair d'après la résolution ci-dessus que $E_{n,C}$ est engendré par ses sections pour $n > 0$ et que $H^0(E_{n,C}(-1)) = 0$ pour tout $n$.
On en déduit que les fibrés de Schwarzenberger sont stables pour $n \neq -1, 0, 1$.
Pour $-2 \leq n \leq 2$ les fibrés de Scharzenberger ne dépendent pas du choix de la conique de $\mathbf{P}_2^\vee$. Pour $\mid n \mid \geq 3$, $E_{n,C}$ caractérise $C$; nous le verrons dans le paragraphe concernant le schéma des droites de saut de $E_{n,C}$.
On supposera dans la suite de ce texte que $n \geq 2$.

## 1.1 Une caractérisation des fibrés de Schwarzenberger

Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang deux sur $\mathbf{P}_2$ de première classe de Chern égale à $c_1$. Compte tenu de la suite exacte canonique

$$0 \to \Lambda^2\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow S^2\mathcal{E} \to 0$$

l'équivalence

$$\mathcal{E} \text{ est stable} \Leftrightarrow h^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^\vee) = 1$$

peut encore s'écrire

$$\mathcal{E} \text{ est stable} \Leftrightarrow h^0((S^2\mathcal{E})(-c_1)) = 0$$

Peut-on caractériser les fibrés stables $\mathcal{E}$ qui vérifient $H^0((S^2\mathcal{E})(1-c_1)) \neq 0$?

Les fibrés stables $\mathcal{E}$ tels que $c_1(\mathcal{E}) = -1$ et $h^0(\mathcal{E}(1)) \neq 0$ vérifient évidemment cette propriété. Ces fibrés sont appelés fibrés de Hulsbergen, on dira fibrés de Hulsbergen impairs pour préciser que leur première classe de Chern est impaire.

Si l'on excepte ces fibrés de Hulsbergen impairs on montre dans la proposition suivante que les fibrés vectoriels stables $\mathcal{E}$ vérifiant $H^0((S^2\mathcal{E})(1-c_1)) \neq 0$ sont les fibrés de Schwarzenberger.

On remarque que le seul fibré de Schwarzenberger stable qui est aussi Hulsbergen impair est le fibré tangent.

**Proposition 1.2** *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel stable de rang deux sur $\mathbf{P}_2$ qui n'est pas un fibré de Hulsbergen impair. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*
*a) $\mathcal{E}$ est un fibré de Schwarzenberger.*
*b) $H^0((S^2\mathcal{E})(1-c_1)) \neq 0$*

**Preuve de la proposition 1.2.** Rappelons tout d'abord qu'un revêtement double de $\mathbf{P}_2$ est caractérisé par sa courbe de ramification. On note $h$ la classe de $O_{\mathbf{P}_2}(1)$, $\eta$ la classe du relativement ample sur le fibré projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ et $\pi$ le morphisme canonique

$$\pi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{P}_2.$$

a)$\Rightarrow$ b) Soit $C$ une conique lisse de $\mathbf{P}_2^\vee$ et $X$ son image réciproque dans la variété d'incidence. Le faisceau d'idéaux dans $X$ du diviseur de ramification est $\bar{p}^*O_{\mathbf{P}_2}(-1)$. La suite exacte

$$0 \to \bar{q}^*\mathcal{L}_n(C) \otimes \bar{p}^*O_{\mathbf{P}_2}(-1) \to \bar{q}^*\mathcal{L}_n(C) \to (\bar{q}^*\mathcal{L}_n(C))_{|C^\vee} \to 0$$

donne par image directe, un homomorphisme

$$0 \to E_{n,C}(-1) \to E_{n,C} \to \mathcal{L}_n(C^\vee) \to 0. \tag{2}$$

qui ne provient pas de la multiplication par une forme linéraire. Compte tenu de la suite exacte

$$0 \to O_{\mathbf{P}_2}(1) \longrightarrow E_{n,C} \otimes E_{n,C}^\vee(1) \longrightarrow S^2E_{n,C}(2-n) \to 0$$

on en déduit que $h^0(E_{n,C} \otimes E_{n,C}^\vee(1)) \geq 4$ c'est à dire $h^0(S^2E_{n,C}(2-n)) \geq 1$.

b)$\Rightarrow$ a) On peut supposer sans perte de généralité $c_1 = 0$ ou $c_1 = -1$.

Une section non nulle $s \in H^0(S^2\mathcal{E}(1-c_1))$ définit un diviseur $D$ de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ qui est un revêtement double de $\mathbf{P}_2$. Considérons la suite exacte définissant le diviseur $D$

$$0 \to O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-2\eta + (c_1-1)h) \longrightarrow O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \longrightarrow O_D \to 0$$

Le faisceau dualisant relatif est $\omega_{\mathbf{P}(\mathcal{E})/\mathbf{P}_2} = O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-2\eta + c_1 h)$ ([Ha1], ex. 8.4). On en déduit que $R^1\pi_* O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-\eta) = 0$, ce qui implique

$$\mathcal{E} = \pi_* O_D(\eta)$$

et que $R^1\pi_* O_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(-2\eta) = O_{\mathbf{P}_2}(-c_1)$ ce qui implique

$$\pi_* O_D = O_{\mathbf{P}_2} \oplus O_{\mathbf{P}_2}(-1)$$

La courbe de ramification du morphisme $D \to \mathbf{P}_2$ est une conique, il suffit donc de montrer qu'elle est lisse.

Il s'agit de montrer que $D$ n'est ni une réunion de deux plans (la ramification est une droite double) ni un cône quadrique (la ramification est formée de deux droites distinctes).

Le diviseur $D$ n'est pas réunion de deux plans car il est irréductible; en effet sinon il existerait $u \in H^0(\mathcal{E}(a))$, $v \in H^0(\mathcal{E}(b))$ deux sections non nulles et deux entiers tels que $s = uv$ et $a + b = 1 - c_1$, ce qui implique que le fibré est instable si $a$ ou $b$ est nul ou qu'il est Hulsbergen impair si $a$ et $b$ sont égaux à 1.

Comme $\mathcal{E} = \pi_* O_D(\eta)$ est stable il est non décomposé donc $D$ n'est pas un cône quadrique.

## 1.2 Sections d'un fibré de Schwarzenberger

Commençons par faire une remarque évidente — mais utile — à laquelle nous réfèrerons souvent.

**Remarque 1.3** *Soit $s$ une section de $E_{n,C}$ et $Z(s)$ son schéma des zéros. Si $L$ est une droite tangente à $C^\vee$ sécante à $Z(s)$, alors elle est $(n-1)$-sécante à $Z(s)$.*

**Preuve de la remarque 1.3.** Si $L$ est tangente à $C^\vee$, on a un homomorphisme surjectif $E_{n,C} \to O_L$ qui prouve que $(E_{n,C})_{|L} = O_L(n-1) \oplus O_L$. La suite exacte

$$0 \to O_{\mathbf{P}_2} \xrightarrow{s} E_{n,C} \to \mathcal{I}_{Z(s)}(n-1) \to 0$$

induit une application surjective $(E_{n,C})_{|L} \to \mathcal{I}_{L\cap Z(s)/L}(n-1)$ (où $\mathcal{I}_{L\cap Z(s)/L}$ est le faisceau d'idéaux du schéma $L \cap Z(s)$ dans $L$). Si $L$ rencontre $Z(s)$, ceci implique $\mathcal{I}_{L\cap Z(s)/L}(n-1) = O_L$, autrement dit $L$ est $n-1$ sécante à $Z(s)$.

### 1.2.1 Schéma des zéros d'une section

Soit $s \in H^0(E_{n,C})$ une section non nulle. Comme $s \in H^0(\mathcal{L}_n(C))$ il lui correspond un diviseur effectif de degré $n$, $D_n(s) = \sum n_i L_i^\vee$ de $C$.

**Proposition 1.4** *Soient $s \in H^0(E_{n,C})$ une section non nulle et $Z(s)$ le schéma où cette section s'annule. Soit $D_n(s) = \sum n_i L_i^\vee$ le diviseur positif de degré $n$ de $C$ correspondant à $s$ :*

*1) Le support de $Z(s)$ est formé des points :*
*a) $x_{ij} = L_i \cap L_j$ si $i \neq j$*
*b) $x_{ii} = L_i \cap C^\vee$ si $n_i \geq 2$.*
*2) On note $Z(s) = \cup Z_{ij}$ où $Z_{ij}$ est le sous-schéma ponctuel de $Z(s)$ supporté par $x_{ij}$ (la réunion est disjointe). On a alors :*
*a) $Z_{ii} = Z(s_i)$ où $s_i \in H^0(E_{n_i,C})$ est la section dont le diviseur de $C$ correspondant est $D_{n_i} = n_i L_i^\vee$.*
*b) $Z_{ii} \cup Z_{ij} \cup Z_{jj} = Z(s_{ij})$ où $s_{ij} \in H^0(E_{n_i+n_j,C})$ est la section dont le diviseur de $C$ correspondant est $D_{n_i+n_j} = n_i L_i^\vee + n_j L_j^\vee$.*

On notera indifféremment $D_n(s)$ le diviseur sur $C$ et le schéma de dimension zéro de $\mathbf{P}_2^\vee$. Le faisceau d'idéaux du sous-schéma fermé $D_n(s)$ de $\mathbf{P}_2^\vee$ est noté $\mathcal{J}_{D_n(s)}$. La proposition se déduira du lemme suivant.

**Lemme 1.5** $R^1 p_* q^* \mathcal{J}_{D_n(s)} = O_{Z(s)}$

**Remarque 1.6** *On rappelle que le 0-ième idéal de fitting du faisceau $R^1 p_* q^* \mathcal{J}_{D_n(s)}$ est l'idéal dans $\mathbf{P}_2$ du schéma des bisécantes à $D_n(s)$ ([G-P] prop. 1.2). Ce schéma est fini car $D_n(s)$ est un diviseur sur une courbe lisse.*

**Preuve du lemme 1.5.** La suite exacte

$$0 \to O_{\mathbf{P}_2^\vee}(-2) \longrightarrow \mathcal{J}_{D_n(s)} \longrightarrow \mathcal{L}_{-n}(C) \to 0,$$

donne par image directe sur $\mathbf{P}_2$

$$0 \to p_* q^* \mathcal{J}_{D_n(s)} \to E_{-n,C} \to R^1 p_* q^* O_{\mathbf{P}_2^\vee}(-2) \to R^1 p_* q^* \mathcal{J}_{D_n(s)} \to 0.$$

On vérifie que $R^1 p_* q^* O_{\mathbf{P}_2^\vee}(-2) = O_{\mathbf{P}_2}(-1)$ et que l'application

$$E_{n,C}^\vee(-1) = E_{-n,C} \longrightarrow O_{\mathbf{P}_2}(-1)$$

est la duale de notre section

$$O_{\mathbf{P}_2} \xrightarrow{s} E_{n,C}.$$

Le faisceau $p_* q^* \mathcal{J}_{D_n(s)}$ est un faisceau inversible sur $\mathbf{P}_2$ et comme le schéma des bisécantes à $D_n(s)$ est fini, on a

$$p_* q^* \mathcal{J}_{D_n(s)} = O_{\mathbf{P}_2}(-n).$$

La suite ci-dessus devient alors

$$0 \to O_{\mathbf{P}_2}(-n) \to E_{n,C}^\vee(-1) \to O_{\mathbf{P}_2}(-1) \to R^1 p_* q^* \mathcal{J}_{D_n(s)} \to 0$$

ce qui prouve le lemme.

**Preuve de la proposition 1.4.** Le point $x \in \mathbf{P}_2$ est dans $Z(s)$ si et seulement si la droite $x^\vee$ de $\mathbf{P}_2^\vee$ est une bisécante au schéma de dimension zéro $D_n(s)$. Mais les bisécantes au diviseur effectif $D_n(s)$ de $C$ sont évidemment les droites $x_{ij}^\vee$ joignant les points $L_i^\vee$ et $L_j^\vee$ de $C$ pour $i \neq j$ et les tangentes à $C$ en un point $L_i^\vee$ tel que $2L_i^\vee \in D_n(s)$. Ce qui démontre 1).

Pour la deuxième assertion de la proposition, il suffit de remarquer que $Z_{ii}$ est le sous-schéma des bisécantes au diviseur $D_{n_i} = n_i L_i^\vee$ et que $Z_{ii} \cup Z_{ij} \cup Z_{jj}$ est le sous-schéma des bisécantes au diviseur $D_{n_i+n_j} = n_i L_i^\vee + n_j L_j^\vee$. Ces diviseurs correspondent aux sections $s_i \in H^0(E_{n_i,C})$ et $s_{ij} \in H^0(E_{n_i+n_j,C})$.

**Remarque 1.7** *On suppose $n > 2$. $D_n(s)$ est lisse si et seulement si $Z(s)$ est lisse, et dans ce cas le schéma $Z(s)$ est formé des sommets des $n$-droites (distinctes) tangentes à $C^\vee$.*

Plus précisément on a :

**Corollaire 1.8** $\deg(O_{Z_{ii}}) = n_i(n_i - 1)/2$, $\deg(O_{Z_{ij}}) = n_i n_j$.
$\deg(O_{L_i \cap Z_{ii}}) = n_i - 1$, $\deg(O_{L_i \cap Z_{ij}}) = n_j$.

**Preuve du corollaire 1.8.** $\deg(O_{Z_{ii}}) = c_2(E_{n_i,C}) = n_i(n_i - 1)/2$.
$\deg(O_{Z_{ij}}) = c_2(E_{n_i+n_j,C}) - \deg(O_{Z_{ii}}) - \deg(O_{Z_{jj}}) = n_i n_j$.
La droite $L_i$ est $n_i - 1$ sécante à $Z_{ii}$ car c'est une droite tangente à $C^\vee$ qui rencontre le lieu des zéros de la section $s_i \in H^0(E_{n_i,C})$ (Remarque 1.3). De même, la droite $L_i$ est $(n_i + n_j - 1)$-sécante à $Z(s_{ij})$. Comme elle est $n_i - 1$ sécante à $Z_{ii}$ elle est $n_j$ sécante à $Z_{ij}$.

### 1.2.2 Description de $Z_{ij}$ et $Z_{ii}$

Afin de faciliter la description de ces groupes de points on choisit la résolution suivante du fibré $E_{n,C}$

$$0 \to (n-1)O_{\mathbf{P}_2}(-1) \xrightarrow{M} (n+1)O_{\mathbf{P}_2} \longrightarrow E_{n,C} \to 0$$

où $M$ est la matrice introduite dans la section 1.0.2.

Rappelons ([Tr],page 33) que si $f_{\mu,\nu}$ sont les mineurs maximaux obtenus en supprimant les $\mu$-ième et $\nu$-ième lignes de $M$ (avec $\mu < \nu$), ces mineurs se calculent par récurrence de la manière suivante : Soit $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = X_1$ et pour $k \geq 2$

$$\Delta_k = det \begin{pmatrix} X_1 & X_0 & & & \\ X_2 & X_1 & . & & \\ & X_2 & . & . & \\ & & . & . & . \\ & & & . & . & X_0 \\ & & & & X_2 & X_1 \end{pmatrix} \quad k$$

Alors $\Delta_k = X_1\Delta_{k-1} - X_0X_2\Delta_{k-2} = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^j C_{k-j}^j X_1^{k-2j} X_2^j X_0^j$ et $f_{\mu,\nu} = X_0^\mu \Delta_{\nu-\mu-1} X_2^{n-\nu}$.

On note $M_i$ la matrice $n \times (n-1)$ extraite de $M$ en supprimant la i-ème ligne.

**Proposition 1.9** *Soient $s_i \in H^0(E_{n,C})$ la section associée au diviseur*

$$D_n(s_i) = iX_0^\vee + (n-i)X_2^\vee \text{ avec } 0 \leq i \leq n$$

*et $I_{Z(s_i)}$ l'idéal gradué du schéma des zéros de la section.*
*1) L'idéal gradué $I_{Z(s_i)}$ est engendé par les mineurs maximaux de $M_{i+1}$.*

*2) Pour $i < n-1$, au point $(1,0,0)$ de coordonnées locales $(x_1, x_2)$, l'idéal de $Z(s_i)$ est $J_{Z(s_i)} = (x_2\delta_{n-2-i}, \delta_{n-1-i})$ où*

$$\delta_{n-k} = \sum_{i=0}^{[\frac{n-k}{2}]} (-1)^i C^i_{n-k-i} x_1^{n-k-2i} x_2^i$$

*est l'équation locale de $\Delta_{n-k}$.*
*3) Pour $0 < i < n$, au point $(0,1,0)$ de coordonnées locales $(x_0, x_2)$, l'idéal de $Z(s_i)$ est $J_{Z(s_i)} = (x_0^i, x_2^{n-i})$.*

**Preuve de la proposition 1.9.** On vérifie très facilement que le support de l'idéal engendré par les mineurs maximaux de $M_{i+1}$ est constitué des points $(1,0,0)$ si $i < n-1$, $(0,1,0)$ si $0 < i < n$ et de $(0,0,1)$ si $i > 1$. D'après la proposition 1.4 la section correspondante au choix de la matrice $M_{i+1}$ est associée au diviseur $iX_0^\vee + (n-i)X_2^\vee$ ce qui prouve 1).
La preuve de 2) se fait sans difficulté par récurrence en utilisant la relation $\delta_{n-i} = x_1\delta_{n-i-1} - x_2\delta_{n-i-2}$.
Pour prouver 3) on utilise l'expression locale de $f_{\mu,\nu}$ donnée par Trautmann ([Tr], page 54).

*Remarques.* Il résulte des définitions de $\delta_.$ et de $\Delta_.$ que $\delta_{k-1} \in \mathcal{M}_{x_{ii}}^{[k/2]}$ *et* $\delta_{k-1} \notin \mathcal{M}_{x_{ii}}^{[k/2]+1}$ et que si $k$ est impair la droite $X_1 = 0$ est une composante de la courbe d'équation $\Delta_k = 0$.

## 1.3 Application. Courbes de Poncelet

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont bien connus (cf. [Tr] et [Ma] pour les singularités des courbes de Poncelet). Nous avons voulu, pourtant, souligner que les propriétés des courbes de Poncelet se déduisent aussi de l'étude des fibrés de Schwarzenberger et plus particulièrement de l'étude du schéma des zéros de leurs sections.

### 1.3.1 Définitions

Citons la définition suivante donnée par Trautmann.

**Définition 1.10** *Une courbe $S \subset \mathbf{P}_2$ de degré $(n-1)$ sera appelée courbe de Poncelet associée à $C^\vee$ s'il existe un pinceau $\Lambda$ de diviseurs effectifs de degré $n$ sur $C^\vee$ tel que pour chaque couple de points d'un diviseur de $\Lambda$, les tangentes de $C^\vee$ en ces points se rencontrent sur $S$.*

Cette définition ne prend pas en compte le cas où le pinceau contient un diviseur effectif de degré $n > 2$ concentré en un point. Considérons plutôt un pinceau $\Lambda$ de diviseurs effectifs de degré $n$ sur $C \subset \mathbf{P}_2^\vee$ tel que pour chaque diviseur $D_n$ de $\Lambda$, le schéma des bisécantes à $D_n$ est contenu dans $S$. On retrouve la définition précédente lorsque le diviseur général du pinceau est lisse et l'on définit ainsi des courbes de Poncelet pour des diviseurs multiples sur $C$. Rappelons que le pinceau $\Lambda$ de diviseurs effectifs de degré $n$ sur $C \subset \mathbf{P}_2^\vee$ induit un pinceau de sections du fibré de Schwarzenberger $E_{n,C}$ (car $H^0(\mathcal{L}_n(C) = H^0(E_{n,C}))$. Nous utiliserons dans la suite la définition suivante.

**Définition 1.11** *Une courbe $S \subset \mathbf{P}_2$ de degré $(n-1)$ est une courbe de Poncelet associée à $C^\vee$ si et seulement si $S$ est le déterminant d'un pinceau de sections de $E_{n,C}$.*

On notera alors $V_S$ le pinceau correspondant à la courbe de Poncelet $S$ (et $\Lambda_S$ le pinceau de sections de $\mathcal{L}_n(C)$ associé sur $C$).
En utilisant les résultats précédents, on retrouve facilement le théorème suivant du à Darboux, énoncé de manière différente.

**Théorème 1.12** *(Darboux) Soit $S \subset \mathbf{P}_2$ une courbe de degré $(n-1)$ et $C$ une conique de $\mathbf{P}_2^\vee$. S'il existe un diviseur effectif $D_n$, de degré $n$, sur $C$ dont le schéma des bisécantes est contenu dans $S$, alors $S$ est une courbe de Poncelet associée à $C^\vee$.*

**Preuve du théorème 1.12.** Le diviseur $D_n$ est défini par une section de $\mathcal{L}_n(C)$, par conséquent il induit une section $s \in H^0(E_{n,C})$ (avec $E_{n,C} = \bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L}_n(C)$) dont le schéma des zéros $Z(s)$ est le schéma des bisécantes de $D_n$ :

$$0 \to O_{\mathbf{P}_2} \to E_{n,C} \to \mathcal{I}_{Z(s)}(n-1) \to 0.$$

La courbe $S$ est une section du faisceau $\mathcal{I}_{Z(s)}(n-1)$. Il existe donc une section $t$ de $E_{n,C}$ telle que $s \wedge t = 0$ soit l'équation de $S$. Ce qui prouve le théorème.

### 1.3.2 Singularités des courbes de Poncelet

En utilisant l'étude du schéma des zéros des sections des fibrés de Schwarzenberger on donne une équation locale explicite pour une courbe de Poncelet au voisinage d'un point du plan; on démontre ainsi la proposition suivante. Cette proposition, énoncée de manière différente a été prouvée par Maruyama ([Ma], proposition 4.4) et par Trautmann ([Tr] proposition 5.1). Rappelons que les points fixes de $\Lambda_S$ sont en bijection avec les composantes de $S$ qui sont des droites tangentes à la conique $C^\vee$ ([Tr], prop. 1.11) et que la courbe $S$ est réduite lorsque $\Lambda_S$ est sans point fixe ([Tr], prop. 3.3).

**Proposition 1.13** *Soit $S$ une courbe de Poncelet de degré $(n-1)$ associée à une conique $C$ lisse de $\mathbf{P}_2^\vee$. On suppose que le pinceau associé $\Lambda_S$ de sections de $\mathcal{L}_n(C)$ est sans point fixe. Alors,*
*1) Pour $x \in S$ il existe une unique section $\sigma \in V_S$ tel que $x \in Z(\sigma)$*
*2) La multiplicité de $S$ en $x$ est $\geq k$ si et seulement si $Z(\sigma)$ contient le $(k-1)$-ième voisinage infinitésimal de $x$.*

**Preuve de la proposition 1.13.**
*Preuve de 1).* Comme la courbe $S$ est le déterminant du pinceau de sections $V_S$, il existe une section $\sigma \in V_S$ qui s'annule en $x$. Le pinceau étant sans point fixe, c'est la seule.

*Preuve de 2).* On note $S = 0$ l'équation de la courbe $S$. De même si $L$ est une droite on note $L = 0$ son équation.

Rappelons que l'idéal gradué $I_{Z(\sigma)}$ de $Z(\sigma)$ est engendré par $n$ formes de degré $n-1$. On en déduit que $S$ est un générateur minimal de $I_{Z(\sigma)}$.

Deux cas sont à considérer : a) $x \notin C^\vee$ et b) $x \in C^\vee$. Comme l'étude est locale on supposera que le diviseur correspondant à l'unique section du pinceau s'annulant en $x$ est, pour le cas a) $n_0 X_0^\vee + n_2 X_2^\vee$, pour le cas b) $n_2 X_2^\vee$. On a alors en reprenant les notations de la proposition 1.9

— dans le cas a) une équation locale de $S$ est

$$S_x = u x_0^{n_0} + v x_2^{n_2}.$$

Comme $S_x$ est un générateur de $I_{Z(\sigma)}$ on peut supposer $v$ inversible. On vérifie alors que $u$ est aussi inversible car $\deg(O_{X_2 \cap Z(\sigma)}) = n_0$ (corollaire 1.8).

— dans le cas b) l'idéal de $Z(\sigma)$ au point $x$ est $I_{Z(\sigma)} = (x_2 \delta_{n_2-2}, \delta_{n_2-1})$. Une équation locale de $S$ est

$$S_x = u x_2 \delta_{n_2-2} + v \delta_{n_2-1}.$$

Comme $S$ coupe proprement $X_2$ on a $v \neq 0$. De plus d'après le corollaire 1.8 on a $\deg(O_{X_2 \cap Z(\sigma)}) = n_2 - 1$ ce qui prouve que $v$ est inversible.

Si $n_2$ est impair, $x_2 \delta_{n_2-2} \in \mathcal{M}_x^{(n_2-1)/2+1}$. Comme $\delta_{n_2-1} \notin \mathcal{M}_x^{(n_2-1)/2+1}$, ceci prouve que $S_x \notin \mathcal{M}_x^{(n_2-1)/2+1}$.

Si $n_2$ est pair, $x_2 \delta_{n_2-2} \in \mathcal{M}_x^{n_2/2}$ et $\delta_{n_2-1} \in \mathcal{M}_x^{n_2/2}$. Comme $n_2 - 1$ est impair, la droite $X_1 = 0$ est une composante de la courbe $\Delta_{n_1-1} = 0$. Comme $\Delta_{n_1-1}$ coupe proprement $X_2$ ceci prouve $S \notin \mathcal{M}_x^{n_2/2+1}$.

## 2 Caractérisation des fibrés de Schwarzenberger par leur schéma de droites sauteuses

L'objet de cette deuxième partie est de montrer que les fibrés $E_{n,C}$ pour $n > 2$ sont déterminés par leur schéma de droites de saut.

On vérifie tout d'abord que le schéma des droites de saut des fibrés de Schwarzenberger est un diviseur (même dans le cas des fibrés de déterminant impair) supporté par la conique $C$ et nous donnons l'équation de ce diviseur (prop.2.1).

Réciproquement si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel stable de rang deux tel que $S(\mathcal{E})$ est la courbe $nC$ (sans point immergé dans le cas impair) et $\sigma$ un automorphisme de $\mathbf{P}_2$ qui laisse invariant la conique $C^\vee$ (l'automorphisme dual laisse invariant la conique $C$) on remarque que $S(\sigma^* \mathcal{E}) = nC$. On montre alors qu'un fibré vectoriel stable de rang deux invariant sous l'action de $\mathrm{Aut}(C^\vee) \simeq SL_2(\mathbf{C})$ est un fibré de Schwarzenberger (prop. 2.3). Enfin, si $\mathcal{E}$ est de déterminant pair un résultat de finitude sur le morphisme de saut de Barth ([LP2], thm 6.11) nous permet de montrer que $\mathcal{E}$ est invariant sous l'action de $SL_2(\mathbf{C})$ et donc que c'est un fibré de Schawrzenberger (thm. 2.4).

Lorsque que le déterminant de $\mathcal{E}$ est impair aucun résultat à ma connaissance de permet d'affirmer que l'hypothèse $S(\mathcal{E}) = nC$ implique que le fibré $\mathcal{E}$ est invariant sous $SL_2(\mathbf{C})$.

**Proposition 2.1** *Soient $C$ une conique lisse de $\mathbf{P}_2^\vee$ et $m \geq 2$ un entier.*

$$S(E_{2m-1,C}) = S(E_{2m,C}) = \tfrac{m(m-1)}{2} C.$$

**Rappel.** Soit $\mathcal{E}$ un fibré stable de rang deux sur $\mathbf{P}_2$. On rappelle que le 0-ième idéal de fitting du faisceau $R^1 q_*(p^* \mathcal{E}(-[(c_1+2)/2]))$ est l'idéal du schéma $S(\mathcal{E})$ des droites sauteuses de $\mathcal{E}$.

**Preuve de la proposition 2.1.** La proposition est évidente pour $E_{2m-1,C}$. En effet le degré du diviseur de droites de saut de $E_{2m-1,C}$ est

$$c_2(E_{2m-1,C}(-m+1)) = m(m-1) \text{ ([Ba1], théorème 2).}$$

Comme les seules droites de saut de $E_{2m-1,C}$ sont les tangentes de $C^\vee$ ([Sch1], prop 8), on en déduit que $S(E_{2m-1,C}) = \frac{m(m-1)}{2}C$.
Pour prouver la proposition lorsque le $c_1$ est impair nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.2** $q_*p^*E_{2m,C}(-m) = O_{\mathbf{P}_2^\vee}(-m)$.

**Preuve du lemme 2.2.** Remarquons pour commencer que $h^0(E_{2m,C}(-m)_{|L}) = 1$ pour une droite générale $L$, ce qui prouve que le faisceau $q_*p^*E_{2m,C}(-m)$ est un faisceau reflexif de rang 1 sur $\mathbf{P}_2^\vee$ ([Ha2], cor. 1.7) et par suite inversible ([Ha2], prop. 1.9).
En appliquant le foncteur $p_*q^*$ à la suite exacte

$$0 \to O_{\mathbf{P}_2^\vee}(m-2) \longrightarrow O_{\mathbf{P}_2^\vee}(m) \longrightarrow O_C(m) \to 0$$

on obtient

$$0 \to S^{m-2}(\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1)) \longrightarrow S^m(\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1)) \longrightarrow E_{2m,C} \to 0$$

Pour toute droite $L$ de $\mathbf{P}_2$ on a $\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1)_{|L} = O_L \oplus O_L(1)$. On en déduit que
a) $q_*p^*(S^{m-2}(\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1))(-m) = 0$,
b) $q_*p^*(S^m(\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1))(-m)$ est un fibré vectoriel de rang 1 sur $\mathbf{P}_2^\vee$ ,
c) $R^1q_*p^*(S^{m-2}(\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1))(-m)$ est un fibré vectoriel sur $\mathbf{P}_2^\vee$.
D'après a) et b)l'homomorphisme $q_*p^*(S^m(\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1))(-m) \to q_*p^*E_{2m,C}(-m)$ est un homomorphisme injectif de fibrés inversibles. D'après c) il est surjectif.
Comme $q_*p^*(S^m(\Omega^\vee_{\mathbf{P}_2}(-1))(-m) = O_{\mathbf{P}_2^\vee}(-m)$ ([Co], lemme 4.4) le lemme est prouvé.

**Preuve de la proposition 2.1(suite).**
La suite de liaison $0 \to E_{2m-1,C}(-m) \to E_{2m,C}(-m) \to O_L(-m) \to 0$ où $L^\vee$ est un point sur $C$, induit une suite exacte des images directes supérieures

$$O \to R^1q_*p^*E_{2m-1,C}(-m) \to R^1q_*p^*E_{2m,C}(-m) \to \mathcal{R} \to 0$$

où $\mathcal{R}$ est un faisceau supporté par le point $L^\vee$ de $C$. En effet, comme

$$q_*p^*E_{2m-1,C}(-m) = 0 \quad \text{et} \quad q_*p^*O_L(-m) = O_{\mathbf{P}_2^\vee}(-m),$$

cette suite est exacte à gauche d'après le lemme 2.2 précédent.

Comme cette construction ne dépend pas du choix de $L^\vee \in C$, on en déduit que $S(E_{2m,C}) = S(E_{2m-1,C})$. Ce qui prouve la proposition.

Existent t-ils d'autres fibrés stables de rang deux sur $\mathbf{P}_2$ dont le schéma des droites de saut soit une courbe supportée par $C$? Afin de répondre à cette question nous nous intêréssons maintenant aux fibrés invariants sous l'action de $SL_2(\mathbf{C})$.

**Proposition 2.3** *Un fibré vectoriel de rang deux stable sur $\mathbf{P}_2$ est $SL_2(\mathbf{C})$ invariant si et seulement si c'est un fibré de Schwarzenberger stable.*

**Preuve de la proposition 2.3.** On note $C^\vee$ l'image de $\mathbf{P}_1$ par le plongement de Véronèse $\mathbf{P}_1 \hookrightarrow \mathbf{P}_2 \simeq S^2\mathbf{P}_1$, $\pi$ le revêtement double $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \longrightarrow \mathbf{P}_2 \simeq S^2\mathbf{P}_1$ qui associe au couple $(x, y)$ le point d'intersection des droites $t_x$ et $t_y$ tangentes à $C^\vee$ aux points $\pi(x, x)$ et $\pi(y, y)$ et $p_1$ et $p_2$ les projections canoniques de $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ sur chacun des facteurs . L'action de $SL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}_1$ induit une action sur $\mathbf{P}_2$ qui identifie $SL_2(\mathbf{C})$ à $\mathrm{Aut}(C^\vee)$ (resp. sur $\mathbf{P}_2^\vee$ qui identifie $SL_2(\mathbf{C})$ à $\mathrm{Aut}(C)$ où $C$ est la conique duale). Plus précisément, soit $\sigma \in SL_2(\mathbf{C})$ et $z = \pi(x, y)$ un point de $\mathbf{P}_2$ l'action induite sur $\mathbf{P}_2$ est

$$\sigma.z = \pi(\sigma x, \sigma y).$$

Soit $F$ un fibré stable de rang deux sur $\mathbf{P}_2$ invariant sous l'action de $SL_2(\mathbf{C})$ c'est à dire vérifiant $\sigma^*F = F$ pour tout $\sigma \in SL_2(\mathbf{C})$, on alors $(\sigma, \sigma)^*(\pi^*F) = \pi^*F$. Nous montrons, en utilisant une idée de Schwarzenberger ([Sch2], 3.*Doubly reducible bundles*) que le fibré $\pi^*F$ correspond à un $SL_2(\mathbf{C})$-homorphisme entre deux représentations irréductibles de $SL_2(\mathbf{C})$.

Rappelons qu'un faisceau inversible sur $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ s'écrit

$$O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(a, b) \simeq p_1^*O_{\mathbf{P}_1}(a) \otimes p_2^*O_{\mathbf{P}_1}(b) \quad \text{et que} \quad \pi^*O_{\mathbf{P}_2}(1)) = O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(1, 1)$$

On supposera que $c_1(F) = 0$ ou $c_1(F) = -1$ et on notera $c_1(F) = c_1$. Comme l'action de $SL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}_2$ (resp. $\mathbf{P}_2^\vee$) possède deux orbites $C^\vee$ et $\mathbf{P}_2 \setminus C^\vee$ (resp. $C$ et $\mathbf{P}_2^\vee \setminus C$), il est clair que le support de $S(F)$ est $C$ et que le saut est uniforme (i.e. il existe un entier $n > 0$ tel que $h^0(F_L(-n)) = 1$ pour toute droite $L \in C$).

Soient $x \in \mathbf{P}_1$ et $t_x$ la tangente de $C$ issue du point $\pi(x, x)$. On a, par hypothèse sur l'ordre de saut, $h^0(F_{t_x}(-n)) = 1$; on en déduit que

$$p_{1*}\pi^*F(-n) = O_{\mathbf{P}_1}(-m) \quad \text{avec} \quad m > 0$$

Comme le saut est uniforme, l'homorphisme induit $\pi^*F^\vee(n) \longrightarrow p_1^*O_{\mathbf{P}_1}(m)$ est surjectif. Son noyau est donc un faisceau inversible sur $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$. Un simple calcul de première classe de Chern montre que ce noyau est isomorphe à $O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(2n - m - c_1, 2n - c_1)$. Le fibré $\pi^*F^\vee(n)$ correspond à un élément non nul (car il est non décomposé) de

$$\mathrm{Ext}^1(O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(m, 0), O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(2n - m - c_1, 2n - c_1)) = H^1(O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(2n - 2m - c_1, 2n - c_1))$$

L'homorphisme surjectif $\pi^*F^\vee(n) \longrightarrow p_1^*O_{\mathbf{P}_1}(m)$ induit un homorphisme non nul sur $\mathbf{P}_2$

$$F^\vee(n) \longrightarrow E_{m,C}$$

Comme $E_{1,C} = 2O_{\mathbf{P}_2}$ on a $m \geq 2$ sinon $h^0(F(-n)) \neq 0$ ce qui contredit la stabilité de $F$. Par conséquent les fibrés $F^\vee(n)$ et $E_{m,C}$ sont stables. On en déduit que l'homorphisme est de rang maximal. On a alors $c_1(F^\vee(n)) = 2n - c_1 \leq c_1(E_{m,C}) = m - 1$. Et en particulier $2n - 2m - c_1 - 1 < 0$ d'où l'on déduit par la formule de Kunneth pour les faisceaux [BS]

$$H^1(O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(2n - 2m - c_1, 2n - c_1)) = H^1(O_{\mathbf{P}_1}(2n - 2m - c_1)) \otimes H^0(O_{\mathbf{P}_1}(2n - c_1))$$

et par la dualité de Serre

$$H^1(O_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1}(2n-2m-c_1, 2n-c_1)) = \mathrm{Hom}(H^0(O_{\mathbf{P}_1}(2(m-n-1)+c_1), H^0(O_{\mathbf{P}_1}(2n-c_1)))$$

On note $\alpha_{\pi^*F}$ l'homorphisme (à une constante multiplicative près) correspondant au fibré $\pi^*F$. Soit $\Phi = (\sigma, \sigma)$ un automorphisme de $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$ avec $\sigma \in SL_2(\mathbf{C})$. Le fibré $\Phi^*\pi^*F$ est représenté par l'homorphisme

$$\alpha_{\Phi^*\pi^*F} = \sigma^* \alpha_{\pi^*F} (\sigma^*)^{-1}$$

Par ailleurs, $\Phi^*\pi^*F = \pi^*F$ ce qui prouve que l'homomorphisme $\alpha_{\pi^*F}$ est $SL_2(\mathbf{C})$-invariant. Comme $H^0(O_{\mathbf{P}_1}(r)) \simeq S^r H^0(O_{\mathbf{P}_1}(1))$ est une représentation irréductible de $SL_2(\mathbf{C})$ on en déduit que $2(m-n-1)+c_1 = 2n-c_1$. C'est à dire $c_1(F^\vee(n)) = c_1(E_{m,C})$ et par suite $F^\vee(n) = E_{2n+1-c_1,C}$.

Montrons maintenant que les fibrés de Schwarzenberger de déterminant pair sont déterminés par leur diviseur de droites de saut.

**Théorème 2.4** *Soit $\mathcal{E}$ un fibré de déterminant pair stable de rang deux sur $\mathbf{P}_2$ tel que $S(\mathcal{E}) = nC$ $(n \geq 1)$. Alors $\mathcal{E}$ est un fibré de Schwarzenberger stable de la conique $C$.*

*Remarque.* Si $n$ n'est pas un nombre binômial, la courbe $nC$ n'appartient pas à l'image du morphisme de Barth $M(0, 2n) \longrightarrow \mathbf{P}(H^0(O_{\mathbf{P}_2^\vee}(2n)))$.

**Preuve du théorème 2.4.** On peut supposer que $c_1(\mathcal{E}) = 0$, dans ce cas on montre qu'il existe un entier $m$ tel que $n = m(m-1)/2$ et $\mathcal{E}(m-1) = E_{2m-1,C}$.

On considère le morphisme de Barth qui a un faisceau sans torsion associe sa courbe de droites de saut

$$\gamma : M(0, 2n) \longrightarrow \mathbf{P}(H^0(O_{\mathbf{P}_2^\vee}(2n)))$$

Le Potier a montré que ce morphisme est quasi-fini sur l'ouvert des fibrés vectoriels ([LP2], thm 6.11). On sait par ailleurs que la courbe de droites de saut d'un faisceau sans torsion qui n'est pas localement libre contient une composante linéaire ([Ma], prop.1.8). La fibre $\gamma^{-1}(nC)$, constituée de fibrés vectoriels, est donc finie.

Soit $\sigma \in SL_2(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{Aut}(C^\vee)$; comme $S(\sigma^*\mathcal{E}) = \sigma S(\mathcal{E}) = nC$ on en déduit que $SL_2(\mathbf{C})$ agit sur la fibre $\gamma^{-1}(nC)$. Comme $SL_2(\mathbf{C})$ est connexe cette action est triviale, i.e tous les fibrés de $\gamma^{-1}(nC)$ sont invariants sous l'action de $SL_2(\mathbf{C})$. La proposition 2.3 permet de conclure.

*Pendant la préparation de ce texte, la conjecture de Le Potier, concernant l'injectivité générique du morphisme de Barth pour $c_2 > 4$, a été démontrée par J.Le Potier et A.Tikhomirov [LP-T].*

## References


[Ba1] Barth, W., Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}_n$, Math. Ann.**226** (1977), 125-150.

[Ba2] Barth, W., Moduli of vector bundles on the projective plane, Inv. Math. **42** (1977), 63-91.

[BS] Borel, A., Serre,J.-P., Le théorème de Riemann Roch. Bull. Soc. Math. France,**86** (1958), 97-126.

[Co] Coanda, I., Restriction theorems, J.reine angew.Math.**487**(1997), 1-25.

[G-P] Gruson, L., Peskine, C., Courbes de l'espace projectif, variétés de sécantes, Enumerative geometry, Progress in Math. **24** (1982), 1-33.

[Ha1] Hartshorne, R. Algebraic Geometry, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag 1977.

[Ha2] Hartshorne, R. Stable reflexive sheaves, Math. Ann.**254** (1980), 121-176.

[Hu] Hulek, K., Stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}_2$ with $c_1$ odd, Math. Ann.**264** (1979), 241-266.

[LP1] Le Potier, J., Faisceaux semi-stables et systèmes cohérents, Vector bundles in Algebraic geometry, Cambridge University Press (1995), 179-239.

[LP2] Le Potier, J., Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques, London Math.Soc., Lecture Notes Series 179 (1992), 213-240.

[LP-T] Le Potier, J., Tikhomirov, A., Sur le morphisme de Barth, Preprint 2000, (alg-geom/0003016).

[Ma] Maruyama, M., Singularities of the curve of jumping lines of a vector bundle of rank-2 on $\mathbf{P}_2$, Algebraic Geometry, Proc. of Japan-France Conf (1982), Lectures Notes in Mathematics, vol. **1016** (1983), 370-411.

[Sch1] Schwarzenberger, R.L.E., Vector bundles on the projective plane, Proc. London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.

[Sch2] Schwarzenberger, R.L.E., Reducible Vector bundles on a quadric hypersurface, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58**, (1962), 209-216.

[Tr] Trautmann, K., Poncelet curves and associated theta characteristics, Expo. Math. **6** (1988), 29-64.