THESE DE DOCTORAT de l'Observatoire de Paris

en

Astronomie fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie

Option : **MATHEMATIQUES**

Présentée par : **Jacky CRESSON**

Sujet de la thèse :

Propriétés d'instabilité des systèmes Hamiltoniens proches de systèmes intégrables

Rapporteurs :

Giovanni GALLAVOTTI

Pierre LOCHAK

Soutenue le : 5 décembre 1997

devant le jury composé de :

Alain CHENCINER

Hakane ELIASSON

Ivan KUPKA

Jacques LASKAR

Pierre LOCHAK

Jean-Pierre MARCO (co-directeur)

Charles-Michel MARLE (directeur)

Table des Matières

IV. Perspectives

Introduction

1. Présentation et historique des résultats sur l'instabilité

L'objet de ce mémoire est l'étude des propriétés d'instabilité des systèmes hamiltoniens voisins de systèmes intégrables, de la forme :

$$\mathcal{H}(I,\phi) = h(I) + \epsilon f(I,\phi)$$

où $I \in \mathbf{R}^n$, $\phi \in \mathbf{T}^n$ et $\epsilon > 0$ est un petit paramètre.

Lorsque $\epsilon = 0$ l'espace des phases de ces systèmes est feuilleté en tores lagrangiens invariants. Lorsque $\epsilon \neq 0$, le théorème KAM assure sous une hypothèse de non dégénérescence de h ($\mid \nabla^2 h \mid \neq 0$) la persistence d'une large famille de tores lagrangiens invariants appelés tores de KAM, qui sont de petites déformations des tores initiaux $I = I_0$.

D'autre part, le théorème de Nekhorochev assure la stabilité des variables d'action sur un temps exponentiellement grand.

On se pose alors le problème suivant : est-il possible de trouver une orbite qui dérive suivant les variables d'action, de quelle quantité et en combien de temps.

Deux situations se présentent :

Lorque $n \leq 2$, les tores de KAM disconnectent l'espace des phases et les variables d'action varient très peu sur un temps infini.

Lorsque $n \geq 3$ le complémentaire des tores de KAM est connexe et rien n'interdit une dérive dans les variables d'actions.

En 1964, Arnold donne un exemple pour lequel il peut mettre en évidence une dérive d'ordre 1 dans l'espace des actions. Il formule alors la conjecture suivante : pour f générique, il existe ϵ_0, $\epsilon < \epsilon_0$, tel que pour tous points I' et I" appartenant à la projection dans l'espace des actions du niveau d'énergie $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$, il existe des orbites reliant un voisinage arbitrairement petit du tore $I = I'$ et un voisinage arbitrairement petit de $I = I$".

L'exemple d'Arnold est basé sur la donnée d'une famille finie de tores partiellement hyperboliques (tores de dimension $n-1$ munis de variétés stable et instable de dimension n) $T_1, \ldots, T_N$, dont les variétés stable et instable se coupent transversalement dans une sous-variété d'énergie fixée de $\mathcal{H}$ appelée chaîne. L'hyperbolicité partielle des tores rend difficile la construction des orbites le long de la chaîne. Une hypothèse sur la dynamique autour de ces tores appelée propriété d'obstruction assure l'existence de ces orbites. Une chaîne dont tous les tores vérifient la propriété d'obstruction s'appelle une chaîne de transition.

Les tores hyperboliques proviennent de la destruction de tores résonnants le long d'une surface résonnante de multiplicité 1. Le passage d'un tore à l'autre provoque donc une dérive dans l'espace des actions.

Il semble difficile de démontrer la conjecture d'Arnold à l'aide de ce mécanisme. En effet, les tores hyperboliques s'obtiennent au moyen d'un théorème KAM et leur vecteur fréquence doit donc vérifier une condition diophantienne. Il se crée donc des lacunes dans la famille de tores de largeur $\sqrt{\epsilon}$. Mais la connexion hétérocline entre deux tores hyperboliques ne peut s'effectuer que dans un voisinage exponentiellement petit en ϵ. La construction initiale d'Arnold n'est donc pas générique.

Néanmoins, la comparaison du temps de transition des variables d'actions au temps de stabilité de Nekhorochev peut s'aborder à l'aide de cette construction. De plus, il intervient dans des problèmes de la physique.

Nous appelons domaine d'Arnold l'ensemble des perturbations de systèmes intégrables pour lequelles le mécanisme des chaînes de transition est valable.

L'exemple d'Arnold a donné lieu à une abondante littérature. Nous donnons une revue des résultats obtenus jusqu'à présent, en nous inspirant d'un article de revue de P. Lochak [Lo].

En 1979, Chirikov [Ch] donne un panorama de ses idées sur l'instabilité. Ses raisonnements sont heuristiques et largement influencés par les problèmes de résonance en physique. On y trouve, notamment, l'idée que le temps d'instabilité est lié à la taille du splitting.

Il faut attendre Easton ([Ea1] et [Ea2]) pour trouver des résultats nouveaux sur le mécanisme d'Arnold. Dans une série d'articles, Easton développe des méthodes et des outils pour aborder le difficile problème de l'hyperbolicité partielle des tores. La méthode des fenêtres (qui découle des premiers travaux d'Easton sur les blocs isolants) permet la mise en évidence d'orbites le long d'une chaîne de tores partiellement hyperboliques. Malheureusement, ce travail passe en partie inapercu.

En 1982, Holmes et Marsden [HM] développent, dans un cas particulier, une méthode permettant de détecter l'intersection transverse des variétés stable et instable d'un tore partiellement hyperbolique dans un système hamiltonien à n degrés de liberté. Ce papier contient de nombreuses assertions non démontrées mais touche un public plus large que les travaux d'Easton.

La première synthèse des connaissances sur le mécanisme d'Arnold est effectuée par A. Delshams [De] dans sa thèse. Il discute notamment la généricité de ce mécanisme dans un cadre analytique. Il faut attendre R. Douady[1] [Do] pour obtenir un résultat général de construction de chaîne de transition pour une perturbation C^∞ d'un hamiltonien complétement intégrable. Néanmoins, les méthodes utilisées[2] semblent difficiles à généraliser dans un cadre analytique[3].

En 1990, Lochak [Lo] reprend en partie les idées de Chirikov [Ch] en explicitant complétement le lien supposé entre le splitting des variétés stable et instable des tores et le temps d'instabilité. Il propose aussi, en utilisant la construction d'une chaîne de transition dans un exemple d'Arnold généralisé, de montrer l'optimalité des exposants de stabilité qu'il a obtenus (voir aussi le travail de Pöschel [Po]) pour le théorème de Nekhoroshev.

En 1993, L. Chierchia et G. Gallavotti [CG] étudient la construction de chaînes de transition dans un système initialement hyperbolique. Le résultat principal de cet article

[1] Ce travail fait suite à un premier exemple de difféomorphisme instable décrit par R. Douady et P. LeCalvez [DLeC].

[2] Essentiellement, il utilise des fonctions de classe C^∞ à support compact pour obtenir des tores homoclines transverses et ensuite des chaînes de transition.

[3] Je signale les travaux de Takens [Ta] sur les fonctions plateaux analytique et les théorèmes de passage du différentiable à l'analytique de Broer et Tangerman [BT]. Il convient de noter que même si nous pouvions appliquer ces méthodes, nous n'aurions pas plus d'informations sur la dynamique le long des chaînes dans un cadre analytique.

est la mise au point d'une méthode directe d'estimation du splitting. Cette méthode leur permet notamment de mettre en évience le phénomène des "grands angles homoclines" : dans certaines régions de l'espace des phases et pour certains systèmes hamiltoniens dégénérés le splitting est polynomial[4]. Ils appliquent ce résultat dans le problème de d'Alembert et fournissent ainsi le premier exemple "concret" de système hamiltonien pour lequel il existe une chaîne de transition[5]. La même année, Z. Xia ([Xi1] et [Xi2]) annonce un résultat analogue pour le problème des trois corps restreint elliptique plan et le probleme plan des trois corps.

J. Laskar [La] donne, à l'aide de l'analyse en fréquence, un certain nombre d'indications concernant le comportement des orbites dans les zones d'instabilité. Son travail donnera lieu à une recherche active dans le secteur des accélérateurs de particules et aussi en mathématique par le biais de G. Haller [Ha] et S. Wiggins [HW].

Malgré ces travaux, de nombreuses questions demeurent sans réponse. Lochak [Lo] dresse alors un état des lieux et donne une liste des problèmes à résoudre et des résultats acquis. On entrevoit alors deux voies distinctes pour aborder ces problèmes : l'une géométrique, basée sur l'existence d'objets invariants (ou quasi-invariants) et l'autre variationnelle et donc purement fonctionnelle.

L'une des questions fondamentales est : un tore partiellement hyperbolique, obtenu par perturbation d'un tore résonant le long d'une résonance simple d'un système hamiltonien complètement intégrable, est-il un tore de transition ? La démonstration de cette assertion, absente de l'article original d'Arnold, est effectuée par Marco [Ma] en 1995. Il aborde du même coup l'estimation du temps de dérive le long d'une chaîne de tores dans un système initialement hyperbolique en adaptant la méthode des fenêtres développée par Easton. Il montre notamment que le temps de dérive dans ces systèmes est polynomial, rendant caduques les estimations superexponentielles obtenues par Chierchia et Gallavotti.

Du point de vue variationnel, les premiers résultats concernent l'existence d'orbites homoclines à un tore partiellement hyperbolique dans lesquels s'inscrivent les articles[6] de Bolotin [Bo] et J. Mather [Mat].

En 1995, U. Bessi [Be] développe une méthode variationnelle permettant de prouver l'existence d'orbites d'instabilité dans le système d'Arnold. Il donne aussi une estimation du temps de dérive le long de la chaîne et obtient un temps proche du temps de stabilité de Nekhorochev.

Nous signalons enfin le récent résultat de Chierchia [C2] qui donne le premier exemple d'existence d'une chaîne de transition dans un système hamiltonien proche intégrable non dégénéré[7], ainsi que la jolie démonstration par Paolo Perfetti [Pe] de la persistence de toutes les variétés stables et instables des tores (non résonant) dans l'exemple d'Arnold.

[4]L'exemple proposé par Chierchia-Gallavotti ne vérifie pas cette propriété de grands angles homoclines. Un travail en cours sur ce problème (par J. Cresson, P. Lochak, J.P. Marco et D. Sauzin [CLMS]) montre que le splitting est en fait toujours exponentiellement petit (sauf dans le cas totalement dégénéré étudié par Chierchia [C1]).

[5]Ce résultat est en cours de correction par G. Gallavotti.

[6]Les résultats de Bolotin ont été démontré par H. Eliasson [El] à l'aide de méthodes géométriques.

[7]Ce dernier résultat est en complète contradiction avec un article de M. Rudnev et S. Wiggins [RW2] sur le splitting.

2. Résultats obtenus

Notre travail se situe dans le cadre des méthodes géométriques. Nous avons orienté nos efforts dans trois grandes directions.

La première est de nature qualitative. Nous décrivons l'espace des phases au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique et le long d'une chaîne de tore. Nous démontrons que les tores hyperboliques provenant de la destruction d'un tore résonnant le long d'une surface de résonance quelconque vérifie la propriété d'obstruction (Théorème A). Afin d'obtenir une description plus précise de la dynamique, nous montrons qu'il existe une dynamique symbolique au voisinage d'un tore homocline transverse (Théorème B). Ces résultats nous permettent de déduire l'existence d'orbites le long d'une chaîne (corollaire A) et l'existence d'une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques (Proposition A). On en déduit l'existence d'orbites périodiques de période arbitrairement longue le long de la chaîne (corollaire B), résolvant ainsi une conjecture de Holmes-Marsden [HM].

La deuxième est de nature quantitative. Nous estimons le temps de dérive d'une orbite le long d'une chaîne. Nous éclaircissons le lien entre les différentes données du problème (angle d'intersection, propriété d'ergodisation sur le tore) et le temps calculé. On démontre ainsi que le temps de dérive dans un système hamiltonien initialement hyperbolique est polynomial (théorème C).

La méthode mise au point est général et valable pour une chaîne abstraite, ce qui n'est pas le cas des méthodes variationnelles de U. Bessi [Be]. Nous retrouvons d'ailleurs le résultat obtenu par P. Bernard [B] pour l'exemple d'Arnold en adaptant le méthode de Bessi. Notre démarche doit s'adapter au cas presque-intégrable et nous montrons que cette généralisation doit permettre de dépasser les méthodes variationnelles existantes et d'obtenir l'optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev.

Notre approche est basée sur la résolution d'un problème dynamique appelé *problème de transitivité* (local et global). Celui-ci nous indique comment les intersections transverses des variétés stable et instable des tores hyperboliques se propagent le long de la chaîne. Ce problème est lié à une propriété de dynamique locale des tores de la chaîne appelée *propriété de transfert*, entièrement quantitative. L'outil essentiel que nous introduisons pour résoudre ces questions est le *lemme de transfert*, analogue du lemme d'échange pour les tores hyperboliques.

On montre ensuite, en utilisant la proposition A, que l'estimation du temps de transition peut s'effectuer à l'aide de la chaîne d'orbites périodiques. Avec quelques hypothèses, nous arrivons à obtenir (dans un cas initialement hyperbolique) un temps polynomial. Néanmoins, la mise en oeuvre de cette approche dans des exemples est délicate.

Nous démontrons aussi que la méthode des fenêtres d'Easton telle qu'elle est exposée par J.P. Marco [Ma] s'applique au système d'Arnold. L'idée est que cette méthode fournit un bon moyen de calcul de temps de transport (c'est à dire déplacement d'un volume donné) et pas seulement une estimation du temps de dérive (associé à une orbite particulière).

La dernière se propose d'appliquer l'ensemble de nos résultats à des systèmes issus de la physique. Nous décrivons dans un premier temps une classe de systèmes pour lesquels il existe toujours des chaînes de transition (Théorème D). A cette occasion, nous introduisons un nouveau point de vue sur la construction des chaînes de transition, initialisé par Z. Xia et S. Wiggins, qui nous permet de proposer (au chapitre 4) un nouveau mécanisme d'instabilité suceptible de résoudre le problème des trous dans les chaînes de tores. Notre but est ensuite de montrer qu'une grande classe de ces systèmes contient des problèmes physiques classique (problème restreint elliptique plan des 3 corps, dynamique d'une galaxie elliptique, atome de Rydberg soumis à des champs electrique et magnétique transverses ...).

Ces trois orientations constituent les trois chapitres de cette thèse.

Rappels et théorèmes principaux

1. Topologie et convergence des variétés

1. *Topologie faible ou topologie compacte-ouverte sur* $C^r(M,N)$: Soient M et N deux variétés C^r, on note $C^r(M,N)$ l'ensemble des applications de M dans N de classe C^r.

La topologie *faible* ou C^r *compacte-ouverte* sur $C^r(M,N)$ est engendrée par les ensembles définis comme suit. Soit $f \in C^r(M,N)$. Soit (ϕ, U), (ψ, V) des cartes sur M et N; soit $K \in U$ un ensemble compacte tel que $f(K) \subset V$; soit $0 < \epsilon < \infty$. On définit les voisinages faibles par

$$\mathcal{N}^r(f;(\phi,U),(\psi,V),K,\epsilon)$$

comme l'ensemble des applications de classe C^r, $g : M \mapsto N$, telle que $g(K) \subset V$ et

$$\| D^k(\psi f \phi^{-1})(x) - D^k(\psi g \phi^{-1})(x) \| < \epsilon$$

pour tout $x \in \phi(K)$, $k = 0, \ldots, r$.

2. Soient M une variété de classe C^r, et S et $\widehat{S}$ deux sous-variétés de classe C^r de M avec $r \geq 1$. On note $\pi : S \to M$ et $\hat{\pi} : S \to M$ les inclusions canoniques. On dit que S et $\widehat{S}$ sont ϵ proche en topologie C^r, si il existe un difféomorphisme $h : S \to \hat{S}$ de classe C^r tel que

$$\| \hat{\pi} \circ h - \pi \| < \epsilon$$

3. Soit M une variété de classe C^r et f un difféomorphisme de classe C^r de M avec $r \geq 1$. Soient S et $\widehat{S}$ deux sous-variétés de classe C^r de M, invariante par f. On dit que $f^n(\widehat{S})$ converge vers S en topologie C^r si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $f^n(\widehat{S})$ est ϵ proche en topologie C^r de S.

2. Hyperbolicité normale et conséquences

Nous rappelons les définitions d'un ensemble normalement hyperbolique, de la variété stable (resp. instable) de cet ensemble et de son feuilletage en variété stable (resp. instable) de point associé. Nous énoncons aussi des résultats de persistence de ces ensembles et de leurs feuilletages sous faible perturbation. Nous renvoyons au livre de S. Wiggins [Wi2] pour des résultats plus généraux et le détail des démonstrations.

Soit M une variété différentiable et $f : M \to M$ un difféomorphisme de classe C^1. Un ensemble K est *invariant* par f si $f(K) = K$.

Définition : *Soit* Λ *un ensemble invariant pour un difféomorphisme de classe* C^r *de la variété* M*. On dira que* Λ *est un ensemble normalement hyperbolique*[8] *pour* f *s'il existe*

[8]On retrouve la définition de difféomorphisme *hyperbolique* de la manière suivante: l'ensemble Λ est hyperbolique si la restriction de l'application linéaire tangente Tf à $TM \mid_\Lambda$ est hyperbolique (voir [Y], p.268).

une décomposition en somme directe de la restriction TM_Λ à Λ du fibré tangent à M dont chaque facteur soit stable par Tf :

$$TM_\Lambda = E^s \oplus E^u\,;\, Tf(E^s) \subset E^s\,;\, Tf(E^u) \subset E^u$$

et telle qu'il existe deux constante c et λ, $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, pour que l'on ait :

$$\| Tf^n_{E^s} \| < c\lambda^n \; n > 0$$

$$\| Tf^{-n}_{E^u} \| < c\lambda^n \; n > 0$$

On associe naturellement à un ensemble hyperbolique une variété stable et instable. On commence par définir une notion de *variété stable (resp. instable) associée à un point de l'ensemble.*

Définition : *Soit f un difféomorphisme de M et x un point de M. Posons :*

$$W^s_\epsilon(x,f) = \{y \in M \mid \lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \,\mathrm{et}\, d(f^n(x), f^n(y)) \le \epsilon \,\forall n \ge 0\,\}$$

$$W^s(x,f) = \bigcup_{n\ge 0} f^{-n} W^s_\epsilon(f^n(x))$$

$$W^u_\epsilon(x,f) = \{y \in M \mid \lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \,\mathrm{et}\, d(f^n(x), f^n(y)) \le \epsilon \,\forall n \le 0\,\}$$

$$W^u(x,f) = \bigcup_{n\ge 0} f^{n} W^u_\epsilon(f^{-n}(x))$$

On définit alors les *variétés stable et instable globales* de Λ comme

$$W^s(\Lambda,f) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^s(x,f) \quad W^u(\Lambda,f) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^u(x,f)$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème : *Soit Λ un ensemble hyperbolique invariant pour un difféomorphisme de classe C^r, $r \ge 1$, de la variété M. Il existe un voisinage U de Λ dans M et un voisinage $\mathcal{V}$ de f pour la topologie C^1, tels que, si g appartient à $\mathcal{V}$ il existe un ensemble invariant hyperbolique K pour g, C^r difféomorphe à Λ.*

Ce résultat est important car il nous permettra de montrer (chapitre 3, §.1.1) simplement la persistence des tores hyperboliques[9].

[9]Il faut faire attention ici. Ce que nous allons montrer directement à l'aide du théorème c'est la persistence du tore, mais pas forcemment de ses variétés invariantes. Ce dernier point est delicat et justifie l'utilisation d'une méthode KAM specifique comme celle utilisée par Graff ou Treschev.

Un autre résultat essentiel concerne la persistence des variétés stable et instable et de leur feuilletage en variétés stable et instable des points de l'ensemble. Précisément, nous avons :

Théorème : *Sous les hypothèses précédentes, la variété stable (resp. instable) de K, notée $W^s(K)$ (resp. $W^u(K)$) est C^r difféomorphe à la variété stable (resp. instable) de Λ. De plus, pour tout point $x \in K$, on a $W^s(x, K)$ (resp. $W^u(x, K)$) de classe C^r par rapport à x.*

Nous renvoyons à l'article de revue de J.C. Yoccoz [Y] pour une discussion détaillée de la *dynamique hyperbolique*, et notamment pour une introduction à l'aspect *global* de la théorie par la considération des ensembles récurrents par chaîne et la décomposition spectrale. On consultera aussi le livre de J.Palis et F. Takens [PT] pour une bibliographie exhaustive sur le sujet.

3. Le théorème de Kolmogorov-Arnold et Moser

1. L'étude des hamiltoniens proches de systèmes intégrables nous amène à nous poser la question naturelle suivante: de quelles propriétés des systèmes complètement intégrables les systèmes hamiltoniens voisins héritent-ils ? Par exemple, qu'advient-il des tores invariants par le flot d'un hamiltonien H_0 complètement intégrable sur $T^n \times R^n$ lorsque H_0 est perturbé en un hamiltonien proche dans la C^∞ topologie mais quelconque par ailleurs ?

Ce type de question trouve une réponse dans le théorème des tores invariants de Kolmogorov, Arnold et Moser; ce théorème affirme que, si pour une valeur I_0 des variables d'action, les fréquences $\omega_1(I_0), \ldots, \omega_n(I_0))$ satisfont à une condition diophantienne, et si la matrice hessienne de $H_0 = H_0(I)$ en I_0 est inversible, alors le flot hamiltonien associé à une "petite perturbation" de H_0 est quasi-périodique de mêmes fréquences, sur un tore de dimension n plongé dnas $T^n \times R^n$, invariant par le flot et "proche" du tore $T^n \times \{I_0\}$. Précisément,

Théorème des tores invariants (K.A.M): *Soient H_0 un hamiltonien complètement intégrable sur $T^n \times R^n$ et I_0 un point de R^n. Supposons que H_0 et I_0 vérifient les hypothèses suivantes :*

i) Le vecteur $\omega = \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_1}(I_0), \ldots, \frac{\partial H_0}{\partial I_n}(I_0)\right)$ *satisfait une condition diophantienne faible; c'est à dire, il existe deux constantes $c > 0$ et $\tau \geq n-1$ telles que $\forall\ k \in Z^n \setminus \{0\}$*

$$\mid \sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i \mid \geq c \left(\sum_{i=1}^{n} \mid k_i \mid \right)^{-\tau}$$

ii) La matrice $\left\{ \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}(I_0) \right\}_{1 \leq i,j \leq n}$ *est inversible.*

Alors H_0 possède un voisinage W dans $C^\infty(T^n \times R^n)$ tel que, pour tout hamiltonien H dans W on puisse trouver un tore $\mathcal{T}_H$ de dimension n invariant par le flot hamiltonien de H, en sorte que :

i) $\mathcal{T}_H$ *soit le graphe d'une application* u_H *dans* $C^\infty(Tn \times R^n)$*;*

ii) $\mathcal{T}_H$ *soit une sous-variété lagrangienne de* $T^n \times R^n$*;*

iii) le flot de H *restreint à* $\mathcal{T}_H$ *soit conjugué au flot hamiltonien de* H_0 *restreint à* $T^n \times \{I_0\}$*, i.e. au flot du champ constant* ω *sur* T^n*; plus précisément, il existe un difféomorphisme* $g_H \in Diff^\infty(T^n, 0)$ *tel que, en notant* f_t *le flot hamiltonien de* H *et* $\hat{f}_t = g_H \circ R_{t\omega} \circ g_H^{-1}$*, on ait* $\forall\theta \in T^n$*,*

$$f_t(\theta, u_H(\theta)) = (\hat{f}_t(\theta), u_H \circ \hat{f}_t(\theta)) \ .$$

4. Le théorème de Nekhoroschev

Le problème de la stabilité des variables d'action peut être envisagée sur un temps fini. Précisément, N.N. Nekhoroshev [Ne] a montré le théorème suivant:

Théorème de Nekhoroshev: *Supposons que le hamiltonien* H_0 *satisfait certaines conditions de "raideur"*[10]*. Alors il existe deux constantes* a*,* b *et* ϵ_0 *telles que pour tout* $0 < \epsilon < \epsilon_0$*, toute solution* $I(t)$*,* $\phi(t)$ *du système* $H_0(I) + \epsilon H_1(I, \phi)$ *satisfait*

$$\mid I(t) - I(0) \mid < \epsilon^b$$

pour tout $t \in [0, T]$ *où*

$$T = \frac{1}{\epsilon}\exp(\frac{1}{\epsilon^a})$$

Plus tard, Lochak [Lo] a démontré que dans le cas où H_0 est convexe (ou quasi-convexe) les exposants a et b peuvent être pris égaux à $1/2n$, où n est le nombre de degrés de liberté du hamiltonien. Son approche, entièrement nouvelle, lui permet de conjecturer (de nombreuses indications à l'appuis) que le résultat de stabilité ainsi obtenu est optimal. Plus tard, J. Poschel [Po], en utilisant le schèma originale de Nekhoroshev, obtiendra un résultat analogue.

Lochak obtient de plus un théorème de stabilité en temps exponentiellement long au voisinage d'une résonance de multiplicité $d = 1, \ldots, n-1$ avec les exposants améliorés $a = b = 1/2(n-d)$.

5. Tores hyperboliques, chaîne de transition et propriété d'obstruction

1. Les variétés symplectiques considérées seront de dimension $2m + 2k$, les tores invariants seront de dimension m, et leurs variétés stables et instables seront de dimension $m + k$. On parlera alors de *tores partiellement hyperboliques*[11].

[10] Nous renvoyons aux travaux de Y.S. Il'yashenko [Il] pour une caractérisation (algébrique) de la *raideur*.

[11] Il faut noter que ces objets ne subsistent pas forcemment sous faible perturbation, en opposition avec les objets normalement hyperboliques.

Plus précisément, ces tores proviennent de la destruction de tores résonnants d'un système hamiltonien complètement intégrable. Le résultat de Treshchev [Tr] (ou Graff [Gr] dans un cas non dégénéré) formule cette assertion de facon rigoureuse.

Soit $H(I,\phi,\epsilon)=H_0(I)+\epsilon H_1(I,\phi)$, $\omega=(\partial H_0/\partial I)(I_0)$ tel que $\langle\omega,k\rangle=0$ avec $k\in g$ où g est un sousgroupe nontrivial de Z^n de rang l, K une matrice de vecteurs τ engendrant g (c'est à dire $K^t\omega=0$) et K_* une matrice formée de vecteurs τ_* unimodulaires complétant la base engendrée par les vecteurs τ dans Z^n, et $\Pi=(\partial^2 H_0/\partial I^2)(I_0)$, alors :

Théorème K.A.M. hyperbolique : *Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

i) La matrice Π *est non-dégénérée ;*

ii) Les valeurs propres de $VK^t\Pi K$ *sont positives ou nulles ;*

iii) Le vecteur $\omega^*=K_*^t\omega$ *est tel que pour tout* $0\neq\nu\in Z^n$ *on a* $\mid\langle\omega^*,\nu\rangle\mid\geq c\mid\nu\mid^{-m}$, $\mid\nu\mid=\sum_{k=1}^{n}\mid\nu_k\mid$, $c,m>0$ *;*

Alors pour tout $\epsilon\geq 0$ *il existe une famille de tores invariants de dimension* m $T^m_{I_0}(\epsilon)$ *du système initial de fréquence* ω^*.

De plus, il existe un changement de variables canonique et analytique tel que le hamiltonien s'écrive :

$$\langle\omega^*,\rho\rangle+\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}\langle\rho,\Gamma(\sqrt{\epsilon})\rho\rangle+\sqrt{\epsilon}\langle s,\Omega(\theta,\sqrt{\epsilon})u\rangle+\sqrt{\epsilon}\hat{g}(\theta,\rho,s,u,\sqrt{\epsilon})+\epsilon g(\theta,\rho,s,u,\sqrt{\epsilon})$$

où $\hat{g}=O_3(s,u)$ *et* $g=O_3(\rho,s,u)$.

Les tores $T^m_{I_0}(\epsilon)$ *sont alors définis par* $\{(\rho,\theta,s,u)\ \mid\ \rho=s=u=0\ \}$.

Les variétés stable et instable possèdent une *paramétrisation* de la forme:

$$\begin{array}{rcl} p_s:(a,s) & \to & (x=a+N_s(a,s,\epsilon),y=M_s(a,s,\epsilon),s,u=Z(a,s,\epsilon)) \\ p_u:(b,u) & \to & (x=b+N_u(b,u,\epsilon),y=M_u(b,u,\epsilon),s=W(b,u,\epsilon),u) \end{array}$$

où N_s, M_s, Z (resp. N_u, M_u, W) sont des fonctions analytiques en a et s (resp. b, u) s'annullant en $s=0$ (resp. $u=0$).

De plus, le flot sur les variétés est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \dot{a} & = & \omega \\ \dot{s} & = & \sqrt{\epsilon}\Phi(a,s,\epsilon)s \end{array}$$

et $\mathrm{Re}\langle\gamma,\Phi\bar{\gamma}\rangle\geq\mu\mid\gamma\mid^2$, $\mu>0$ pour tout $\gamma\in\mathbf{C}^l$.

Nous signalons les travaux de Chierchia-Gallavotti [CG], Rudnev-Wiggins [RW], de la Llave et Wayne [LW], Zhender [Ze], et Niederman [Ni], qui donnent des améliorations du théorème précédent.

2. Soient M une variété symplectique et H un hamiltonien sur M. On suppose que le système X_H défini par H possède un tore invariant partiellement hyperbolique T, contenu dans un niveau régulier $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$, on dira que T possède la *propriété d'obstruction* lorsque toute sous-variété V de $\mathcal{H}$ invariante pour X_H et intersectant transversalement dans $\mathcal{H}$ la sous-variété stable $W^s(T)$ vérifie $W^u(T) \subset \bar{V}$.

3. On appellera *chaîne de transition* pour le système (M, H) une famille finie $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ de tores invariants partiellement hyperboliques, contenus dans une même sous-variété $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$, telle que chaque tore possède la propriété d'obstruction, et telle que $W^u(T_i)$ coupe transversalement dans $\mathcal{H}$ la variétée $W^s(T_{i+1})$, pour $1 \leq i \leq n-1$. Compte tenu des dimensions, $W^u(T_i) \cap W^s(T_{i+1})$ est alors une union d'orbites hétéroclines isolées.

4. Si $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une chaîne de transition, et si U_1 et U_n sont des voisinages arbitraires (dans $\mathcal{H}$) des tores extrêmes T_1 et T_n, l'ensemble des orbites intersectant les deux voisinages U_1 et U_n est un ouvert de l'espace des orbites du système X_H restreint à $\mathcal{H}$. En effet, la sous variété $W^u(T_i)$ est invariante par le flot, et coupe transversalement $W^s(T_{i+1})$, donc $W^u(T_{i+1}) \subset \overline{W^u(T_i)}$ pour tout i. Une récurrence immédiate montre alors que $W^u(T_{i+1}) \subset \overline{W^u(T_1)}$, et l'orbite de tout point p de $W^u(T_1) \cap U_1$ coupe à la fois U_1 et U_n. L'ensemble de ces orbites de transition est donc non vide, et il est ouvert par les théorèmes classiques de dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales.

Une chaîne de transition

6. Temps d'ergodisation

Soit ω un vecteur unitaire (noté $\omega \in S^{n-1}$), le flot linéaire sur le tore T^n noté $\omega_t : T^n \to T^n$ est donné par $\omega_t(\theta) = \theta + t\omega$.

Soit $B_R(\theta)$ une boule de rayon R centrée en θ, on dit que ω ergodise T^n à l'approximation R après un temps T si

$$\bigcup_{0 \leq t \leq T} \omega_t(B_R(\theta)) = T^n$$

pour tout $\theta \in T^n$.

Soit ω un vecteur satisfaisant une condition diophantienne, précisément, pour $\tau > n/2$ et $C > 0$, on considère l'ensemble :

$$\mathcal{D}(\tau,\gamma) = \left\{ \omega \in S^{n-1} \ \mid \ \mid \omega.k \mid > \frac{\gamma}{\parallel k \parallel^{\tau}}, \ \forall \ k \in Z^n \setminus \{0\} \ \right\}$$

où $\parallel \ . \ \parallel$ est la norme euclidienne. Nous avons alors le théorème suivant dû à S. Dumas [Du]:

Temps d'ergodisation: *Soit $0 < R \leq 1$, et $\omega \in \mathcal{D}(\tau,\gamma)$, le flot linéaire sur T^n de vecteur fréquence ω ergodise T^n à l'approximation R après un temps T, où*

$$T = \frac{2C}{\gamma \pi R^a}$$

avec $a = \tau + n/2$ et C une constante.

L'exposant optimal $a = \tau$ a recemment été obtenu par J. Bourgain, F. Golse et B. Weinberg [BGW]. Le temps d'ergodisation peut encore se calculer dans le cas d'une condition diophantienne tronquée [Du].

Dynamique autour d'un tore partiellement hyperbolique et le long d'une chaîne

1. Dynamique autour d'un tore hyperbolique

L'article initial d'Arnold [Ar] présente des idées permettant de montrer l'existence d'orbites d'instabilité. Certains points de sa démonstration sont énoncés sans preuve. Notamment, il ne démontre pas que les tores partiellement hyperboliques qu'il construit possèdent la propriété d'obstruction. Il donne simplement une idée de la démonstration sur un tore "simple".

En 1996, Marco [Ma] montre que les tores partiellement hyperboliques au voisinage d'une résonance simple possèdent la propriété d'obstruction. Sa démonstration est basée sur un λ-lemme adapté. Un travail moins général est effectué par Perfetti [Pe] pour les tores partiellement hyperboliques du système d'Arnold en utilisant une idée de Chierchia-Gallavotti [CG].

Les études précédentes ne s'appliquent pas au problème de la transition entre surfaces de résonance simple. Le but de cette section est de combler cette lacune : nous avons étendu le λ-lemme de Marco au cas des tores hyperboliques le long de surfaces de résonance quelconque. On en déduit sans peine que ces tores vérifient aussi la propriété d'obstruction.

Dans le §.1 nous énoncons la propriété d'obstruction pour des difféomorphismes. Le §.2 donne une démonstration d'un λ-lemme pour un difféomorphisme possèdant un tore invariant normalement hyperbolique, nous corrigeons à cette occasion un précédent travail de Wiggins [Wi]. Nous démontrons au §.3 un λ-lemme pour un difféomorphisme possèdant un tore invariant partiellement hyperbolique. Le §.4 étend ce lemme aux champs de vecteurs hamiltoniens. Nous démontrons enfin la propriété d'obstruction pour un tore partiellement hyperbolique provenant de la destruction d'un tore résonnant le long d'une surface de résonance multiple.

1.1. La propriété d'obstruction

La preuve de l'existence d'orbites de transition le long d'une chaîne utilise habituellement la *propriété d'obstruction* introduite par Arnold [Ar].

1. Soit M une variété symplectique et H un hamiltonien sur M. On suppose que le système X_H défini par H possède un tore invariant partiellement hyperbolique T, contenu dans un niveau régulier $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$.

Un tore T satisfait cette propriété si pour toute sous variété Δ de $\mathcal{H}$, transverse à $W^s(T)$ et invariante par X_H, on a l'inclusion

$$W^u(T) \subset \bar{\Delta} .$$

2. Soit $\mathcal{S}$ une variété et f un difféomorphisme de classe C^r ($r \geq 2$) admettant Θ comme tore invariant partiellement hyperbolique. On note $W^s(\Theta)$ (resp. $W^u(\Theta)$) la variété stable (resp. instable) du tore Θ.

Pour toute sous-variété Δ de $\mathcal{O}$ intersectant $W^s(\Theta)$ transversalement dans $\mathcal{S}$, tout *point $b \in W^u(\Theta)$ et tout voisinage ouvert $\mathcal{B}$ de b dans $\mathcal{S}$, il existe un entier n tel que $f^n(\Delta)$ intersecte $\mathcal{B}$.*

Remarque: Il convient de noter que les difféomorphismes considérés ne sont pas forcemment symplectiques. De même, il est possible de donner une définition de la propriété d'obstruction pour des champs de vecteurs généraux (voir par exemple Arnold-Avez [AV], §.23.3, p.93).

1.2. Le λ-lemme pour un tore normalement hyperbolique

S. Wiggins [Wi] a démontré un λ-lemme pour des tores normalement hyperboliques. La démonstration suit dans les grandes lignes celle de J. Palis [Pa] pour un point fixe -hyperbolique. Néanmoins, il faut prendre en compte le comportement des variables angulaires (appellées variables neutres dans [Wi]). Il impose alors une condition d'inclinaison (cond. 3.4.8. p.325) sur les variétés relevantes de ce λ-lemme.

Ce λ-lemme est ensuite utilisé pour démontrer un analogue du théorème de Smale-Birkhoff pour des tores hyperboliques. La démonstration utilise le fait que *toute* variété transverse à la variété stable du tore converge en topologie C^1 compacte ouverte vers la variété instable du tore. Or, la condition d'inclinaison introduite par [Wi] dans les hypothèses du λ-lemme rend cette démonstration incomplète.

Nous démontrons ici le λ-lemme sans cette condition de cône, comblant ainsi une lacune de la démonstration initiale de Wiggins [Wi].

Soient $x \in \mathbf{T^n}$ et $M(x)$ une matrice $m \times m$. On note $\mid . \mid$ une norme quelconque sur l'espace des matrices carrées $m \times m$ et

$$\parallel M(x) \parallel = \sup_{x \in \mathbf{T}^l} \mid M(x) \mid$$

Soit M une variété C^∞ de dimension N et f un difféomorphisme de classe C^r $(r \geq 2)$ de M.

Soit $\mathcal{T}$ un tore normalement hyperbolique de dimension l invariant par f. On suppose que $\mathcal{T}$ possède des variétés stable et instable de dimension $l+n$ et $l+m$ respectivement, avec $l+m+n=N$.

ll existe un système de coordonnées[12] dans lequel f prend la forme suivante dans un voisinage $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$:

$$f(s,u,\theta) = (A(\theta)s, B(\theta)u, 0) + g(s,u,\theta)$$

où $(s,u,\theta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^l$, $g(s,u,\theta) = (g_s(s,u,\theta), g_u(s,u,\theta), g_\theta(\theta))$, $A(\theta)$ est une matrice $n \times n$, $B(\theta)$ est une matrice $m \times m$, et

i) on a $g_s(0,0,\theta) = g_u(0,0,\theta) = 0$

ii) $g_s(0,u,\theta) = 0$

[12] Ce résultat n'est pas évident. Il est démontré par Wiggins en utilisant les travaux de A.M. Salmoilenko [Sa] et Sell [Se].

iii) $g_u(s,0,\theta)=0$

iv) $\| A(\theta) \| \leq \lambda < 1$, $\| B^{-1}(\theta) \| \leq \lambda < 1$, et $\| A(\theta) \| < \| g_\theta(\theta) \| < \| B(\theta) \|$

Nous avons alors le résultat suivant, annoncé par Wiggins [Wi] :

Lemme 1 *Soit f un difféomorphisme de classe C^2 d'une variété et $\mathcal{T}$ un tore normalement hyperbolique de f. Si Δ est une variété de même dimension que $W^u(\mathcal{T})$, transverse à $W^s(\mathcal{T})$, alors les itérées $f^l(\Delta)$ tendent, lorsque l tend vers $+\infty$, vers la variété instable $W^u(\mathcal{T})$ dans la topologie C^1 compacte ouverte.*

Démonstration :

a) Quelques inégalités : Soit $k \in [0,1[$. Comme $g(0,0,\theta)=0$ pour tout $\theta \in \mathbf{T}^m$, on a par continuité, en choisissant le voisinage $\mathcal{B}$ assez petit

$$\| Dg \| \leq k \ . \tag{$h1$}$$

On peut de plus choisir k assez petit pour que

$$\mu = \frac{\lambda + k}{\lambda^{-1} - 2k} < 1 \tag{$h2$}$$

et

$$\lambda(1+2k) < 1 \ .$$

Nous pouvons aussi supposer $\mathcal{B}$ assez petit pour que pour tout point $p=(s,u,\theta) \in \mathcal{B}$, on ait :

$$\mid g_s(p) \mid < k_1 \mid p' \mid \tag{$h3$}$$

où $p'=(s,u)$ et $k_1 > 0$ vérifie

$$k_1 + \lambda \leq \mu \ .$$

De plus, comme la dérivée partielle $\partial_u g_s$ est d'ordre au moins un en (s,u), il existe une constante $K \geq 0$ tel que pour tout $p=(s,u,\theta) \in B$, on ait

$$\| \partial_u g_s(p) \| \leq K \mid p' \mid \ . \tag{$h4$}$$

b) Comportement des vecteurs tangents à Δ par itération le long de $W^s(\mathcal{T})$:

Notons p le point d'intersection de Δ et $W^s(\mathcal{T})$. Soit v_0 un vecteur tangent à Δ en p. On note v_0 suivant la décomposition du fibré tangent à M le long de $\mathcal{T}$ comme $(v_0^s, v_0^u, v_0^\theta)$, et les itérés de v_0 par l'application linéaire tangente Df par $Df^n(v_0^s, v_0^u, v_0^\theta) = (v_n^s, v_n^u, v_n^\theta)$, où Df s'écrit

$$D_q f = \begin{pmatrix} A(\theta) + \partial_s g_s & \partial_u g_s & \partial\theta g_s + \partial_\theta A s \\ \partial_s g_u & B(\theta) + \partial_u g_u & \partial\theta g_u + \partial_\theta B u \\ 0 & 0 & \partial_\theta g_\theta \end{pmatrix} (q) \ .$$

Comme p appartient à $W^s(\mathcal{T})$, nous avons

$$\partial_s g_u(s,0,\theta) = \partial_\theta g_u(s,0,\theta) = 0 \ ,$$

ce qui nous donne la matrice Jacobienne suivante

$$D_p f = \begin{pmatrix} A(\theta)+\partial_s g_s & \partial_u g_s & \partial_\theta g_s + \partial_\theta A s \\ 0 & B(\theta)+\partial_u g_u & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\theta g_\theta \end{pmatrix} (p) \ .$$

Nous obtenons les relations de récurrence suivantes sur les v_n:

$$\left| \begin{array}{lcl} v_{n+1}^s & = & (A(\theta)+\partial_s g_s)v_n^s + \partial_u g_s v_n^u + (\partial_\theta g_s + \partial_\theta A s)v_n^\theta \\ v_{n+1}^u & = & (B(\theta)+\partial_u g_u)v_n^u \\ v_{n+1}^\theta & = & \partial_\theta g_\theta v_n^\theta \end{array} \right. ,$$

ce qui nous donne, en utilisant les inégalités (h1) et iv) :

$$\left| \begin{array}{lcl} \mid v_{n+1}^s \mid & \leq & (\lambda+k) \mid v_n^s \mid + \mid \partial_u g_s \mid\mid v_n^u \mid + k \mid v_n^\theta \mid \\ \mid v_{n+1}^u \mid & \leq & (\lambda^{-1}-k) \mid v_n^u \mid \\ \mid v_{n+1}^\theta \mid & \leq & k \mid v_n^\theta \mid \end{array} \right. .$$

Nous avons donc,

$$\left| \begin{array}{lcl} \dfrac{\mid v_{n+1}^s \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} & \leq & \dfrac{\lambda}{\lambda^{-1}-k}\dfrac{\mid v_n^s \mid}{\mid v_n^u \mid} + \dfrac{1}{\lambda^{-1}-k}\left(\mid \partial_u g_s(p_n) \mid + k\dfrac{\mid v_n^\theta \mid}{\mid v_n^u \mid} \right) \\ \dfrac{\mid v_{n+1}^\theta \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} & \leq & \dfrac{k}{\lambda^{-1}-k}\dfrac{\mid v_n^\theta \mid}{\mid v_n^u \mid} \end{array} \right. .$$

La seconde inégalité nous donne par une récurrence immédiate

$$\frac{\mid v_{n+1}^\theta \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} \leq \left(\frac{k}{\lambda^{-1}-k} \right)^n \frac{\mid v_0^\theta \mid}{\mid v_0^u \mid} \ .$$

L'inégalité (h2) implique

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mid v_{n+1}^\theta \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} = 0 \ .$$

On en déduit

$$\frac{\mid v_{n+1}^s \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} \leq \mu \frac{\mid v_n^s \mid}{\mid v_n^u \mid} + \frac{1}{\lambda^{-1}-k}\left(\mid \partial_u g_s(p_n) \mid + \mu^n \frac{\mid v_0^\theta \mid}{\mid v_0^u \mid} \right) \ .$$

Soit $p_n = (s_n, 0, \theta_n)$ un point de $W^s(\mathcal{T})$. On a

$$s_{n+1} = A(\theta)s_n + g_s(p_n) \ .$$

On en déduit, d'après l'hypothèse (h3)

$$\mid g_s(p_n) \mid < k_1 \mid s_n \mid \ ,$$

soit $\mid s_{n+1} \mid < \mu \mid s_n \mid$, et

$$\mid s_{n+1} \mid < \mu^n \mid s_0 \mid \ .$$

L'inégalité (h4) nous permet alors d'écrire

$$\mid \partial_u g_s(p_n) \mid < K\mu^n \ .$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{\mid v^s_{n+1} \mid}{\mid v^u_{n+1} \mid} \leq \mu \frac{\mid v^s_n \mid}{\mid v^u_n \mid} + \frac{\mu^n}{\lambda^{-1} - k}\left(K + \frac{\mid v^\theta_0 \mid}{\mid v^u_0 \mid}\right) \ .$$

On en déduit

$$\frac{\mid v^s_{n+1} \mid}{\mid v^u_{n+1} \mid} \leq \mu^n \left(\frac{\mid v^s_0 \mid}{\mid v^u_0 \mid} + (n+1)K'\right) \ ,$$

où

$$K' = \frac{K + \frac{\mid v^\theta_0 \mid}{\mid v^u_0 \mid}}{\lambda^{-1} - k} \ .$$

Comme $\mu < 1$, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mid v^s_n \mid}{\mid v^u_n \mid} = 0$.

c) Extension à un voisinage de p: Soit $\epsilon > 0$ fixé. On note que si $q \in W^u(\mathcal{T})$, alors

$$\partial_u g_s(q) = 0, \ \partial_\theta g_s(q) = 0 \ .$$

Pour $\delta \in]0, \epsilon[$, on peut trouver par continuité un voisinage $\mathcal{W}_\nu$, $\nu > 0$, de la variété instable dans $\mathcal{B}$, de la forme

$$\mathcal{W}_\nu = \{p \in B \ \mid \mathrm{d}(p, W^u(\mathcal{T})) < \nu \ \} \ ,$$

tel que

$$\parallel \partial_u g_s(p) \parallel \leq \delta, \ \parallel \partial_\theta g_s(p) \parallel \leq \delta \ . \tag{1}$$

On appellera *inclinaison* d'un vecteur $v = (v^\theta, v^\rho, v^s, v^u)$ un vecteur, la quantité $\mathcal{I}(v)$

$$\mathcal{I}(v) = \frac{\sup(\mid v_\theta \mid, \mid v_s \mid)}{\mid v_u \mid} \ .$$

Le vecteur unitaire v_0 peut être choisi comme ayant la plus grande inclinaison des vecteurs unitaires de $(T\Delta)_p$. Le point précédent nous assure l'existence d'un N, tel que pour $n \geq N$, tout vecteur non nul de $(T\Delta_n)_{p_n}$, a une inclinaison $\mathcal{I}(v) \leq \epsilon/4$ lorsque $p_n \in \mathcal{W}$. Par continuité du plan tangent à Δ_n, il existe une sous-variété plongée dans Δ_n, notée $\widehat{\Delta}$, telle que $\widehat{\Delta} \cap W^u(\mathcal{T}) = p_n$ et l'inclinaison de tout vecteur unité v de $(T\widehat{\Delta})_p$, $p \in \mathcal{W}$, vérifie

$$\mathcal{I}(v) \leq \epsilon/2 \ . \tag{2}$$

On choisi ν assez petit afin d'assurer

$$\delta = \frac{1-\lambda(2k+\lambda)}{2\lambda(1+\epsilon/2)}\epsilon \ . \tag{3}$$

Soit $v = (v^s, v^u, v^\theta)$ un vecteur de $T_q\widehat{\Delta}$, $q \in \widehat{\Delta}$. La Jacobienne de f le long de $\widehat{\Delta}$ est donnée par

$$Df(q) = \begin{pmatrix} A(\theta) + \partial_s g_s & \partial_u g_s & \partial_\theta A(\theta)s + \partial_\theta g_s \\ \partial_s g_u & B(\theta) + \partial_u g_u & \partial_\theta B(\theta)u + \partial_\theta g_u \\ 0 & 0 & \partial_\theta g_\theta \end{pmatrix}(q) \ .$$

Nous obtenons donc les relations de récurrence suivantes,

$$\left| \begin{array}{lcl} v^s_{n+1} & = & (A(\theta) + \partial_s g_s)v^s_n + \partial_u g_s v^u_n + (\partial_\theta g_s + \partial_\theta A s)v^\theta_n \\ v^u_{n+1} & = & \partial_s g_u v^s_n + (B(\theta) + \partial_u g_u)v^u_n + (\partial_\theta B(\theta)u + \partial_\theta g_u)v^\theta_n \\ v^\theta_{n+1} & = & \partial_\theta g_\theta v^\theta_n \end{array} \right. \ .$$

A l'aide des inégalités iv) et (h1), on a

$$\left| \begin{array}{lcl} | v^s_{n+1} | & \leq & (\lambda + k) \mid v^s_n \mid + \delta \mid v^u_n \mid + \delta \mid v^\theta_n \mid \\ | v^u_{n+1} | & \geq & -k \mid v^s_n \mid + (\lambda^{-1} - k) \mid v^u_n \mid - k \mid v^\theta_n \mid \\ | v^\theta_{n+1} | & \leq & k \mid v^\theta_n \mid \end{array} \right. \ .$$

On en déduit

$$\frac{| v^s_{n+1} |}{| v^u_{n+1} |} \leq \frac{(\lambda + k)\frac{| v^s_n |}{| v^u_n |} + \delta(1 + \frac{| v^\theta_n |}{| v^u_n |})}{(\lambda^{-1} - k) - k\left(\frac{| v^\theta_n |}{| v^u_n |} + \frac{| v^s_n |}{| v^u_n |}\right)} \ .$$

D'où, en utilisant (2),

$$\frac{| v^s_{n+1} |}{| v^u_{n+1} |} \leq \frac{(\lambda + k)\frac{| v^s_n |}{| v^u_n |} + \delta(1 + \frac{\epsilon}{2})}{(\lambda^{-1} - k) - k\epsilon} \ ,$$

soit,

$$\frac{| v^s_{n+1} |}{| v^u_{n+1} |} \leq \left(\frac{\lambda + k}{\lambda^{-1} - k(1+\epsilon)}\right)\frac{| v^s_n |}{| v^u_n |} + \frac{\delta(1 + \frac{\epsilon}{2})}{\lambda^{-1} - k(1+\epsilon)} \ .$$

Posons $\beta = \dfrac{\lambda + k}{\lambda^{-1} - k(1+\epsilon)}$ et $\gamma = \dfrac{\delta(1 + \frac{\epsilon}{2})}{\lambda^{-1} - k(1+\epsilon)}$. On a donc par récurrence,

$$\frac{| v^s_n |}{| v^u_n |} \leq \beta^n \frac{| v^s_0 |}{| v^u_0 |} + \gamma\frac{1}{1-\beta} \ .$$

Comme $\beta < 1$ d'après (h2) et $\dfrac{\gamma}{1-\beta} = \dfrac{\epsilon}{2}$ d'après (3), on a, pour n assez grand

$$\frac{\mid v_n^s \mid}{\mid v_n^u \mid} \leq \epsilon \ .$$

d) Dilatation le long de $W^u(\mathcal{T})$: On étudie le rapport des vecteurs tangents à Δ_n dans la direction normale à $\mathcal{T}$. Nous avons

$$\sqrt{\frac{\mid v_{n+1}^s \mid^2 + \mid v_{n+1}^u \mid^2}{\mid v_n^s \mid^2 + \mid v_n^u \mid^2}} = \frac{\mid v_{n+1}^u \mid}{\mid v_n^u \mid}\sqrt{\frac{1+\epsilon^2}{1+\epsilon^2}} \ .$$

Comme $\epsilon > 0$ peut être choisi aussi petit que l'on veut, et

$$\frac{\mid v_{n+1}^u \mid}{\mid v_n^u \mid} \geq \lambda^{-1} - k(1+2\epsilon) \ ,$$

on voit que la norme des itérés des vecteurs tangents à $f^n(\widehat{\Delta})$ dans la direction normale à $\mathcal{T}$ se dilate d'un facteur $\lambda^{-1} - k > 1$.

Ceci achève la démonstration du λ-lemme. $\square$

Remarque :

Comme signalé dans l'introduction, ce lemme nous permet de compléter la démonstration du théorème de Smale-Birkhoff pour les tores normalement hyperboliques proposée par S. Wiggins [Wi].

On suppose que les variétés stable et instable du tore $\mathcal{T}$ précédent se coupent transversalement suivant un tore τ de dimension l. Nous avons alors le résultat suivant :

Soit $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$, $N \geq 2$, on note $\Sigma = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}$. Soit $s \in \Sigma$, $s = (\ldots, s_{-1}, s_0, s_1, \ldots)$, on note $[s]_i = s_i$. On définit le shift à N symboles comme l'application $\sigma : \Sigma \mapsto \Sigma$ telle que

$$[\sigma(s)]_i = s_{i+1}$$

Théorème : *Il existe un voisinage de τ tel que f^n possède un ensemble invariant hyperbolique Λ topologiquement équivalent à un produit d'un Cantor par un tore, pour un $n \geq 1$. De plus, il existe un homéomorphisme ϕ, tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \overset{f}{\longmapsto} & \Lambda \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Sigma & \overset{\sigma}{\longmapsto} & \Sigma \end{array}$$

Nous démontrerons dans la partie 2 un résultat analogue pour les tores partiellement hyperboliques.

1.3. Le λ-lemme pour des tores partiellement hyperboliques

On note $V = T^m \times R^m \times R^d \times R^d$. On notera (θ, ρ, s, u) les coordonnées sur V.

Difféomorphisme d-hyperbolique modèle : Soit f un difféomorphisme analytique de V et Θ un tore partiellement hyperbolique invariant par f.

On suppose que f a la forme suivante dans un voisinage $\mathcal{O}$ de Θ :

$$f(\theta, \rho, s, u) = (\theta + v(\rho), \rho, ks, lu) + r(\theta, \rho, s, u) \tag{4}$$

où $k\sigma = k_1 s_1, \ldots, k_d s_d$, $lu = l_1 u_1, \ldots l_d u_d$ et v et $r = (r_\theta, r_\rho, r_s, r_u)$ sont définies et analytiques dans $\mathcal{O}$, et vérifient les conditions suivantes:

(i) $k_i < 1$ et $l_i = k_i^{-1} > 1$ pour $i = 1 \ldots d$

(ii) r est d'ordre au moins 2 en (ρ, s, u)

(iii) $r_\rho = 0$ et $r_s = 0$ dans $\{\rho = 0, s = 0\} \cap \mathcal{O}$

(iv) $r_\rho = 0$, $r_u = 0$ dans $\{\rho = 0, u = 0\} \cap \mathcal{O}$

(v) $r_\theta = 0$ dans $W^s(\Theta) \cup W^u(\Theta)$

(vi) $\mid \partial_\rho v \mid < 1$, où $\mid \ . \mid$ est la norme uniforme dans $\mathcal{O}$

(vii) si $\alpha > 0$ est fixé, $\sup\{\| \partial^2_{uv} r_w(p) \|,\ p \in \mathcal{O}\} < \alpha$ où $v \in \{\rho, s\}$ et $w \in \{\theta, \rho, s\}$

Le tore Θ a pour équation $(\rho = 0, s = u = 0)$. On note E^s (resp. E^u) le sous-espace $(\rho = 0, u = 0)$ (resp. $(\rho = 0, s = 0)$).

On note $\hat{d}$ la distance produit usuelle sur V^{2m+2d}, $\mathcal{V}_\nu = \{p \in V^{2m+2k} \mid \hat{d}(p, \Theta) < \nu\}$. On appelle *paramétrisation normale* d'une variété de dimension k une paramétrisation ζ telle que :

$$\zeta :] - \widehat{u_1}, \widehat{u_1}[\times \ldots \times] - \widehat{u_d}, \widehat{u_d}[\to \ \mathcal{V}_\nu, \quad u \to (\zeta^\theta, \zeta^\rho, \zeta^s, u) \ .$$

Soit $v = (v^\theta, v^\rho, v^s, v^u)$ un vecteur, on note $\mathcal{I}(v)$ la quantité

$$\mathcal{I}(v) = \frac{\sup(\mid v_\theta \mid, \mid v_\rho \mid, \mid v_s \mid)}{\mid v_u \mid} \ .$$

Soit Δ une variété de dimension d qui intersecte transversalement $W^s(\Theta)$ dans $\mathcal{O}$. On appelle *inclinaison* de Δ le nombre réel :

$$\mathcal{D}(\Delta) = \mathrm{Sup}\{\ \mathcal{I}(v);\ v \in T_p(\Delta),\ p \in \Delta\ \} \ .$$

On dit que la variété V de dimension d est *adaptée* à $\mathcal{V}_\nu$ si on peut trouver une paramétrisation normale ζ définie sur $] - \nu, \nu[^d$. Dans ce cas, on dit que Δ est δ *redressée* si $\mathcal{D}(\Delta) < \delta$.

On appelle $\mathcal{C}(\nu)$ l'ensemble des variétés de dimension d Δ telles que, $\Delta \cap W^s(\Theta) = p$, $p \in V_\nu$, Δ intersecte transversalement le sous-espace $\{(\theta, \rho, s, u) \mid u = 0\}$ dans $\mathcal{O}$ et chaque vecteur tangent $v = (v_\rho, v_\theta, v_s, v_u)$ de $T_p\Delta$ satisfait la condition de redressement :

$$\frac{\mid v^\rho \mid}{\mid v^u \mid} < 1 \; . \tag{R}$$

Lemme 2 (λ-lemme faible) *Soit f le diffeomorphisme analytique modèle, définit dans un voisinage $\mathcal{V}_\nu$ de Θ et $\mu > 0$ donné, il existe $\nu_0 \in]0, \nu[$ et un entier positif n_0 tel que pour tout $\nu \in]0, \nu_0[$ et $\Delta \in \mathcal{C}(\nu)$, si $n > n_0$, alors $\Delta^n = f^n(\Delta) \cap \mathcal{V}_\nu$ est adaptée à $\mathcal{V}_\nu$ et μ-redressée dans $\mathcal{V}_\nu$.*

Démonstration :

a) Hypothèses : Soient $\delta = \sup_{i=1,\ldots,d} \mid k_i \mid$, $k_0 \in]\delta, 1[$, $l_0 \in]1, \delta^{-1}[$, $k_1 = k_0 - \delta > 0$ et $l_1 = \delta^{-1} - l_0 > 0$. Comme r est du second ordre en (ρ, s, u), on peut trouver $\nu_0 \in]0, \mathrm{Inf}(\nu, (1 - k_0)/4[$ tel que pour $\nu \in]0, \nu_0]$, la norme uniforme M de la dérivée Dr dans $\mathcal{V}_\nu$ vérifie

$$4M < \mathrm{Inf}(k_1, l_1) \tag{$h1$}$$

et

$$\frac{1 + 2M}{\delta^{-1} - 4M} < k_0 \; . \tag{$h2$}$$

En particulier, on a $\nu < (1 - k_0)/4 < 1$. On peut aussi supposer que si $\nu \le \nu_0$,

$$\mid r_s(p) \mid < k_1 \mid p' \mid \tag{$h3$}$$

pour tout $p = (\theta, \rho, s, u) \in \mathcal{V}_\nu$, avec $p' = (\rho, s, u)$.

De plus, comme les dérivées $\partial_u r_\theta$, $\partial_u r_\rho$ and $\partial_u r_s$ sont d'order un en (ρ, s, u), il existe une constante $K \ge 0$ telle que pour tout $\nu \le \nu_0$ et $p \in \mathcal{V}_\nu$,

$$\parallel \partial_u r_\theta(p) \parallel \le K \mid p' \mid, \; \parallel \partial_u r_\rho(p) \parallel \le K \mid p' \mid, \; \parallel \partial_u r_s(p) \parallel \le K \mid p' \mid \; . \tag{$h4$}$$

b) Inclinaison des vecteurs tangents à V par itération le long de $W^s(\Theta)$: Supposons $V \in \mathcal{C}(\nu)$ pour $\nu \in]0, \nu_0[$. Soit v_0 un vecteur tangent dans le fibré tangent à V en $p = W^s(\Theta) \cap V$ noté $T_p(V)$. On note $v_0 = (v_0^\theta, v_0^\rho, v_0^s, v_0^u)$ et

$$Df^n(v_0^\theta, v_0^\rho, v_0^s, v_0^u) = (v_n^\theta, v_n^\rho, v_n^s, v_n^u) \; .$$

La composante v_0^u est non nulle, puisque V est transverse à $W^s(\Theta)$ en p. Soient

$$\begin{array}{ll} p_1 = f(p) & v_1 = Df_p(v_0) \\ p_2 = f^2(p) & v_2 = Df_{p_1}(v_1) \\ \vdots & \vdots \\ p_n = f^n(p) & v_n = Df_{p_{n-1}(v_{n-1})} \end{array} \; .$$

b.1) Quelques inégalités sur les composantes de p_n : On note $p_n = (\theta_n, \rho_n, s_n, u_n)$. On a $s_{n+1} = k.s_n + r_s(p_n)$. Comme $p_n \in W^s(\theta)$, on obtient à l'aide de (h3), $\mid r_s(p_n) \mid < k_1 \mid s_n \mid$. Alors, $\mid s_{n+1} \mid < k_0 \mid s_n \mid$, d'où

$$\mid s_{n+1} \mid < k_0^n \mid s_n \mid \ . \tag{5}$$

b.2) Comportement des itérés de v : On calcule tout d'abord la matrice Jacobienne de f en p. Comme $p \in W^s(\Theta)$, on a

$$\partial_\theta r_\theta(p) = 0,\ \partial_\theta r_\rho(p) = 0,\ \partial_\theta r_u(p) = 0 \quad \partial_s r_\theta(p) = 0,\ \partial_s r_\rho(p) = 0,\ \partial_s r_u(p) = 0\ ,$$

d'où

$$D_p f = \begin{bmatrix} I & \partial_\rho(v(\rho) + r_\theta) & 0 & \partial_u r_\theta \\ 0 & I + \partial_\rho r_\rho & 0 & \partial_u r_\rho \\ \partial_\theta r_s & \partial_\rho r_s & k + \partial_s r_s & \partial_u r_s \\ 0 & \partial_\rho r_u & 0 & l + \partial_u r_u \end{bmatrix} (p)\ .$$

Par conséquent, en utilisant (vi), nous obtenons les inégalités suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\mid v_{n+1}^\theta \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} & \leq & \dfrac{1}{\delta^{-1} - 2M} \left(M \dfrac{\mid v_n^\theta \mid}{\mid v_n^u \mid} + (1+M) \dfrac{\mid v^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid} + \mid \partial_u r_\theta(p_n) \mid \right) \\ \dfrac{\mid v_{n+1}^\rho \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} & \leq & \dfrac{1}{\delta^{-1} - 2M} \left((1+M) \dfrac{\mid v^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid} + \mid \partial_u r_\rho(p_n) \mid \right) \\ \dfrac{\mid v_{n+1}^s \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} & \leq & \dfrac{1}{\delta^{-1} - 2M} \left(M \dfrac{\mid v_n^\theta \mid}{\mid v_n^u \mid} + M \dfrac{\mid v^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid} + (\delta + M) \dfrac{\mid v_n^s \mid}{\mid v_n^u \mid} + \mid \partial_u r_s(p_n) \mid \right) \end{array} \right. .$$

Comme $p_n \in W^s(\Theta)$, on a, en utilisant (h4) et 5,

$$\mid \partial_u r_\theta(p_n) \mid \leq K k_0^n \qquad \mid \partial_u r_\rho(p_n) \mid \leq K k_0^n \qquad \mid \partial_u r_s(p_n) \mid \leq K k_0^n\ .$$

On obtient donc,

$$\mathcal{I}(v_{n+1}) \leq \frac{1}{\delta^{-1} - 2M} [(1 + 3M)\mathcal{I}(v_n) + K k_0^n] \leq k_0 \mathcal{I}(v_n) + K k_0^n\ .$$

Une récurrence simple nous donne

$$\mathcal{I}(v_n) \leq k_0^n(\mathcal{I}(v_0) + K(n+1))\ .$$

Comme $k_0 < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{I}(v_n) = 0$.

c) Validité des inégalités : Afin de justifier nos calculs, nous devons nous assurer que

$$-M \mid v_n^\rho \mid + (\delta^{-1} - M) \mid v_n^u \mid > 0$$

pour tout n.

c.1) Cône de redressement : Une condition suffisante pour avoir $-M \mid v_n^\rho \mid +(l-M) \mid v_n^u \mid > 0$ est

$$\frac{\mid v_n^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid} < \frac{\delta^{-1} - M}{M} \ .$$

Comme $\dfrac{\delta^{-1} - M}{M} > 1$, on considère le sous-ensemble $C(\nu)$ de T_pV tel que

$$\frac{\mid v_n^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid} < 1 \ .$$

Le cône $C(\nu)$ choisi n'est pas optimal, mais ceci sera sans importance pour la suite.

c.2) Stabilité de $C(\nu)$ par itération : Nous allons montrer que $C(\nu)$ est stable sous itération par f le long de $W^s(\Theta)$. On a

$$\left| \begin{array}{lcl} v_{n+1}^\rho & = & (I + \partial_\rho r_\rho(p_n))v_n^\rho + \partial_u r_\rho(p_n) v_n^u \\ v_{n+1}^u & = & (\partial_\rho r_u(p_n))v_n^\rho + (l + \partial_u r_u(p_n))v_n^u \end{array} \right. \ .$$

On voit facilement que

$$\frac{\mid v_{n+1}^\rho \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} \leq \frac{(1+M)\dfrac{\mid v_n^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid} + M}{\delta^{-1} - M - M\dfrac{\mid v_n^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid}} \ . \tag{6}$$

Comme $\dfrac{\mid v_n^\rho \mid}{\mid v_n^u \mid} < 1$, on en déduit à l'aide de (h2) $\dfrac{\mid v_{n+1}^\rho \mid}{\mid v_{n+1}^u \mid} < 1$. Par conséquent, on a $v_n \in C(\nu)$ pour tout n.

d) Extension des résultats précédents à un voisinage de p : Soit $\mu > 0$ un réel fixé. Le point q appartenant à $W^u(\Theta)$, nous avons

$$\partial_u r_\theta(p) = 0 \quad \partial_u r_\rho(p) = 0 \quad \partial_u r_s(p) = 0 \ .$$

Soit $\delta_1 \in]0, \mu[$, On peut trouver par continuité un voisinage $\mathcal{W}$ de la variété instable dans $\mathcal{V}_\nu$, de la forme $\mathcal{W}_{\nu,\nu'} = \{p \in \mathcal{V}_\nu \mid \hat{d}(p, W^u(\Theta)) < \nu'\}$, tel que

$$\parallel \partial_u r_\theta(p) \parallel \leq \delta_1 \quad , \parallel \partial_u r_\rho(p) \parallel \leq \delta_1 \quad , \parallel \partial_u r_s(p) \parallel \leq \delta_1 \ .$$

On peut aussi supposer que

$$\delta_1 = \frac{(1-k_0)\mu}{2} \ .$$

Comme v_0 peut être choisi de facon à avoir l'inclinaison $\mathcal{I}(v_0)$ maximum des vecteurs unités tangents de $(TV)_p$, il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, tout vecteur non nul de $(TV_n)_{p_n}$ a un inclinaison $\mathcal{I}(v_n) \leq \delta/4$ en $p_n \in W$. Par conséquent, par continuité du plan tangent V_{n_0}, il existe une sous-variété $\widehat{V}$ plongée dans V_{n_0}, avec $\widehat{V} \cap W^s(\Theta) = p_{n_0}$ telle que l'inclinaison $\mathcal{I}(v)$ de chacun des vecteurs unité v dans $(T\widehat{V})_p$, $p \in \widehat{D}$ satisfait

$$\mathcal{I}(v) < \mu/2 \ .$$

Soit $v = (v^\theta, v^\rho, v^s, v^u) \in T_p\widehat{V}$ pour $p \in \widehat{V}$. On a

$$D_pf = \begin{bmatrix} I + \partial_\theta r_\theta & \partial_\rho(v(\rho) + r_\theta) & \partial_s r_\theta & \partial_u r_\theta \\ \partial_\theta r_\rho & I + \partial_\rho r_\rho & \partial_s r_\rho & \partial_u r_\rho \\ \partial_\theta r_s & \partial_\rho r_s & k + \partial_s r_s & \partial_u r_s \\ \partial_\theta r_u & \partial_\rho r_u & \partial_s r_u & l + \partial_u r_u \end{bmatrix}(p) \ ,$$

d'où les inégalités

$$\left| \begin{array}{lcl} | v^\theta_{n+1} | & \leq & (1+M) \mid v^\theta_n \mid +(1+M) \mid v^\rho_n \mid +M \mid v^s_n \mid +\delta_1 \mid v^u_n \mid \\ | v^\rho_{n+1} | & \leq & M \mid v^\theta_n \mid +(1+M) \mid v^\rho_n \mid +M \mid v^s_n \mid +\delta_1 \mid v^u_n \mid \\ | v^s_{n+1} | & \leq & M \mid v^\theta_n \mid +M \mid v^\rho_n \mid +(k+M) \mid v^s_n \mid +\delta_1 \mid v^u_n \mid \\ | v^u_{n+1} | & \geq & (l-M) \mid v^u_n \mid -M(\mid v^\theta_n \mid + \mid v^\rho_n \mid + \mid v^s_n \mid) \end{array} \right. .$$

Nous obtenons donc l'inégalité suivante sur l'inclinaison

$$\mathcal{I}(v_{n+1}) \leq \frac{1+M}{\delta^{-1} - 4M}\mathcal{I}(v_n) + \delta_1 \leq k_0\mathcal{I}(v_n) + \delta_1 \ .$$

Une récurrence facile nous donne

$$\mathcal{I}(v_{n+1}) \leq k_0^{n+1}\mathcal{I}(v_0) + \delta_1(1 + k_0 + \ldots + k_0^n) \leq k_0^{n+1}\mathcal{I}(v_0) + \frac{\delta_1}{1-k_0} \ .$$

Comme $\mathcal{I}(v_0) < \mu/2$ et $\delta_1/(1-k_0) = \mu/2$, on en déduit que

$$\mathcal{I}(v_{n+1}) < \mu \ .$$

e) Dilatation le long de $W^u(\Theta)$: Nous allons montrer que $f^n(\widehat{V})$ est dilatée dans la direction de $W^u(\Theta)$. Pour cela, nous allons comparer la norme des vecteurs tangents à $f^n(\widehat{V})$ à celle de leur image par Df. On a

$$\frac{\sqrt{\| v^\theta_{n+1} \|^2 + \| v^\rho_{n+1} \|^2 + \| v^s_{n+1} \|^2 + \| v^u_{n+1} \|^2}}{\sqrt{\| v^\theta_n \|^2 + \| v^\rho_n \|^2 + \| v^s_n \|^2 + \| v^u_n \|^2}} \leq \frac{\| v^u_{n+1} \|}{\| v^u_n \|}\sqrt{\frac{1+3\mathcal{I}^2(v_{n+1})}{1+3\mathcal{I}^2(v_n)}} \ .$$

L'expression de v^u_{n+1} et v^u_n nous donne

$$\frac{\| v^u_{n+1} \|}{\| v^u_n \|} \geq \delta^{-1} - M - M\mathcal{I}(v_n) \ .$$

Comme les inclinaisons $\mathcal{I}(v_{n+1})$ et $\mathcal{I}(v_n)$ sont arbitrairement petites, on voit que la norme d'un vecteur tangent à $f^n(\widehat{V})$ se dilate d'un facteur $\delta^{-1} - M > 1$ par (h1).

f) Conclusion : Comme $f^n(\widehat{V})$ s'étend le long de $W^u(\Theta)$, et les vecteurs tangents à $f^n(\widehat{V})$ ayant une inclinaison uniformément petite, il existe $\widehat{n}$ tel que, pour tout $n > \widehat{n}$, $f^n(\widehat{D})$ est μ-proche à $W^u(\Theta)$ en topologie C^1 compacte ouverte. Ceci termine la preuve du λ-lemme. □

Une démonstration analogue nous permet d'étendre ce résultat aux variétés de dimension n transverses à la variété stable du tore.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des variétés Δ de dimension n qui coupent transversalement la variété stable $W^s(\Theta)$ du tore Θ dans $\mathcal{O}$ et telles que pour tout $p \in \Delta \cap W^s(\Theta)$, chaque vecteur tangent $v \in T_p\Delta$ vérifie la condition de redressement (R).

Alors, on a :

Lemme 3 (λ-lemme) *Soit $\Delta \in \mathcal{C}$ alors les itérées $f^n(\Delta)$ convergent vers la variété instable $W^u(\Theta)$ du tore Θ en topologie C^1 compacte ouverte.*

Remarques :

1. Les tores normalement hyperboliques possèdent la propriété de *transitivité* des intersections : soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ des tores normalement hyperboliques. Si $W^u(\mathcal{T}_1)$ (resp. $W^s(\mathcal{T}_2)$) coupe transversalement $W^s(\mathcal{T}_2)$ (resp. $W^s(\mathcal{T}_3)$) alors $W^u(\mathcal{T}_1)$ coupe transversalement $W^s(\mathcal{T}_3)$. La preuve de cette propriété se déduit simplement du λ-lemme (voir Palis-de Melo [PM]). La condition de redressement (R) nous empéche de démontrer un résultat analogue pour les tores partiellement hyperboliques.

2. Wiggins [Wi] deduit de son λ-lemme pour des tores normalement hyperboliques une généralisation du théorème de Smale-Birkhoff ([Wi], p. 322). La condition de redressement fait que cette démonstration ne s'adapte pas de façon évidente pour les tores partiellement hyperboliques.

3. Le λ-lemme est encore valable pour des sous-variétés Δ transverses au sous-espace $\{u = 0\}$ dans $\mathcal{V}^\nu$ et satisfaisant (R).

1.4. Un λ-lemme pour les champs de vecteurs

Nous allons maintenant établir un analogue du λ-lemme pour des tores d-hyperboliques des champs de vecteurs hamiltoniens. La démonstration repose sur la mise en évidence d'une section du tore pour laquelle l'application de premier retour est le difféomorphisme d-hyperbolique modèle étudié au §.1.3.

Tore d-hyperbolique modèle : Soit $\mathcal{T}$ un tore d-hyperbolique. On suppose que le Hamiltonien dans un voisinage de $\mathcal{T}$ possède la forme suivante : soit $(x, y, s, u) \in \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d = V^{2m+2d}$

$$G(x, y, s, u) = \langle \omega, y \rangle + \frac{1}{2}\langle y, \Gamma y \rangle + \langle s, \Omega(x) u \rangle + g(x, y, s, u) \tag{7}$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire usuel, g est d'ordre 3 en (y, s, u), Γ et Ω sont symétriques, et ω satisfait la condition diophantienne

$$\mid \langle \omega, k \rangle \mid \leq \frac{\gamma}{\mid k \mid^\tau}$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$, où $\gamma > 0$ et $\tau > m-1$.

Le tore $\mathcal{T}$ est alors donné par $\{(x,y,s,u) \mid y = s = u = 0\ \}$.

On suppose aussi que les variétés stable et instable possède une paramétrisation de la forme :

$$\begin{array}{llll} p_s : & \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^d & \to & V^{2m+2k} \\ & (a,s) & \mapsto & (x = a + N_s(a,s), y = M_s(a,s), s, u = Z(a,s)) \\ & & & \\ p_u : & \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^d & \to & V^{2m+2k} \\ & (b,u) & \mapsto & (x = b + N_u(b,u), y = M_u(b,u), s = W(b,u), u) \end{array} , \qquad (8)$$

où N_s, M_s, Z (resp. N_u, M_u, W) sont des fonctions analytiques en a et s (resp. b, u) qui s'annullent en $s = 0$ (resp. $u = 0$).

De plus, le flot sur la variété stable est donné par :

$$\begin{array}{lcl} \dot{a} & = & \omega \\ \dot{s} & = & \Phi(a,s)s \end{array} \qquad (9)$$

et $\mathrm{Re}\langle \gamma, \Phi\bar{\gamma}\rangle \geq \mu \mid \gamma \mid^2$, $\mu > 0$ pour tout $\gamma \in \mathbf{C}^l$. Un résultat analogue est vrai pour la variété instable.

Treshchev [Tr] (voir aussi Graff [Gr]) a montré que les tores k résonnant des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables donnaient naissance à des tores k hyperbolique vérifiant les hypothèses précédentes.

1.4.1. Normalisation préliminaire

Comme $\Omega(x)$ est symétrique, il existe une base dans laquelle elle est diagonale. Notons $\Lambda(x)$ la matrice diagonale associée à $\Omega(x)$ et $\lambda_i(x) > 0$ ses valeurs propres. Nous avons alors le lemme suivant:

Lemme 4 *Il existe une transformation analytique canonique S qui conjugue G au hamiltonien*

$$H(X,Y,S,U) = (\omega \mid Y) + \frac{1}{2}(Y \mid MY) + (S \mid \Lambda U) + r(X,Y,S,U) \ ,$$

où $\Lambda = \Lambda(0)$.

Démonstration :

a) Diagonalisation : On cherche tout d'abord une transformation canonique réduisant H sous la forme

$$\widehat{H}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S},\bar{U}) = (\omega \mid \bar{Y}) + \frac{1}{2}(\bar{Y} \mid M\bar{Y}) + (\bar{S} \mid \Lambda(x)\bar{U}) + \widehat{g}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S},\bar{U}) \ .$$

L'idée est de regarder la transformation de fonction génératrice

$$S_1(x,\bar{Y},s,\bar{U}) = (x \mid \bar{Y}) + (s \mid P(x)\bar{U}) \ ,$$

où $P(x)$ est telle que $P(x)^{-1}\Omega(x)P(x) = \Lambda(x)$. Nous obtenons le changement de coordonnées suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & \bar{Y} + \partial_x(s \mid P(x)\bar{U}) \\ u & = & P(x)\bar{U} \\ \bar{X} & = & x \\ \bar{S} & = & P(x)^t s \end{array} \right.$$

que l'on inverse directement. Dans ces coordonnées, le hamiltonien s'écrit

$$\begin{array}{lcl} \widehat{H}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S},\bar{U}) & = & (\omega \mid \bar{Y}) + \frac{1}{2}(\bar{Y} \mid M\bar{Y}) + (\omega \mid \partial_{\bar{X}}((P(x)^t)^{-1}\bar{S} \mid P(x)\bar{U})) \\ & & +((P(x)^t)^{-1}\bar{S} \mid \Omega(x)P(x)\bar{U}) + \widehat{g}(\bar{X},\bar{Y},\bar{S},\bar{U}) \end{array} .$$

Comme

$$\partial_{\bar{X}}((P(x)^t)^{-1}\bar{S} \mid P(x)\bar{U}) = \partial_{\bar{X}}(\bar{S} \mid \bar{U}) = 0 \ ,$$

et

$$((P(x)^t)^{-1}\bar{S} \mid \Omega(x)P(x)\bar{U}) = (\bar{S} \mid (P(x)^t)^{-1}\Omega(x)P(x)\bar{U}) = (\bar{S} \mid \Lambda(x)\bar{U}) \ ,$$

on en déduit que $\widehat{H}$ a la forme désirée.

b) La seconde étape consiste à supprimer la dépendance en x du terme hyperbolique $(\bar{S} \mid \Lambda(x)\bar{U})$. On cherche alors une trasnformation canonique associée à une fonction génératrice de la forme

$$S_2(\bar{X},Y,\bar{S},U) = (\bar{X},Y) + (\bar{S} \mid U) + (\bar{S} \mid f(\bar{X})U) \ ,$$

où $f(\bar{X}) = (f_i(\bar{X}))$ est une matrice diagonale. Nous obtenons le changement de variables suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \bar{Y} & = & Y + \partial_{\bar{X}}(\bar{S} \mid f(\bar{X})U) \\ \bar{U} & = & f(\bar{X})U + U \\ X & = & \bar{X} \\ S & = & f^t(\bar{X})\bar{S} + \bar{S} \end{array} \right. ,$$

que l'on peut inverser directement. Développons $\Lambda(X) = (\lambda^j(X))$ en série de Fourier suivant X, on obtient

$$\lambda^j(X) = \lambda^j(0) + \sum_{k \in Z^m \setminus \{0\}} \lambda^j_k e^{ikx} = \lambda^j_0 + \widehat{\lambda}^j(X) \ .$$

On note que $\lambda^j_0 > 0$ car $\lambda^j(x) > 0 \ \ \forall x$. Le hamiltonien $\widehat{H}$ s'écrit dans les nouvelles coordonnées

$$
\begin{aligned}
H(X,Y,S,U) &= (\omega \mid Y) + \frac{1}{2}(Y \mid Y) + (\omega \mid \sum_j (1+f_j(X))^{-1}\partial_X f_j(X) U_j S_j) \\
&\quad +(S \mid \Lambda_0 U) + (S \mid \widehat{\Lambda}(X)U) + \widehat{g}(X,Y,S,U)
\end{aligned} .
$$

où $\Lambda_0 = (\lambda_0^j)$ et $\widehat{\Lambda}(X) = (\lambda^j(X))$.
On résout maintenant l'équation

$$
(\omega \mid \sum_j \frac{1}{1+f_j(X)} \partial_X f_j(X) U_j S_j) + (S \mid \widehat{\Lambda}(X)U) = 0 \ ,
$$

que l'on peut écrire

$$
\sum_j U_j S_j (\omega \mid \partial_X \log(1+f^j(X))) + \sum_j U_j S_j \widehat{\lambda}^j(X) = 0 \ .
$$

Pour chaque j nous avons une équation de la forme

$$
(\omega \mid \partial_X \log(1+f(X))) + \widehat{\lambda}(X) = 0 \ . \tag{10}
$$

C'est une équation homologique classique. Développons $\log(1+f(X))$ en série de Fourier, on a

$$
\log(1+f(X)) = \sum_{k\in Z^m} \gamma_k e^{ikX} \ .
$$

Par conséquent, l'équation (10) nous donne

$$
(\omega \mid \partial_X \log(1+f(X))) = \sum_{k\in Z^m\setminus\{0\}} i(\omega \mid k)\gamma_k e^{ikX} = \sum_{k\in Z^m\setminus\{0\}} \lambda_k e^{ikX} \ .
$$

On obtient donc

$$
\gamma_k = \frac{\lambda_k}{i(\omega \mid k)} \quad \text{et} \quad \lambda_k = -\frac{\lambda_{-k}}{i(\omega \mid k)} = -\frac{\lambda_k}{i(\omega \mid k)} = \bar{\gamma}_k \ .
$$

La condition diophantienne et l'analyticité de $\Lambda(x)$ assurent la convergence de cette série (voir [BGGS], Appendice). On écrit

$$
h(X) = \log(1+f(X)) = \sum_{k\in Z^m\setminus\{0\}} \frac{\lambda_k}{i(\omega \mid k)} e^{ikX} \ .
$$

qui est une fonction à valeur réelle. Par conséquent, $f(X) = e^{h(X)} - 1$ satisfait $1+f(X) > 0$ pour tout $x \in T^m$, et le changement de variables est bien défini. □

1.4.2. Application de premier retour et forme normale

Nous allons maintenant faire une section globale du flot et expliciter une forme normale pour l'application de premier retour dans un voisinage du tore.

Le vecteur ω étant non résonnant, nous avons $\omega_m \neq 0$ et la sous-variété $\mathcal{L}$ définie par $x_m = 0$ est transverse au champ X_H dans un voisinage $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{T}$. On se restreint au niveau $\mathcal{H} = H^{-1}(0)$ qui contient $\mathcal{T}$ et ses variétés invariantes. Le théorème des fonctions implicites entraine l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}''$ de $\mathcal{T}$ dans lequel $\mathcal{H} \cap V''$ est une sous-variété. On prend comme surface de section

$$\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \mathcal{L} \cap \mathcal{V} \text{ où } \mathcal{V} = \mathcal{V}' \cap \mathcal{V}''$$

Elle est régulière par transversalité de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{V}$, et il est possible de choisir sur $\mathcal{S}$ des coordonnées $(\bar{x}, \bar{y}, U, S)$ avec $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{m-1})$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_{m-1})$ qui l'identifient à un voisinage du tore $\Theta = \{\bar{y} = 0,\ S = U = 0\}$ dans $V^{2m+2d-2} = T^{m-1} \times R^{m-1} \times R^d \times R^d$. Dans cette identification $\Theta = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$.

La forme normale de l'application de retour est donnée par le lemme suivant :

Lemme 5 *Il existe sur $\mathcal{S}$ un système de coordonnées (θ, ρ, s, u), $\theta \in T^{m-1}$, $\rho \in R^{m-1}$, $(s, u) \in R^{2d}$ dans lesquelles $\Theta = \{\rho = 0, s = u = 0\}$, telles que l'application de retour s'écrive*

$$f(\theta, \rho, s, u) = (\theta + v(\rho), \rho, ks, lu) + r(\theta, \rho, s, u)$$

où $ks = k_1 s_1 \ldots k_d s_d$, $lu = l_1 u_1 \ldots l_d u_d$ et v et $r = (r_\theta, r_\rho, r_s, r_u)$ sont définies et analytiques dans un voisinage $\mathcal{O}$ de Θ, et vérifient les conditions suivantes:

(i) $k_i < 1$ et $l_i = k_i^{-1} > 1$ pour $i = 1 \ldots d$

(ii) r est d'ordre au moins 2 en (ρ, s, u)

(iii) $r_\rho = 0$ et $r_u = 0$ dans $\{\rho = 0, u = 0\} \cap \mathcal{O}$

(iv) $r_\rho = 0$, $r_s = 0$ dans $\{\rho = 0, s = 0\} \cap \mathcal{O}$

(v) $r_\theta = 0$ dans $W^s(\Theta) \cup W^u(\Theta)$

(vi) $\mid \partial_\rho v \mid < 1$, où $\mid\ .\ \mid$ est la norme uniforme dans $\mathcal{O}$

(vii) si $\alpha > 0$ est fixé, $\sup\{\| \partial^2_{uv} r_w(p) \|,\ p \in \mathcal{O} < \alpha$ où $v \in \{\rho, s\}$ et $w \in \{\theta, \rho, s\}$

Le point essentiel de la démonstration est le redressement des variétés invariantes ((iii) et (iv)) et la factorisation de la rotation (v) qui permet d'obtenir une rotation constante dans la réunion des variétés invariantes.

Démonstration : La démonstration s'effectue en 4 étapes.

a) Evaluation de l'application de premier retour : On commence par calculer l'application de premier retour associée au système hamiltonien tronqué dans V^{2m+2d} :

$$H_t(X, Y, S, U) = (\omega \mid Y) + \frac{1}{2}(Y \mid MY) + (S \mid \Lambda U)$$

qui définit les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \omega + MY\\ \dot{Y} &= 0\\ \dot{S} &= -\Lambda S\\ \dot{U} &= \Lambda U\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}X(t) &= (\omega + MY)t + X_0\\ Y(t) &= Y_0\\ S(t) &= S_0 e^{-\Lambda t}\\ U(t) &= U_0 e^{\Lambda t}\end{aligned}$$

Le tore $\mathcal{T} = \{(X, Y, S, U) \mid Y = 0; S = U = 0\}$ est encore invariant pour H_t. La surface de section $\mathcal{S}$ est encore transverse à X_{H_t} au voisinage de $\mathcal{T}$. La surface $\mathcal{S}$ est d'équation $X_m = 0$, or $X_m(t) = (\omega_m + (MY)_m)t + X_m^0$. Le *temps de premier retour* T dans la section $\mathcal{S}$ est alors donné par

$$X_m(T) = 2\pi \pmod{2\pi}$$

d'où

$$T = \frac{2\pi}{\omega_m + (MY)_m}$$

On pose $\eta(Y) = (MY)_m$, $x = (X_1, \ldots, X_{m-1})$, alors le temps de retour associé à un point $(x, Y, S, U) \in \mathcal{S}$ est donné par

$$\tau_t(x, Y, S, U) = \frac{2\pi}{\omega_m + \eta(Y)}$$

défini dans un voisinage U' de $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}$ tel que $\omega_m + \eta(Y) \neq 0$.

b) Redressement des variétés invariantes : On utilise maintenant l'existence d'une paramétrisation locale des variétés invariantes pour effectuer un *redressement* des variétés stable et instable du tore.

b.1) Paramétrisation des variétés stable et instable en section : On déduit des paramétrisations (8) une représentation paramétrique des variétés stable et instable du tore Θ en section. On effectue seulement la construction pour la variété stable, celle-ci étant analogue pour la variété instable.

On a dans $\mathcal{S}$, $X_m = a_m + N_m^s(a, S) = 0$ et $Y_m = M_m^s(a, S)$. Le théorème d'inversion locale dans un voisinage de $\mathcal{T}$ nous donne

$$a_m = f(\bar{a}, S)\,, \tag{11}$$

où $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{m-1})$.

On a donc dans $\mathcal{S}$ la paramétrisation suivante de $W^s(\Theta)$:

$$P_s : (\bar{a}, S) \to (x = \bar{a} + \bar{N}_s(\bar{a}, S), y = \bar{M}_s(\bar{a}, S), S, U = \bar{Z}(\bar{a}, S)) \tag{12}$$

où $y = (Y_1, \ldots, y_{m-1})$.

On écrit maintenant cette paramétrisation dans le système de coordoonnées associé à la section (x, y, S, U). La relation $x = \bar{a} + \bar{N}_s(\bar{a}, S)$, nous donne par inversion locale dans un voisinage convenable de Θ,

$$\bar{a} = A(x, S)\,.$$

Notons $N_1(x,S) = \bar{N}_s(A(x,S), S)$, $M_1(x,S) = \bar{M}_s(A(x,S), S)$ et $Z_1(x,S) = \bar{Z}(A(x,S), S)$. On déduit alors de (12) la paramétrisation suivante de la variété stable :

$$p_s : (\bar{a}, S) \to (x = \bar{a} + N_1^s(\bar{a}, S), y = M_1^s(\bar{a}, S), S, U = Z_1(\bar{a}, S))$$

De même, on obtient pour $W^u(\Theta)$:

$$p_u : (\bar{b}, U) \to (x = \bar{b} + N_1^u(\bar{b}, U), y = M_1^u(\bar{b}, U), S = W_1(\bar{b}, U), U)$$

b.2) Redressement : Le redressement s'effectue en deux étapes. La première redresse les directions hyperboliques S et U. La seconde redresse les variétés dans les directions neutres y. Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$(x, y, S, U) \to (x, y, s = S - W_1(x, U), u = U - Z_1(x, S))$$

Les variétés $W^s(\Theta)$ et $W^u(\Theta)$ sont maintenant contenue dans les espaces d'équation $u = 0$ et $s = 0$. Les représentations paramétriques s'écrivent maintenant :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{p}_s : (\bar{a}, s) & \to & (x = \bar{a} + \widehat{N}_1^s(\bar{a}, s), y = \widehat{M}_1^s(\bar{a}, s), s, 0) \\ \widehat{p}_u : (\bar{b}, u) & \to & (x = \bar{b} + \widehat{N}_1^u(\bar{b}, u), y = \widehat{M}_1^u(\bar{b}, u), 0, u) \end{array}$$

Nous effectuons maintenant le changement de variables suivant : on pose

$$Y(x, s, u) = M_1^s(x, s) + M_1^u(x, u)$$

et on définit le difféomorphisme analytique

$$(x, y, s, u) \to (x, \rho = y - Y(x, s, u), s, u)$$

Les variétés stable et instable sont maintenant données par les équations $W^s(\Theta) = \{(x, \rho, s, u) \mid \rho = 0, u = 0\}$ et $W^u(\Theta) = \{(x, \rho, s, u) \mid \rho = 0, s = 0\}$, et leurs paramétrisations par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{p}_s \ : \ (\bar{a}, s) & \mapsto & (x = \bar{a} + \tilde{N}_1^s(\bar{a}, s), 0, s, 0) \\ \tilde{p}_u \ : \ (\bar{b}, u) & \mapsto & (x = \bar{b} + \tilde{N}_1^u(\bar{b}, u), 0, 0, u) \end{array}$$

c) Feuilletage des variétés stable et instable : Comme $x = \bar{a} + \tilde{N}_1^s(\bar{a}, s)$ on a par le théorème d'inversion local $\bar{a} = A_s(x, s)$. On définit alors le changement de variables analytique suivant :

$$(x, y, s, u) \to (\tilde{x} = A_s(x, s), y, s, u)\,.$$

Comme $\dot{\bar{a}} = \bar{\omega}$, on a sur la variété stable $\dot{\tilde{x}} = \bar{\omega}$. De la même façon, en utilisant le fait que $\bar{b} = A_u(\tilde{x}, u)$ et $\dot{\bar{b}} = \bar{\omega}$, on obtient le changement de coordonnées

$$(\tilde{x}, y, s, u) \to (\theta = A_u(\tilde{x}, u), y, s, u) ,$$

pour lequel $\dot{\theta} = \bar{\omega}$ sur la variété stable et instable.

d) Normalisation : De simples changements d'echelle permettent d'obtenir les propriétés vi) et vii). □

Remarques :

1. La propriété (v) signifie qu'il existe un feuilletage invariant[13] des variétés stable et instable. Les feuilles sont les droites $\theta =$ const de dimension d.

2. Dans le cas $d = 1$, l'utilisation de la forme normale de L.Niederman [Ni] permet d'obtenir une application de premier retour dont les variétés stable et instable sont directement redressées.

1.5. Démonstration de la propriété d'obstruction

Théorème A : *Les tores d-hyperboliques modèles vérifient la propriété d'obstruction.*

Démonstration : On se place dans la section $\mathcal{S}$ définie au § précédent.

On note qu'il suffit de démontrer cette propriété dans le cas de sous-variété de dimension $m + d$ transverse à $W^s(\Theta)$. En effet, étant donnée une sous-variété $\mathfrak{V}$ de dimension l ($l > m + d$), transverse à $W^s(\Theta)$, on peut toujours trouver une sous-variété de dimension $m + d$ pour laquelle la proprosition est vérifiée.

Soit Δ une sous variété de dimension $m + d$, transverse à $W^s(\Theta)$ au point $a = \Delta \cap W^s(\Theta)$, $a \in \mathcal{V}_\nu$ et soit b un point donné de $W^u(\Theta)$ et $B(b, \delta)$, $\delta > 0$ une boule dans $\mathcal{V}_\nu$.

Comme Δ coupe $W^s(\Theta)$ transversalement en a, son intersection avec le plan

$$\mathcal{P} = \{ (\theta, s, \rho, u) \in \mathcal{V}_\nu \mid \rho = 0 \}$$

est aussi transverse. On note $\Delta_0 = \mathcal{P} \pitchfork \Delta$ la sous-variété ainsi obtenue. La transversalité de l'intersection implique Δ_0 est de dimension d, en effet

$$\begin{aligned} \dim(\Delta_0) &= \dim(\Delta \cap \mathcal{P}) = \dim(\Delta) + \dim(\mathcal{P}) - \dim(\mathcal{S}) \\ &= (m + d) + (m + 2d) - (2m + 2d) = d \end{aligned}$$

La démonstration repose sur deux points : Soit $0 < \epsilon < \delta$,

i) Pour $n \geq n_0$, la sous-variété Δ_0 est adaptée à V_ν, et ϵ redressée dans V_ν.

ii) Il existe n tel que la composante angulaire de $a_n = f^n(a)$ est ϵ proche de la composante angulaire de b.

[13] L'invariance est ici à comprendre comme ceci: soit V une variété invariante par le flot Φ, feuilletée en sous-variétés V_i, alors $\Phi(V_i) = V_j$.

La condition i) est une application directe du λ-lemme faible[14]. En effet, pour tout vecteur tangent $v = (v_\theta, v_\rho, v_s, v_u) \in T_a\Delta_0$, on a $v_\rho = 0$ car $\Delta_0 \subset \mathcal{P}$. La condition de redressement du λ-lemme faible est donc satisfaite.

La condition ii) est une conséquence de l'hypothèse (v) du lemme 5. Celle ci nous assure que la composante angulaire de a_n est une rotation constante d'angle $v(0) = 2\pi\bar{\omega}/\omega_m$. Comme ω est non résonant, on peut approcher la composante angulaire de b dans un voisinage de taille arbitraire. $\square$

[14]La vérification de ce premier point est considérablement simplifiée dans le cas C^∞ (voir [Do]), car il est possible d'écrire le difféomorphisme de section comme un produit direct d'un difféomorphisme hyperbolique par une distorsion monotone de l'anneau. Ce premier point découle alors du λ-lemme classique de J. Palis [Pa].

2. Dynamique symbolique pour un tore homocline

Nous savons, depuis les travaux de Birkhoff, Smale, Shil'nikov et Alekseev, que l'intersection transverse des variétés stable et instable d'une orbite périodique hyperbolique donne naissance à une dynamique compliquée[15] , décrite au moyen d'une dynamique symbolique.

De même, Wiggins [Wi] a démontré qu'un tore homocline normalement hyperbolique possède un ensemble invariant sur lequel la dynamique est conjuguée à un décalage de Bernouilli.

Plusieurs auteurs, notamment Treshchev [Tr2], Holmes-Marsden [HM] et Xia [Xi], ont conjecturé un résultat analogue pour un tore homocline partiellement hyperbolique. L'hyperbolicité partielle des tores rend difficile une eventuelle démonstration.

Easton [Ea] (voir aussi Wiggins [Wi]) a mis au point les outils pour aborder ce problème. En utilisant son formalisme, nous démontrons dans cette partie (sous certaines hypothèses) l'existence d'une dynamique symbolique. Un résultat analogue a déja été démontré par Easton [Ea]. Néanmoins, son résultat concerne des perturbation C^1 de systèmes ayant une dynamique symbolique et non des difféomorphismes analytiques. Ceci lui permet de considérablement simplifier la preuve.

On en déduit ensuite l'existence, dans un voisinage du tore, d'une infinité d'orbites périodiques hyperboliques dont les variétés stable et instable se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$.

2.1. Résultats principaux

Soit M une variété symplectique et H un hamiltonien analytique sur M. Soit $\mathcal{T}$ un tore d-hyperbolique modèle tel que sa variété stable $W^s(\mathcal{T})$ coupe transversalement sa variété instable $W^u(\mathcal{T})$ le long d'une orbite $\mathcal{O}(p)$ homocline à $\mathcal{T}$, dans une surface d'énergie fixée $\mathcal{H} = H^{-1}(h)$. L'existence d'au moins une orbite homocline à un tore hyperbolique dans les perturbations de systèmes hamiltoniens intégrables est une propriété générique (voir [El] et [Bo]).

2.1.1. Hypothèses

Nous effectuons les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$: Soient $\mathcal{S}$ et f la surface de section et son application de premier retour définies dans le lemme 5 (partie I), dans toute la suite, nous nous limiterons au cas où

[15] Poincaré [Po] avait déja remarqué ce fait dans ses travaux sur le problème des trois corps: "Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de reseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complexité du problème des 3 corps et en général de tous les problèmes de la dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme.".

$$v(\rho) = v_0 + v_1 \rho \ ,$$

où v_0 satisfait une condition *diophantienne* de la forme

$$\exists\ \delta > 0,\ \exists \eta \geq (m-1) \ \mid \ \forall j \in \mathbf{Z}^m \setminus \{0\}\ ,\ \mid (v_0 \mid j) \mid > \frac{\delta}{\mid j \mid^\eta}\ . \tag{13}$$

Nous supposerons aussi que le reste possède la forme particulière suivante

$$r(\theta, s, \rho, u) = \rho s u r_1(\theta, su) + (su)^2 r_2(\theta, su) + \rho^2 r_3(\theta, su) + \rho^3 r_4(\theta, \rho, s, u) \tag{14}$$

et

$$\parallel r_i \parallel < C_i \quad i = 1, 2, 3 \tag{15}$$

La forme du reste est analogue à celle obtenue par Niederman [Ni] pour une perturbation d'un hamiltonien complétement intégrable au voisinage d'une résonance simple. Bien que nous ne l'ayons pas démontré explicitement, les techniques de [Ni] appliquées au cas des difféomorphismes doivent permettre de montrer que cette forme du reste est générale.

$(\mathcal{H}_2)$: L'orbite $\mathcal{O}(p)$ coupe la section $\mathcal{S}$ en des points $p^+ \in W^s(\Theta)$ et $p^- \in W^u(\Theta)$. Nous noterons $p^+ = (\theta^+, s^+, 0, 0)$ et $p^- = (\theta^-, 0, 0, u^-)$. Nous définissons deux voisinages de p^+ et p^- de la manière suivante : Soit $\jmath > 0$,

$$\begin{array}{rcl} B^+ & = & \{\mid \theta - \theta^+ \mid \leq \jmath,\ \mid s - s^+ \mid \leq \jmath,\ \mid \rho \mid \leq \jmath,\ \mid u \mid \leq \jmath\} \\ B^- & = & \{\mid \theta - \theta^- \mid \leq \jmath,\ \mid s \mid \leq \jmath,\ \mid \rho \mid \leq \jmath,\ \mid u - u^- \mid \leq \jmath\}\ . \end{array}$$

Soit $\tau : X \to [0, \infty[$, $\tau(p) = \sup\{\ t > 0 \ \mid\ \Phi(t,p) \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{S}$ pour $0 < s \leq t\ \}$, où Φ représente le flot associé au système X_H. On définit l'ensemble

$$\Xi = \{\ p \in \mathcal{S} \ \mid\ \tau(p) < \infty\ \}\ ,$$

On suppose $\jmath$ assez petit pour avoir $B^+ \subset \Xi$ et $B^- \subset f(\Xi)$. On note

$$D_n = \{q \in B^+ : f^n(q) \in B^-\}$$

On choisit $\jmath$ assez petit tel que $S^- \cap \Xi = \emptyset$. On a alors $D^n \cap D^m = \emptyset$ pour $n \neq m$. On note $D = \bigcup\limits_{n \geq 1} D_n$ et $\mathcal{Q} = \{q \in B^+ : \Delta \circ f^n(q) \in B^+\}$.

On définit $\gamma : D \to B^-$ par

$$\gamma(q) = f^n(q)\ , \quad \forall q \in D_n\ .$$

Soit Λ l'application de B^- dans B^+ définie par

$$\Lambda(q) = \Phi(q, \sigma(q))\ ,$$

où $\sigma(q) = \inf\{\ t > 0 \ \mid\ \Phi(t,q) \in S^+\ \}$. Elle est définie sur un voisinage de p^- que nous supposons inclus dans B^-.

On définit l'ensemble $\mathcal{Q}$ par

$$\mathcal{Q} = \{\ q \in b^+ \ \mid\ \Upsilon(q) \in B^+\ \}$$

et l'application $\Upsilon : \mathcal{Q} \to B^+$ par

$$\Upsilon(q) = \Lambda \circ \gamma(q)\ .$$

Fig.

$(\mathcal{H}_3)$: L'application de transition $\Lambda : B^- \longrightarrow B^+$ est de la forme

$$\Lambda(x) = p^- + \Pi h + \Lambda_2 h$$

où $h = x - p^-$, $\Pi = D_{p^-}(\Lambda)$ et où Λ_2 est le terme d'ordre ≥ 2.

On se limitera au cas où la matrice Π, rapportée aux bases $(e_\theta, e_s, e_\rho, e_u)$ est de la forme suivante

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

On vérifie que la forme de la matrice est compatible avec la transversalité des sous variétés invariantes le long des orbites homoclines.

On suppose de plus

$$\| D^2\Lambda_2 \| \leq C\ . \tag{16}$$

2.1.2. Résultats

On définit l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{N \geq n \geq n^* \ \mid \mid \theta^+ - \theta^- + nv_0 \mid < c\jmath\ \}\ ,$$

où n^* et N seront déterminés plus tard[16]. On définit $S \subset \mathbf{R}^4$ comme

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mid \| x \|_1 \leq 1, \| y \|_1 \leq 1 \}$$

Soit $(\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{\rho}, \hat{u})$ le système de coordonnées dans la fenêtre S. On définit l'application $F_\jmath : S \to B^+$ par

$$F_\jmath(\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{\rho}, \hat{u}) = (\jmath\hat{\theta} + \theta^+, \jmath\hat{s} + s^+, \jmath\hat{\rho}, \jmath\hat{u})$$

Pour $n \in \mathcal{A}$, on note

$$H^n = \left\{ (\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{\rho}, \hat{u}) \in [-1,1]^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} \mid \hat{u} - k^n(u^-/\jmath) \mid < k^n \\ \mid \hat{s} \mid < 1 \\ \mid \hat{\theta} + nv_1\hat{\rho} \mid < c_1 \\ \mid \hat{\rho} \mid < k^n \end{array} \right\}$$

et

$$D_H = \bigcup_{n \in \mathcal{A}} H^n \ .$$

Notons $\widehat{D}_H = F_\jmath(D_H)$. Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème B (Dynamique Symbolique pour un tore standard): *L'application Υ possède un ensemble invariant $I\{ q \in \mathcal{Q} \mid \Upsilon^n(q) \in \widehat{D}_H \,,\ \forall n \in \mathbf{N} \}$ hyperbolique tel que $\Upsilon \mid_I$ soit topologiquement conjuguée au shift sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Il existe donc un homéomorphisme ϕ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} I & \overset{\Upsilon}{\longmapsto} & I \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Sigma^{\mathcal{A}} & \overset{\sigma}{\longmapsto} & \Sigma^{\mathcal{A}} \end{array}$$

La démonstration est donnée dans le §.2.3. Ce théorème généralise le théorème de Moser [Mo] pour une orbite périodique hyperbolique. La démonstration repose sur l'introduction d'une application *transverse*, c'est à dire une application à nombre d'itération non constant (voir [Mo], Th. 3.7., p.101) et utilise les critères de Chaos dans le cas hyperbolique mis au point par S. Wiggins ([Wi], Chap.2).

Remarques:

1. Bien que le tore soit partiellement hyperbolique, nous utilisons le critère de Chaos dans un cas hyperbolique. Dans le cas d'un tore normalement hyperbolique, il faut utiliser le critère de Chaos dans un cadre non-hyperbolique (voir S. Wiggins [Wi], p.322)

2. La propriété d'hyperbolicité de l'ensemble invariant est importante car cet ensemble est stable sous une faible perturbation alors que le tore dont il est issu ne subsiste pas obligatoirement (condition diophantienne).

[16] On note que cet ensemble est non vide puisque le vecteur fréquence v_0 est non-résonnant (en fait diophantien).

3. Cet ensemble est un Cantor de points et non pas un Cantor de surfaces comme dans le cas d'un tore normalement hyperbolique.

4. Le théorème B est vrai sous l'hypothèse plus faible que v_0 est non-résonnant.

On en déduit le corollaire suivant :

Notons $\mathcal{O}_n$ l'orbite périodique de période n associée au symbole $\{\dots nnn \dots\}$ par le biais de ϕ et p_n le point fixe hyperbolique de Υ associé dans $\mathcal{S}$.

Corollaire 1 *Pour $n > \tilde{n}$, $\tilde{n}$ suffisamment grand, l'orbite périodique hyperbolique $\mathcal{O}_n$, associée au point $p_n \in \mathcal{I}$ est telle que sa variété stable (resp. instable) $W^s(\mathcal{O}_n)$ (resp. $W^u(\mathcal{O}_n)$) est ϵ proche en topologie C^1 de la variété stable du tore $W^s(\mathcal{T})$ (resp. instable $W^u(\mathcal{T})$) au point p^+.*

2.2. Dynamique symbolique

Nous allons reprendre la démarche de S. Wiggins ([Wi], p. 108-150) en donnant un critère de conjugaison à un décalage de Bernouilli pour des perturbation de systèmes possédant une dynamique symbolique[17].

Soit $f : D \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ une application, où D est un ensemble fermé borné de dimension $n+m$ contenu dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. Nous supposerons f analytique et définie sur un ensemble connexe ou une union de plusieurs composantes connexes. Notre propos est de donner des conditions sous lesquelles f sera conjuguée, dans une certaine partie de D, à un shift de Bernouilli.

2.2.1. Définitions et notations

On note D_x (resp. D_y l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ (resp. $y \in \mathbf{R}^m$) tel qu'il existe $y \in \mathbf{R}^m$ (resp. $x \in \mathbf{R}^n$) tel que $(x, y) \in D$. Soit I_x (resp. I_y) un ensemble fermé, simplement connexe, de dimension n (resp. m) contenu dans D_x (resp. D_y).

Définition 1 *Un chemin $\jmath_h$ horizontal (resp. $\jmath_v$ vertical), $\bar{H}$ (resp. $\bar{V}$), est défini comme le graphe d'une fonction $h : I_x \to \mathbf{R}^m$ (resp. $v : I_y \to \mathbf{R}^n$), $\jmath_h$ (resp. $\jmath_v$) lipschitzienne, $0 < \jmath_h \leq \infty$ (resp. $0 < \jmath_v < \infty$), telle que $\bar{H} \subset D$ (resp. $\bar{V} \subset D$).*

Soit $\jmath_h$, $0 \leq \jmath_h < \infty$, $\bar{H}$ un chemin $\jmath_h$ horizontal, $J^m \subset D$ un disque de dimension m qui coupe $\bar{H}$ en un unique point. Soit $\bar{H}^\alpha$, $\alpha \in I$, l'ensemble des chemins $\jmath_h$ horizontaux qui coupent le bord de J^m de même domaine que $\bar{H}$, où I est un ensemble d'indexation. Soit

$S_H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid x \in I_x$, y tel que, $\forall x \in I_x$, et une ligne L passant par (x, y) parallèle à $x = 0$, L $\}$

La bande $\jmath_h$ horizontal est définie comme la fermeture de S_H.

[17] Pour des références concernant la dynamique symbolique, nous renvoyons au livre de C. Robinson [Ro2], ainsi qu'au chapitre 9 du cours de M. Shub [Sh] rédigé par J.C. Yoccoz.

Définition 2 *Le bord vertical de la bande $\jmath_h$ horizontale H, notée $\partial_v H$ est définie comme $\partial_v H = \{(x,y) \in H \mid x \in \partial I_x\}$. De même, le bord horizontal, noté $\partial_h H$ est défini comme $\partial_h H = \partial H - \partial_v H$.*

Définition 3 *Soient H et $\tilde{H}$ deux bandes $\jmath_h$ horizontales. On dit que $\tilde{H}$ coupe complètement H si $\tilde{H} \subset H$ et $\partial_v \tilde{H} \subset \partial_v H$.*

2.2.2. Critères de conjugaison à un shift

Soit $S = \{1, 2, \ldots, N\}$, $N \geq 2$, et soient H_i, $i = 1, \ldots, N$ un ensemble de bandes $\jmath_h$-horizontale disjointes avec $D_H = \bigcup_{i=1}^{N} H_i$. On suppose que f est un homéomorphisme sur D_H et on défini

$$f(H_i) \cap H_j = V_{ji}, \quad \forall i, j \in S$$

et

$$H_i \cap f^{-1}(H_j) = f^{-1}(V_{ji}) = H_{ij}, \quad \forall i, j \in S$$

On note

$$\Sigma^N = \ldots \times S \times S \times S \times \ldots = \Pi_{i=-\infty}^{+\infty} S$$

Soit $s \in \Sigma^N$, $s = \{\ldots s_{-n}, \ldots, s_{-1}, s_0, s_1, \ldots s_n \ldots\}$, on définit le shift $\sigma : \Sigma^N \mapsto \Sigma^N$ commme

$$[\sigma(s)]_i = s_{i+1}$$

Soit A une matrice $N \times N$ la *matrice de transition*. On note

$$\Sigma_A^N = \{ s = \{\ldots s_{-1} s_0 s_1 \ldots\} \in \Sigma^N \mid (A)_{s_i, s_{i+1}} = 1 \, \forall i \in \mathbf{N} \}$$

Effectuons maintenant les hypothèses suivantes :

(A1) Pour tout $i, j \in S$ tels que $(A)_{ij} = 1$, V_{ij} est une bande $\jmath_v$ verticale contenant H_j avec $\partial_v V_{ji} \subset \partial f(H_i)$ et $0 \leq \jmath_v \jmath_h < 1$. De plus f applique H_{ij} homeomorphiquement sur V_{ji} avec $f^{-1}(\partial_v V_{ji}) \subset \partial_v H_i$.

(A2) Soit H une bande $\jmath_h$ horizontale qui coupe H_j complétement. Alors $f^{-1}(H) \cap H_i = \bar{H}_i$ est un chemin $\jmath_h$ horizontal qui coupe H_i complétement pour tout $i \in S$ tel que $(A)_{ij} = 1$. De plus,

$$d(\bar{H}_i) \leq \nu_h d(H) \quad \text{pour un} \quad 0 < \nu_h < 1$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème : *Si f vérifie les hypothèses (A1) et (A2) alors elle possède un ensemble invariant de points $\Lambda \subset D_H$ sur lequel elle est topologiquement conjuguée à un sous-shift de type fini avec une matrice de transition A. Il existe donc un homéomorphisme $\phi : \Lambda \to \Sigma_A^N$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xmapsto{f} & \Lambda \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Sigma_A^N & \xmapsto{\sigma} & \Sigma_A^N \end{array}$$

2.2.3. Conditions sectorielles

La condition (A2) est difficile à vérifier en pratique. On peut la remplacer par une condition portant sur le comportement de f dans certains secteurs.

On note $\mathcal{H} = \bigcup_{i,j \in S, (A)_{ij}=1} H_{ij}$ et $\mathcal{V} = \bigcup_{i,j \in S, (A)_{ij}=1} V_{ij}$. On a donc $f(\mathcal{H}) = \mathcal{V}$. Soit $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{V} \cup \mathcal{H}$, on définit le *secteur stable* en z_0, noté $S_{z_0}^s$ comme

$$S_{z_0}^s = \{(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \mid \eta_{z_0} \mid \leq \jmath_h \mid \xi_{z_0} \mid \}$$

De même, le *secteur instable* en z_0, noté $S_{z_0}^u$ est défini par

$$S_{z_0}^u = \{(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid \mid \xi_{z_0} \mid \leq \jmath_v \mid \eta_{z_0} \mid \}$$

On note $S_{\mathcal{H}}^s = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{H}} S_{z_0}^s$, $S_{\mathcal{V}}^s = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{V}} S_{z_0}^s$, $S_{\mathcal{H}}^u = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{H}} S_{z_0}^u$ et $S_{\mathcal{V}}^u = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{V}} S_{z_0}^u$.

Nous formulons alors l'hypothèse suivante :

(A3) $Df(S_{\mathcal{H}}^u) \subset S_{\mathcal{V}}^u$ et $Df^{-1}(S_{\mathcal{V}}^s) \subset S_{\mathcal{H}}^s$. De plus, si $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in S_{z_0}^u$ et $Df(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) = (\xi_{f(z_0)}, \eta_{f(z_0)}) \in S_{f(z_0)}^u$, alors on a $\mid \eta_{f(z_0)} \mid \geq \jmath^{-1} \mid \eta_{z_0} \mid$. De même, si $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in S_{z_0}^s$ et $Df^{-1}(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) = (\xi_{f^{-1}(z_0)}, \eta_{f^{-1}(z_0)}) \in S_{f^{-1}(z_0)}^s$ et $\mid \xi_{f^{-1}(z_0)} \mid \geq \jmath^{-1} \mid \xi_{z_0} \mid$ avec $0 < \jmath < 1 - \jmath_v \jmath_h$.

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème : *Si les hypothèses (A1) et (A3) sont vérifiées, alors l'hypothèse (A2) est aussi satisfaite avec $\nu_h = \nu_v = \dfrac{\jmath}{1 - \jmath_v \jmath_h}$.*

2.2.4. Une alternative aux conditions (A1), (A2) et (A3)

Le but de ce paragraphe est de donner des conditions directement vérifiables sur des exemples. Un premier travail en ce sens a été fait par Conley et Moser [Mo], puis par Easton [Ea]. Wiggins [Wi] a ensuite mis en forme ces conditions en suivant le travail de Afraimovich, Bykov et Silnikov [ABS].

On note, pour $(x, y) \in D$,

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

On effectue alors les hypothèses suivantes :

($\bar{A}_1$)

$$\| \partial_x f_1 \| < 1 \tag{a1}$$

$$\| (\partial_y f_2)^{-1} \| < 1 \tag{a2}$$

$$1 - \| (\partial_y f_2)^{-1} \| \| \partial_x f_1 \| > 2\sqrt{\| \partial_y f_1 \| \| \partial_x f_2 \|} \| (\partial_y f_2)^{-1} \| \tag{a3}$$

$$1 - (\| \partial_x f_1 \| + \| (\partial_y f_2)^{-1} \|) + \| \partial_x f_1 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \| > \| \partial_x f_2 \| \| \partial_y f_1 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \| \tag{a4}$$

où $\| \ . \ \| = \sup_{(x,y)\in D_H} | \ . \ |$, avec $| \ . \ |$ une norme sur les matrices.

On note :

$$\| \partial_y f_1 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \| \mu_h^2 - (1 - \| \partial_x f_1 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \|)\mu_h + \| \partial_x f_2 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \| < 0 \tag{$*$}$$

$$\mu_h < \frac{1 - \| (\partial_y f_2)^{-1} \|}{\| \partial_y f_1 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \|} \tag{$**$}$$

$$\| \partial_x f_2 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \| \mu_v^2 - (1 - \| \partial_x f_1 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \|)\mu_v + \| \partial_y f_1 \| \| (\partial_y f_2)^{-1} \| < 0 \tag{$(*)_v$}$$

$$\mu_v < \frac{1 - \| \partial_x f_1 \|}{\| \partial_x f_2 \|} \tag{$(**)_v$}$$

$$0 \leq \mu_h \mu_h < 1 \tag{$***$}$$

($\bar{A}_2$) On suppose que les H_i, $i = 1, \ldots, N$ sont des bandes $\jmath_h$ horizontales, avec $\jmath_h$ vérifiant (*) et (**). Pour tout $i, j \in S$ tel que $(A)_{ij} = 1$, V_{ji} est une bande $\jmath_v$ verticale avec $\jmath_v$ satisfaisant $(*)_v$ et $(**)_v$ et $(***)$. De plus, on demande $\partial_v V_{ji} \subset \partial f(H_i)$ et $f^{-1}(\partial_v V_{ji}) \subset \partial_v H_i$.

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème : *Les hypothèses $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ impliquent A_1 et A_2.*

2.2.5. Hyperbolicité normale de l'ensemble invariant

En utilisant la caractérisation des ensembles invariants hyperbolique donnée par Newhouse et Palis [NP], nous avons le théorème suivant :

Théorème : *Sous les hypothèses A_1 et A_3, l'ensemble invariant caractérisé par dynamique symbolique est hyperbolique.*

Ce résultat est d'une grande importance car il donne de ce fait la stabilité de cet ensemble sous faible perturbation C^1. Il nous renseigne surtout sur la nature des orbites périodiques contruites à l'aide de la conjugaison au décalage de Bernouilli : elles sont normalement hyperboliques.

2.3. Démonstration du théorème B

2.3.1. Forme de l'application de retour

Supposons $F_\jmath(q) \in D_n$. Il nous faut calculer l'application $\psi_n : S \mapsto \mathbf{R}$ définie par

$$\psi_n = (F_\jmath)^{-1} \circ \Lambda \circ f^n \circ F_\jmath \,.$$

Nous avons

$$f^n(\theta, s, \rho, u) = f_a^n + r_n(\theta, \rho, s, u)\,,$$

où

$$f_a^n = f_l^n + nv_0 e_\theta = (\theta + nv_1\rho, k^n s, \rho, l^n u) + nv_0 e_\theta$$

et

$$r_{n+1} = f_l \circ r_n + r \circ f^n\,, \tag{17}$$

ce qui nous donne

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} f_l^{i-1} \circ r \circ f^{n-i+1}\,.$$

De même, nous avons

$$\Lambda = p^+ + \Pi(x - p^-) + \widehat{\Lambda}(x - p^-)\,.$$

On obtient alors l'application de retour ψ sous la forme

$$\psi = p_\jmath + \Psi + \widehat{\psi}\,,$$

où

$$\begin{array}{rcl} p_\jmath & = & \jmath^{-1}\left[\Pi(f_l^n(p^+) + nv_0 e_\theta - p^-)\right]\,, \\ \Psi & = & \Pi \circ f_l^n\,, \\ \widehat{\psi} & = & \jmath^{-1}\left[\Pi\left(r_n(\jmath q + p^+)\right) + \widehat{\Lambda}\left(f_l^n(p^+) + nv_0 e_\theta - p^- + \jmath f_l^n(q) + r_n(\jmath q + p^+)\right)\right]\,. \end{array}$$

Un rapide calcul nous donne

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k^n & 0 & 0 \\ 1 & 0 & nv_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l^n \end{pmatrix} \text{ et } p_\jmath = \jmath^{-1}\left(0,\ k^n s^+,\ \theta^+ - \theta^- + nv_0,\ u^-\right).$$

Nous allons tout d'abord vérifier les hypothèses $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ et A_3 pour ψ_l représentant la partie affine de ψ. Un contrôle du reste $\widehat{\psi}$ nous permettra alors de montrer, via un lemme de perturbation de systèmes possèdant une dynamique symbolique, que ψ est aussi conjuguée à un sous système de Bernouilli.

On conserve les définitions et notations du §.2.1 à savoir $\mathcal{A}$ pour l'alphabet et H^n la partition de S. On voit que H_n est un sous ensemble *convexe* de S.

2.3.3. Cas affine

Notons $(\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{\rho}, \hat{u})$ le système de coordonnées dans la fenêtre S. On définit l'application $F_\jmath : S \to B^+$ par

$$F_\jmath(\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{\rho}, \hat{u}) = (\jmath\hat{\theta} + \theta^+, \jmath\hat{s} + s^+, \jmath\hat{\rho}, \jmath\hat{u}) \tag{18}$$

On a alors

$$f_a^n(F_\jmath(q)) = (\jmath\hat{\theta} + \theta^+ + nv_0 + nv_1\jmath\hat{\rho}, \jmath\lambda^n\hat{s} + \lambda^n s^+, \jmath\hat{\rho}, \lambda^{-n}\jmath\hat{u})$$

Nous allons maintenant construire une famille disjointe d'ensemble H_n dans S tels que pour tout q dans H_n, on a $q \in D_n$, c'est à dire $f_a^n(F_\jmath(q)) \in B^-$.

On peut donc choisir comme sous-ensemble disjoints de S ceux définis par :

$$\begin{array}{ll} \mid \jmath\hat{\theta} + \theta^+ - \theta^- + nv_1\jmath\hat{\rho} + nv_0 \mid & \leq \ \jmath \\ \mid \lambda^n s^+ + \jmath\lambda^n\hat{s} \mid & \leq \ \jmath \\ \mid \jmath\hat{\rho} \mid & \leq \ \jmath\lambda^n \\ \mid \lambda^{-n}\jmath\hat{u} - u^- \mid & \leq \ \jmath \end{array}$$

On note qu'il suffit de choisir n assez grand, $n \geq n_1$ pour que la seconde contrainte soit vérifiée pour tout $\hat{s}$ dans S. Nous avons donc les contraintes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mid \hat{\theta} + nv_1\hat{\rho} \mid & \leq \ c_1 \\ \mid \hat{u} - u^-\dfrac{\lambda^n}{\jmath} \mid & \leq \ \lambda^n \end{array}$$

avec $c_1 \in \mathbf{R}^*$ et n vérifiant la contrainte

$$\mid \theta^+ - \theta^- + nv_0 \mid \leq c_2\jmath$$

où $c_2 \in \mathbf{R}^*$ vérifie $c_1 + c_2 = 1$.

Notons $D_H = \bigcup_{i \in \mathcal{A}} H_i$

1. Vérification de la condition $\bar{A}_1$

Notons $x = (\hat{\theta}, \hat{s}) \in \mathbf{R}^2$, $y = (\hat{\rho}, \hat{u}) \in \mathbf{R}^2$ et

$$\Psi_l(x,y) = (\Psi_1(x,y), \Psi_2(x,y))$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_1(x,y) &= (\hat{\rho}, \lambda^n \hat{s} + \lambda^n \frac{s^+}{\jmath}) \\ \Psi_2(x,y) &= (\hat{\theta} + nv_1\hat{\rho} + \frac{\theta^+ - \theta^- + nv_0}{\jmath}, \lambda^{-n}\hat{u} + \frac{u^-}{\jmath}) \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\partial_x \Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \;\; , \; \partial_y \Psi_2(x,y) = \begin{pmatrix} nv_1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix}$$

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice 2×2 sur $\mathbf{R}$, on note $\mid M \mid = \sup_{j=1,2} \left(\sum_{i=1}^{2} \mid m_{ij} \mid \right)$ la norme 1 sur les matrices et

$$\| \; . \; \| = \sup_{(x,y) \in D_H} \mid M(x,y) \mid$$

On a alors :

$$\mid \partial_x \Psi_1 \mid = \lambda^n \;\; , \; \mid (\partial_y \Psi_2)^{-1} \mid = \sup(\frac{1}{n \mid v_1 \mid}, \lambda^n)$$

On a donc pour $n \geq n_2$,

$$\begin{array}{lcl} \mid \partial_x \Psi_1 \mid & < & 1 \\ \mid (\partial_y \Psi_2)^{-1} \mid & < & 1 \end{array}$$

qui sont des conditions d'hyperbolicité.

Nous avons aussi :

$$\partial_y \Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; \partial_x \Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit $\mid \partial_y \Psi_1 \mid = 1$ et $\mid \partial_x \Psi_2 \mid = 1$.

Nous avons donc :

$$\begin{array}{ll} \| \partial_x \Psi_1 \| = \lambda^{n^*} & \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| = \dfrac{1}{n^* \mid v_1 \mid} \\ \| \partial_y \Psi_1 \| = 1 & \| \partial_x \Psi_2 \| = 1 \end{array}$$

Nous devons vérifier que :

$$1 - \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| \| \partial_x \Psi_1 \| > 2\sqrt{\| \partial_y \Psi_1 \| \| \partial_x \Psi_2 \| \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \|}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{2}{n^* \mid v_1 \mid} < 1 - \frac{\lambda^{n^*}}{n^* \mid v_1 \mid}$$

soit

$$n^* \mid v_1 \mid > 2 + \lambda^{n^*}$$

ce qui est vrai pour n^* assez grand, à savoir

$$n^* > \frac{3}{\mid v_1 \mid}$$

Nous devons aussi vérifier

$$1 - (\| \partial_x \Psi_1 \| + \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \|) + \| \partial_x \Psi_1 \| \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| > \| \partial_x \Psi_2 \| \| \partial_y \Psi_1 \| \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \|$$

or, on a

$$\| \partial_x \Psi_2 \| \| \partial_y \Psi_1 \| \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| = \frac{1}{n^* \mid v_1 \mid}$$

et

$$(\| \partial_x \Psi_1 \| + \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \|) + \| \partial_x \Psi_1 \| \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| = \lambda^{n^*} \left(1 + \frac{1}{n^* \mid v_1 \mid} \right) + \frac{1}{n^* \mid v_1 \mid}$$

L'inégalité précédente est donc vérifiée si :

$$2 - \lambda^{n^*} < (1 - \lambda^{n^*}) n^* \mid v_1 \mid$$

Nous avons $2 - \lambda^{n^*} < 2$ et $(1 - \lambda) n^* \mid v_1 \mid < (1 - \lambda^{n^*}) n^* \mid v_1 \mid$. L'inégalité est donc vérifiée si

$$2 < (1 - \lambda) n^* \mid v_1 \mid$$

soit

$$n^* > \frac{2}{(1 - \lambda) \mid v_1 \mid}$$

et toutes les conditions de $\bar{A}_1$ sont vérifiées. $\square$

2. Vérification des conditions sectorielles (A_3)

On note

$$\begin{array}{rcl} S^s_{p_0} & = & \{ (h_{p_0}, v_{p_0}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mid \mid v_{p_0} \mid \leq \jmath_h \mid h_{p_0} \mid \} \\ S^u_{p_0} & = & \{ (h_{p_0}, v_{p_0}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mid \mid h_{p_0} \mid \leq \jmath_v \mid v_{p_0} \mid \} \end{array}$$

On a

$$D\Psi_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 & 0 \\ 1 & 0 & nv_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix}$$

Notons $h_{p_0} = (h_{\hat{\theta}}, h_{\hat{s}})$ et $v_{p_0} = (v_{\hat{\rho}}, v_{\hat{u}})$. On a

$$D\Psi_l \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\hat{\rho}} \\ \lambda^n h_{\hat{s}} \\ h_{\hat{\theta}} + nv_1 v_{\hat{\rho}} \\ \lambda{-}nv_{\hat{u}} \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{array}{rcl} h_{\Psi(p_0)} & = & (v_{\hat{\rho}}, \lambda^n h_{\hat{s}}) \\ v_{\Psi(p_0)} & = & (h_{\hat{\theta}} + nv_1 v_{\hat{\rho}}, \lambda^{-n} v_{\hat{u}}) \end{array}$$

a) Supposons que $(h_{p_0}, v_{p_0}) \in S^u_{p_0}$ et vérifions la condition $D\Psi(S^u_{\mathcal{H}}) \subset S^u_{\mathcal{V}}$:

Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \mid v_{\Psi(p_0)} \mid & \geq & \lambda^{-n} \mid v_{\hat{u}} \mid + nv_1 \mid v_{\hat{\rho}} \mid - \mid h_{\hat{\theta}} \mid \\ & \geq & \lambda^{-n} \mid v_{\hat{\rho}} \mid + \lambda^{-n} \mid h_{\hat{\theta}} \mid + \lambda^{-n} \mid -\lambda^{-n} \jmath_v \mid v_{\hat{\rho}} \mid - \mid h_{\hat{\theta}} \mid \\ & \geq & \lambda^{-n}(1-\jmath_v) \mid v_{\hat{\rho}} \mid + \lambda^{-n} \mid h_{\hat{s}} \mid + (\lambda^{-n} - 1) \mid h_{\hat{\theta}} \mid \\ & \geq & \lambda^{-n}(1-\jmath_v) \mid v_{\hat{\rho}} \mid + \lambda^{-n} \mid h_{\hat{s}} \mid \\ & \geq & \lambda^{-n}(1-\jmath_v)(\mid v_{\hat{\rho}} \mid + \dfrac{1}{1-\jmath_v} \mid h_{\hat{s}} \mid) \end{array}$$

soit, pour $\jmath_v$ tel que $\frac{1}{1-\jmath_v} > 1$, on a

$$\mid v_{\Psi(p_0)} \mid \geq \lambda^{-n}(1-\jmath_v) \mid h_{\Psi(p_0)} \mid$$

Nous avons $\dfrac{\lambda^n}{1-\jmath_v} < \dfrac{\lambda^{n^*}}{1-\jmath_v}$, où n^* est la plus petite valeur de n autorisée par notre choix de l'alphabet $\mathcal{A}$.

Pour vérifier la condition sectorielle précédente, nous devons avoir

$$\frac{\lambda^{n^*}}{1-\jmath_v} \leq \jmath_v$$

soit

$$\frac{1-\sqrt{1-4\lambda^{n^*}}}{2} < \jmath_v < 1$$

b) Nous allons maintenant vérifier que $D\Psi^{-1}(S^s_{\mathcal{V}}) \subset S^s_{\mathcal{H}}$:

Nous avons

$$D\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} -nv_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$D\Psi^{-1}\begin{pmatrix} h_{p_0} \\ v_{p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -nv_1 h_{\hat{\theta}} + v_{\hat{\rho}} \\ \lambda^{-n} h_{\hat{s}} \\ h_{\hat{\theta}} \\ \lambda^n v_{\hat{u}} \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{array}{rcl} h_{\Psi^{-1}(p_0)} & = & (-nv_1 h_{\hat{\theta}} + v_{\hat{\rho}}, \lambda^{-n} h_{\hat{s}}) \\ v_{\Psi^{-1}(p_0)} & = & (h_{\hat{\theta}}, \lambda^n v_{\hat{u}}) \end{array}$$

Supposons désormais que $(h_{p_0}, v_{p_0}) \in S^s_{p_0}$. Nous avons alors

$$\begin{array}{rcl} \mid h_{\Psi^{-1}(p_0)} \mid & \geq & n \mid v_1 \mid\mid h_{\hat{\theta}} \mid - \mid v_{\hat{\rho}} \mid + \lambda^{-n} \mid h_{\hat{s}} \mid \\ & \geq & n \mid v_1 \mid\mid h_{\hat{\theta}} \mid - \jmath_h(\mid h_{\hat{\theta}} \mid + \mid h_{\hat{s}} \mid) + \lambda^{-n} \mid h_{\hat{s}} \mid + \mid v_{\hat{u}} \mid \\ & \geq & (n \mid v_1 \mid - \jmath_h) \mid h_{\hat{\theta}} \mid + \mid v_{\hat{u}} \mid + (\lambda^{-n} - \jmath_h) \mid h_{\hat{s}} \mid \end{array}$$

Comme $\jmath_h < 1$ nous avons $\lambda^{-n} - \jmath_h > 0$, soit

$$\mid h_{\Psi^{-1}(p_0)} \mid \geq (n \mid v_1 \mid - \jmath_h) \mid h_{\hat{\theta}} \mid + \mid v_{\hat{u}} \mid$$

Supposons n assez grand pour avoir

$$n \mid v_1 \mid - \jmath_h > \lambda^n$$

alors, nous avons

$$\mid h_{\Psi^{-1}(p_0)} \mid \geq (n \mid v_1 \mid - \jmath_h)(\mid h_{\hat{\theta}} \mid + \frac{1}{n \mid v_1 \mid - \jmath_h} \mid v_{\hat{u}} \mid) \geq (n \mid v_1 \mid - \jmath_h)(\mid h_{\hat{\theta}} \mid + \lambda^n \mid v_{\hat{u}} \mid)$$

soit

$$\mid h_{\Psi^{-1}(p_0)} \mid \geq (n \mid v_1 \mid - \jmath_h) \mid v_{\Psi^{-1}(p_0)} \mid$$

Comme $(n \mid v_1 \mid - \jmath_h)^{-1} \mid \geq (n^* \mid v_1 \mid - \jmath_h)^{-1}$, où n^* est le plus petit élément autorisé par l'alphabet $\mathcal{A}$.

Nous devons alors vérifier

$$(n^* \mid v_1 \mid - \jmath_h)^{-1} \leq \jmath_h$$

Nous obtenons donc

$$\frac{1}{n^* \mid v_1 \mid} \leq \jmath_h < 1$$

c) Nous allons maintenant vérifier les conditions de cône avec les contraintes obtenues aux points a) et b).

Supposons $(h_{p_0}, v_{p_0}) \in S^u_{p_0}$, alors

$$\mid v_{\Psi(p_0)} \mid \geq n \mid v_1 \mid\mid v_{\hat{\rho}} \mid + \lambda^{-n} \mid v_{\hat{u}} \mid - \mid h_{\hat{\theta}} \mid \geq (n \mid v_1 \mid - \jmath_v) \mid v_{\hat{\rho}} \mid + (\lambda^{-n} - \jmath_v) \mid v_{\hat{u}} \mid$$

Notons $\alpha_v = \min(n \mid v_1 \mid - \jmath_v, \lambda^{-n} - \jmath_v)$, alors

$$\mid v_{\Psi(p_0)} \mid \geq \alpha_v \mid v_{p_0} \mid$$

Supposons maintenant $(h_{p_0}, v_{p_0}) \in S^s_{p_0}$, alors

$$\begin{array}{rcl} \mid h_{\Psi^{-1}(p_0)} \mid & \geq & n \mid v_1 \mid h_{\hat{\theta}} \mid - \mid v_{\hat{\rho}} \mid + \lambda^{-n} \mid h_{\hat{s}} \mid \\ & \geq & (n \mid v_1 \mid - \jmath_h) \mid h_{\hat{\theta}} \mid + (\lambda^{-n} - \jmath_h) \mid h_{\hat{s}} \mid \\ & \geq & \alpha_h(\mid h_{\hat{\theta}} \mid + \mid h_{\hat{s}} \mid) \end{array}$$

où $\alpha_h = \min(n \mid v_1 \mid - \jmath_h, \lambda^{-n} - \jmath_h)$. Nous avons donc

$$\mid h_{\Psi^{-1}(p_0)} \mid \geq \alpha_h \mid h_{p_0} \mid$$

Notons $\jmath = \max(\alpha_v^{-1}, \alpha_h^{-1})$. La condition que nous devons maintenant vérifier est

$$\jmath < 1 - \jmath_v \jmath_h \qquad (A3)$$

Nous avons

$$\jmath_v \jmath_h \sim \frac{\lambda^{n^*}}{n^* \mid v_1 \mid}$$

Dans ce cas, la condition (A3) est trivialement vérifiée. □

3. Vérification de la condition $\bar{A}_2$

Il convient tout d'abord d'exprimer Ψ_l^{-1}. Nous avons

$$\Psi_l^{-1}(q) = (\mu^{-1}(\mu\hat{\rho} + \theta^- - \theta^+ - nv_0 - nv_1\mu\hat{\theta}), \lambda^{-n}\hat{s}, \hat{\theta}, \lambda^n(\mu\hat{u} + u^-))$$

Il est alors facile de représenter les ensembles H_n et $V_{nm} = \Psi(H_n) \cap H_m$ et de vérifier la condition $\bar{A}_2$. En effet, nous avons

On peut représenter V_{nm} comme

Fig.4. V_{nm}

On en déduit que $\partial_v V_{nm}$ et $\partial\Psi(H_n)$ sont donnés par

Fig. $\partial_v V_{nm} \subset \partial_h \Psi(H_n)$

On a donc bien $\partial_v V_{nm} \subset \partial\Psi(H_n)$.

De même, on a $\Psi_l^{-1}(\partial_v V_{nm})$ et $\partial_v H_n$ qui se représente comme

Fig. $\Psi^{-1}(\partial_v V_{nm}) \subset \partial_v H_n$

On en déuit alors que $\Psi_l^{-1}(\partial_v V_{nm}) \subset \partial_v H_n$, ce qui termine la vérification de la condition $\bar{A}_2$. $\square$

Les conditions $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ nous assure l'existence d'une dynamique symbolique à une infinité de symbole. La condition A_3 nous dit que l'ensemble invariant ainsi caractérisé est hyperbolique.

Remarque : On note que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la valeur de N. Toute notre construction d'étend au cas $N = \infty$, en remarquant que les bandes horizontales H_n tendent lorsque $n \to \infty$ vers la variété stable du tore. L'ensemble invariant ainsi caractérisé, noté I_∞ à une structure hyperbolique (cf. A_3). On note O_n l'orbite périodique associée au symbole $(\dots nnn \dots)$ et $W^s(O_n)$ (resp. $W^u(O_n)$) sa variété stable (resp. instable). On se donne $\epsilon > 0$, alors pour n suffisamment grand, on a $W^s(O_n)$ (resp. $W^u(O_n)$) qui est ϵ proche en topologie C^1 de $W^s(T)$ (resp. $W^u(T)$).

2.3.4. Contrôle des restes

Le lemme suivant nous donne les conditions sur la perturbation Ψ^r de Ψ sous lesquelles persiste la conjugaison au décalage de Bernouilli.

Lemme perturbatif : *Soit $\Psi = \Psi_l + \Psi^r$ une application de S dans S. Supposons que l'application Ψ_l soit conjuguée à un décalage de Bernouilli sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Alors Ψ est aussi cpnjuguée à un décalage de Bernouilli si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(c1) $\| \partial_x \Psi_1^r \| < 1 - \| \partial_x \Psi_1 \|$

(c2) $\| \partial_y \Psi_2^r \| < 1 / \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \|$

(c3) $a = 1 - \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| (\| \partial_x \Psi_1 \| + \| \partial_x \Psi_1^r \|)$
$b = 2 \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| \sqrt{(\| \partial_y \Psi_1 \| + \| \partial_y \Psi_1^r \|)(\| \partial_x \Psi_2 \| + \| \partial_x \Psi_2^r \|)}$

$$a \geq b$$

(c4) $c = 1 - (\| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| + \| \partial_x \Psi_1 \| + \| \partial_x \Psi_1^r \|) + \dfrac{\| \partial_x \Psi_1 \| - \| \partial_x \Psi_1^r \|}{\| \partial_y \Psi_2 \| + \| \partial_y \Psi_2^r \|}$
$d = \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| (\| \partial_x \Psi_2 \| + \| \partial_x \Psi_2^r \|)(\| \partial_y \Psi_1 \| + \| \partial_y \Psi_1^r \|)$

$$c > d$$

La démonstration est donnée en appendice.

1. Les contraintes sur la perturbation dans notre exemple

Nous reprenons les conditions (c1) à (c4) précédentes. Elles nous donnent les contraintes suivantes :

$$\| \partial_x \Psi_1^r \| < 1 - \lambda^{n^*} \tag{c1}$$

$$\| \partial_y \Psi_2^r \| < n^* \mid v_1 \mid \tag{c2}$$

$$1 - \left(\frac{\lambda^{n^*} + \| \partial_x \Psi_1^r \|}{N \mid v_1 \mid} \right) \geq \frac{2}{n^* \mid v_1 \mid} \sqrt{(1 + \| \partial_y \Psi_1^r \|)(1 + \| \partial_x \Psi_2^r \|)} \tag{c3}$$

$$1 - \left(\frac{1}{n^* \mid v_1 \mid} + \lambda^{n^*} + \| \partial_x \Psi_1^r \| \right) + \frac{\lambda^{n^*} - \| \Psi_1^r \|}{N \mid v_1 \mid} > \frac{1 + \| \partial_x \Psi_2^r \|}{n^* \mid v_1 \mid} (1 + \| \partial_y \Psi_1^r \|) \tag{c4}$$

2. Calcul des différentes matrices perturbées

a) Préliminaire : Nous avons

$$\Psi_1^r(\widehat{q}) = \jmath^{-1}(r_\rho^n(\aleph), \lambda^n r_s^n(\aleph)) + \jmath^{-1}(h_r^\theta(\imath), h_r^s(\imath))$$

et

$$\Psi_2^r(\widehat{q}) = \jmath^{-1}(r_\theta^n(\aleph) + nv_1 r_\rho^n(\aleph), \lambda^{-n} r_u^n(\aleph)) + \jmath^{-1}(h_r^\rho(\imath), h_r^u(\imath))$$

où

$$\begin{array}{rcl} \aleph & = & \jmath\widehat{q} + p^+ \\ \imath & = & f^n(\aleph) - p^- \end{array}$$

Nous noterons pour $w = (\theta, s, \rho, u)$ et f une fonction de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$, $(f(w))_k$ la composante en k de $f(w)$.

Nous devons tout d'abord exprimer les quantités suivantes :

$$\partial_{\hat{z}}(r_w^n(\aleph)) = \sum_{k=(\theta,s,\rho,u)} \partial_k r_w^n(\aleph)\, \partial_{\hat{z}}(\aleph)_k$$

pour $\hat{z} \in \{\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{\rho}, \hat{u}\}$ et $w \in \{\theta, s, \rho, u\}$.

Notons z la composante non chapautée de $\hat{z}$. Comme $\partial_{\hat{z}}(\aleph)_k = \delta_{zk}\jmath$, où $\delta_{zk} = 0$ si $z \neq k$ et $\delta_{zk} = 1$ sinon, nous obtenons :

$$\partial_{\hat{z}}(r_w^n(\aleph)) = \jmath\partial_z r_w^n(\aleph) \tag{f1}$$

pour $\hat{z} = (\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{\rho}, \hat{u})$ et $w = (\theta, s, \rho, u)$.

Nous avons aussi, en conservant les mêmes notations, à exprimer les quantités suivantes :

$$\partial_{\hat{z}}(h_r^w(\imath)) = \sum_k \partial_k h_r^w(\imath)\, \partial_{\hat{z}}(\imath)_k$$

Or, nous avons

$$f^n(\aleph) - p^- = f_a^n(\aleph) + r^n(\aleph) - p^-$$

d'où l'on déduit

$$\partial_{\hat{z}}(\imath)_k = \partial_{\hat{z}}(f_a^n(\aleph))_k + \partial_{\hat{z}}(r_k^n(\aleph))$$

Le second terme est obtenu à l'aide de (f1). Pour le premier terme, nous avons, en utilisant l'expression de $f_a^n(\aleph)$:

$$\partial_{\hat{z}}(f_a^n(\aleph))_k = \delta_{\hat{z}k}\jmath$$

pour $\hat{z} \in \{\hat{\theta}, \hat{s}, \hat{u}\}$ et

$$\partial_{\hat{\rho}}(f_a^n(\aleph))_k = \begin{cases} nv_1\jmath & \text{pour} \quad k=\theta \\ 0 & \qquad\quad k=s \\ \jmath & \qquad\quad k=\rho \\ 0 & \qquad\quad k=u \end{cases}$$

On obtient donc finalement :

$$\partial_{\hat{z}}(h_r^w(\imath)) = \jmath \sum_{k=(\theta,\rho,s,u)} \partial_k h_r^w(\imath)(\partial_z r_k^n(\aleph) + \delta_{zk}(1+nv_1\delta_{\rho z}\delta_{\theta k})) \tag{f2}$$

b) Expression des différentes matrices : Nous obtenons donc

$$\partial_x \Psi_1^r(\widehat{q}) = \begin{pmatrix} \partial_\theta r_\rho^n(\aleph) & \partial_s r_\rho^n(\aleph) \\ \lambda^n \partial_\theta r_s^n(\aleph) & \lambda^n \partial_s r_s^n(\aleph) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_k \partial_k h_r^\theta(\imath)\,(\partial_\theta r_k^n(\aleph) + \delta_{\theta k}) & \sum_k \partial_k h_r^\theta(\imath)\,(\partial_s r_k^n(\aleph) + \delta_{sk}) \\ \sum_k \partial_k h_r^s(\imath)\,(\partial_\theta r_k^n(\aleph) + \delta_{\theta k}) & \sum_k \partial_k h_r^s(\imath)\,(\partial_s r_k^n(\aleph) + \delta_{sk}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \partial_y \Psi_1^r(\widehat{q}) &= \begin{pmatrix} \partial_\rho r_\rho^n(\aleph) & \partial_u r_\rho^n(\aleph) \\ \lambda^n \partial_\rho r_s^n(\aleph) & \lambda^n \partial_u r_s^n(\aleph) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_k \partial_k h_r^\theta(\imath)\,(\partial_\rho r_k^n(\aleph) + \delta_{\rho k}(1+nv_1\delta_{\theta k})) & \sum_k \partial_k h_r^\theta(\imath)\,(\partial_u r_k^n(\aleph) + \delta_{uk}) \\ \sum_k \partial_k h_r^s(\imath)\,(\partial_\rho r_u^n(\aleph) + \delta_{\rho k}(1+nv_1\delta_{\theta k})) & \sum_k \partial_k h_r^s(\imath)\,(\partial_u r_k^n(\aleph) + \delta_{uk}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi_2^r(\widehat{q}) &= \begin{pmatrix} \partial_\theta r_\theta^n(\aleph) + nv_1\partial_\theta r_\rho^n(\aleph) & \partial_s r_\theta^n(\aleph) + nv_1\partial_s r_\rho^n(\aleph) \\ \lambda^{-n}\partial_\theta r_u^n(\aleph) & \lambda^{-n}\partial_s r_u^n(\aleph) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_k \partial_k h_r^\rho(\imath)\,(\partial_\theta r_k^n(\aleph) + \delta_{\theta k}) & \sum_k \partial_k h_r^\rho(\imath)\,(\partial_s r_k^n(\aleph) + \delta_{sk}) \\ \sum_k \partial_k h_r^u(\imath)\,(\partial_\theta r_k^n(\aleph) + \delta_{\theta k}) & \sum_k \partial_k h_r^u(\imath)\,(\partial_s r_k^n(\aleph) + \delta_{sk}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_y \Psi_2^r(\widehat{q}) &= \begin{pmatrix} \partial_\rho r_\theta^n(\aleph) + nv_1\partial_\rho r_\rho^n(\aleph) & \partial_u r_\theta^n(\aleph) + nv_1\partial_u r_\rho^n(\aleph) \\ \lambda^{-n}\partial_\rho r_u^n(\aleph) & \lambda^{-n}\partial_u r_u^n(\aleph) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_k \partial_k h_r^\rho(\imath)\,(\partial_\rho r_k^n(\aleph) + \delta_{\rho k}(1+nv_1\delta_{\theta k})) & \sum_k \partial_k h_r^\rho(\imath)\,(\partial_u r_k^n(\aleph) + \delta_{uk}) \\ \sum_k \partial_k h_r^u(\imath)\,(\partial_\rho r_u^n(\aleph) + \delta_{\rho k}(1+nv_1\delta_{\theta k})) & \sum_k \partial_k h_r^u(\imath)\,(\partial_u r_k^n(\aleph) + \delta_{uk}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Estimations des normes :

Nous avons les majorations suivantes[18] :

[18]L'inégalité ($\mathcal{M}$) est démontrée en appendice.

$$| \partial_k r_w^n(\aleph) | \leq c\,\lambda^{3n+1} \qquad (\mathcal{M})$$
$$| \partial_k h_r^w(\imath) | \leq M\jmath$$

On a

$$| \partial_x \Psi_1^r(\widehat{q}) | \leq (c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1) + \lambda^n c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1))$$

On en déduit

$$0 \geq \| \partial_x \Psi_1^r(\widehat{q}) \| \leq 2(c\lambda^{3n^*+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n^*+1} + 1)) \qquad \text{(m1)}$$

De même, nous avons

$$| \partial_y \Psi_1^r(\widehat{q}) | \leq c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1 + nv_1) + \lambda^n c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1 + nv_1))$$

d'où

$$\| \partial_y \Psi_1^r(\widehat{q}) \| \leq 2(c\lambda^{3n^*+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n^*+1} + 1 + Nv_1)) \qquad \text{(m2)}$$

On a aussi

$$| \partial_x \Psi_2^r(\widehat{q}) | \leq c\lambda^{3n+1} + nv_1 c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1) + \lambda^{-n} c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1)$$

d'où

$$\| \partial_x \Psi_2^r(\widehat{q}) \| \leq 2(c\lambda^{3n^*+1} + n^* v_1 c\lambda^{3n^*+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n^*+1} + 1) + c\lambda^{2n^*+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n^*+1} + 1))$$

soit

$$\| \partial_x \Psi_2^r(\widehat{q}) \| \leq 2(c\lambda^{2n^*+1} + 4M\jmath + n^* v_1 c\lambda^{3n^*+1}) \qquad \text{(m3)}$$

On a

$$| \partial_y \psi_2^r(\widehat{q}) | \leq c\lambda^{3n+1} + nv_1 c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1 + nv_1) + \lambda^{-n} c\lambda^{3n+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n+1} + 1 + nv_1)$$

donc

$$0 \geq \| \partial_y \psi_2^r(\widehat{q}) \| \leq c\lambda^{2n^*+1} + n^* v_1 c\lambda^{3n^*+1} + 8M\jmath(c\lambda^{3n^*+1} + 1 + Nv_1) \qquad \text{(m4)}$$

d) Vérification de la condition (c1) :

On doit montrer que $\| \partial_x \Psi_1^r \| < 1 - \lambda^{n^*}$. On choisit n^* tel que $\jmath \leq (1 - \lambda^{n^*})/2$. La condition (c1) est alors vérifiée en utilisant (m1).

e) Vérification de la condition (c2) :

On voit qu'il suffit de choisir N tel que $\jmath N \leq n^*$, soit

$$N \leq \frac{n^*}{\jmath}$$

f) Vérification de la condition (c3) :

La condition (c3) s'écrit comme

$$n^* v_1 - (\lambda^{n^*} + 2(c\lambda^{3n^*+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n^*} + 1)) \geq$$
$$2\sqrt{(1 + c\lambda^{3n^*+1} + 4M\jmath(c\lambda^{3n^*} + 1 + Nv_1)(1 + 2(c\lambda^{2n^*+1} + 4M\jmath + n^* v_1 c\lambda^{3n^*+1}))}$$

On voit qu'il suffit de choisir N tel que $\jmath N \mid v_1 \mid < n^* \mid v_1 \mid /16$, soit

$$N \leq \frac{n^*}{16\jmath}$$

g) Vérification de la condition (c4) :

La condition (c4) sécrit comme

$$1 - \frac{1}{n^* \mid v_1 \mid} - \lambda^{n^*} - \parallel \partial_x \Psi_1^r \parallel + \frac{\lambda^{n^*} - \parallel \partial_x \Psi_1^r \parallel}{N \mid v_1 \mid} > \frac{1 + \parallel \partial_x \Psi_2^r \parallel}{n^* \mid v_1 \mid}(1 + \parallel \partial_y \Psi_1^r \parallel)$$

On a

$$\frac{1 + \parallel \partial_x \Psi_2^r \parallel}{n^* \mid v_1 \mid}(1 + \parallel \partial_y \Psi_1^r \parallel) < \frac{(1 + \jmath)(1 + n^*/16)}{n^*}$$

avec la condition précédente sur N. Il suffit donc de choisir $\jmath$ assez petit et n^* assez grand (ce qui est une conséquence) pour avoir la condition (c4) vérifiée. $\square$

2.4. Conclusion et perspectives

2.4.1. Généralisation ?

L'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, concernant la forme de l'application de section, est la plus restrictive de notre travail. Easton [Ea] suggère que cette hypothèse peut être affaiblie ou même supprimée. Néanmoins, les éléments suivants nous permettent de mettre en doute cette opinion :

S. Wiggins ([Wi], Th. p. 324) a démontré l'existence d'une dynamique symbolique au voisinage d'un tore homocline normalement hyperbolique. La méthode consiste à mettre en évidence une famille de bandes horizontales et verticales ayant un comportement particulier. La démonstration utilise le fait que toute variété transverse à la variété stable du tore converge en topologie C^1 vers la variété instable ([Wi], Toral λ-lemma, lemme , p. 325).

Dans la partie 1.1, nous avons montré un analogue du λ-lemme pour un tore partiellement hyperbolique. Néanmoins, notre résultat n'est valable que pour des variétés appartenant à un cône donné (la condition d'inclinaison).

En suivant l'approche de Wiggins, il est alors possible de mettre en évidence une dynamique symbolique si l'on peut assurer que l'image de la variété redressée par l'application de section soit encore dans ce cône. Ceci dépend de la forme de la matrice Π.

La classe des applications de section (et par conséquent de la matrice Π) est donc liée au respect d'une condition d'inclinaison. Celle-ci traduit le caractère partiellement hyperbolique des tores et donc le fait qu'ils sont non-isolés dans la surface d'énergie à laquelle ils appartiennent. Il est néanmoins difficile (voir impossible) de préciser plus avant la classe des applications pour laquelle notre résultat reste valable.

2.4.2. Non-intégrabilité analytique

Il est bien connu que l'intersection transverse des variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme du plan implique la non existence d'intégrales premières analytiques (non triviales).

En dimension supérieur, S. Dovbysh [Do] montre un résultat analogue sous certaines conditions génériques qui peuvent être vérifiées pour un exemple précis.

Holmes-Marsden [HM] et Xia [Xi] ont annoncé un résultat analogue pour les tores partiellement hyperboliques. Aucune démonstration n'existe à ce jour. Nous proposons deux approches pour résoudre ce problème : la première consiste à écrire l'analogue du travail de S. Dovbysh [Do] pour un tore partiellement hyperbolique; la seconde, consiste à utiliser les orbites périodiques hyperboliques obtenues via la dynamique symbolique et à vérifier les conditions énoncées par S. Dovbysh [Do].

A. Démonstration du lemme perturbatif

Dans tout ce qui suit, nous allons utiliser le lemme suivant ([PM] , p. 60) :

Lemme : *Soit E un espace de Banach et $L \in \mathcal{L}(E, E)$ satisfait $\| L \| \leq a < 1$ alors $I + L$ est un isomorphisme et*

$$\| (I + L)^{-1} \| \leq 1/(1 - a)$$

a) Les deux première conditions s'écrivent facilement. En effet, nous avons

$$\| \partial_x \Psi_1 + \partial_x \Psi_1^r \| \leq \| \partial_x \Psi_1 \| + \| \partial_x \Psi_1^r \|$$

et une condition suffisante nous assurant de vérifier les inégalités $\bar{A}_1$ pour l'application perturbée est

$$\| \partial_x \Psi_1^r \| < 1 - \| \partial_x \Psi_1 \|$$

b) Pour la seconde condition, on remarque que

$$\| (\partial_y \Psi_2 + \partial_y \Psi_2^r)^{-1} \| \leq \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| \| (I + (\partial_y \Psi_2)^{-1} (\partial_y \Psi_2^r)^{-1} \|$$

Le lemme technique nous donne alors :

$$\| (\partial_y \Psi_2 + \partial_y \Psi_2^r)^{-1} \| \leq \frac{\| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \|}{1 - \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} (\partial_y \Psi_2^r) \|} \leq \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| < 1 \tag{m}$$

en supposant

$$\| (\partial_y \Psi_2)^{-1} (\partial_y \Psi_2^r) \| < 1 \tag{c}$$

La condition (c) suffit donc pour assurer l'inégalité pour l'application perturbée. En notant que

$$\| (\partial_y \Psi_2)^{-1} (\partial_y \Psi_2^r) \| \leq \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| \| \partial_y \Psi_2^r \|$$

une condition suffisante est alors

$$\| \partial_y \Psi_2^r \| < \frac{1}{\| (\partial y \Psi_2)^{-1} \|}$$

c) On a

$$\| \partial_x \Psi_1 + \partial_x \Psi_1^r \| \leq \| \partial_x \Psi_1 \| + \| \partial_x \Psi_1^r \|$$

et l'inégalité (m) nous donne

$$\begin{aligned} 1 - \| (\partial_y \Psi_2 + \partial_y \Psi_2^r)^{-1} \| \| \partial_x \Psi_1 + \partial_x \Psi_1^r \| &\geq 1 - \left(\frac{\| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| (\| \partial_x \Psi_1 \| + \| \partial_x \Psi_1^r \|)}{1 - \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} (\partial_y \Psi_2^r) \|} \right) \\ &\geq 1 - \| (\partial_y \Psi_2)^{-1} \| (\| \partial_x \Psi_1 \| + \| \partial_x \Psi_1^r \|) \end{aligned}$$

On a aussi

$$2\sqrt{\| \partial_y\Psi_1 + \partial_y\Psi_1^r \| \| \partial_x\Psi_2 + \partial_x\Psi_2^r \|} \| (\partial_y\Psi_2 + \partial_y\Psi_2^r)^{-1} \|$$

$$\leq 2 \| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \| \sqrt{(\| \partial_y\Psi_1 \| + \| \partial_y\Psi_1^r \|)(\| \partial_x\Psi_2 \| + \| \partial_x\Psi_2^r \|)}$$

Une condition suffisante pour vérifier la condition 3) est donc :

$$1- \| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \| (\| \partial_x\Psi_1 \| + \| \partial_x\Psi_1^r \|) \geq$$

$$2 \| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \| \sqrt{(\| \partial_y\Psi_1 \| + \| \partial_y\Psi_1^r \|)(\| \partial_x\Psi_2 \| + \| \partial_x\Psi_2^r \|)}$$

d) On a

$$\| \partial_x\Psi_1 + \partial_x\Psi_1^r \| + \| (\partial_y\Psi_2 + \partial_y\Psi_2^r)^{-1} \| \leq \| \partial_x\Psi_1 \| + \| \partial_x\Psi_1^r \| + \| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \|$$

en utilisant l'inégalité (m).

De plus

$$\| \partial_x\Psi_1 + \partial_x\Psi_1^r \| \| (\partial_y\Psi_2 + \partial_y\Psi_2^r)^{-1} \| \geq \frac{\| \partial_x\Psi_1 \| - \| \partial_x\Psi_1^r \|}{\| \partial_y\Psi_2 \| + \| \partial_y\Psi_2^r \|}$$

d'où l'on déduit

$$1 - (\| \partial_x\Psi_1 + \partial_x\Psi_1^r \| + \| (\partial_y\Psi_2 + \partial_y\Psi_2^r)^{-1} \|) + \| \partial_x\Psi_1 + \partial_x\Psi_1^r \| \| (\partial_y\Psi_2 + \partial_y\Psi_2^r)^{-1} \|$$

$$\geq 1 - (\| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \| + \| \partial_x\Psi_1 \| + \| \partial_x\Psi_1^r \|) + \frac{\| \partial_x\Psi_1 \| - \| \partial_x\Psi_1^r \|}{\| \partial_y\psi_2 \| + \| \partial_y\Psi_2^r \|}$$

De plus, on a

$$\begin{array}{l}\| \partial_x\Psi_2 + \partial_x\Psi_2^r \| \| \partial_y\Psi_1 + \partial_y\Psi_1^r \| \| (\partial_y\Psi_2 + \partial_y\Psi_2^r)^{-1} \| \leq \\ (\| \partial_x\Psi_2 \| + \| \partial_x\Psi_2^r \|)(\| \partial_y\Psi_1 \| + \| \partial_y\Psi_1^r \|) \ \| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \|\end{array}$$

Une condition suffisante pour vérifier la condition 4) est donc :

$$1 - (\| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \| + \| \partial_x\Psi_1 \| + \| \partial_x\Psi_1^r \|) + \frac{\| \partial_x\Psi_1 \| - \| \partial_x\Psi_1^r \|}{\| \partial_y\psi_2 \| + \| \partial_y\Psi_2^r \|}$$

$$\geq (\| \partial_x\Psi_2 \| + \| \partial_x\Psi_2^r \|)(\| \partial_y\Psi_1 \| + \| \partial_y\Psi_1^r \|) \ \| (\partial_y\Psi_2)^{-1} \|$$

ce qui termine la démonstration du lemme perturbatif. □

B. Démonstration de l'inégalité ($\mathcal{M}$)

Nous avons

$$\jmath q + p^+ = (\theta_1, s_1, \rho_1, u_1), \quad q \in S^n\,,$$

avec

$$\begin{array}{lcl} \mid s_1 \mid & \leq & \jmath + 1\,, \\ \mid \rho_1 \mid & \leq & \jmath k^n\,, \\ \mid u_1 \mid & \leq & k^n(k^n \jmath + 1)\,. \end{array} \tag{19}$$

On note

$$f^{n-i+1}(\jmath q + p^+) = (\theta_{n-i+1}, \rho_{n-i+1}, s_{n-i+1}, u_{n-i+1}) = *_i$$

et

$$r = (r_\theta, r_\rho, r_s, r_u)\,.$$

On déduit sans peine de (25) les inégalités

$$\begin{array}{lcl} \mid s_1 u_1 \mid & \leq & k^n C_1\,, \\ \mid \rho_1 \mid & \leq & k^n C_2\,, \\ \mid r_w(*_1) \mid & \leq & k^{2n} N_1 \quad w = (\theta, \rho, s, u)\,, \end{array}$$

où C_1, C_2, N_1 sont des constantes.

On a alors

$$\begin{array}{lcl} \mid s_2 \mid & \leq & k(\jmath + 1) + k^{2n} M_2\,, \\ \mid u_2 \mid & \leq & k^{n-1}(k^n \jmath + 1) + k^{2n} M_3\,, \\ \mid \rho_2 \mid & \leq & \jmath k^n + k^{2n} M_4\,, \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{lcl} \mid s_2 u_2 \mid & \leq & k^n C_3\,, \\ \mid \rho_2 \mid & \leq & k^n C_4\,. \end{array}$$

On en déduit

$$\mid r_w(*_2) \mid \leq k^{2n} N_2\,, \quad w = (\theta, \rho, s, u)\,.$$

Une simple récurrence permet de montrer

$$\begin{array}{lcl} \mid s_i u_i \mid & \leq & k^n C_i\,, \\ \mid \rho_i \mid & \leq & k^n C_{i+1}\,, \\ \mid r_w(*_i) \mid & \leq & k^{2n} N_i\,, \quad w = (\theta, \rho, s, u)\,. \end{array} \tag{20}$$

Comme

$$r_n(*_1) = \sum_{i=1}^{n} (r_\theta(*_i) + (i-1) r_\rho(*_i), k^{i-1} r_s(*_i), r_\rho(*_i), l^{i-1} r_u(*_i))\,,$$

on a à l'aide de (20)

$$| r_n(*_1) | \leq k^{n+1} Q \,,$$

où Q est une constante.

En effet, nous avons

$$\begin{array}{lcl} | r_\theta(*_i) + (i-1) r_\rho(*_i) | & \leq & k^{2n} N_i^\theta + (i-1) k^{2n} N_i^\rho \,, \\ | k^{i-1} r_s(*_i) | & \leq & k^{2n+i-1} N_i^s \,, \\ | r_\rho(*_i) | & \leq & k^{2n} N_i^\rho \,, \\ l^{i-1} | r_u(*_i) | & \leq & k^{2n-i+1} N_i^u \,, \end{array}$$

soit

$$\sum_i k^{2n-i+1} N_i^u \leq k^{n+1} N^u \frac{k - k^n l}{l-1} \,.$$

On en déduit donc

$$| \sum_i (f_l^{i-1} \circ r \circ f^{n-i+1}(*_1))_u | \leq k^{n+1} L \,,$$

où L est une constante.

Nous obtenons alors

$$| r_n(*_1) | \leq k^{n+1} Q \,,$$

où Q est une constante.

Pour obtenir l'inégalité $(\mathcal{M})$ sur $Dr(\jmath q + p^+)$, on commence par noter que

$$Dr_n(q) = \sum_{i=1}^n D(g_{n,i}) \,,$$

où

$$g_{n,i} = f_l^{i-1} \circ r \circ f^{n-i+1} \,.$$

On en déduit

$$Dg_{n,i}(q) = f_l^{i-1}(r \circ f^{n-i+1}(q)) \circ Dr(f^{n-i+1}(q)) \circ Df^{n-i+1}(q) \,.$$

En reprenant les notations précédentes, on a

$$| f_l^{i-1}(r \circ f^{n-i+1}(\jmath q + p^+)) | \leq k^{2n} N_i \,.$$

Notons

$$Dr = (R_\theta, R_\rho, R_s, R_u) \,,$$

où

$$R_* = (\frac{\partial r_w}{\partial *}) , \qquad w = \theta, \rho, s, u \, .$$

Comme

$$\begin{array}{rcl}
R_\theta & = & (\rho su \frac{\partial r_1^w}{\partial \theta} + (su)^2 \frac{\partial r_2^w}{\partial \theta} + \rho^2 \frac{\partial r_3^w}{\partial \theta} + \frac{\partial r_4^w}{\partial \theta}) \, , \\
R_\rho & = & (sur_1^w + 2\rho r_3^w + \frac{\partial r_4^w}{\partial \rho}) \, , \\
R_s & = & (\rho u r_1^w + \rho su \frac{\partial r_1^w}{\partial s} + 2su^2 r_2^w + (su)^2 \frac{\partial r_2^w}{\partial s} + \rho^2 \frac{\partial r_3^w}{\partial s} + \frac{\partial r_4^w}{\partial s}) \, , \\
R_u & = & (\rho s r_1^w + \rho su \frac{\partial r_1^w}{\partial u} + 2us^2 r_2^w + (su)^2 \frac{\partial r_2^w}{\partial u} + \rho^2 \frac{\partial r_3^w}{\partial u} + \frac{\partial r_4^w}{\partial u}) \, , \\
 & & w = \theta, \rho, s, u \, .
\end{array}$$

En utilisant les inégalités (20), on obtient

$$| \, R_w(*_i) \, | \leq k^{2n} S_w \, , \quad w = \theta, \rho, s, u \, ,$$

d'où

$$| \, Dr(*_i) \, | \leq k^n S \, ,$$

où S est une constante.

On a $f^n = f_a^n + r_n$, d'où

$$Df^n = f_l^n + Dr_n \, .$$

Les inégalités (20) nous donnent

$$| \, Df^{n-i+1}(*_1) \, | \leq | \, f_l^{n-i+1}(*_1) \, | + | \, Dr_{n-i+1}(*_1) \, | \leq k^n D \, ,$$

où D est une constante. On a alors

$$| \, Dr_n(*_1) \, | \leq \sum_i k^{2n-i+1} N \; k^n S \; k^n D \, ,$$

d'où

$$| \, Dr_n(\jmath q + p^+) \, | \leq k^{3n+1} \bar{Q} \, ,$$

où $\bar{Q}$ est une constante. $\Box$

3. Dynamique le long d'une chaîne

Nous allons maintenant aborder les problèmes suivants : étant donnée une chaîne de tores partiellement hyperboliques, existe-il

i) une orbite le long de la chaîne,

ii) des orbites périodiques de période arbitrairement longue le long de la chaîne.

En 1968, Arnold et Avez [AV] donnent une démonstration de l'existence d'orbites le long d'une chaîne dans le cas où la perturbation s'annule dans un voisinage du tore. Easton [Ea] démontre aussi ce résultat pour des perturbations C^1 du système précédent. Marco [Ma] donne le premier résultat général, en analytique, par le biais du λ-lemme dans le cas des tores 1-hyperboliques. Bessi démontre aussi ce résultat dans l'exemple d'Arnold au moyen de méthodes variationnelles. Il faut noter que la première méthode est de nature dynamique (car basée sur la propriété d'obstruction).

Le problème ii) est conjecturé par Holmes et Marsden [HM] et Xia [Xi]. Les méthodes variationnelles de type Bessi [Be] ou celles développées par Séré [S] ne permettent pas, pour l'instant de résoudre ce problème. La méthode des fenêtres d'Easton [Ea] et le lemme de pistage associé ne permet pas non plus de l'aborder[19].

Soit $\mathcal{T} = (T_i)_{i=1,\dots,N}$ une famille finie de tores d-hyperboliques modèles tels que la variété instable $W^u(T_i)$ coupe transversalement $W^s(T_{i+1})$ dans $\mathcal{H}$. En utilisant le théorème de la partie 1, il est facile de montrer l'existence d'un ouvert d'orbites de transition le long d'une chaîne de tels tores en suivant une construction analogue à ([AA] ou [Ma], §6). Précisément, nous avons

Corollaire A: *Pour tout voisinage ouvert d'un point q_1 de $W^s(T_1)$ et tout voisinage V d'un point q_n de $W^u(T_n)$, il existe une orbite γ telle que $\gamma(0) \in U$ et $\gamma(T) \in V$.*

A l'aide des résultats de la partie 2, on montre l'existence d'une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques le long de toute chaîne de tore. L'existence d'orbites d'instabilité pour ces chaînes se déduit facilement du λ-lemme (lemme d'inclinaison) de Palis (voir [Sh] p.140 ou [PM] p.60). On peut aussi montrer que la chaîne d'orbites périodiques hyperboliques est "fermée", c'est à dire : Si O_1 et O_N sont la première et la dernière orbite périodique de la chaîne, on a $W^u(O_1)$ (resp. $W^u(O_2)$) qui coupe transversalement $W^s(O_2)$ (resp. $W^s(O_1)$) dans $\mathcal{H}$[20] Ce même lemme nous permet de montrer

[19] D'un point de vue technique, ceci est dû à la non transitivité de la relation d'alignement des fenêtres, discutée par Mc-Gehee et R. Easton [McGE] (voir aussi le chapitre 2 de cette thèse).

[20] C'est un point important. En effet, pour les tores partiellement hyperboliques cette *transitivité* de la transversalité n'a pas encore été établie de manière rigoureuse. On peut formuler le problème de la manière suivante: étant donnés trois tores partiellement hyperboliques T_1, T_2 et T_3 tels que $W^u(T_1)$ (resp. $W^u(T_2)$) coupe transversalement $W^s(T_2)$ (resp. $W^s(T_3)$) dans $\mathcal{H}$, a-t-on $W^u(T_1)$ qui coupe transversalement $W^s(T_3)$ dans $\mathcal{H}$? Dans le cas des orbites périodiques hyperboliques ce résultat découle facilement du λ-lemme (voir J. Palis et W. De Melo [PM], corollaire 1, p.85). Le problème de transitivité pour les tores est démontré seulement dans quelques cas particulier (voir Chap.1 avec le λ-lemme et Chap.2 Le lemme de transitivité au §.2.3). Il faut souligner que la propriété d'obstruction est plus faible que la propriété de transitivité.

l'existence d'orbites périodiques de période arbitrairement longue le long d'une chaîne de tores.

On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, $W^u(T_i)$ coupe transversalement $W^s(T_i)$ dans $\mathcal{H}$. Cette seconde hypothèse n'est pas restrictive, étant donné qu'elle est vérifiée dans tous les exemples construits jusqu'à présent[21].

Proposition A : *Il existe une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques $\mathcal{O} = (O_i)_{i=1,\ldots,N}$ le long de $\mathcal{T}$.*

Démonstration : On a $W^u(T_i)$ qui coupe transversalement $W^s(T_{i+1})$ dans $\mathcal{H}$ au point p^+. Soit S_{i+1} une section autour de T_{i+1} dans laquelle les hypothèses de la partie 2 sont vérifiées. On note O_n l'orbite périodique hyperbolique associée au symbole $\{\ldots nnn \ldots\}$ par ϕ dans S_{i+1} (en conservant les notations de la partie précédente). Il est possible de choisir $\jmath$ suffisament petit pour avoir la variété stable de l'orbite périodique O_{n^*} (où n^* est le plus petit symbole possible) qui coupe transversalement $W^u(T_i)$ dans $\mathcal{H}$. De même, on peut choisir dans chacune des sections une taille $\jmath_i$ de fenêtre pour avoir $W^u(T_i)$ qui soit $\jmath_i$ proche de la variété instable de l'orbite périodique $O^i_{n^*}$. On peut donc construire par récurrence une chaîne d'orbites périodiques hyperbolique le long de $\mathcal{T}$. $\square$

Nous obtenons alors comme corollaire l'existence d'orbites d'instabilité le long de la chaîne à l'aide du λ-lemme de Palis (voir [Sh] p. 140).

Remarques :

1. Nous obtenons une précision importante : la période minimale des orbites périodiques constituant la chaîne est directement relié à la taille du “splitting” des variétés invariantes. Cette remarque sera à la base d'une méthode d'estimation du temps d'instabilité le long de la chaîne.

2. Contrairement à la chaîne de tores partiellement hyperboliques, la chaîne d'orbites périodiques hyperboliques constitue un ensemble hyperbolique. Elle est donc stable sous-faible perturbation du système. L'idée sous-jacente est que ces orbites périodiques forment le véritable squelette du mécanisme d'Arnold.

3. Pierre Lochak [Lo] avait déja suggéré l'utilisation des orbites périodiques hyperboliques comme briques élémentaires dans la construction de chaîne de transition. Néanmoins, l'idée est différente. Les orbites périodiques hyperboliques qu'il considère sont obtenues comme des perturbations d'orbites périodiques du système hamiltonien intégrable initial. Précisément (voir [Lo]), “*the persistence of closed orbits with a threshold in the perturbation which is uniform in the period of the orbits is a non trivial fact connected with the Conley-Zhender theorem and was developed in particular by D. Bernstein and A. Katok. So, it could be a priori enough hyperbolic periodic orbits survive in the generic case so as to justify Arnold mechanism.*”. Mais, la distrbution des orbites fermées (même pour un système Hamiltonien intégrable) est très complexe (voir [Lo2], §IV.4 et appendice 1).

L'hyperbolicité normale des orbites périodiques (opposée à l'hyperbolicité partielle des

[21] Cette hypothèse a de plus l'avantage d'être générique.

tores) permet de montrer l'existence d'orbites périodiques de période arbitrairement longue le long de la chaîne. Soit P une période donnée, alors il existe une orbite périodique de période $\tilde{P}$ avec $\tilde{P} > P$.

Corollaire B: *Il existe des orbites périodiques de période arbitrairement longue le long de $\mathcal{T}$.*

Habituellement, on montre l'existence d'orbites périodiques de période arbitrairement longue au moyen du théorème de Poincaré-Birkhoff (voir par exemple [Che]). Le corollaire précédent donne une nouvelle construction de ce type d'orbites.

4. Autour du cas isochrone et de l'exemple d'Arnold

L'objet de cette partie est de discuter le cas isochrone étudié principalement par G. Gallavotti ([Ga1], [Ga2]) et ses collaborateurs ([CG], [GGM]), ainsi que l'exemple initial d'Arnold. Pour cette classe de systèmes nous allons montrer que la propriété d'obstruction ainsi que l'existence d'une dynamique symbolique se démontre facilement. Le point essentiel est la mise en évidence d'une forme normale qui "redresse" toute la dynamique dans un voisinage des tores hyperboliques. Nous discuterons enfin l'extension de ces idées au cas général.

4.1. Système hamiltonien isochrone

Nous allons discuter les systèmes hamiltoniens à l degrés de liberté de la forme:

$$H(A,\alpha,I,\phi)=\omega A+\frac{I^2}{2}+g^2(\cos(\phi)-1)+\mu f(\phi,\alpha)$$

où $(A,\alpha)\in\mathbf{R}^{l-1}\times\mathbf{T}^{l-1}$, $(I,\phi)\in\mathbf{R}\times\mathbf{T}$ et $g\in\mathbf{R}^*$, appelés systèmes *isochrone.*

Les équations du mouvement associées à H sont données par:

$$\begin{array}{rcl}\dot{A} & = & \epsilon\partial_\alpha f(\phi,\alpha)\\ \dot{\alpha} & = & \omega\\ \dot{I} & = & g^2\sin(\phi)+\epsilon\partial_\phi f(\phi,\alpha)\\ \dot{\phi} & = & I/2\end{array}$$

On note les quelques points suivants:

1. Le système est invariant sous les translations dans les variables A. On ramène donc l'étude d'un tel système à celle des 3 dernières équations.

2. Le système possède une famille à un paramètre de tores invariants partiellement hyperboliques. Le point 1 précédent ramène l'étude de cette famille à celle d'une orbite périodique hyperbolique.

3. Il découle plus ou moins rapidement du point 2 l'existence d'une forme normale qui linéarise les équations du mouvement dans un voisinage du tore. On peut décomposer la démonstration en deux parties: la première consiste à se placer au voisinage du point fixe du pendule et à utiliser les coordonnées de *Jacobi* (cf. [Ga2], appendice A1 ou [CG], appendice A9) qui permettent de mettre en évidence les directions stable et instable. La seconde partie est une application de Hamilton-Jacobi dans sa forme la plus simple pour ramener $\omega A+f(\alpha)$ à $\omega\tilde{A}$ où ω vérifie une condition diophantienne.

En utilisant les *coordonnées de Jacobi*, nous obtenons un hamiltonien de la forme:

$$H(A,\alpha,p,q)=\omega A+J(pq)+\mu f(\alpha,p,q)$$

où $J(x)$ et $f(\alpha,p,q)$ sont analytiques pour $\mid x\mid<\kappa$, $\mid p\mid<\kappa^{1/2}$, $\mid q\mid<\kappa^{1/2}$ et $\alpha\in\mathbf{T}^{l-1}$.

Ce premier changement permet de se placer au voisinage du point d'équilibre du pendule.

L'un des résultat essentiel de G. Gallavotti est la mise en évidence de la forme normale supposée au point 3 précédent. Précisément, nous avons [Ga2]:

Théorème: *Il existe un changement de coordonnées, valable dans un voisinage ouvert de $p = q = 0$ tel que le nouvel hamiltonien s'écrive:*

$$\tilde{H}(\hat{A}, \hat{\alpha}, \hat{p}, \hat{q}) = \omega \hat{A} + \tilde{J}(\hat{p}\hat{q})$$

où $(\hat{A}, \hat{\alpha}) \in \mathbf{R}^{l-1} \times \mathbf{T}^{l-1}$ *et* $(\hat{p}, \hat{q}) \in \mathbf{R}^2$.

La démonstration est classique (voir [Ga2], §.2). Néanmoins, il convient de souligner que ce résultat est en fait très particulier. En effet, dans un cas général, il est désespéré de vouloir redresser le flot globalement. Dans cette perspective, le résultat le plus frappant est celui obtenu par M. Rudnev et S. Wiggins [RW] où ils montrent qu'une forme normale "redressante" existe au maximum sur le tore, ses variétés invariantes ainsi que sur un ensemble de cantor de surfaces localement invariantes.

4.2. La propriété d'obstruction et la dynamique symbolique

L'existence de la forme normale précédente ramène la démonstration de la propriété d'obstruction à celle effectuée par V.I. Arnold et A. Avez ([AA], p.93-94) dans le cas des tores simples. Une difficultée (mineure) consiste à contrôler l'exposant de Lyapounov (qui dépend ici du produit $\hat{p}\hat{q}$) dans le voisinage considéré.

Remarques:

1. Nous pouvons aussi voir que la démonstration que nous donnons de la propriété d' obstruction à l'aide du λ-lemme se simplifie considérablement. En effet, on voit sans peine que dans ce cas, la condition de redressement que nous imposons dans la partie 1, p.23, n'a plus de raison d'être. On peut donc montrer que toute variété transverse à la variété stable du tore se redresse.

2. La remarque précédente couplée à la remarque 2 p.27 nous permet de voir que dans le cas isochrone, l'existence d'une dynamique symbolique est facile à établir, et ceci génériquement, c'est à dire indépendemment de la forme de la matrice Π introduite dans la partie 2 p.38.

4.3. Généralisation ?

On peut montrer que l'exemple initial d'Arnold possède une forme normale "redressante". L'exemple d'Arnold [Ar] s'écrit:

$$H_{\epsilon,\mu}(I_1, I_2, p, \theta_1, \theta_2, q) = \omega I_1 + \frac{1}{2}I_2^2 + \frac{1}{2}p^2 + \epsilon(\cos q - 1) + \epsilon\mu(\cos q - 1)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Cet exemple est très particulier pour les raisons suivantes[22]:

i) la perturbation (en μ) est un produit d'une fonction en q et (θ_1, θ_2).

ii) la partie dépendante de (θ_1, θ_2) est découplée.

[22] Outre le fait que la perturbation s'annule sur la famille de tore.

L'importance de ces deux points n'apparait qu'à travers la question de l'existence d'une forme normale "redressante" au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique.

En effet, le point i) nous permet d'écrire, via un changement de coordonnées à la Moser [Mo2], le hamiltonien sous la forme:

$$\tilde{H}(I_1, I_2, s, \theta_1, \theta_2, u) = \omega I_1 + \frac{1}{2} I_1^2 + \lambda su + f(su)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

où $f(su)$ est d'ordre 2 en su.

Le point ii) nous permet d'affirmer que ce dernier hamiltonien est complètement intégrable.

On comprend alors mieux pourquoi Arnold démontre seulement la propriété d'obstruction pour les tores standard, car c'est la situation des tores rencontrés dans son exemple. L'article d'Arnold est en ce sens complet.

On comprend aussi l'insistance de Chierchia et Gallavotti ([CG] et leurs travaux respectifs suivants) sur le choix d'un second membre dans lequel les variables q et (θ_1, θ_2) soient mélangées: ceci evite de tomber dans le cas trivial exposé ci-dessus.

Les quelques remarques ci-dessus nous permettent d'envisager des classes de systèmes hamiltoniens possèdant une forme normale redressante dans un voisinage ouvert du tore. Néanmoins, il semble beaucoup plus difficile de caractériser l'ensemble des systèmes hamiltoniens qui rentrent dans cette classe, ce qui nous conduit au

Problème: *Peut-on caractériser l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens pour lesquels une forme normale "redressante" existe ?*

Je conjecture que les seuls cas sont le cas isochrone et le cas où la perturbation s'annule. Cette intuition est basée sur de récents résultats à propos de la méthode de Hamilton-Jacobi ([CLMS], §.2).

Nous pouvons pousser la discussion un peu plus loin et nous demander dans quelle mesure la forme normale redressante obtenue par M. Rudnev et S. Wiggins [RW] permet de simplifier, voir de généraliser les résultats obtenus dans cette thèse, notamment ceux concernant la dynamique symbolique.

Je pense qu'il doit être possible de démontrer le résultat de dynamique symbolique génériquement, au moins dans la topologie C^1. Pour ce qui concerne un résultat générique en analytique, il me semble que la forme normale précédente sera intéressante.

Remarque: On peut voir, après lecture du chapitre 2, que l'exemple d'Arnold, du fait de l'existence de cette forme normale redressante, est un bon candidat pour optimiser les exposants de stabilité ontenus par P. Lochak [Lo2] le long d'une résonance simple. Toute la difficulté, consiste à démontrer un résultat de type lemme de transfert dans ce cas simplifié (le flot étant intégrable). Ceci fera l'objet d'un travail ultérieur.

Calcul du temps d'instabilité

0. Introduction

Etant donnée une chaîne de tores invariants partiellement hyperboliques, les résultats de la partie précédente assurent l'existence d'orbites de transition le long de la chaîne. Ces orbites présentent une dérive dans les variables d'actions.

Le problème est d'estimer le temps de dérive de ces variables. Deux situations se présentent : le cas initialement hyperbolique ou le hamiltonien initial possède déja une famille à 1 paramètre de tores hyperboliques et le cas initialement elliptique.

Dans le cas initialement elliptique, le temps de dérive est minoré par le temps de stabilité obtenu par Nekhoroschev [Ne]. Ce temps de stabilité est exponentiellement long et les estimations les plus fines de ce temps ont été obtenues par P. Lochak [Lo] puis J. Poschel [Po]. Dans son article, Lochak suggère à la vue de sa démonstration que le temps de stabilité ainsi obtenu est optimal. Il propose une démonstration possible de cette assertion à l'aide d'un modèle d'Arnold généralisé. Les arguments présentés sont heuristiques et suivent un premier raisonnement de Chirikov [Ch].

En 1995, U. Bessi [Be] obtient une très bonne estimation du temps d'instabilité pour le modèle d'Arnold au moyen de méthodes variationnelles. Néanmoins, il n'arrive pas à démontrer l'optimalité du résultat de Lochak. De plus, la relation entre les divers paramètres d'une chaîne de transition (splitting, condition diophantienne sur les tores) et le temps obtenu n'est pas claire.

En 1993, L. Chierchia et G. Gallavotti [CG] ont estimé le temps de dérive dans un cas initialement hyperbolique. Cette estimation est super-exponentielle. En 1995, J.P. Marco [Ma] en utilisant la méthode des fenêtres d'Easton [Ea] améliore notablement ce résultat et montre que ce temps est en fait polynômial. Néanmoins les hypothèses qui sous-tendent ce travail sont difficilement vérifiables dans un exemple concret. L'utilisation des travaux de Bessi par P. Bernard [B] a permis d'optimiser (a priori) ce résultat pour le système d'Arnold initialement hyperbolique.

Dans ce chapitre, nous avons mis au point une méthode constructive permettant de calculer le temps d'instabilité le long d'une chaîne de tores partiellement hyperboliques. Celle-ci nous permet d'obtenir un résultat analogue au méthodes variationnelles dans un cadre initialement hyperbolique. De plus, nous avons une interpretation géométrique claire des différentes constantes intervenant dans le résultat. Les idées présentées se généralisent sans peine au cas initialement elliptique.

L'idée est tout d'abord de donner une *méthode constructive* entièrement *quantitative* des orbites de transition. Le but est de mettre en évidence le rôle des différentes données d'une chaîne de transition, par exemple les angles d'intersection hétéroclines, les conditions diophantiennes associées au flot sur chacun des tores ... etc dans une telle construction. Cette méthode étant mise au point, il est alors facile de calculer le temps de transition le long de la chaîne. Il faut d'ailleurs noter que, aussi bien dans la méthode variationnelle de U. Bessi [Be] ou dans la méthode des fenêtres utilisée par J.P. Marco [Ma], le temps d'instabilité s'obtient comme un sous-produit d'un procédé de construction d'orbites de transition qui se veut optimal.

Notre méthode est basée sur la résolution d'un problème appelé *problème de transitivité*:

Soient T_1, T_2 et T_3 trois tores hyperboliques normaux tels que $W^u(T_1)$ (resp. $W^u(T_2)$) coupe transversalement $W^s(T_2)$ (resp. $W^s(T_3)$) dans une surface d'énergie donnée $\mathcal{H}$. A-t-on $W^u(T_1)$ qui coupe transversalement $W^s(T_3)$ dans $\mathcal{H}$?

Dans le cas normalement hyperbolique, c'est la vérification de cette propriété de transitivité qui fait qu'il n'existe pas de problème pour estimer le temps de transition. Nous pouvons résumer ce fait par: "Si la propriété de transitivité est vérifiée, alors tout se passe "comme" dans un cas normalement hyperbolique".

On peut ramener la résolution de ce problème à une propriété de dynamique locale pour chaque tore de la chaîne (suivant ainsi l'idée initiale d'Arnold pour la propriété d'obstruction) appelée *propriété de transfert*. Celle-ci est entièrement quantitative et peut se formuler comme suit: *étant donné un tore partiellement hyperbolique T et une variété Δ coupant transversalement la variété stable de T avec un angle $\mathcal{A}$, quel est le temps t nécessaire à Δ pour couper transversalement une variété Δ' coupant transversalement la variété instable du tore T avec un angle $\mathcal{A}$?*

Le temps t intervenant sera appelé *temps de transfert*. Ce temps étant déterminé en fonction de $\mathcal{A}$, le temps de dérive le long d'une chaîne de N tores partiellement hyperboliques est alors donné par Nt (si les angles sont uniformes le long de la chaîne).

Tout notre problème revient donc à estimer l'angle d'intersection entre les variétés stable et instable des tores le long d'une chaîne et à calculer le temps de transfert associé.

Dans le cas initialement hyperbolique nous avons mené à bien ce programme. En effet, l'angle d'intersection est égal à $c.\mu$ où c est une contante et μ le paramètre de perturbation. Dans ce cas, le temps t est de l'ordre de $\mu^{-(1+\kappa)}$ où $\kappa > 0$ est une constante arbitraire.

Les résultats de la partie I.2. nous permettent de développer une autre approche de ce calcul. En effet, il existe le long d'une chaîne de tores partiellement hyperboliques, une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques. L'hyperbolicité normale de ces objets facilite l'estimation du temps de dérive le long de ces chaînes. Celui-ci est conditionné par l'angle d'intersection des variétés stable et instable des orbites périodiques hyperboliques et leurs exposants de Lyapounov. L'angle d'intersection est relié à la proximité des orbites périodiques au tore et à l'angle homocline du tore. Cette proximité est elle-même liée à la période de l'orbite périodique qui se traduit par une estimation de temps d'ergodisation.

Cette méthode apporte une interprétation géométrique claire des constantes intervenant dans le temps de dérive. Néanmoins, elle parait difficile à mettre en oeuvre sur des exemples.

Les estimations précédentes concernent seulement le temps de dérive d'une orbite du système hamiltonien. Il peut être intéressant (phénomène de transport) de calculer le temps de dérive associé au déplacement de tout un voisinage, ainsi que le volume de ce voisinage.

Ce problème s'aborde naturellement à l'aide de la méthode des fenêtres d'Easton développée par Marco [Ma]. En améliorant son approche, nous calculons dans l'exemple d'Arnold le temps de transport, polynômial, associé à un voisinage le long d'une chaîne.

1. Temps de transition le long d'une chaîne abstraite

Après avoir donné quelques définitions, nous décrivons la méthode de calcul des temps d'instabilité le long d'une chaîne de transition. L'essentiel de la démarche repose sur la notion de *propriété de transfert*, qui relie les paramètres de la chaîne (angle, condition diophantienne) au temps passé au voisinage de chacun des tores.

1.1. Définitions

1.1.1. Tores hyperboliques normaux

Tore hyperbolique normal : Le tore T partiellement hyperbolique sera dit *hyperbolique normal* si dans son voisinage le hamiltonien est de la forme

$$H(I,\phi,s,u) = (\omega \mid I) + \lambda\ su + b(s,u,\phi)Isu + (su)^2 c(s,u,\phi) + I^2 d(s,u,\phi) + I^3 e(I,\phi,s,u)$$

où $(I,\phi,s,u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} b &=& b_0(su) + \mu b_1(s,u,\phi) \\ c &=& c_0(su) + \mu c_1(s,u,\phi) \\ d &=& d_0(su) + \mu d_1(s,u,\phi) \\ e &=& e_0(I,su) + \mu e_1(I,\phi,s,u) \end{array}$$

Le tore T d'équation $\{\ I = s = u = 0\ \}$, de dimension m, est invariant et partiellement hyperbolique: ses variétés stable et instable $W^s(T) = \{\ I = u = 0\ \}$ et $W^u(T) = \{\ I = s = 0\ \}$ sont de dimension $m+1$.

L. Niederman [Ni] montre que si T est un tore partiellement hyperbolique provenant de la destruction d'un tore résonnant d'ordre 1 dans une perturbation analytique d'un système intégrable, il existe un voisinage de T dans lequel le système est conjugué au système défini par H.

1.1.2. La notion d'angle

Dans le système de coordonnées précédent, il est facile de transcrire la transversalité d'une variété lagrangienne Δ à la variété stable du tore en terme d'*angle* (une construction analogue est valable pour la variété instable).

1. Soit $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^2$ un voisinage du tore dans laquelle est définie la forme normale. Soit $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{T}^n$ la projection canonique. On travaille maintenant dans $M = \mathbf{R}^{2n+2}$.

2. La variété de tous les sous-espaces lagrangiens (non orientés) de $\mathbf{R}^{2n+2}$ est appelée la *Grassmanienne Lagrangienne* et se note $\Lambda(n+1)$.

3. Soit $(e_\theta = (e_{\theta_1},\ldots,e_{\theta_n}), e_s, e_I = (e_{I_1},\ldots,e_{I_n}), e_u)$ une base de $\mathbf{R}^{2n+2}$, pour tout $x \in W^u(T)$, le $(n+1)$-plan T_xW^u engendré par e_u et e_θ est lagrangien (comme sous-espace vectoriel lagrangien de T_xM. Il correspond à la variété instable du tore. Soit Ξ_x

le $(n+1)$-plan lagrangien supplémentaire à T_xW^u engendré par les vecteurs e_s et e_I. On vérifie que pour tout $x \in W^u(T)$, $\Xi_x = \Xi$.

On note Λ_Ξ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens supplémentaires de Ξ.

Il existe une bijection Φ de Λ_Ξ dans $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ représentant l'ensemble des matrices carrés $(n+1) \times (n+1)$ symétriques.

On associe ainsi une matrice symétrique canonique à chacune des variétés lagrangiennes supplèmentaires de Ξ. Pour tout $x \in W^u(T)$, le plan tangent $T_xW^u(T)$ est représentée par la matrice nulle.

4. Soit M une variété symplectique, on note $G(p)$ la Grassmanienne Lagrangienne de T_pM. Soit Φ_t le difféomorphisme induit par le flot, pour tout $p \in M$, l'application linéaire tangente induit un difféomorphisme de $G(p)$ dans $G(\phi_t(p))$. L'ensemble $\mathcal{G} = \cup_{p\in M} G(p)$ possède une structure naturelle de variété.

5. Soit $q \in W^u(T)$ et V un voisinage donné de q contenu dans une carte locale de M, $\mho$ une variété lagrangienne de M telle que $\mho \cap V \neq \emptyset$, soit $\pi_u : \mho \to W^u$ la projection canonique de $\mho$ sur W^u.

Nous dirons que $\mho$ est ϵ proche en topologie C^1 de W^u si pour tout $x \in \mho$, on a :

i) $\mid \pi_u(x) - x \mid < \epsilon$

ii) la matrice symétrique $\Phi(T_x\mho) = A_x$ est telle que $\mid A_x \mid < \epsilon$, où $\mid . \mid$ est une norme qulconque sur les matrices.

6. La définition précédente implique qu'il nous suffit de montrer qu'il existe un point q de $\mho$ et un voisinage U de q tel que son image par ϕ_t soit dans V, et tels que les composantes suivant e_s et e_I du point et des vecteurs tangents soient proches de ϵ.

7. Soit S^{2n+2} la sphère unité dans $\mathbf{R}^{2n+2}$. Soit Δ une variété lagrangienne transverse à la variété stable du tore au point $p = W^s(T) \cap \Delta$ et telle que $T_p\Delta$ soit supplémentaire à Ξ. Soit v un vecteur unitaire de $T_p\Delta$, on a $v = (v_s, v_u, v_\rho, v_\theta)$ avec $\mid v_u \mid \neq 0$ et $\mid v_I \mid \neq 0$ par transversalité de l'intersection. On note

$$A(v) = \inf(\mid v_I \mid, \mid v_u \mid)$$

l'angle effectué par le vecteur v avec le plan définit par les vecteurs e_s et e_θ (c'est à dire la variété stable).

On appelera *angle* de Δ et $W^s(T)$ au point p, la quantité

$$\mathcal{A}(\Delta, W^s(T), p) = \inf_{v \in T_p\Delta \cap S^{2n+2}} A(v)$$

Bien entendu, lorsque l'intersection n'est pas transverse cet angle est nul.

1.2. La propriété de transfert

Nous introduisons maintenant la notion fondamentale de *propriété de transfert*. L'idée est de construire l'orbite dont le temps de transfert (temps nécessaire à son passage dans une seconde section) est le plus court. On obtient ainsi une orbite "optimale" dans le sens où c'est celle qui parcourt la chaîne le plus rapidement possible. Nous relions alors le temps de transfert aux données du problème, à savoir le splitting des variétés invariantes. Précisément,

Propriété de transfert $\mu\gamma(\mu)$: *Pour tout $0 < \mu < \mu_0$ et toute sous-variété lagrangienne Δ_μ, invariante par le flot de X_H, coupant tranversalement la variété stable du tore $W^s(T)$, avec un angle d'ordre μ au point q_μ, alors pour tout $p \in W^u(T)$, et $\forall\, B(p,r)$ avec $r \leq \mu\gamma(\mu)$ où $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ avec $\lim_{\mu\to 0} \gamma(\mu) = 0$, il existe une constante $c \in \mathbf{R}^{*,+}$, telle que, il existe $p_\mu \in \Delta_\mu$, $\delta_\mu > 0$ et T_μ tels que*

i) $\phi_{T_\mu}(B(p_\mu, \delta_\mu)) \subset B(p, r)$,

ii) $\phi_{T_\mu}(\Delta_\mu \cap B(p, \delta_\mu))$ *est $\mu\gamma(\mu)$ proche de $W^u(T)$ en topologie C^1.*

Le temps T_μ sera appelé *temps de transfert*

Propriété de transfert

Dans toute la suite nous fixerons $\gamma(\mu) = \mu^\kappa$, où $\kappa > 0$ est quelconque. La recherche du meilleur choix de $\gamma(\mu)$ est un problème ouvert. Nous verrons d'ailleurs que ce choix intervient dans la vérification de la propriété de transfert pour les tores hyperboliques normaux. Notamment, il conditionne le fait que le temps hyperbolique soit comparable (ou non) au temps d'ergodisation.

La propriété de transfert ressemble à une propriété d'obstruction *quantitative.* Néanmoins, il convient de souligner que la propriété de transfert est bien plus forte. En effet, la propriété d'obstruction est *topologique.* Elle fait intervenir le comportement C^0 de la variété sous l'action du flot. De plus, c'est un résultat sur un temps infini. En ce sens d'ailleurs, la propriété d'obstruction semble la condition *minimale* sous laquelle on peut montrer l'existence d'orbites le long de la chaîne[23]. Néanmoins, elle ne permet pas de résoudre le problème de transitivité. Par contre, la propriété de transfert impose une contrainte rigide sur le comportement C^1 de la variété, mais sur un temps déterminé, fini.

[23] C'est d'ailleurs une question interessante: quelle est la condition minimale de dynamique locale sur les tores de la chaîne assurant l'existence d'orbites de transition ? Je conjecture que la propriété d'obstruction est la condition minimale.

1.3. Calcul du temps

Soit $\mathcal{T}$ une chaîne de N tores hyperboliques normaux satisfaisant les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$: On suppose de plus que ces tores forment une chaîne, c'est à dire

$$W^u(T_i) \pitchfork_{\mathcal{H}} W^s(T_{i+1}) \ \ , i = 1, \dots, N-1$$

$(\mathcal{H}_2)$: On suppose que l'angle d'intersection $\mathcal{A}_i$ entre $W^u(T_i)$ et $W^s(T_{i+1})$ est égal à

$$\mathcal{A}_i \geq c_i \mu$$

où c_i est une constante indépendante de μ.

$(\mathcal{H}_3)$ Les tores T_i, $i = 1, \dots, N$ vérifient la propriété de transfert en $\mu\gamma(\mu)$ avec un temps de transfert $t_i(\mu, \mathcal{A}_i, \tau_i, \gamma_i)$.

$(\mathcal{H}_4)$ L'angle d'intersection de la variété $W^u(T_{i-1})$ avec $W^s(T_{i+1})$ est égale à

$$\mathcal{A}_{i-1,i+1} \geq c\,\mu(1-\rho)$$

où $\rho = O(e^{-c/\mu})$ avec c une constante indépendante de μ.

Remarques :

1. La condition $(\mathcal{H}_4)$ permet d'appliquer la propriété de transfert de manière récursive. En effet, il est nécessaire de contrôler l'angle que fait la variété considérée avec les variétés stable des tores successifs. Si ce contrôle est exponentielle, alors la propriété de transfert est encore valable et le temps passé dans la section est sensiblement le même que dans les sections précédentes.

2. Sans hypothèses sur le comportement de l'angle par itération, nous obtenons un temps exponentiel, ce qui est le cas des estimations obtenues par Chierchia et Gallavotti [CG].

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème : *Le temps de transition le long de la chaîne $\mathcal{T}$ est donné par*

$$t = O(N\,\tilde{t}(\gamma_i, \tau_i, \mathcal{A}_i))$$

où $\tilde{t} = \sup_{i=1,\dots,N} t_i$.

Démonstration: On commence par noter que par $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$, nous avons $W^u(T_1)$ qui coupe transversalement $W^s(T_N)$ dans la surface d'énergie $\mathcal{H}$ contenant les tores T_i, $i = 1, \dots, N$. Il existe donc un ouvert d'orbites $o(t)$ reliant un voisinage U_1 de T_1 à un voisinage U_N de T_N, c'est à dire $o(0) \in U_1$ et $o(T) \in U_N$. Le temps T est alors donné par $T = \sum_{i=1}^{N} t_i$, où les t_i sont les temps de transfert associés à chque tore T_i de la chaîne.

La perte dans l'angle étant exponentiellement petite en μ, nous avons $t_{i+1} \equiv t_i$, d'où le résultat. $\square$

Le calcul du temps de transition le long d'une chaîne se ramène donc à la vérification de la propriété de transfert et à l'optimisation du temps de transfert.

Le prochain paragraphe montre que les tores hyperboliques normaux vérifient la propriété de transfert en $\mu^{1+\kappa}$, où $\kappa > 0$ est quelconque, avec un temps de transfert t donné par $t = \gamma \mu^{-\tau(1+\kappa)}$, où γ et τ sont les constantes diophantiennes associées au vecteur fréquence.

Le théorème que nous allons démontrer est donc :

Théorème C: *Soit $H_\mu = H_0 + \mu H_1$ une perturbation d'un système hamiltonien initialement hyperbolique H_0 possèdant une chaîne de N tores hyperboliques normaux vérifiant les hypothèses $(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, \ldots, 4$, alors le temps de dérive le long de la chaîne est donnée par*

$$T = O\left(N \frac{\gamma^{-1}}{\mu^{\tau(1+\kappa)}} \right)$$

où $\gamma = \max_{i=1,\ldots,N} \gamma_i$, $\tau = \min_{i=1,\ldots,N} \tau_i$ et $\kappa > 0$ est une constante quelconque.

La démonstration découlera du lemme de transfert pour les tores hyperboliques normaux, énoncé au §.2 et à la résolution du problème de transitivité globale au §.3. Notamment, nous démontrerons que l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ est vérifiée.

2. Le lemme de Transfert

Nous démontrons que les tores hyperboliques normaux vérifient la propriété de transfert avec un temps polynomial. La démonstration est d'abord détaillée dans le cas des tores simples où les principales difficultées sont déja apparentes. On effectue ensuite ce travail pour les tores hyperboliques normaux.

2.1. Le cas des tores simples

Ce paragraphe vérifie la propriété d'obstruction quantitative dans le cas des tores simples.

2.1.1. Les tores simples

Tore simple: Le tore T partiellement hyperbolique sera dit *tore simple* si dans son voisinage le hamiltonien prend la forme

$$K(I,\phi,s,u) = (\omega \mid I) + su \tag{21}$$

où $(\phi, I, s, u) \in \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\Omega_0 = \mathrm{d}I_1 \wedge \mathrm{d}\phi_1 + \ldots \mathrm{d}I_m \wedge \mathrm{d}\phi_m + \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}u$ et ω est un vecteur de $\mathbf{R}^m$ que l'on supposera diophantien, c'est à dire

$$\mid (\omega \mid k) \mid \geq \frac{\gamma}{\mid k \mid^{\tau}} \tag{22}$$

où $\gamma > 0$, $\tau \geq m-1$ et $k \in \mathbf{Z}^m \setminus \{0\}$.

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{array}{rcl} \dot{s} & = & -s \\ \dot{u} & = & u \\ \dot{I} & = & 0 \\ \dot{\phi} & = & \omega \end{array} \tag{23}$$

Le tore $\mathcal{T}$ d'équation $\{\ I = s = u = 0\ \}$, de dimension m, est donc invariant et partiellement hyperbolique: ses variétés stable et instable $W^s(\mathcal{T}) = \{\ I = u = 0\ \}$ et $W^u(\mathcal{T}) = \{\ I = s = 0\ \}$ sont de dimension $m+1$.

2.1.2. Le lemme de transfert

Avec les notations précédentes, on a :

Lemme de transfert : *Un tore simple vérifie la propriété de transfert en $\mu^{1+\kappa}$, $\kappa > 0$ quelconque, avec $T = \gamma \left(\mu^{1+\kappa}\right)^{-\tau}$ et $\delta_u = e^{-T}$, $\delta_s = 1$, $\delta_I = \delta_\theta = \mu^{1+\kappa}$.*

La démonstration suit une approche analogue à celle de Jones et Koppels [KP] pour la construction d'orbites *multi-bosses* dans un cadre normalement hyperbolique.

Ce lemme nous permet de préciser le diamètre δ de la boule de départ et le temps T de transfert. Cet exemple nous donne l'occasion de localiser les différentes contraintes liées au résultat C^0, puis C^1. On note que la contrainte C^0 fixe le choix de T et δ, notamment T est obligatoirement égal au temps d'ergodisation. La contrainte C^1 est en fait nulle, car le redressement des variétés invariantes s'effectue de manière exponentiel, donc largement mieux que le redressement polynômial demandé.

Démonstration : On se donne un tore simple $\mathcal{T}$ dans $V^{2m+2} = \mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On suppose que la dynamique autour du tore est donnée par (21) dans un voisinage $\mathcal{V}_\xi$ de taille $\xi > 0$. On notera indifféramment $\mid . \mid$ la métrique plate sur T^n et la métrique euclidienne usuelle sur R^k, k quelconque.

Soit Δ_1 (resp. Δ_2) une sous-variété de dimension $m+1$ da $\mathcal{H}$, qui, dans $\mathcal{H}$, coupe transversalement $W^s(\mathcal{T})$ (resp. $W^u(\mathcal{T})$) le long d'une sous-variété Θ_1 (resp. Θ_2) de dimension 1.

Lemme A (contrôle C^0) : *Soit $p_2 = (\phi_2, 0, 0, u_2)$ un point de Θ_2 dans $\mathcal{V}_\xi$, et $\mathcal{V}_\beta$ un voisinage de p_2 de taille $\beta > 0$. Il existe un point $p_1 = (\phi_1, I_1, s_1, u_1)$ de Δ_1, un voisinage $\mathcal{V}_\delta = \{ \ (\phi, I, s, u) \in \mathcal{V}_\xi$ telles que $\mid \mid \phi - \phi_1 \mid < \delta_\phi, \ \mid I - I_1 \mid < \delta_I, \ \mid s - s_1 \mid < \delta_s, \ \mid u - u_1 \mid < \delta_u \ \}$, et un temps T tel que $\Phi(T, \mathcal{V}_\delta) \in \mathcal{V}_\beta$.*

On prend

$$T = \beta^{-\tau}$$

et

$$\delta_\phi = \beta, \ \delta_I = c_I \beta, \ \delta_s = c_s \xi, \ \delta_u = c_u(\beta + c\xi) e^{-T}, \ c < 1 \ , \ c_* < 1, \ * = (I, s, u)$$

Le point p_1 est choisi tel que

$$\mid I_1 \mid < \beta(1 - c_I), \ \mid s_1 \mid < \xi, \ \mid u_1 \mid < (\beta + c\xi)(1 - c_u) e^{-T}$$

Démonstration : Soit $p \in \mathcal{V}_\delta$, $p = (\phi, I, s, u)$, on a

$$\Phi(T, p) = (\phi + \omega T, I, s e^{-T}, u e^{T})$$

a. Choix de T et comportement des variables angulaires: Nous avons fixé $\beta > 0$, et notre problème revient à recouvrir le tore T^n par un voisinage de taille δ_ϕ sous l'action d'un flot linéaire. On choisit $\delta_\phi = \beta$. On est alors ramené au calcul (classique) du temps d'ergodisation (voir [Du]). Le résultat (optimal) a recemment été obtenu par J. Bourgain, F. Golse, B. Wennberg [BGW].

$$T_{ergo} = \beta^{-\tau}$$

où τ est la constante diophantienne associée à ω.

b. Choix de δ_s, δ_u et δ_I en fonction de β et T:
b.1. Cas des variables neutres I: On a $\Phi_I(T, p) = I$. Il suffit donc de prendre $\delta_I = c_I \beta$, avec $c_I < 1$. On doit alors choisir $\mid I_1 \mid < (1 - c_I)\beta$.

b.2. La variable stable s : On a $\Phi_s(T,p) = se^{-T}$. Par hypothèse, nous avons $\mid s \mid e^{-T} < \beta$, ce qui nous donne $\mid s \mid < \xi$ (le domaine sur lequel nous travaillons étant de taille ξ). On choisit $\delta_s = c_s \xi$, avec $c_s < 1$. On a alors $\mid s_1 \mid < \xi$.

b.3. La variable instable u : On a $\Phi_u(T,p) = ue^{T}$. Par hypothèse, nous avons $\mid u_2 - ue^T \mid \leq \beta$, soit $\mid u \mid e^T \leq \beta + \xi$. On en déduit donc $\mid u \mid \leq (\beta+\xi)e^{-T}$. On prend $\delta_u = c_u(\beta+\xi)e^{-T}$, avec $c_u < 1$. On a alors $\mid u_1 \mid \leq (1-c_u)(\beta+\xi)e^{-T}$. Ceci termine la démonstration du lemme. $\square$

On fixe désormais

$$\beta = \mu^{1+\kappa}$$

où $\kappa > 0$ est quelconque (les raisons de ce choix apparaitront clairement dans la démonstration du lemme suivant). On a alors le résultat suivant.

Lemme B (Contrôle $\mathbf{C^1}$) : *Soit Δ une sous variété transverse à $W^s(\mathcal{T})$ dans $\mathcal{H}$, ayant un angle de taille $\mathcal{O}(\mu)$. Alors, au bout d'un temps $T_{ergo} = \mu^{-\tau(1+\kappa)}$, $\Phi(T_{ergo}, \Delta \cap \mathcal{V}_\delta)$ est C^1-$\mu^{1+\kappa}$ proche de $W^u(\mathcal{T})$, où $\mathcal{V}_\delta$ est donné par le lemme A.*

Comme pour le λ-lemme (voir [Ma] ou [Cr]) seule la transversalité de Δ au plan $\mathcal{S}$ définit par $\mathcal{S} = \{ \ (s,u,I,\phi) \ \mid \ u=0 \ \}$ est essentielle. Dans [Cr], ce type d'intersection est appellée *transversalité faible*.

Démonstration : Nous voulons étudier le comportement du plan tangent à la variété invariante Δ en p_1 sous l'action du flot ϕ_t induit par le champ de vecteur X_K. C'est à dire, étant donné $T_{p_1}\Delta$, comment est situé $T_{\phi_t(p_1)}\Delta$ par rapport au plan tangent à la variété instable $W^u(\mathcal{T})$ du tore $\mathcal{T}$.

Evolution du plan tangent à $\boldsymbol{\Delta}$: On note $G_m(r)$ la variété Grassmanienne des sous-espaces affines (plans) de dimension m dans l'espace tangent au point $r \in M$. Soit ϕ_t le difféomorphisme de M induit par le flot. Pour tout $r \in M$, on a $\dot{\phi_t} \mid_r$ qui induit un difféomorphisme de $G_m(r)$ dans $G_m(\phi_t(r))$. L'ensemble $\mathcal{G}_m = \cup_{r\in M} G_m(r)$ possède une structure naturelle de variété dont la classe de régularité est une de moins que celle de M. C'est le fibré de base M et de fibre G_m.

On note les points $z \in \mathcal{G}_m$ comme $z = (r, \sigma_r)$, où $\sigma_r \in G_m(r)$. On considère l'application produit $\mathcal{S}$ de l'application ϕ_t et $\dot{\phi_t} \mid_r$ qui agit sur $\mathcal{G}_m$ définie par

$$\mathcal{S}(r,\sigma_r) = (\phi_t(r), \dot{\phi_t} \mid_r (\sigma_r)) \ ,$$

c'est à dire l'application fibré associée à l'application sur la base.

Si le plan tangent à la variété invariante Δ au point $\phi_T(p)$ est β proche, en topologie C^1 compacte ouverte, du plan tangent à la variété instable du tore au point p_2, nous aurons

$$\frac{\mid \phi_T^*(\mathrm{d}s) \mid}{\mid \Phi_T^*(\mathrm{d}u) \mid} < \beta \quad \text{et} \quad \frac{\mid \phi_T^*(\mathrm{d}I) \mid}{\mid \Phi_T^*(\mathrm{d}u) \mid} < \beta$$

Tout notre problème revient donc à estimer la norme des formes différentielles $\phi_T^*(\mathrm{d}w)$ pour $w = s, I$.

Nous savons que celles ci vérifient l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^*\omega = \mathcal{L}(X_K)(\phi_t^*\omega)$$

où ω est une forme différentielle quelconque, et $\mathcal{L}(X_K)$ la dérivée de Lie suivant le champ de vecteur hamiltonien X_K associé à K.

Notons

$$\delta u(t) = \phi_t^*\mathrm{d}u \quad \delta s(t) = \phi_t^*\mathrm{d}s \quad \delta I_i(t) = \phi_t^*\mathrm{d}I_i \quad \delta\phi_i = \phi_t^*\mathrm{d}\phi_i \tag{24}$$

Nous avons alors

$$\dot{\delta x} = \mathcal{L}(X_K)\delta x \tag{25}$$

où $\delta x = (\delta u, \delta s, \delta I, \delta\phi)$.

L'équation 25 n'est autre que l'*équation aux variations* associée aux équations du mouvement 23. On obtient

$$\begin{array}{rcl} \dot{\delta s} & = & -\delta s \\ \dot{\delta u} & = & \delta u \\ \dot{\delta I} & = & 0 \\ \dot{\delta \phi} & = & 0 \end{array}$$

Nous avons donc les équations différentielles suivantes:

$$\left| \begin{array}{rcl} \dot{\frac{\delta s}{\delta u}}(t) & = & -2\frac{\delta s}{\delta u} \\ \dot{\frac{\delta I}{\delta u}}(t) & = & -\frac{\delta I}{\delta u} \\ \dot{\frac{\delta \phi}{\delta u}}(t) & = & -\frac{\delta \phi}{\delta u} \end{array} \right.$$

Celles-ci s'intégrent immédiatement et donnent

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{\delta s}{\delta y}(t) & = & \frac{\delta s}{\delta y}(0)e^{-2t} \\ \frac{\delta I}{\delta u}(t) & = & \frac{\delta I}{\delta u}(0)e^{-t} \\ \frac{\delta \phi}{\delta u}(t) & = & \frac{\delta \phi}{\delta u}(0)e^{-t} \end{array} \right.$$

D'autre part, nous avons

$$\delta u(t) = \delta u(0)e^t$$

Les conditions initiales pour chacune des équations sont données par l'angle entre les plans tangents à la variété invariante Δ et la variété stable $W^s(\mathcal{T})$ du tore.

Dans toute la suite, nous regarderons le plan tangent à Δ en p_1 comme le produit du vecteur tangent v définit par l'équation 23 et d'un m-plan $\mathcal{P}$ orthogonal à v dans $\mathbf{R}^{2m+2}$, engendré par m vecteurs orthogonaux v_k, $k = 1, \ldots, m$. Le choix de ces vecteurs n'est pas unique. On se donne une normalisation en supposant chacun des vecteurs unitaires, c'est à dire

$$\mid v_k \mid = 1 \quad k = 1, \ldots, m \tag{26}$$

où $\mid . \mid$ est la norme euclidienne usuelle.

Les seules contraintes sur les vecteurs v_k proviennent de l'hypothése sur le splitting (écart), supposé de taille $O(\mu)$, entre le plan tangent à Δ et $W^s(\mathcal{T})$. Celle-ci nous impose les inégalités suivantes :

$$\mid v_u^k \mid > k\mu \tag{27}$$

$$\mid v_I^k \mid > k'\mu \tag{28}$$

où k et k' sont deux constantes positives, indépendantes de μ.

L'hypothèse 26 entraine

$$\mid v_*^k \mid < 1 \quad * = s, u, I, \phi \ ,$$

ce qui, avec 27 nous donne le lemme suivant :

Lemme 6 *Il existe une constante $k > 0$ telle que en $T_{p_1}\Delta$, nous avons*

$$\begin{array}{rcl} \mid \delta u(0) \mid & > & k\mu \\ \mid \frac{\delta s}{\delta u}(0) \mid & < & 1/k\mu \\ \mid \frac{\delta I}{\delta u}(0) \mid & < & 1/k\mu \\ \mid \frac{\delta \phi}{\delta u}(0) \mid & < & 1/k\mu \end{array}$$

Fin de la démonstration : En p_1, nous avons $v = (c\xi, c'e^{-T}, 0, \omega)$, où c et c' sont deux constantes positives, indépendantes de μ. Nous avons alors, en $t = T$,

$$\left| \begin{array}{rcl} \delta s/\delta u(T) & = & \frac{c\xi}{c'}e^{-T} \\ \delta I/\delta u(T) & = & 0 \\ \delta \phi/\delta u(T) & = & \frac{\omega}{c'} \end{array} \right.$$

Pour tout vecteur v_k, $k = 1, \ldots, m$, nous avons

$$\left| \begin{array}{rcl} \mid \delta s/\delta u(T) \mid & \leq & \frac{1}{k\mu}e^{-2T} \\ \mid \delta I/\delta u(T) \mid & \leq & \frac{1}{k\mu}e^{-T} \end{array} \right.$$

On en déduit, en choisissant μ assez petit,

$$\begin{array}{rcl} \mid \delta s/\delta u(T) \mid & \leq & \mu^{1+\kappa} \\ \mid \delta I/\delta u(T) \mid & \leq & \mu^{1+\kappa} \end{array}$$

Or le plan tangent en p_2 et engendré par le vecteur tangent associé à l'équation 23, de la forme $v_2 = (0, u_2, 0, \omega)$ et m vecteurs orthogonaux à v_2, de la forme $v_2^k = (0, v_2, 0, \phi_2)$. Les inégalités précédentes nous permettent d'affirmer que les deux plans sont $\mu^{1+\kappa}$ proche en topologie C^1 compacte ouverte. Ceci termine la démonstration du lemme d'échange. $\square$

Remarque : La plus grande contrainte sur le lemme de transfert ne provient pas de l'approximation C^1, car en effectuant une translation (dans les variables d'angles) de Δ en p_2, on note que les deux plans sont exponentiellement proches.

2.2. Les tores hyperboliques normaux

2.2.1. Tore hyperboliques normaux et forme normale

Nous reprenons les notations du paragraphe 2.1. On considère le système défini sur V^{2m+2} munie de la forme Ω_0 par le hamiltonien

$$H(I,\phi,s,u) = (\omega \mid I) + \lambda\ su + b(s,u,\phi)Isu + (su)^2 c(s,u,\phi) + I^2 d(s,u,\phi) + I^3 e(I,\phi,s,u)$$

où

$$\begin{array}{rcl} b & = & b_0(su) + \mu b_1(s,u,\phi) \\ c & = & c_0(su) + \mu c_1(s,u,\phi) \\ d & = & d_0(su) + \mu d_1(s,u,\phi) \\ e & = & e_0(I,su) + \mu e_1(I,\phi,s,u) \end{array}$$

Les équations du mouvement ont alors la forme

$$\begin{array}{rcl} \dot{I} & = & -\mu\Gamma_I \\ \dot{\phi} & = & \omega + \Gamma_\phi + \mu\widehat{\Gamma}_\phi \\ \dot{s} & = & -(\lambda+\Lambda)s - \mu\widehat{\Lambda}_s \\ \dot{u} & = & (\lambda+\Lambda)u + \mu\widehat{\Lambda}_u \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_I(I,s,u\phi) & = & O_2(I,su) \\ \Lambda(I,su) & = & O_1(I,su) \\ \Gamma_\phi(I,su) & = & O_1(I,su) \\ \widehat{\Gamma}_\phi(I,s,u,\phi) & = & O_1(I,su) \\ \widehat{\Lambda}_s(I,s,u,\phi) & = & -s\alpha - \beta_s \\ \widehat{\Lambda}_u(I,s,u,\phi) & = & u\alpha + \beta_u \end{array}$$

où

$$\begin{array}{lcl} \alpha(I,s,u,\phi) & = & O_1(I,su) \\ \beta_u(I,s,u,\phi) & = & O_2(I,su) \\ \beta_s(I,s,u,\phi) & = & O_2(I,su) \end{array}$$

Le tore $\mathcal{T}$ d'équation $\{\ I = s = u = 0\ \}$, de dimension m, est donc invariant et partiellement hyperbolique: ses variétés stable et instable $W^s(\mathcal{T}) = \{\ I = u = 0\ \}$ et $W^u(\mathcal{T}) = \{\ I = s = 0\ \}$ sont de dimension $m+1$.

2.2.2. Lemme de transfert pour un tore hyperbolique normal

On reprend les hypothèses du paragraphe 2.1. Nous avons alors le résultat suivant.

Lemme de transfert : *Un tore hyperbolique normal vérifie la propriété $\mathcal{P}(\mu^\kappa)$, $\kappa > 0$ quelconque, avec $T = \gamma\left(\mu^{1+\kappa}\right)^{-\tau}$ et $\delta_u = \delta_I = e^{-T}$, $\delta_s = 1$, $\delta_\theta = \mu^{1+\kappa}$.*

La démonstration s'effectue comme précedemment en deux étapes résumées par les lemmes A et B suivants.

Lemme A (Contrôle $\mathbf{C^0}$) : *Soit* $p_2 = (\phi_2, 0, 0, u_2)$ *un point de* Θ_2 *dans* $\mathcal{V}_1$*, et* $\mathcal{V}_\beta$ *un voisinage de* p_2 *de taille* $\beta = \mu^{1+\kappa}$*, où* $\kappa > 0$ *quelconque. Il existe un point* p_1 *de* Δ_1*, un voisinage* $\mathcal{V}_\delta$ *de* p_1 *de taille* δ *tel que pour*

$$T = \mathcal{O}(\mu^{-\tau(1+\kappa)})$$

on ait $\Phi(T, \mathcal{V}_\delta) \in \mathcal{V}_\beta$.

Le point p_1 *est choisi tel que*

$$\begin{array}{lcl} \mid I_1 \mid & < & \exp(-\mu^{-\tau(1+\kappa)}) \\ \mid s_1 u_1 \mid & < & \exp(-\mu^{-\tau(1+\kappa)}) \end{array}$$

Nous avons aussi:

Lemme B (Contrôle $\mathbf{C^1}$) : *Soit* Δ *une sous variété invariante par* X_H*, coupant transversalement la variété stable* $W^s(\mathcal{T})$ *du tore* $\mathcal{T}$ *avec un angle de taille* $\mathcal{O}(\mu)$*. Alors au bout d'un temps* $T = \mu^{-\tau(1+\kappa)}$*, où* $\kappa > 0$, $\Phi(T, \Delta \cap \mathcal{V}_\delta)$ *est* C^1 $\mu^{1+\kappa}$ *proche de la variété instable* $W^u(\mathcal{T})$ *du tore, avec* $\mathcal{V}_\delta$ *donné par le lemme A.*

Les démonstrations de ces lemmes, beaucoup plus techniques que leurs analogues pour les tores simples, sont données en appendice (A et B). Le lemme de transfert découle de ces deux lemmes.

3. Le problème de transitivité

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, le λ-lemme que nous avons mis au point ne permet pas de démontrer le *problème de transitivité*:

Soient T_1, T_2 et T_3 trois tores hyperboliques normaux tels que $W^u(T_1)$ (resp. $W^u(T_2)$) coupe transversalement $W^s(T_2)$ (resp. $W^s(T_3)$) dans une surface d'énergie donnée $\mathcal{H}$. A-t-on $W^u(T_1)$ qui coupe transversalement $W^s(T_3)$ dans $\mathcal{H}$?

Pour les objets normalement hyperboliques (les orbites périodiques hyperboliques par exemple), ce résultat est trivial et se démontre à l'aide du λ-lemme (voir J. Palis et W. De Melo [PM], corollaire 1, p.85). Par contre, la condition de redressement imposée au λ-lemme pour les tores partiellement hyperboliques rend cette approche délicate. En effet, il faut savoir comment l'angle d'intersection se comporte par itération. Le lemme de transfert, par sa nature quantitative, nous permet de résoudre ce problème. Nous soulignons au passage, que la propriété de transitivité est implicitement sous-entendue par de nombreux auteurs ([HM], [Xi], [LSX]) dans la construction des orbites de transition.

Nous avons le lemme suivant:

Lemme de transitivité: *Soient T_1, T_2 et T_3, trois tores partiellement hyperboliques, tels que $W^u(T_1)$ (resp. $W^u(T_2)$) coupe transversalement $W^s(T_2)$ (resp. $W^s(T_3)$) dans $\mathcal{H}$ avec un splitting d'ordre μ. Alors $W^u(T_1)$ coupe transversalement $W^s(T_3)$ dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration: Le lemme d'échange C^1 permet d'affirmer que $W^u(T_1)$ est $\mathcal{O}(\mu^{1+\kappa})$ proche en topologie C^1 de $W^u(T_2)$. Comme $W^s(T_3)$ coupe transversalement $W^u(T_2)$ avec un splitting de taille $\mathcal{O}(\mu)$, nous avons, en utilisant un théorème de stabilité des intersections transverses sous faible perturbation C^1, $W^u(T_1)$ qui coupe transversalement $W^s(T_3)$ dans $\mathcal{H}$, pour μ assez petit. $\square$

Le second problème que nous abordons ici est le suivant:

Soient T_i, $i = 1, \dots, N$, une famille de N tores hyperboliques normaux formant une chaîne de transition. A-t-on $W^s(T_1)$ qui coupe transversalement $W^u(T_N)$ dans $\mathcal{H}$?

La résolution de cette question revient à utiliser récursivement le lemme de transitivité. Pour cela, nous avons besoin de connaitre le comportement de l'angle d'intersection sous-itération. Il se trouve que la démonstration du lemme de transfert contient cette information. En effet, nous avons le lemme suivant:

Lemme (contrôle de l'angle): *L'angle entre Δ et Δ_2 est de l'ordre de $O(\mu - \rho/\mu)$.*

Démonstration: Soit p un point appartenant à l'intersection de Δ et Δ_2. Soit $\mathcal{T}$ la translation dans les variables d'angle de p en p_2. Le (lemme III, appendice B) nous assure alors que $\mathcal{T}_*(\Delta)$ est ρ/μ proche en topologie C^1 de $W^u(\mathcal{T})$ au point p_2. Comme Δ_2 coupe transversalement $W^u(\mathcal{T})$ en p_2 avec un splitting de taille $O(\mu)$, on a $\mathcal{T}_*(\Delta)$ qui coupe Δ_2 transversalement avec un angle de l'ordre de $O(\mu - \rho/\mu)$. En effet, l'angle entre ces deux variétés se lit sur les composantes des vecteurs tangents suivants e_s et e_I et il est donc invariant sous l'action de la transformation précédente. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Nous avons donc la proposition fondamentale suivante, base de la démonstration du théorème C:

Proposition: *Soient T_i, $i = 1, \ldots, N$ une famille de N tores hyperboliques normaux formant une chaîne de transition, avec $N < E(\rho)$, où $\rho = e^{-T}$, $T = O(\mu^{-\tau(1+\kappa)})$, et tels que $W^u(T_i)$ coupe transversalement $W^s(T_{i+1})$ dans $\mathcal{H}$ avec un angle d'ordre μ, $i = 1, \ldots, N-1$, alors $W^u(T_1)$ coupe transversalement $W^s(T_N)$ dans $\mathcal{H}$.*

L'existence des orbites de transition le long de la chaîne, ainsi qu'une estimation du temps de parcours s'en déduise immédiatement, complétent ainsi la démonstration du théorème C.

4. Temps de transition dans le modèle d'Arnold

Nous appliquons les résultats des paragraphes précédents dans l'exemple d'Arnold. Le temps ainsi calculé est équivalent à celui obtenu par la méthode variationnelle de U. Bessi [Be] utilisée par P. Bernard [B].

Le modèle d'Arnold est défini par le hamiltonien suivant :

$$H(p,q,I_1,I_2,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) + (\cos(q) - 1)\,(1 + \mu(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)))$$

où $(\theta, q, I, p) \in \mathbf{T}^2 \times \mathbf{T} \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

4.1. Construction de la chaîne

Nous avons le lemme suivant:

Lemme 7 *Les variétés stable et instable des tores de la famille $\mathcal{T}$ se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$ dans un voisinage de $\theta_i = 0$ pour μ suffisamment petit.*

Démonstration : L'intégrale de Menikov (voir appendice) est définie par

$$M_i = \sin(\theta_i^0) \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t)) \cos(\omega_i t) dt$$

On a $M_i = 0$ pour $\theta_i = 0$, et l'hypothèse ii) du théorème 4.1.19 de ([Wi], p.393) est satisfaite puisque

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \theta_1^0}(0,0) & \frac{\partial M_2}{\partial \theta_1^0}(0,0) \\ \frac{\partial M_1}{\partial \theta_2^0}(0,0) & \frac{\partial M_2}{\partial \theta_2^0}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_{\infty}^{-\infty} f(\gamma(t)) \cos(\omega_1 t) dt & 0 \\ 0 & \int_{\infty}^{-\infty} f(\gamma(t)) \cos(\omega_2 t) dt \end{vmatrix} \neq 0$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Nous avons prouvé que les tores partiellement hyperboliques ont des variétés stables et instables qui se coupent transversalement pour μ suffisamment petit. La perturbation étant nulle sur la famille de tore, nous en déduisons le théorème suivant:

Théorème: *Le système modèle posséde une chaîne de transition.*

Démonstration : Il suffit de noter que les variétés stable et instable de tous les tores subsistent après perturbation et ceci independamment de la fréquence du mouvement sur le tore[24]. Un simple théorème des fonctions implicites nous donne alors l'existence de connexions hétéroclines entre deux tores suffisamment voisins, à savoir de l'ordre de μ [25].

Il existe donc une suite $\omega_i = (\omega_i^1, \omega_i^2) \in \mathbf{R}^2$, $i = 1, \ldots, N$, de fréquences telles que $| \omega_{i+1} - \omega_i | \leq \mu$ et telles que les variétés stable et instable des tores T_{ω_i} associés vérifient : $W^u(T_{\omega_i})$ coupe transversalement $W^s(T_{\omega_{i+1}})$ dans la surface d'énergie considérée.

La fréquence sur ces tores n'est pas obligatoirement diophantienne (sauf dans certaines régions de l'espace des phases). Néanmoins, le λ-lemme nous permet de montrer que ces tores sont des tores de transition. La chaîne ainsi formée est bien une chaîne de transition. □

4.2. Calcul du temps

Tout notre travail revient maintenant à chercher une région de l'espace des phases dans laquelle il existe une densité suffisante de fréquences diophantiennes et à estimer les constantes γ et τ associées à ces données.

On remarque tout d'abord que

$$\tau > 1$$

Nous prenons $\tau = 1 + \kappa'$, avec $\kappa' > 0$ une constante quelconque. En effet, dans le cas ou $k = 1$ l'ensemble des vecteurs fréquence diophantiens associé est de mesure nulle[26].

Le temps de dérive le long de la chaîne est donc

$$T = O(N\gamma^{-1}\mu^{1+\kappa})$$

Pour effectuer une dérive de longueur 1, nous devons considérer des chaînes constituées d'au moins $E(\mu^{-1})$ tores, où $E(x)$, $x \in \mathbf{R}$, est la partie entière de x. On obtient donc

$$T = O(\gamma^{-1}\mu^{2+\kappa})$$

On a $\gamma = \min\limits_{i=1,\ldots,E(\mu^{-1})} \gamma_i$. Supposons $\gamma > \gamma_0$ indépendant de μ. Dans ce cas, le temps de dérive est donné par

$$T = O(\mu^{2+\kappa})$$

où $\kappa > 0$ est une constante quelconque.

[24]Cette situation est non générique. Elle tient au fait que la perturbation s'annule sur la famille de tore. Losque l'on écrit les séries formelles afin de montrer l'existence des variétés stable et instable d'un tore donné, on s'appercoit que les termes posant un problème pour la convergence de la série sont automatiquement nulle. On utilise implicitement le fait que le tore existe et cela independamment de la frequence. P. Perfetti [Pe] donne une jolie démonstration de cette assertion à l'aide d'un théorème de point-fixe, clarifiant ainsi une remarque d'Arnold ([Ar], note de bas de page).

[25]Si on note $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ la fréquence du mouvement sur le tore non perturbé, on doit avoir $| \omega' - \omega | \leq \mu$, avec $| \, . \, |$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^2$

[26]Dans un système d'Arnold à n degrés de liberté, on doit imposer $\tau > n-1$. En effet, losque $\tau < n-1$ l'ensemble des vecteurs diophantiens est vide et losque $\tau = n-1$ il est de mesure nulle. On pourra consulter les travaux de Russman [Ru] sur ce sujet.

4.3. Comparaison aux méthodes variationnelles

Dans [Be], Bernard obtient, en adaptant une méthode variationnelle développée par U. Bessi [Be], le temps d'instabilité

$$T_{inst} \sim \mathcal{O}(1/\mu^2)$$

L'expression du temps d'instabilité obtenue au §.3.2. nous donne alors

$$T_{inst} \sim \mathcal{O}(1/\mu^{2+\kappa})$$

avec $\kappa > 0$ quelconque.

Les deux résultats sont donc comparables.

Lochak [Lo] suggère que le temps optimal de transition doit être de l'ordre de $\mu \mid \log(\mu) \mid$.

5. Chaînes d'orbites périodiques hyperboliques

A l'aide des résultats du chapitre 1, partie 3, nous décrivons une nouvelle approche, constructive, de l'estimation du temps de transition le long d'une chaîne.

5.1. Evaluation du temps le long d'une chaîne abstraite

On se donne un famille de N orbites périodiques normalement hyperboliques, notée O_i, $i = 1, \ldots, N$, telles que la variété stable $W^s(O_i)$ de O_i coupe transversalement la variété instable $W^s(O_{i+1})$ dans une surface d'énergie donnée.

Soit f_i l'application de premier retour associée à l'orbite périodique O_i. Nous travaillerons désormais avec ces diffeomorphismes de section. Nous supposons que la période de chaque orbite peut être fixée à n^*. Dans ce cas, l'application f^{n^*} possède un point fixe hyperbolique.

On peut toujours choisir un système de coordonnées tel que l'application est la forme suivante :

$$f^{n^*}(s,u) = (\lambda s, \lambda^{-1} u) + r(su)$$

où $s \in \mathbf{R}^k$, $u \in \mathbf{R}^k$, $0 < \lambda < 1$ et r est d'ordre 2 en su.
C'est le théorème de Moser [Mo2].

On suppose aussi que l'hyperbolicité λ est uniforme le long de la chaîne.

Nous effectuons maintenant l'hypothèse que l'angle d'intersection entre les variétés stable et instable est tel que

$$\mathcal{A}_i \geq c\mu$$

où μ est un paramètre.

Dans ce cas, le temps de parcours le long de la chaîne est :

Théorème : *Sous les hypothèses précédentes, le temps de dérive le long de la chaîne d'orbites périodiques est*

$$T = O(N.n.\frac{\log(\mu^{1+\kappa})}{\log \lambda})$$

où $\kappa > 0$ est un réel quelconque.

Le temps passé au voisinage d'une orbite périodique est bien entendu donné par le produit de la période et du temps hyperbolique passé dans chaque section. Celui ci est conditionné par l'angle d'intersection. Nous devons être $\mu^{1+\kappa}$ proche en topologie C^1 compacte ouverte de $W^u(O_i)$. Le temps hyperbolique associé est donc

$$T_h = \frac{\log \mu^{1+\kappa}}{\log \lambda}$$

On vérifie que la variété $W^u(O_{i-1})$ est exponentiellement redressée au bout du temps T_h. Par conséquent, l'angle d'intersection se conserve à une quantité exponentiellement petite près. Cette dernière remarque permet d'itérer ce raisonnement.

5.2. Realisation des chaînes par dynamique symbolique

La réalisation d'une chaîne d'orbites périodiques étant donnée une chaîne de tores possédant une dynamique symbolique est donnée au §.3 du chapitre précédent. En vue d'une estimation du temps de transition, nous devons préciser les caractéristiques de chacunes de ces orbites : emplacement, période. Nous avons alors le

Théorème 1 *Soit $\mathcal{T} = (T_i)_{i=1,\dots,m}$ une famille de tores hyperboliques provenant de la perturbation d'un système hamiltonien initialement hyperbolique. Il existe une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques $\mathcal{O} = (O_i)_{i=1,\dots,m}$ telle que le temps mis par une orbite pour longer cette chaîne est de l'ordre de*

$$T_{inst} = O(m\mu^{-\tau(1+\kappa)} \frac{log(\mu^{1+\kappa})}{log\lambda(\mu)}) \tag{29}$$

où τ est la constante diophantienne associée au vecteur fréquence des tores, $\kappa > 0$ est une constante quelconque, et $\lambda(\mu)$ est l'exposant de Lyapounov (supposé uniforme le long de la chaîne) des orbites périodiques considérées.

Démonstration : L'idée est de choisir le plus petit n assurant la tranversalité des variétés stable et instable des orbites périodiques. Ce choix peut être vu comme une version quantitative du corollaire 1 (on précise la valeur de n^*) dans le cas où la valeur de l'angle est connue.

Nous savons que, dans le cas d'une perturbation de taille μ d'un système hamiltonien initialement hyperbolique, l'angle entre les variétés stable et instable des tores hyperboliques est de l'ordre de μ. Il suffit donc d'assurer une proximité de l'orbite périodique à la variété stable du tore de l'ordre de $\mu^{1+\kappa}$, où $\kappa > 0$ est une constante quelconque, pour obtenir une proximité du même ordre (en topologie C^1) des variétés stable et instable de l'orbite périodique à celles du tore.

Cela revient à choisir la taille $\jmath$ de la fenêtre de l'ordre de $\jmath = \mu^{1+\kappa}$, où $\kappa > 0$ est une constante quelconque. Le choix de $\jmath$ nous donne directement, à partir de l'alphabet $\mathcal{A}$, la valeur minimale de la période des orbites périodiques constituant la chaîne. En effet, nous devons avoir

$$\mid \theta^+ - \theta^- + nv_0 \mid < c\jmath = c\mu^{1+\kappa}$$

On est donc ramené à un problème classique de calcul de temps d'ergodisation qui dans ce cas est donné par (voir [BGW])

$$n = \gamma^{-1}\mu^{-\tau(1+\kappa)} \tag{30}$$

où τ et γ sont les constantes diophantiennes associées à v_0.

Le théorème du §.3.1. nous donne le résultat attendu. $\square$

Remarques :

1. La difficulté d'implementation du résultat précédent tient au fait que l'hyperbolicité des orbites périodiques est difficile à déterminer.

2. On note que si $1 > \lambda > \lambda_0$, avec λ_0 indépendant de μ, alors nous obtenons un temps d'instabilité de l'ordre de

$$T = O(\mu^{-1-\kappa} \mid \log\mu \mid)$$

qui est le résultat optimal conjecturé par Lochak [Lo].

5.3. Première utilisation de la méthode des fenêtres

Nous allons illustrer la méthode des fenêtres d'Easton dans le cas simple des chaînes d'orbites périodiques hyperboliques. Nous supposons que le lecteur est familier avec les idées d'Easton [Ea] et la présentation de Marco [Ma]. Les calculs sont simplifiés par l'existence de bonnes formes normales au voisinage d'une orbite périodique hyperbolique, précisément, le système de coordonnées dû à Fenichel [Fe]. Contrairement au cas des chaînes de tores partiellement hyperboliques, que nous étudierons au paragraphe suivant, nous obtenons ici un résultat général.

Nous effectuons les hypothèses suivantes:

i) il existe une chaîne d'orbites périodiques hyperboliques.

ii) Il existe un système de coordonnées $(s,u) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ tel que

$$f_i(s,u) = (\lambda s, \lambda u) + (su)^2 r(s,u)$$

où $\lambda < 1$. On peut prendre λ dépendant de μ, par exemple

$$\lambda = c.\mu^\sigma$$

où c est une constante.

Nous allons alors démontrer qu'il existe des orbites le long de la chaîne, et plus précisément, si la chaîne est fermée, des orbites périodiques de période arbitrairement longues.

Le principe consiste à construire une famille de fenêtres correctement allignées. Dans notre cas, la relation d'alignement sera transitive, ce qui n'est pas le cas en général (voir pour les tores).

Remarque: On peut aussi démontrer l'existence de ces orbites périodiques de manière plus directe à l'aide d'une dynamique symbolique. Je signale à cette occasion que le résultat principal permettant de montrer ce dernier résultat est la *transitivité* des intersections le long de la chaîne. En effet, on peut facilement montrer, grâce au λ-lemme de Palis, que

$$\begin{array}{ccc} W^u(O_1) & \pitchfork & W^s(O_n) \\ W^s(O_1) & \pitchfork & W^u(O_n) \end{array}$$

On construit alors, de manière usuelle une famille de verticales et d'horizontales (voir par exemple J. Moser [Mo] ou S. Wiggins [Wi]).

Nous avons aussi une hypothèse sur l'application de transition entre les sections:

iii) L'application de section est de la forme:

$$\Lambda(x) = x + \Pi x + O(x^2)$$

avec

$$\Pi_\mu = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec la condition *asymptotique* suivante:

$$\begin{array}{rcl} a(0) & = & 0 \\ c(0) & \neq & 0 \\ b(0) & \neq & 0 \end{array}$$

et la condition de *transversalité* suivante lorsque $\mu \neq 0$:

$$a(\mu) = c\delta(\mu)$$

où $\delta(\mu)$ est le splitting des variétés invariantes.

iv) Nous avons aussi une hypothèse sur le splitting (l'angle d'intersection) des variétés hétéroclines:

$$\delta = c.\mu^\kappa$$

où $\kappa \geq 1$.

Sous ces hypothèses, nous allons démontrer le théorème suivant (encore une fois, nous pouvons le démontrer d'une autre facon à l'aide d'un λ-lemme quantitatif):

Théorème: *Le temps de transition le long de la chaîne est donné par*

$$T = O(N.(n_i + n_0))$$

où N est le nombre d'orbites périodiques constituant la chaîne, n_i est la période de l'orbite O_i, n_0 le temps passé dans chaque section.

On a pour une dérive d'ordre 1:

$$\begin{array}{rcl} N & = & O(1/\delta) = O(\mu^{-kappa}) \\ n_0 & = & O((1-\beta)/\sigma) \end{array}$$

où $1 > \beta > 0$ *est quelconque.*

Démonstration: On commence par construire les fenêtres, en suivant Easton [Ea] (voir aussi Marco [Ma]). La première étape est linéaire. On note

$$P(x) = x + Px$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$$

Le choix des horizontales parallèles à la variété stable et des verticales telles que leurs image par Π soit parallèle à la variété instable, nous conduit à la matrice P suivante:

$$P = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ 0 & \hat{d} \end{pmatrix}$$

avec $a\hat{b} + b\hat{d} = 0$.

On obtient alors des fenêtres $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{A}_i$ de la forme:

$$B = \begin{pmatrix} a\hat{a} & 0 & cc \\ c\hat{a} & c\hat{b} + d\hat{d} & \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^n \hat{a} & \lambda^n \hat{b} \\ 0 & \lambda^{-n} \hat{d} \end{pmatrix}$$

avec $p_i = (s_i, u_i)$, $f_a^n(p_i) = (\lambda^n s_i, \lambda^{-n} u_i)$, et $\Lambda(p_{i+1}) = (s_i', u_i')$.

Nous obtenons alors les matrices intermédiaires suivantes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda^n \hat{a} & 0 \\ 0 & -(c\hat{b} + d\hat{d}) \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} a\hat{a} & -\lambda^n \hat{b} \\ c\hat{a} & -\lambda^{-n} \hat{d} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-n} \hat{a}^{-1} & 0 \\ 0 & -(c\hat{b} + d\hat{d})^{-1} \end{pmatrix}$$

Comme $\hat{a} \neq 0$ par transversalité et $c\hat{b} + d\hat{d} \neq 0$ par hypotèse sur les horizontales des fenêtres, on a M inversible.

On obtient alors:

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} \lambda^{-n} a & -\hat{a}^{-1} \hat{b} \\ -c\hat{a}(c\hat{b} + d\hat{d})^{-1} & \lambda^{-n} \hat{d}(c\hat{b} + d\hat{d})^{-1} \end{pmatrix}$$

On démontre alors, par un simple calcul que :

$$\| M^{-1}N \|_1 = c.\mu^\beta$$

si

$$n = \frac{1-\beta}{\sigma}$$

De même, on montre, en choisissant le point p_{i+1} tel que $s_i' = 0$ avec $\mid \hat{a}^{-1}s_i \mid 1-2c\mu^\beta$ que

$$\| M^{-1}(\hat{a}_i - \hat{p}_i) \|_\infty \leq 1 - 2c\mu^\beta$$

On vérifie alors aisément la condition d'alignement pour des fenêtres affines.

Remarque: Si nous avons une chaîne fermée, alors la méthode fixe le centre de toutes les fenêtres, alors que dans le cas précédent, le centre de la première fenêtre est choisi arbitrairement.

Le contrôle des restes des fenêtres s'effectue de la même manière que dans Marco ([Ma], §.7.3).

Ceci termine la démonstration du théorème. □

On peut maintenant appliquer ce théorème avec une valeur fixe de la période de chaque orbite périodique. En utilisant la construction des chaînes d'orbites périodiques hyperboliques ontenue en 5.2, nous avons:

$$n_i = c.\mu^{-\tau(\kappa+\alpha)}$$

où $\alpha > 0$ est quelconque, et τ est la constante diophantienne associée au vecteur fréquence sur le tore. Nous avons alors:

Théorème: *Le temps de dérive le long de la chaîne de tores est donné par:*

$$N = O(C.\mu^{-(\kappa(1+\tau)+\tau\alpha)})$$

où C est une constante indépendante de μ.

Nous avons employé la méthode des fenêtres dans un cadre complètement hyperbolique, ce qui est, intuitivement le cas le plus simple. Néanmoins, le paragraphe suivant montre que sa mise en oeuvre n'est pas beaucoup plus facile que dans le cas partiellement hyperbolique. Cela confirme le fait que nous sommes, dans le cas des chaînes de transition, dans une situation "presque" hyperbolique.

6. La méthode des fenêtres

Nous allons étudier le système hamiltonien défini par:

$$H(p, q, I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(p, q, I_1, I_2) + \mu H_1(p, q, I_1, I_2, \theta_1, \theta_2)$$

où

$$H_0(p, q, I_1, I_2) = \frac{1}{2}p^2 + (\cos(q) - 1) + \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2)$$

et

$$H_1(p, q, I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = f(q)(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2))$$

On suppose que $g(t) = f(\gamma(t))$, où $\gamma(t)$ est la solution représentant la séparatrice du pendule simple, est une fonction impaire.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 *Il existe une chaîne de transition le long de laquelle la dérive s'effectue en un temps*

$$T_{inst} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu^{3+\sigma}}\right)$$

où $\sigma > 0$ est quelconque.

Démonstration : Elle s'effectue en trois étapes. On commence par calculer la forme de l'application entre les différentes sections des tores de la chaîne. On construit ensuite une famille de fenêtres correctement alignées en suivant le travail de J.P. Marco [Ma]. Nous calculons enfin le temps de transition le long de la chaîne.

a. Application entre les sections

L'existence des chaînes de transition a été établie au §.3.

Dans un cas initialement hyperbolique, nous savons que le splitting est de l'ordre de μ. Par conséquent, la distance maximale pour laquelle nous sommes en mesure d'assurer une intersection transverse des variétés stable et instable est de l'ordre de μ (qui est donné par un théorème des fonctions implicites). On définit alors un *pas de chaîne*, noté $c(\mu)$, où $c(\mu) = O(\mu)$.

On note T_ω un tore de la chaîne de transition. On peut lui associer deux tores, notés $T_{\omega+c(\mu)}$ et $T_{\omega-c(\mu)}$. Lorsque μ tend vers zéro, $c(\mu)$ tend vers zéro, et $T_{\omega+-c(\mu)}$ tend vers T_ω.

On définit maintenant l'application de section entre le tore T_ω et le suivant dans la chaîne de transition, $T_{\omega+c(\mu)}$.

Soit o_μ une obite hétérocline entre ces deux tores, i.e. une orbite qui appartient à $W^u(T_\omega) \cap W^s(T_{\omega+c(\mu)})$.

Remarque: Pour $\mu = 0$, nous avons une orbite homocline au tore T_ω.

On note p (resp. q) le premier point d'intersection de cette orbite, notée o_μ, avec la surface de section $S_{\omega+c(\mu)}$ (resp. S_ω associée au tore $T_{\omega+c(\mu)}$ (resp. T_ω). Evidemment, on a $p \in W^s(T_{\omega+c(\mu)})$ et $q \in W^u(T_\omega)$. On peut de choisir le système de coordonnées locales de maniére à ce que ces deux points soit les même.

Soit $D_\omega(q)$ (resp. $D_{\omega+c(\mu)}(p)$) un voisinage ouvert de q (resp. p) dans S_ω (resp. $S_{\omega+c(\mu)}$).

On appelle *application de transition*, l'application de Poincaré définie entre $D_{\omega+c(\mu)}(p)$ et $D_\omega(q)$, notée Λ_μ. On a

$$\Lambda_\mu(x) = q + \Pi_\mu h + \Lambda_2(h)$$

où $h = x - p$, $\Pi_\mu = D_p(\Lambda_\mu)$ et Λ_2 est d'ordre au moins deux. On effectue ensuite un développement de Λ en μ. On obtient

$$\Lambda(x, \mu) = \Lambda(x, 0) + \mu \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu}(x, 0) + O(\mu^2)$$

Nous pouvons calculer explicitement les applications $\Lambda_0(x)$ et $\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu}(x, 0)$. Dans toute la suite, on note $\Gamma(x) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu}(x, 0)$.

On précise maintenant la forme de la dérivée de Λ par rapport à x au point p. On obtient

$$\Pi_\mu = D_x \Lambda_\mu(p) = D_x \Lambda_0(p) + \mu D_x \Gamma(p) + O(\mu^2)$$

Donc, lorsque μ tend vers zéro, la matrice Π tend vers $D_x \Lambda_0(p)$. Nous avons alors le lemme suivant:

Lemme 8 (application de transition) *: L'application de transition $\Lambda_\mu(x)$ définie de $D_{\omega+c(\mu)}(p)$ sur $D_\omega(q)$, s'écrie*

$$\Lambda_\mu(x) = q + \Pi_\mu h + \Lambda_2(h)$$

où $h = x - p$, $\Pi_\mu = D_p(\Lambda_\mu)$. La matrice Π_μ est de la forme

$$\Pi_\mu = \begin{pmatrix} 1 + \mu\alpha & 0 & T & 0 \\ \mu\beta & a & 0 & b \\ \mu\gamma & 0 & 1 & 0 \\ \mu\delta & c & 0 & d \end{pmatrix} + O(\mu^2)$$

où γ est directement relié au splitting de $T_{\omega+c(\mu)}$ et T_ω.

La démonstration de ce lemme est donnée en appendice.

b. Fenêtres

En suivant la méthode développée par Marco [Ma], nous construisons des fenêtres $(\mathcal{B}_j)_{1 \leq j \leq J}$ de la forme

$$\mathcal{B}_j(x) = \widehat{q}^{(j)} + B^{(j)}x + \mathcal{B}_2^{(j)}$$

où le centre $q^{(j)} \in D_q(\mu)$ est proche de q; tel que pour un ensemble d'entiers n_j donnés, la fenêtre

$$f^{n_j} \circ \Psi \circ \mathcal{B}_j$$

s'aligne correctement sur la fenêtre $\mathcal{B}_{j+1}$. Le *lemme de l'ombre* dû à Easton [Ea], nous donne l'existence d'au moins une orbite connectant les tores extrêmes de la chaîne de transition.

On commence par regarder les *fenêtre affines* $(\mathcal{P}_j)$, de la forme

$$\mathcal{P}_j(x) = \widehat{p}^{(j)} + P^{(j)}x$$

où le centre $\widehat{p}^{(j)}$ est proche de $\widehat{p}$.

On peut alors choisir la fenêtre $\mathcal{B}_j$ définie par

$$\mathcal{B}_j = \Lambda \circ \mathcal{P}_{j+1}$$

Nous allons tout d'abord montrer que les fenêtres affines sont alignées. Puis, en utilisant un *critère d'alignement* du à Marco [Ma], nous en déduirons, moyennant un bon contrôle des restes donné par le lemme de transfert, l'alignement des fenêtres $\mathcal{B}_j$. Précisément, nous avons le lemme suivant, démontré en appendice.

Lemme 9 *Les fenêtres $(\mathcal{B}_j)_{1\leq j\leq J}$ sont correctement alignées pour $n_j = n = \mu^{-(2+\sigma)}$, où $\sigma > 0$ et μ est suffisamment petit.*

c. Démonstration du théorème

On démontre maintenant le théorème. Nous avons $E(1/\mu)$ tores (où $E(x)$ représente la partie entière de x), et $n_j = n = \mu^{-(2+\sigma)}$, $\sigma > 0$. On en déduit que le temps de transition est donné par

$$T_{\text{inst}} = \mathcal{O}(E(1/\mu)\mu^{-(2+\sigma)}) = \mathcal{O}(\mu^{-(3+\sigma)})$$

où $\sigma > 0$, ce qui termine la preuve du théorème. □

7. Conclusion et perspectives

7.1. Optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev-Lochak

Nous allons maintenant discuter (de manière informelle) la possibilité d'étendre les résultats précédents au cas initialement elliptique.

La première étape est de démontrer un résultat de forme normale comme celui utilisé dans le §. 2.2. Ce travail a d'hors et déja été réalisé par L. Niederman [Ni].

La seconde étape est d'estimer l'angle d'intersection des variétés stable et instable d'un tore donné. Nous effectuons l'hypothèse suivante :

$$\mathcal{A} = M(\epsilon)\mu$$

où $M(\epsilon)$ est donné par le calcul de Melnikov[27].

Cette hypothèse est déja vérifiée dans l'exemple d'Arnold. En effet, M. Rudnev et S. Wiggins [RW2] ont montré que pour $\mu = \epsilon^m$, on a

$$M(\epsilon) \geq ce^{\epsilon^{-1/2(n-1)}}$$

oú c est une constante indépendante de ϵ.

Nous pouvons maintenant reprendre le raisonnement du §.1. Nous allons travailler à ϵ fixé et μ indépendant de ϵ.

Nous devons calculer le temps de transfert associé à une variété faisant un angle $\mathcal{A} = M(\epsilon)\mu$. Nous allons supposer que le résultat en initialement hyperbolique se transpose directement[28]. Nous avons donc un temps de transfert égal à

$$T = \frac{C}{\gamma(M(\epsilon)\mu^{1+\kappa})^{\tau}}$$

Placons maintenant dans l'exemple d'Arnold généralisé proposé par Lochak [Lo2] et étudié par Rudnev et Wiggins [RW]. On défini

$$H(x, y, I, \phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{I_j^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \epsilon(\cos x - 1) + \mu F(x, \phi)$$

avec $(y, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{T}$, $(I, \phi) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{T}^{n-1}$, $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. On suppose que F est un polynôme trigonométrique dans la variable x de degré fini ν_0 et que la moyenne de F en ϕ est nulle pour tout x.

---

[27]Si on note $\delta(\phi) = I^+(\phi) - I^-(\phi)$ l'écart entre les variétés stable et instable, on a $\delta(\phi) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \mu^k \delta_k$. On note alors $M(\epsilon)$ le déterminant de $Jac(\delta_1(\phi)) \mid_{\phi_0}$ au point homocline ϕ_0.

[28]La vérification du lemme de transfert est lié à un contrôle à $M(\epsilon)\mu$ près du reste de la forme normale. Ceci est possible grâce au théorème 4.1 du §.4 de [Ni].

La construction d'une chaîne de transition s'effectue de la même facon qu'au §.3. On supposera pour simplifier que la perturbation s'annulle sur la famille de tores.

Le temps d'instabilité le long d'une chaîne de $E(M(\epsilon)^{-1})$ tores partiellement hyperboliques, où $E(x)$ est la partie entière de x, est alors donné par

$$T = O\left(\frac{\gamma^{-1}}{M(\epsilon)^{\tau}\mu^{\tau(1+\kappa)+1}}\right)$$

Dans l'exemple d'Arnold, il est possible de choisir $\mu = \epsilon^m$, avec m suffisamment grand et $M(\epsilon) = Me^{-1/\epsilon^{1/2(n-1)}}$. Le temps est alors donné par

$$T = O\left(\gamma^{-1}\epsilon^{-\tau(1+\kappa)-1}e^{1/\epsilon^{1/2(n-1)}}\right)$$

Nous avons $\tau > n-1$, alors

$$T = \left(\gamma^{-1}\epsilon^{-n-\kappa}e^{1/\epsilon^{1/2(n-1)}}\right)$$

La contribution des termes en puissance de ϵ sont négligeables devant le terme exponentiel, et le temps est donc égal à

$$T = O\left(e^{1/\epsilon^{1/2(n-1)}}\right)$$

Nous avons donc exactement les exposants de stabilité obtenus par Lochak [Lo2] pour le théorème de Nekhorochev.

Remarques:

1. La constante γ doit dépendre de ϵ. Néanmoins, sa contribution au temps d'instabilité est polynomiale en ϵ et n'influe donc pas sur le résultat final.

2. Contrairement à la méthode de U. Bessi [Be] il ne semble pas nécessaire de choisir μ exponentiellement petit en ϵ.

3. Dans le cas où le hamiltonien est à n degrés de libertés, la méthode précédente n'est pas applicable. En effet, personne n'a encore démontré que le terme de Melnikov donné la bonne contribution au splitting. La difficulté est essentiellement d'ordre technique. Elle est liée au fait qu'il n'existe pas de fractions continues en dimension supérieure ou égale à trois.

La méthode de Bessi connait les mêmes difficultés. Néanmoins, il semble plus facile de les surmonter dans ce cas.

4. De même que pour Bessi [Be], nous n'avons pas obtenu les exposants de stabilité optimaux, à savoir $1/2n$. Ceci est dû à la méthode. En effet, nous nous placons au voisinage des résonances simples où ces exposants ne sont plus valables. Néanmoins, nous optimisons le résultat de stabilité obtenu par P. Lochak [Lo] au voisinage d'une résonance simple.

7.2. Le problème des grands angles homoclines

1. Dans un article récent, Chierchia [Ch2] construit une chaîne de transition dans un système hamiltonien proche intégrable à 4 degrés de liberté. C'est l'existence, dans certaines régions de l'espace des phases, de grands angles homoclines qui rend possible cette construction.

La question est alors de savoir si ce dernier résultat ne contredit pas le théorème de Nekhorochev.

Nous remarquons tout d'abord que ce phénomène a lieu au voisinage des résonances multiple (ici double). C'est la présence de plusieurs facteurs d'échelle qui conduit à ce résultat (voir les idées de Chierchia- Gallavotti [CG]).

Vis a vis de notre méthode, il est clair que la quantité calculé par Chierchia n'est pas l'angle intervenant dans le calcul du temps d'instabilité. En effet, nous utilisons un système de coordonnées redressées, et l'angle que nous définissons se rapproche de la définition du splitting tel qu'il est introduit par Lazutkin [La].

Dans ce cas, l'angle d'intersection doit être exponentiellement petit, même au voisinage d'une résonance double[29]. Le calcul du temps nous redonne donc dans ce cas un temps exponentiel et lève la contradiction.

2. Nous pouvons ramener les remarques précédentes au constat suivant :

Pour calculer le temps d'instabilité, nous utilisons un système de coordonnées adapté aux tores de la chaîne dans lequel les variétés invariantes sont redressées. Néanmoins, il est difficile de démontrer l'existence de connexion hétéroclines dans ce système.

Afin de mettre en évidence l'existence de chaînes de transition, il est préférable d'utiliser le système de coordonnées initial. Par contre, il semble délicat de calculer le temps de dérive directement dans ce cas.

[29] L'idée sous-jacente est que dans ces coordonnées, l'angle que nous calculons est associé à une forme normale dont le reste est exponentiellement petit.

Appendice A. Démonstration du lemme A

On pose

$$\rho_0 = \exp(-\mu^{-\tau(1+\kappa)})$$

Dans toute la suite les M_i seront des constantes indépendantes de μ. On a

$$\begin{array}{lcl} \mid I(0) \mid & \leq & \rho_0 \\ \mid s(0)u(0) \mid & \leq & \rho_0 \end{array}$$

On suppose (hypothèse (*)) :

$$\begin{array}{lcl} \mid I(t) \mid & \leq & c\rho_0 \\ \mid s(t)u(t) \mid & \leq & c\rho_0 \end{array} \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < \frac{d}{\mu^{\tau(1+\kappa)}} = T_d(\mu)$$

a) Cas des variables neutres I: On a

$$\dot{I} = -\mu\Gamma_I(I, s, u, \phi)$$

avec

$$\Gamma_I = O_2(I, su)$$

D'après (*), on a donc

$$\mid \dot{I} \mid < \mu c^2 \rho_0^2 M_1 \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

d'où avec le théorème des accroissements finis (TAF)

$$\mid I(t) - I(0) \mid < \frac{\mu c^2 \rho_0^2 M_1 d}{\mu^{\tau(1+\kappa)}} \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

b) Cas du produit su: Nous avons

$$\dot{su} = \mu h(I, s, u, \phi)$$

où

$$h = O_2(I, su)$$

On a donc avec (*) l'inégalité

$$\mid \dot{su} \mid < \mu c^2 \rho_0^2 M_2 \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

En utilisant une nouvelle fois le (TAF), nous obtenons

$$\mid s(t)u(t) - s(0)u(0) \mid < \frac{\mu c^2 \rho_0^2 M_2 d}{\mu^{\tau(1+\kappa)}} \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

c) Cas de la variable stable s: Notons $s_\mu(t)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{s} = -(\lambda + \Lambda)s + \mu\widehat{\Lambda}_s$$

et $s_0(t)$ la solution du système non perturbé

$$\dot{s} = -(\lambda + \Lambda)s$$

On a alors,

$$s_\mu(t) - s_0(t) = s_\mu(0) - s_0(0) + \mu \int_0^t \widehat{\Lambda}_s(z)dz$$

Supposons $s_\mu(0) = s_0(0)$, on a

$$\mid s_\mu(t) - s_0(t) \mid < \mu \int_0^t \mid \widehat{\Lambda}_s(z) \mid dz$$

c.1) Comportement de $\mathbf{s_0(t)}$: Comme

$$\Lambda = O_1(I, su)$$

on a, d'après (*)

$$\mid \Lambda \mid \leq M_3 c \rho_0$$

Pour μ assez petit, nous avons donc

$$\mid s_0(t) \mid < M_4 s_0(0) \exp(-\lambda t) \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

c.2) Comportement de $\mathbf{s_\mu(t)}$: Nous avons, d'après c.1,

$$\mid s_\mu(t) \mid < M_4 \mid s_0(0) \mid \exp(-\lambda t) + \mu \int_0^t \mid \widehat{\Lambda}_s(z) \mid dz$$

Or, on a

$$\widehat{\Lambda}_s = O_1(I, su)$$

ce qui nous donne, en utilisant (*),

$$\mid \widehat{\Lambda}_s(z) \mid < M_5 c \rho_0 \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

soit

$$\mid s_\mu(t) \mid < M_4 \mid s_0(0) \mid \exp(-\lambda t) + \mu M_5 c \rho_0 \mid t \mid \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

On a alors en $t = T_d(\mu)$

$$\mid s_\mu(t) \mid < M_4 \mid s_0(0) \mid \exp(-\lambda T_d(\mu)) + \frac{\mu M_5 c \rho_0 d}{\mu^{\tau(1+\kappa)}}$$

Or

$$\frac{\mu M_5 c\rho_0 d}{\mu^{\tau(1+\kappa)}} = \exp(-\mu^{-\tau(1+\kappa)})\mu^{1-\tau(1+\kappa)} < \mu^{1+\kappa}$$

pour $\mu < \mu_0$, μ_0 assez petit.

d) Cas des variables angulaires ϕ: On a

$$\dot{\phi} = \omega + \Gamma_\phi + \mu\widehat{\Gamma}_\phi$$

Notons $\widehat{\phi_0}$ la solution du système "intégrable"

$$\dot{\phi} = \omega$$

et ϕ_0 la solution du système non perturbé

$$\dot{\phi} = \omega + \Gamma_\phi$$

On a

$$\mid \phi_0(t) - \widehat{\phi}_0(t) \mid < \mid \phi_0(0) - \widehat{\phi}_0(0) \mid + \int_0^t \mid \Gamma_\phi(z) \mid dz$$

On choisit $\phi_0(0) = \widehat{\phi}_0(0)$. Comme $T_d(\mu)$ est le temps d'ergodisation, nous avons

$$\mid \widehat{\phi}_0(T_d(\mu)) - \phi_2 \mid < \mu^{1+\kappa} \tag{31}$$

De plus,

$$\widehat{\Gamma}_\phi = O_1(I, su)$$

soit, avec l'hypothèse (*), nous obtenons

$$\mid \widehat{\Gamma}_\phi(z) \mid < M_6 c\rho_0 \quad \text{pour} \quad \mid t \mid < T_d(\mu)$$

On obtient donc

$$\mid \phi_0(T_d(\mu)) - \phi_2 \mid < \mu^{1+\kappa} + T_d(\mu)\rho_0 M_6$$

Comme

$$T_d(\mu)\rho_0 < \mu^{1+\kappa} \tag{32}$$

on en déduit, en utilisant 31 et 32,

$$\mid \phi_0(T_d(\mu)) - \phi_2 \mid < 2\mu^{1+\kappa} \tag{33}$$

On a aussi

$$\mid \phi(T_d(\mu)) - \phi_2 \mid < \mid \phi_0(T_d(\mu)) - \phi_2 \mid + \mu \int_0^{T_d(\mu)} \mid \widehat{\Gamma}_\phi(z) \mid dz$$

Comme

$$\widehat{\Gamma}_\phi = O_2(I, su)$$

on a, en utilisant (*),

$$\mid \widehat{\Gamma}_\phi(z) \mid < M_7 \rho_0^2$$

Ce qui nous donne, en utilisant 33

$$\mid \phi(T_d(\mu)) - \phi_2 \mid < 2\mu^{1+\kappa} + M_7\rho_0^2 T_d(\mu) < \frac{3}{2}\mu^{1+\kappa}$$

e) Validité des inégalités : Nous devons nous assurer que l'hypothèse (*) est bien vérifiée. Pour cela, il nous faut trouver des constantes c et d, indépendantes de μ et satisfaisant l'inégalité suivante

$$\frac{c^2 \rho_0 M d\mu}{\mu^{\tau(1+\kappa)}} + 1 < c$$

où $M = \max(M_1, M_2)$.

Posons $c = 2$, nous devons alors trouver d tel que

$$4Md\mu^{-\tau(1+\kappa)+1} e^{-\mu^{-\tau(1+\kappa)}} < 1 \tag{34}$$

En choisissant $d = 1/4M$ et μ suffisamment petit, l'inégalité (34) est vérifiée. Ceci termine la démonstration du lemme d'échange C^0. $\square$

Appendice B. Démonstration du lemme B

On conserve les notations du §.2.1.

a) Equations aux variations pour les formes de base : On note

$$\bigtriangledown_x f = (\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial I_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial I_m}, \frac{\partial f}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \phi_m})$$

On a alors les équations aux variations suivantes pour les 1-formes :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\delta s} & = & -(\lambda+\Lambda)\delta s - \bigtriangledown_x \Lambda \delta x s - \mu \bigtriangledown_x \widehat{\Lambda}_s \delta x \\ \dot{\delta u} & = & (\lambda+\Lambda)\delta u + \bigtriangledown_x \Lambda \delta x u + \mu \bigtriangledown_x \widehat{\Lambda}_u \delta x \\ \dot{\delta I} & = & -\mu \bigtriangledown_x \Gamma_I \delta x \\ \dot{\delta \phi} & = & \bigtriangledown_x (\Gamma_\phi + \mu \widehat{\Gamma}_\phi)\delta x \end{array}$$

Nous avons donc les équations différentielles suivantes :

$$\left| \begin{array}{rcl} \dot{\frac{\delta s}{\delta u}}(t) & = & -2(\lambda+\Lambda)\frac{\delta s}{\delta u} + R_s \\ \dot{\frac{\delta I}{\delta u}}(t) & = & -(\lambda+\Lambda)\frac{\delta I}{\delta u} + R_I \\ \dot{\frac{\delta \phi}{\delta u}}(t) & = & -(\lambda+\Lambda)\frac{\delta \phi}{\delta u} + R_\phi \end{array} \right.$$

où les restes ont pour forme

$$R_* = A_* \frac{\delta *}{\delta u} + B_*$$

avec

$$\left| \begin{array}{rcl} A_s & = & -(s\partial_s \Lambda + u\partial_u \Lambda + \mu(\partial_s \widehat{\Lambda}_s + \partial_u \widehat{\Lambda}_u) + (u \bigtriangledown_x \Lambda + \mu \bigtriangledown_x \widehat{\Lambda}_u)\frac{\delta x}{\delta u}^{\neq u}) \\ B_s & = & -(s\partial_u \Lambda + \mu \partial_u \widehat{\Lambda}_s + (s\partial_I \Lambda + \mu \partial_I \widehat{\Lambda}_s)\frac{\delta I}{\delta u}) \\ A_I & = & -\mu \partial_I \Gamma_I - (u\partial_u \Lambda + \mu \partial_u \widehat{\Lambda}_u) - (u\Delta_x \Lambda + \mu \Delta_x \widehat{\Lambda}_u)\frac{\delta x}{\delta u}^{\neq u} \\ B_I & = & -\mu \partial_u \Gamma_I - \mu \Delta_x \Gamma_I \frac{\delta x}{\delta u}^{\neq I,u} \\ A_\phi & = & \partial_\phi (\Gamma_\phi + \mu \widehat{\Gamma}_\phi) - (u\partial_u \Lambda + \mu \partial_u \widehat{\Lambda}_u) - (u\Delta_x \Lambda + \mu \Delta_x \widehat{\Lambda}_u)\frac{\delta x}{\delta u}^{\neq u} \\ B_\phi & = & \partial_u (\Gamma_\phi + \mu \widehat{\Gamma}_\phi) + \Delta_x (\Gamma_\phi + \mu \widehat{\Gamma}_\phi)\frac{\delta x}{\delta u}^{\neq \phi,u} \end{array} \right.$$

Nous avons $T = \mu^{-\tau(1+\kappa)}$, où $\kappa > 0$, et $\rho = \exp(-T)$.

b) Quelques inégalités: Soit $\mathcal{B}_\mu$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}$ suivant:

$$\mathcal{B}_\mu = \{ \ z = (s,u,y,x) \in \mathcal{B} \ \mid \mid su \mid < \rho, \ \mid y \mid < \rho \ \}$$

Nous avons alors le lemme :

Lemme 10 *Dans $\mathcal{B}_\mu$, nous avons les inégalités suivantes:*

$$\mid \frac{\delta *}{\delta u}(t) \mid \leq c_* \mid \frac{\delta *}{\delta u}(0) \mid \exp(\int_0^t (\mid A_*(z) - \mu_*) dz) + c'_* e^{-(\mu_* - \lambda)t} \int_0^t \mid B_*(z) \mid \exp(\int_z^t (\mid A_*(r) \mid -\lambda) dr) dz \tag{35}$$

où $\mu_s = 2\lambda$, $\mu_I = \mu_\phi = \lambda$, et c_*,c'_* sont des constantes.

Démonstration : C'est une conséquence du lemme de Gronwall. On commence par noter qu'il existe des constantes c et c' telles que:

$$\mid \frac{\delta s}{\delta u} \mid \leq c\frac{\delta s}{\delta u}(0)e^{-2\lambda t} + c'\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mid B_s(z) + \frac{\delta s}{\delta u}(z)A_s(z) \mid \mathrm{d}z \qquad (36)$$

On rappelle que l'*inégalité de Gronwall généralisée* (voir [CL], p.37) s'énonce comme suit: soient u, v, c trois fonctions, avec c différentiable, si

$$v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)\mathrm{d}s \qquad (37)$$

alors

$$v(t) \leq c(0)\exp(\int_0^t u(s)\mathrm{d}s) + \int_0^t c'(s)\exp(\int_s^t u(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s \qquad (38)$$

Multiplions l'équation 36 par $e^{2\lambda t}$. On a alors une inéquation du type 37:

$$\mid \frac{\delta s}{\delta u}(t) \mid e^{2\lambda t} \leq c \mid \frac{\delta s}{\delta u}(0) \mid + c'\int_0^t e^{2\lambda z} \mid B_s(z) \mid \mathrm{d}z + c'\int_0^t \mid A_s(z) \mid e^{2\lambda z} \mid \frac{\delta s}{\delta u}(z)\mathrm{d}z$$

On pose $c(t) = c \mid \frac{\delta s}{\delta u}(0) \mid + c'\int_0^t e^{2\lambda z} \mid B_s(z) \mid \mathrm{d}z$ et $u(z) = \mid A_s(z) \mid$. On obtient donc

$$\mid \frac{\delta s}{\delta u}(t) \mid \leq c \mid \frac{\delta s}{\delta u}(0) \mid \exp(\int_0^t (\mid A_s(z) \mid -2\lambda)\mathrm{d}z) + c'e^{-\lambda t}\int_0^t \mid B_s(z) \mid e^{\int_z^t (\mid A_s(z)-\lambda)\mathrm{d}r}\mathrm{d}z$$

Pour $\delta I/\delta u$, nous avons

$$\mid \frac{\delta I}{\delta u}(t) \mid e^{\lambda t} \leq c \mid \frac{\delta I}{\delta u}(0) \mid + c'\int_0^t e^{\lambda z} \mid B_I(z) \mid \mathrm{d}z + c'\int_0^t \mid A_I(z) \mid e^{\lambda z} \mid \frac{\delta I}{\delta u}(z)\mathrm{d}z$$

On pose $c(t) = c \mid \frac{\delta I}{\delta u}(0) \mid + c'\int_0^t e^{\lambda z} \mid B_I(z) \mid \mathrm{d}z$ et $u(z) = \mid A_I(z) \mid$. On obtient donc

$$\mid \frac{\delta I}{\delta u}(t) \mid \leq c \mid \frac{\delta I}{\delta u}(0) \mid \exp(\int_0^t (\mid A_I(z) \mid -\lambda)\mathrm{d}z) + c'\int_0^t \mid B_I(z) \mid e^{\int_z^t (\mid A_I(z)-\lambda)\mathrm{d}r}\mathrm{d}z$$

On obtient de même l'inégalité pour $\delta\phi/\delta u(t)$. Ceci termine la démonstration du lemme. □

Nous avons le lemme suivant:

Lemme 11 *Il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\begin{array}{lcl} \mid du(0) \mid & > & k\mu \\ \mid ds/du(0) \mid & \leq & 1/(k\mu) \\ \mid dI/du(0) \mid & \leq & 1/(k\mu) \\ \mid d\phi/du(0) \mid & \leq & 1/(k\mu) \end{array}$$

Démonstration: On reprend la démonstration du lemme 6. La remarque suivant ce lemme est encore valable dans le cas standard. □

Fin de la démonstration : Nous allons terminer la démonstration du lemme d'échange en trois étapes. Pour cela, introduisons les sous-espaces suivants de $\mathcal{B}_\mu$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{B}^I & = & \{z=(s,u,y,x)\in\mathcal{B}_\mu \mid \mid u \mid< \rho\ \} \\ \mathcal{B}^{II} & = & \{z=(s,u,y,x)\in\mathcal{B}_\mu \mid \mid u \mid< \rho\ ,\ \mid s \mid< \rho\ \} \\ \mathcal{B}^{III} & = & \{z=(s,u,y,x)\in\mathcal{B}_\mu \mid \mid s \mid< \rho\ \} \end{array}$$

Les trois étapes du lemme d'échange coincident avec les trois ensembles $\mathcal{B}^*$, où $* = I, II, III$.

Remarque: On retrouve les 3 étapes de la démonstration du λ-lemme pour des difféomorphismes au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique. On commence par suivre l'évolution du plan tangent le long de $W^s(\mathcal{T})$, puis, ayant obtenu un redressement satisfaisant du plan tangent dans un petit voisinage du tore, on montre la dilatation des vecteurs tangents suivant $W^u(\mathcal{T})$.

Etape I:

Lemme I: *Soit* $0 < T_1 < T$, *avec* $T_1 = O(\mu^{-\tau(1+\kappa)})$, $\kappa > 0$, *tel que* $z \in \mathcal{B}^I$ *pour* $t \leq T_1$, *alors en* $t = T_1$, *on a*

$$\mid \frac{\delta s}{\delta u}(T_1) \mid< \frac{\rho}{\mu} \qquad \mid \frac{\delta I}{\delta u}(T_1) \mid< \frac{\rho}{\mu} \qquad \mid \frac{\delta \phi}{\delta u}(T_1) \mid< \frac{1}{\mu}$$

Démonstration : Supposons que $\mid \delta s/\delta u(t) \mid\leq 1/\mu$, $\mid \delta I/\delta u(t) \mid\leq 1/\mu$, $\mid \delta\phi/\delta u(t) \mid\leq 1/\mu$ dans $\mathcal{B}_I$ (hypothèse (*I)). Nous avons alors les inégalités suivantes dans $\mathcal{B}_I$:

$$\begin{array}{lcl} \mid A_s \mid & \leq & \rho/\mu \\ \mid B_s \mid & \leq & 1/\mu \\ \mid A_I \mid & \leq & \rho/\mu \\ \mid B_I \mid & \leq & \mu\rho \\ \mid A_\phi \mid & \leq & \rho/\mu \\ \mid B_\phi \mid & \leq & 1/\mu \end{array}$$

On en déduit alors, en utilisant les inégalités 35,

$$\mid \frac{\delta s}{\delta u}(t) \mid\leq \frac{c_s}{\mu} e^{(-2\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{c'_s}{(\rho/\mu)-2\lambda}(1-e^{(\rho/\mu)-2\lambda)t})\frac{e^{-\lambda t}}{\mu}$$

De même, nous avons

$$\mid \frac{\delta I}{\delta u}(t) \mid\leq \frac{c_I}{\mu} e^{(-\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{\mu\rho c'}{(\rho/\mu)-\lambda}(1-e^{((\rho/\mu)-\lambda)t})$$

et

$$| \frac{\delta \phi}{\delta u}(t) |\leq \frac{c_\phi}{\mu} e^{(-\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{c_I'}{(\rho/\mu)-\lambda}(1-e^{((\rho/\mu)-\lambda)t})\frac{1}{\mu}$$

On vérifie alors sans peine l'hypothèse (*I), et nos inégalités sont donc ainsi justifiées. En $t = T_1$, nous obtenons donc les ordres de grandeurs désirés. □

Etape II:

Lemme II: *Soit* $T_1 < T_2 < T$, *avec* $T_2 = O(\mu^{-\tau(1+2\kappa)})$, $\kappa > 0$, *tel que* $z \in \mathcal{B}^{II}$ *pour* $T_1 < t \leq T_2$, *alors en* $t = T_2$, *on a*

$$| \frac{\delta s}{\delta u}(T_1) |< \frac{\rho^2}{\mu} \quad | \frac{\delta I}{\delta u}(T_1) |< \frac{\rho}{\mu} \quad | \frac{\delta \phi}{\delta u}(T_1) |< \frac{\rho}{\mu}$$

Démonstration : Supposons $| \delta s/\delta u(t) |\leq O(\rho/\mu)$, $| \delta I \delta u(t) |\leq O(\rho/\mu)$, et $| \delta \phi/\delta u(t) |\leq O(1/\mu)$ dans $\mathcal{B}_{II}$ (hypothèse (*II)). Nous obtenons alors les inégalités suivantes dans $\mathcal{B}_{II}$:

$$\begin{array}{rcl} | A_s | & \leq & \rho/\mu \\ | B_s | & \leq & \rho^2/\mu \\ | A_I | & \leq & \mu\rho \\ | B_I | & \leq & \mu\rho \\ | A_\phi | & \leq & \rho/\mu \\ | B_\phi | & \leq & \rho/\mu \end{array}$$

On en déduit alors, en utilisant les inégalités 35,

$$| \frac{\delta s}{\delta u}(t) |\leq c_s \frac{\rho}{\mu} \mu e^{(-2\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{c_s'}{(\rho/\mu)-2\lambda}(1-e^{(\rho/\mu)-2\lambda)t})\frac{\rho^2}{\mu} e^{-\lambda t}$$

De même, nous avons

$$| \frac{\delta I}{\delta u}(t) |\leq c_I \frac{\rho}{\mu} e^{(-\lambda+\mu\rho)t} + \frac{\mu\rho c_I'}{\mu\rho-\lambda}(1-e^{(\mu\rho-\lambda)t})$$

et

$$| \frac{\delta \phi}{\delta u}(t) |\leq c_\phi \frac{1}{\mu} e^{(-\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{c_\phi' \rho}{\mu((\rho/\mu)-\lambda}(1-e^{((\rho/\mu)-\lambda)t})$$

On vérifie alors sans peine l'hypothèse (*II), et nos inégalités sont donc ainsi justifiées. En $t = T_2$, nous obtenons donc les ordres de grandeurs désirés. □

Etape III:

Lemme III: *En* $t = T$, *on a*

$$| \frac{\delta s}{\delta u}(T_1) |< \frac{\rho^3}{\mu} \quad | \frac{\delta I}{\delta u}(T_1) |< \frac{\rho^2}{\mu} \quad | \frac{\delta \phi}{\delta u}(T_1) |< \frac{\rho}{\mu}$$

Démonstration : Supposons $\mid \delta s/\delta u(t) \mid \leq O(\rho^2/\mu)$, $\mid \delta I/\delta u(t) \mid \leq O(\rho/\mu)$, et $\mid \delta\phi/\delta u(t) \mid \leq O(\rho/\mu)$ dans $\mathcal{B}_{III}$ (hypothèse (*III)). Nous obtenons alors les inégalités suivantes dans $\mathcal{B}_{III}$:

$$\begin{array}{rcl} \mid A_s \mid & \leq & \rho/\mu \\ \mid B_s \mid & \leq & \rho^2/\mu \\ \mid A_I \mid & \leq & \rho/\mu \\ \mid B_I \mid & \leq & \rho^2 \\ \mid A_\phi \mid & \leq & \rho/\mu \\ \mid B_\phi \mid & \leq & \rho \end{array}$$

On en déduit alors, en utilisant les inégalités 35,

$$\mid \frac{\delta s}{\delta u}(t) \mid \leq c_s \frac{\rho^2}{\mu} e^{(-2\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{c'_s \rho^2}{\mu((\rho/\mu)-2\lambda)}(1-e^{(\rho/\mu)-2\lambda)t})e^{-\lambda t}$$

De même, nous avons

$$\mid \frac{\delta I}{\delta u}(t) \mid \leq c_I \frac{\rho}{\mu} \rho e^{(-\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{\rho^2 c'_I}{\mu((\rho/\mu)-\lambda)}(1-e^{((\rho/\mu)-\lambda)t})$$

et

$$\mid \frac{\delta \phi}{\delta u}(t) \mid \leq c_\phi \frac{\rho}{\mu} e^{(-\lambda+(\rho/\mu))t} + \frac{c'_\phi \rho}{(\rho/\mu)-\lambda}(1-e^{((\rho/\mu)-\lambda)t})$$

On vérifie alors sans peine l'hypothèse (*III), et nos inégalités sont donc ainsi justifiées. □

Conclusion: Le lemme III montre que les deux plans tangents sont, au point $\phi_T(p_1)$, $\mu^{1+\kappa}$ proches en topologie C^1 compacte ouverte. Ceci termine la démonstration du lemme de transfert. □

Appendice C. Démonstration du lemme 8

• **Calcul de $D_x\Lambda_0(p)$**

Le calcul de $D_x\Lambda_0(p)$ s'effectue en trois étapes. On commence par linéariser les équations du pendule simple le long de la séparatrice. On en déduit alors la résolvante de notre système modèle. On se restreint enfin à la surface de section.

a) Linéarisation du pendule simple : Soit $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + (\cos(q) - 1)$ le hamiltonien du pendule simple. Le mouvement sur la séparatrice est défini par les équations

$$\gamma(t) = \left\{ \begin{array}{c} p(t) = \pm 2/\operatorname{ch}(t) \\ q(t) = \pm 2\operatorname{arcotg}(-\operatorname{sh}(t)) \end{array} \right. \tag{39}$$

de conditions initiales $q(0) = \pm\pi$ and $p(0) = \pm 2$.

Nous calculons maintenant la dérivé de cette solution par rapport aux conditions initiales. Pour cela, nous écrivons l'*équation aux variations*, ce qui nous donne

$$\dot{R(t)} = L(t) \circ R(t)$$

avec $R(0) = \mathbf{id}$, et $L(t) = \begin{pmatrix} 0 & (\operatorname{sh}^2(t) - 1)/\operatorname{ch}^2(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient aprés calcul,

$$R(t) = \begin{pmatrix} (1 - \frac{F\operatorname{sh}(t)}{4\operatorname{ch}^2(t)})\operatorname{ch}(t) & -\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \\ \frac{F}{4} & \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{pmatrix}$$

où $F(t) = \dfrac{2t + \operatorname{sh}(2t)}{\operatorname{ch}(t)}$.

Dans la suite, on note $r_i(t)$, $i = 1,2,3,4$ les composantes de la matrice $R(t)$.

b) Système modèle : De la même facon, on peut associer à notre système modèle, une équation différentielle ordinaire nous donnant la dérivée des solutions par rapport aux conditions initiales dans un voisinage de l'orbite homocline au tore donnée par

$$\left\{ \begin{array}{c} p(t) = \pm 2/\operatorname{ch}(t) \\ q(t) = \pm 2\operatorname{arcotg}(-\operatorname{sh}(t)) \\ I_1(t) = I_1^0 \\ I_2(t) = I_2^0 \\ \theta_1 = \theta_1^0 + I_1^0 t \\ \theta_2 = \theta_2^0 + I_2^0 t \end{array} \right. \tag{40}$$

Le résultat précédent pour le pendule simple nous permet de calculer facilement la résolvante de notre système. On a

$$R(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) & 0 & 0 & r_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_3(t) & 0 & 0 & r_4(t) & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Section : L'étape suivante est de se restreindre à la *surface de section* afin d'obtenir la matrice $D_x\Lambda_0(p)$.
Soit $\mathcal{S}$ la surface de section définie par

$$\theta_2 = 0$$

Le temps de section de $\mathcal{S}$ est tel qur $\phi_T(p) \in \mathcal{S}$. Par conséquent, nous obtenons la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} r_1(T) & 0 & r_2(T) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_3(T) & 0 & r_4(T) & 0 \\ 0 & T & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Coordonnées normales : Le calcul se termine maintenant en deux étapes. On effectue tout d'abord le changement de coordonnées $(s,u,y,x) = ((1/\sqrt{2})(p-q),(1/\sqrt{2})(p+q), I, \theta)$, défini par la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & \widehat{a} & 0 & \widehat{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \widehat{c} & 0 & \widehat{d} \end{pmatrix}$$

où

$$\left| \begin{array}{lcl} \widehat{a} & = & \frac{1}{2}(\mathrm{ch}^2(t) + G(t)) \\ \widehat{b} & = & \frac{1}{2}(\mathrm{ch}^2(t) - W(t)) \\ \widehat{c} & = & \frac{1}{2}(\mathrm{ch}^2(t) - G(t)) \\ \widehat{d} & = & \frac{1}{2}(\mathrm{ch}^2(t) + W(t)) \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{array}{lcl} G(t) & = & \frac{e^t}{4\,\mathrm{ch}^2(t)}(4 - 2t - \mathrm{sh}(2t)) \\ W(t) & = & \frac{e^t}{4\,\mathrm{ch}^2(t)}(4 + 2t + \mathrm{sh}(2t)) \end{array}$$

• **Calcul de** $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu}(x,0)\right)(p)$

a) Calcul de $\mathbf{\Gamma(x)}$: Soit $\phi(t, x_0, \mu)$ une solution de notre système modèle. Une généralisation de l'équation aux variations nous dit que la dérivée de cette solution par rapport à μ , $\frac{\partial \phi(t,x_0,\mu)}{\partial \mu}\ |_{\mu=0}$ est solution l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\dot{Z} = D_x f(\phi(t), t; 0) Z + D_\mu f(\phi(t), t; 0), \qquad Z(t_0) = \mathbf{0}$$

où Z est vecteur à n composantes.

Dans notre cas, on a

$$f(p, q, I, \theta, t, \mu) = JD_q(H_0(I) + P(p,q)) + \mu JD_q H_1(p, q, I, \theta)$$

ce qui nous donne l'équation aux variations suivantes:

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(q) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial q}(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \\ \frac{\partial f}{\partial p}(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \\ -\sin(\theta) f(p,q) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou les composantes de la matrice sont évaluées sur la trajectoire homocline non perturbée. On a donc, en utilisant 40

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & (\operatorname{sh}^2(t) - 1)/\operatorname{ch}^2(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial q}(\gamma(t))(\cos(\theta_1^0 + \omega_1 t) + \cos(\theta_2^0 + \omega_2 t)) \\ \frac{\partial f}{\partial p}(\gamma(t))(\cos(\theta_1^0 + \omega_1 t) + \cos(\theta_2^0 + \omega_2 t)) \\ -\sin(\theta) f(\gamma(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où γ est l'équation de la séparatrice du pendule simple donnée en 39.
On a donc

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{2 \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}(\cos(\theta_1^0 + \omega_1 t) + \cos(\theta_2^0 + \omega_2 t)) \\ 0 \\ \frac{2\sin(\theta_i^0 + \omega_i t)}{\operatorname{ch}^2 t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On notera les composantes de B, b_i.

b) Dérivation : On commence par résoudre le système homogène associé

$$\dot{Z}(t) = A(t, u) Z(t)$$

Supposons que nous ayons calculé la résolvante de ce système, notée $R(t, u)$. La solution du système complet est alors donné par

$$Z(t) = R(t, u) Z(0) + \int_0^t R(t, \tau) B(\tau) d\tau$$

Comme $Z(0) = 0$ par hypothèse, on obtient

$$Z(t) = \int_0^t R(t,\tau)B(\tau)d\tau$$

On en déduit

$$R(t,\tau)B(\tau,u) = \begin{pmatrix} r_1(t)b_1(t,u) \\ r_3(t)b_1(t,u) \\ b_3(t,u) \\ b_4(t,u) \\ tb_3(t,u) \\ tb_4(t,u) \end{pmatrix}$$

Les b_1, b_2, b_3 et b_4 dépendent seulement de θ_i^0, pour $i = 1,2$. Par conséquent la dérivation par rapport à u nous donne une matrice de la forme

$$\frac{\partial\widehat{\Gamma}(u)}{\partial u}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & s_{1,1}(t,u) & s_{1,2}(t,u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{2,1}(t,u) & s_{2,2}(t,u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{3,1}(t,u) & s_{3,2}(t,u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{4,1}(t,u) & s_{4,2}(t,u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{5,1}(t,u) & s_{5,2}(t,u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{6,1}(t,u) & s_{6,2}(t,u) \end{pmatrix}$$

c) Section : Par restriction à la surface de section $\mathcal{S}$, nous obtenons une matrice de la forme

$$\frac{\partial\Gamma(u)}{\partial u}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_4 \end{pmatrix}$$

d) Coordonnées normales : On a dans le système de coordonnées (x,s,y,u)

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha = s_4$, $\beta = (1/\sqrt{2})(s_1 - s_2)$, $\gamma = s_3$ et $\delta = (1/\sqrt{2})(s_1 + s_2)$. On note que le terme γ est directement associé au spitting par l'intermédiaire de l'intégrale de Melnikov.

Ceci termine la preuve du lemme 8. $\square$

Appendice D. Démonstration du lemme 9

• Construction des fenêtres affines

a) Calcul de la matrice P **:** La fenêtre affine $\mathcal{P}_j : x \mapsto \widehat{p}^{(j)} + Px$ est définie par $p^{(j)} = (\theta^{(j)}, s^{(j)}, 0, u^{(j)})$ et

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \imath & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & \imath \\ \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath_u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où P_{ik} et $\widehat{p}^{(j)}$ sont à préciser. Le petits paramétres $\imath$ et $\imath_u$ sont utilisés pour contrôler les fenêtres. En particulier, on suppose $\imath_u < \imath$ dans tout la suite.

On choisit les deux premières colonnes, correspondant aux horizontales, pour que ces dernières soient parallèles à l'espace tangent en p à $\Psi(W_u)$.

Lemme 12 *La fenêtre affine* $\mathcal{P}$ *est définie par la matrice* P *de la forme*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\imath(a(1+*)-*^2)}{\mu(\beta*-\gamma a)} & \frac{*\imath_u(a-b)}{\mu(\beta*-\gamma a)} & \imath & 0 \\ \frac{\imath(\beta(1+*)-\gamma*)}{a\gamma-\beta*} & \frac{\imath_u(*\beta-\gamma b)}{a\gamma-\beta*} & 0 & \imath \\ \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath_u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration : La forme de Λ nous donne les contraintes suivantes:

$$\Lambda \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \imath \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \bullet \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ 0 \\ \imath_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} *' \\ 0 \\ 0 \\ \bullet' \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{cases} \imath\gamma P_{11} + *P_{21} + \imath(1+*) = 0 \\ \imath\beta P_{11} + aP_{21} + \imath* = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne

$$\begin{cases} \imath\beta P_{12} + aP_{22} + b\imath_u = 0 \\ \imath\gamma P_{12} + *P_{22} + *\imath_u = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} P_{11} = \frac{\imath(a(1+*)-*^2)}{\mu(\beta*-\gamma a)} \\ P_{12} = \frac{*\imath_u(a-b)}{\mu(\beta*-\gamma a)} \\ P_{21} = \frac{\imath(\beta(1+*)-\gamma*)}{a\gamma-\beta*} \\ P_{22} = \frac{\imath_u(*\beta-\gamma b)}{a\gamma-\beta*} \end{cases}$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

b) Calcul de la matrice B: La fenêtre $\mathcal{B}_j : x \mapsto \widehat{q}^{(j)} + Bx + \widehat{\mathcal{B}}^{(j)}(x)$ est définie par $\mathcal{B}_j = \Lambda \circ \mathcal{P}_{j+1}$. On obtient donc $\widehat{q}^{(j)} = (\theta'^{(j)}, 0, 0, u'^{(j)})$, et

$$B = \begin{pmatrix} -(1+\imath\alpha)\frac{\imath}{\mu\gamma} + T\imath & 0 & (1+\imath\alpha)\imath & 0 \\ 0 & 0 & \imath\mu\beta & a\imath \\ 0 & 0 & \imath\mu\gamma & 0 \\ -\frac{\imath}{\gamma}(\delta - \frac{c\beta}{a}) & -\imath_u(\frac{bc}{a} - d) & \imath\mu\delta & \imath c \end{pmatrix}$$

c) Calcul de $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}^{(\mathbf{j})}$: On note $\mathcal{A}_n^{(j)}$ la fenêtre définie par $f^n \circ \mathcal{P}_j$, où f est l'application de premier retour, et n doit être choisi. On a

$$\mathcal{A}_n^{(j)} = \widehat{p}_n^{(j)} + A_n x + \widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}(x)$$

avec

$$\widehat{p}_n^{(j)} = (\theta^{(j)} + nv_0, k^n s^{(j)}, 0, l^n u)$$

et

$$A_n = \begin{pmatrix} \imath(\frac{-1}{\mu\gamma} - nv_1) & 0 & \imath & 0 \\ \frac{k^n\imath\beta}{a\gamma} & -\frac{k^n\beta\imath_u}{a} & 0 & k^n\imath \\ \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^n\imath_u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Alignement des fenêtres affines**

On commence par rappeler un *critère d'alignement* dû à Easton [Ea].

Soit $\mathcal{A}^a$ et $\mathcal{B}^b$ deux (d_h, d_v) fenêtres affines dans R^d, données par

$$\mathcal{A}^a(x) = a + Ax \quad , \quad \mathcal{B}^b(x) = b + Bx$$

avec $a \in R^d$, $b \in R^d$ et

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in M_{(d_h,d_h)}(R)$, $A_2 \in M_{(d_h,d_v)}(R)$, $A_3 \in M_{(d_v,d_h)}(R)$ et $A_4 \in M_{(d_v,d_v)}(R)$, la décomposition étant analogue pour B.
On définit deux matrices intermédiaires

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & -B_3 \\ A_2 & -B_4 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} B_1 & -A_3 \\ B_2 & -A_4 \end{pmatrix}$$

Une condition d'alignement est donnée par le lemme suivant :

Lemme 13 *Soient M et N les deux matrices intermédiaires associées aux fenêtres affines $\mathcal{A}^a$ et $\mathcal{B}^b$. Si*

$$\left\{ \begin{array}{c} i)\ M \text{ est inversible} \\ ii)\ \parallel M^{-1}(b-a) + M^{-1}Ny \parallel_\infty < 1 \text{ pour tout } y \in L^d \end{array} \right.$$

alors $\mathcal{A}^a$ est alignée sur $\mathcal{B}^b$.

Nous renvoyons à ([Ma], p. 241) pour une démonstration..

a) Calcul de M_n, N_n et $M_n^{-1}N_n$: Par définition des matrices M_n et N_n, on a

$$M_n = \begin{pmatrix} \imath(-\frac{1}{\mu\gamma} + nv_1) & 0 & -(1+\mu\alpha)\imath & 0 \\ \frac{k^n\imath\beta}{a\gamma} & -\frac{k^n\beta\imath_u}{a} & -\imath\mu\beta & -a\imath \\ \imath & 0 & -\imath\mu\gamma & 0 \\ 0 & l^n\imath_u & -\imath\mu\delta & -\imath c \end{pmatrix}$$

On note que

$$det(M_n) = \imath^3\imath_u\nu w$$

où $\nu = ck^n\beta + l^n a^2$ et $w = 2 + \mu\alpha - n\mu\gamma v_1$. On en déduit que M_n est inversible pour μ suffisamment petit. De plus,

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu\gamma}{\imath a w} & 0 & \frac{1+\mu\alpha}{\imath a w} & 0 \\ -\frac{\mu}{\imath_u a\nu w}[a^2\delta - c\beta(-k^n + a)] & -\frac{c}{\imath_u\nu} & \bullet & -\frac{a}{\imath_u\nu} \\ -\frac{1}{\imath a w} & 0 & \frac{-1+\mu\gamma n v_1}{\imath\nu a\mu\gamma} & 0 \\ \frac{\mu\beta}{\imath a\nu w}[-1 + l^n a + \delta k^n] & -\frac{l^n}{\imath\nu} & * & -\frac{k^n\beta}{\imath\nu a} \end{pmatrix}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet = \frac{1}{a\gamma\imath_u\nu w}((-1+\mu\gamma n v_1)a(c\beta - a\delta) - ck^n\beta(1+\mu\alpha)) \\ \quad = \frac{\beta}{a\gamma\imath\nu w}((al^n + \delta k^n)(-1+\mu\gamma n v_1) - (1+\mu\alpha)) \end{array} \right.$$

et

$$N_n = \begin{pmatrix} \frac{\imath}{\mu\gamma}(T\mu\gamma - (1+\mu\gamma)) & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k^n\imath \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\imath}{\gamma}(\delta - \frac{c\beta}{a}) & -\imath_u(\frac{bc}{a} - d) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$M_n^{-1}N_n = \begin{pmatrix} -\frac{T\mu\gamma - (1+\mu\alpha)}{aw} & 0 & \frac{\mu\gamma}{aw} & 0 \\ \widehat{\bullet} & -\frac{da-cb}{\nu} & \frac{\imath\mu}{\imath_u a\nu w}[a^2\delta - c\beta(-k^n+a)] & \frac{k^n c\imath}{\imath_u\nu} \\ -\frac{\mu\gamma T - (1+\mu\alpha)}{aw\mu\gamma} & 0 & \frac{1}{aw} & 0 \\ \widehat{*} & -\frac{k^n\beta\imath_u}{a^2\imath\nu}(da-cb) & -\frac{\mu\beta}{a\nu w}[-1+l^n a + \delta k^n] & \frac{1}{\nu} \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{\bullet} = -\frac{\imath}{\imath_u \nu\gamma}\left(\frac{(a^2\delta - c\beta(-k^n+a))(T\mu\gamma-(1+\mu\alpha))}{aw} + c\beta - a\delta\right) \\ \widehat{*} = \frac{\beta(-1+l^n a+\delta k^n)}{a\nu w\gamma}(\mu\gamma T - (1+\mu\alpha)) - \frac{k^n\beta}{a^2\nu}(c\beta - a\delta) \end{array}\right.$$

b) Estimations : Nous allons maintenant majorer la norme

$$\chi = \sup_{y\in L^4} \parallel M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)}) + M_n^{-1}N_n y \parallel_\infty \leq \parallel M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)}) \parallel_\infty + \parallel M_n^{-1}N_n \parallel_1$$

b.1) Majoration de $\parallel \mathbf{M_n^{-1}N_n} \parallel_1$: On a

$$\left\{\begin{array}{c} N_1 = \mid \frac{T\mu\gamma+(1+\mu\alpha)}{aw} \mid + \mid \widehat{\bullet} \mid + \mid \frac{\mu\gamma T-(1+\mu\alpha)}{aw\mu\gamma} \mid + \mid \widehat{*} \mid \\ N_2 = \mid \frac{da-cb}{\nu} \mid + \mid \frac{k^n\beta\imath_u}{a^2\imath\nu}(da-cb) \mid \\ N_3 = \mid \frac{\mu\gamma}{aw} \mid + \mid \frac{\imath\mu}{\imath_u a\nu w}[a^2\delta - c\beta(-k^n+a)] \mid + \mid \frac{1}{aw} \mid + \mid \frac{\mu\beta}{a\nu w}[-1+l^n a+\delta k^n] \mid \\ N_4 = \mid \frac{k^n c\imath}{\imath_u\nu} \mid + \mid \frac{1}{\nu} \mid \end{array}\right.$$

On note que pour n suffisamment grand, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \sim_{n\to\infty} a^2 l^n \\ w \sim_{n\to\infty} -\mu n v_1\gamma \end{array}\right.$$

On obtient donc les estimations suivantes pour N_i, $i = 1, \ldots 4$.

$$\left\{\begin{array}{lll} N_1 & \sim & \mid \frac{T\mu\gamma-(1+\mu\alpha))}{a\mu\gamma n v_1} \mid + \mid \frac{\imath(c\beta-a\delta)}{\imath_u\gamma l^n a^2}(1+\frac{T\mu\gamma-(1+\mu\alpha)}{nv_1}) \mid + \mid \frac{T\mu\gamma T-(1+\mu\alpha)}{a\mu^2\gamma^2 n v_1} \mid + \mid \frac{\beta(\mu\gamma T-(1+\mu\alpha)}{a^2\mu\gamma^2 n v_1} \mid \\ & \sim & + \mid \frac{k^n\beta(c\beta-a\delta)}{a^4} \mid \\ N_2 & \sim & \mid \frac{da-cb}{a^2 l^n} \mid + \mid \frac{k^{2n}\beta\imath_u(da-cb)}{a^4\imath} \mid \\ N_3 & \sim & \mid \frac{1}{a\mu n v_1} \mid + \mid \frac{\imath(a^2\delta-c\beta(-k^n+a))}{\imath_u a^3 l^n\gamma n v_1} \mid + \mid \frac{1}{\mu a\gamma n v_1} \mid + \mid \frac{\beta}{a^2\gamma n v_1} \mid \\ N_4 & \sim & \mid \frac{k^{2n}c\imath}{\imath_u a^2} \mid + \mid \frac{1}{a^2 l^n} \mid \end{array}\right.$$

Le plus grand terme est de l'ordre de

$$\frac{C_0}{\mu^2 n} \tag{41}$$

On peut donc trouver une constante C telle que

$$\parallel M_n^{-1}N_n \parallel_1 \leq \frac{C}{n\mu^2}$$

Posons

$$n = \mu^{-(2+\sigma)}$$

où $\sigma > 0$ est une constante arbitraire. On peut trouver une constante C_1 telle que

$$\parallel M_n^{-1}N_n \parallel_1 \leq C_1\mu^\sigma$$

Remarque: C'est à cet endroit que l'on perd un ordre en μ dans le temps final de transition le long de la chaîne. Ceci est sans doute lié au choix de la taille de la fenêtre.

b.2) Majoration de $\| \mathbf{M_n^{-1}}(\widehat{\mathbf{q}}^{(\mathbf{j})} - \widehat{\mathbf{p_n}}^{(\mathbf{j})}) \|_\infty$: On a

$$\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)} = (\theta'^{(j)} - \theta^{(j)} - nv_0[2\pi], k^n s^{(j)}, 0, u'(j) - l^n u^{(j)})$$

Les fenêtres étant construites de maniére récurrente, on peut choisir $\widehat{p}^{(j)}$ tel que la composante suivant e_u de $\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p}_n^{(j)}$ soit nulle. En effet, il suffit de prendre

$$u^{(j)} = \frac{u^{j+1}}{l^n}$$

On obtient alors

$$M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p_n}^{(j)}) = \left(-\frac{\mu\gamma}{\imath a w}\theta_n, -\frac{\mu(a^2\delta - c\beta(-k^n + a))}{a\imath_u \nu w}\theta_n - \frac{cs_n}{\imath_u \nu}, -\frac{\theta_n}{a\imath w}, \frac{\mu\beta(-1 + l^n a + \delta k^n)}{a\imath\nu w}\theta_n \right)$$

où $\theta_n = \theta'^{(j)} - \theta^{(j)} - nv_0\ [2\pi]$.

Comme v_0 est supposé diophantien, on montre facilement l'existence d'une constante $\tau > 0$ telle que, pour un choix convenable de n, on a

$$\mid \theta_n \mid \leq C_2 n^{-1/\tau}$$

ce qui nous donne

$$\mid \theta_n \mid \leq C_2 \mu^{(2+\sigma)/\tau}$$

On en déduit

$$\| M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p_n}^{(j)}) \| \leq \frac{C_4}{\imath}\mu^{1+\sigma+(2+\sigma)/\tau}$$

La seule restriction sur $\imath$ est donnée par la taille de $\mathcal{D}_p(\mu)$ et $\mathcal{D}_q(\mu)$. On pose $\imath = C_5\mu$. On a alors

$$\| M_n^{-1}(\widehat{q}^{(j)} - \widehat{p_n}^{(j)}) \| \leq C_6 \mu^{\sigma+(2+\sigma)/\tau}$$

d'où

$$\kappa \leq C_7 \mu^\sigma$$

Le choix de n nous assure que la limite de κ est nulle lorsque μ tend vers zéro. La fenêtre $\mathcal{B}_j$ est donc alignée sur $\mathcal{A}_n^{(j)}$.

- **Alignement des fenêtres perturbées**

On rappelle tout d'abord le résultat de Marco ([Ma], p.242) concernant l'alignement de fenêtres perturbées.

Lemme 14 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux fenêtres (d_h, d_v) de la forme*

$$\mathcal{A}(x) = a + Ax + \widehat{A}(x), \quad , \quad \mathcal{B}(x) = b + Bx + \widehat{B}(x)$$

où $a, b \in \mathbf{R}^d$, A, B sont dans $\mathbf{Gl}_d(\mathbf{R})$ et $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{B}}$ des applications de classe C^2 . Supposons que les fenêtres affines $\mathcal{A}^a : x \to a + Ax$ et $\mathcal{B}^b : x \to b + Bx$ soient alignées. Soient M et N les deux matrices intermédiaires associées, $\imath = \| M^{-1} \|_1$ et $\kappa = \sup_{y \in L^d} \| M^{-1}(b-a) + m^{-1}Ny \|_\infty$ (< 1) tels que

$$(i) \quad \mu(\| \widehat{\mathcal{A}} \|_{(2)} + \| \widehat{\mathcal{B}} \|_{(2)}) = \kappa_1 < 1/3$$
$$(ii) \quad \mu(\| D\widehat{\mathcal{A}} \|_{(2)} + \| D\widehat{\mathcal{B}} \|_{(2)}) = \kappa_2, \text{ where } \kappa_2 < 1 \text{ and } \tfrac{\kappa_2}{1-\kappa_2} < 1/4$$
$$(iii) \quad \kappa + \kappa_1 < 1$$

alors les fenêtres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont alignées.

Nous renvoyons à Marco [Ma] pour la démonstration.

a) Reste des fenêtres B_j : On a

$$\mathcal{B}_j(x) = \Lambda \circ \mathcal{P}_{j+1}(x) = \widehat{q}^{(j)} + Bx + \widehat{B}(x)$$

De plus $\Lambda(\mathcal{P}_{j+1}) = \Lambda(\widehat{p}^{j+1} + Px) = \Lambda(\widehat{p}^{j+1}) + D_{\widehat{p}^{j+1}}\Lambda(Px) + R(x)$ avec

$$R(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} D^2\Lambda(\widehat{p}^{j+1} + tPx)(Px)^2 dt$$

Par conséquent, $\widehat{q}^{(j)} = \Lambda(\widehat{p}^{j+1})$ et

$$\widehat{B}(x) = R(x) + (D_{\widehat{p}^{j+1}}\Lambda(P) - B)x$$

Or, il existe une constante C telle que

$$\sup_{D_p(\mu)} \| D^2\Lambda \| \leq C$$

d'où

$$\| R \|_{(2)} \leq 4C\mu^2$$

De plus, comme $B = D_p\Lambda P$ on obtient

$$\| D_{\widehat{p}^{j+1}}\Lambda P - B \|_1 = \| (D_{\widehat{p}^{j+1}}\Lambda - D_p\Lambda)P \|_1 \leq C\mu \| \widehat{p}^{j+1} - \widehat{p} \|_1 \leq C\mu k^n$$

On en déduit

$$\| \widehat{B} \|_{(2)} \leq C_9(\mu + k^n)$$

et, de facon analogue

$$\| D\widehat{B} \|_{(2)} \leq C_{10}(\mu + k^n)$$

b) Reste des fenêtres $\mathcal{A}_n^{(j)}$: On a

$$\mathcal{A}_n^{(j)}(x) = \widehat{p}_n^{(j)} + A_n x + \widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)}(x)$$

avec

$$\widehat{p}_n^{(j)} = f_a^n(\widehat{p}_n^{(j)}) \qquad A_n = f_l^n.P$$

Soit $f^n = f_a^n + r_n$, on obtient

$$\widehat{\mathcal{A}}_n^{(j)} = r_n(\widehat{p}^{(j)} + Px) \tag{42}$$

On choisit

$$\mu_u = \frac{k^n}{2}$$

Par conséquent, $\mid s \mid < 1$ et $\mid u(y) \mid \leq k^n/2$, soit

$$\mid su(y) \mid \leq 3k^n/2, \quad \forall y \in \tilde{P}_j$$

En utilisant le lemme de contrôle (voir inégalité (M) du chap.1 et ci-dessous) et (42), on obtient

$$\lim_{\mu\to 0} \parallel \widehat{A}_n^{(j)} \parallel_{(2)} = \lim_{\mu\to 0} \parallel D\widehat{A}_n^{(j)} \parallel_{(2)} = 0$$

La fenêtre $\mathcal{A}_n^{(j)}$ est donc correctement alignée avec $\mathcal{B}_j$ pour μ suffisamment petit, et $n = \mu^{-\tau(2+\sigma)}$. Ceci termine la preuve du lemme. □

Remarque: Il est possible de démontrer l'inégalité ($\mathcal{M}$) en toute généralité. Pour cela, on utilise le lemme de transfert et un théorème de suspension en anlytique pour les difféomorphismes symplectiques au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique. Les deux paragraphes suivant démontrent le lemme de contrôle dont nous avons besoin pour la dernière étape de la méthode des fenêtres.

*** Un théorème de suspension analytique entre symplectomorphismes et champs de vecteurs hamiltoniens analytiques au voisinage d'un tore partiellement hyperbolique**

On considère une famille analytique d'applications symplectiques exactes F_ϵ, provenant de la perturbation de l'application "intégrable"

$$\begin{array}{llll} F_0: & D \times \mathbf{T}^n \times \mathcal{D} & \to & D \times \mathbf{T}^n \times \mathcal{D} \\ & (I, \phi, z) & \mapsto & (I, \phi + \omega(I), \Lambda(I)z) \end{array}$$

où $D \subset \mathbf{R}^n$ et $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^{2m}$ sont des domaines convexes bornés, avec $n, m \leq 1$, et

$$\omega(I) = \frac{\partial h}{\partial I}$$

pour une fonction analytique h, et $\Lambda(I)$ est une matrice diagonale de valeurs propres

$$\lambda_1(I), \ldots, \lambda_m(I), \lambda_1^{-1}(I), \ldots, \lambda_m^{-1}(I)$$

où les λ sont telles que

$$\lambda_i(I) < 1 \quad \forall\ i$$

Cette application admet une famille à n paramètres de tores invariants de dimension n, $\mathbf{T}^n \times \{I_0\} \times \{0\}$, partiellement hyperbolique, dont les variétés stable et instable sont données par $I = I_0, u = 0$

et $I = I_0, s = 0$ respectivement, avec $z = (s, u)$.
L'application F_ϵ est supposée symplectique exacte: il existe une famille de fonctions différentiables W_ϵ sur $D \times \mathbf{T}^n \times \mathcal{D}$, telles que, pour $\alpha = I \, \mathrm{d}\phi + s \, \mathrm{d}u$ on ait

$$F_\epsilon^* \alpha - \alpha = \mathrm{d}W_\epsilon$$

De plus, les domaines d'analyticité de F_ϵ sont supposés uniformes et indépendants de ϵ. Autrement dit, chaque F_ϵ est supposée analytique dans un voisinage complexe $V_r D \times V_r \mathbf{T}^n \times V_r \mathcal{D}$ de $D \times \mathbf{T}^n \times \mathcal{D}$, où

$$V_r D = \cup_{I_0 \in D} \{ \; I \in \mathbf{C}^n \; : \mid I - I_0 \mid < r \; \} \subset \mathbf{C}^n$$

avec $\mid . \mid$ la norme euclidienne, de même pour $V_r \mathbf{T}^n$ et $V_r \mathcal{D}$.
On suppose aussi que la fonction h possède le même domaine d'analyticité que F_ϵ.
Nous allons montrer le lemme suivant:

Lemme 15 (lemme de correspondance) *Soit F_ϵ une application satisfaisant les hypothèses précédentes. Alors, pour ϵ suffisamment petit, il existe un hamiltonien analytique réel sur l'espace des phases étendu $\bar{P} = \mathcal{D} \times \bar{D} \times \mathbf{T}^n$ et un plongement symplectique analytique*

$$j_\epsilon : P \longrightarrow \Sigma_\epsilon = \{ \; \bar{H}_\epsilon = 0, \theta = 0 \; \} \subset \bar{P}$$

tels que l'application de Poincaré ϕ_ϵ de $\bar{H}_\epsilon$ soit bien définie sur la variété Σ_ϵ et vérifie

$$\phi_\epsilon \circ j_\epsilon = j_\epsilon \circ F_\epsilon$$

De plus, il existe un $\rho > 0$ tel que $\bar{H}_\epsilon$ et j_ϵ s'etendent analytiquement sur $V_\rho \bar{P}$ et $V_\rho P$, respectivement, pour tout ϵ suffisamment petit, et vérifient

$$\mid \bar{H}_\epsilon - \bar{H}_0 \mid_{V_\rho \bar{P}}, \; \mid j_\epsilon - j_0 \mid_{V_\rho P} = \mathcal{O}(\epsilon)$$

lorsque $\epsilon \to 0$.

La démonstration suit dans les grandes lignes celle de Kuksin et Poschel[30] [KP]. On commence par construire une suspension analytique classique du difféomorphisme en suivant [PM]. On plonge ensuite la variété suspendue dans une variété possèdant un système de coordonnées action-angle, mais muni d'une structure symplectique non standard. On se ramène à la structure symplectique standard en utilisant la méthode des chemins de Moser [Mo]. On termine en "redressant" la surface de section. Je tiens à la disposition du lecteur une démonstration complète de ce lemme. Celle-ci ne différant des démonstrations habituelles qu'en quelques points non fondamentaux, je ne la reproduit pas ici.

** **Un lemme de contrôle général**

A l'aide du lemme précédent, nous sommes en mesure de démontrer l'inégalité $(\mathcal{M})$ en toute généralité, précisément, nous avons:

Lemme 16 (lemme de contrôle) *Soit f l'application de premier retour associée à un tore partiellement hyperbolique $\mathcal{T}$. Soit Δ une variété invariante par le flot qui coupe la variété stable $W^s(\mathcal{T})$ du tore transversalement avec un splitting de taille ϵ. Alors, pour tout point $z = (s, u, y, x)$ tel que*

$$\begin{array}{rcl} \mid y \mid & \leq & e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} \\ \mid u \mid & \leq & e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} \end{array}$$

[30] Ils annoncent d'ailleurs un résultat de ce type, sans démonstration.

on a

$$\begin{array}{lcl} \mid r_n(z) \mid & \leq & M_1\epsilon^{1+\kappa} \\ \mid Dr_n(z) \mid & \leq & M_2\epsilon^{1+\kappa} \end{array} \quad \text{pour} \quad n = \epsilon^{-\tau(1+2\kappa)}$$

où les M_i sont des constantes.

Démonstration: Elle se divise en deux étapes. On interpole f au moyen du lemme de correspondance.

a) Inégalité pour $\mathbf{r_n}$: Le lemme d'échange C^0 entraîne par le lemme de correspondance les inégalités suivantes: Notons $f^n(s,u,y,x) = (s_n, u_n, y_n, x_n)$, on a

$$\begin{array}{lcl} \mid y_n \mid & \leq & e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} \\ \mid s_n \mid & \leq & e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} \end{array} \quad \text{pour} \quad n = \epsilon^{-\tau(1+\kappa)} \tag{43}$$

Comme $f^n = f_a^n + r_n$, et

$$f_a^n(s,u,x,y) = (k^n s, l^n u, y, x + nv_0 y)$$

on a

$$r_n(z) = f^n(z) - f_a^n(z) = (s_n - k^n s, u_n - l^n u, y_n - y, x_n - x - nv_0 y)$$

Soit, en utilisant les inégalités 25

$$\begin{array}{lcl} \mid r_y(z) \mid & < & \mid y \mid + e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} < 2e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} \\ \mid r_s(z) \mid & < & k^n \mid s \mid + e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} < 2e^{-\epsilon^{-\tau(1+\kappa)}} \end{array}$$

On a aussi, le choix de n correspondant au temps d'ergodisation,

$$\mid r_x(z) \mid < \mid x + nv_0 y - x_n \mid < \epsilon^{1+\kappa}$$

On peut choisir la condition initiale en u telle que $l^n - \hat{u} \leq \epsilon^{1+\kappa}$, où $\hat{u}$ est la coordonnée suivant e_u du point hétérocline appartenant à $W^u(\mathcal{T})$. On a alors,

$$\mid r_u(z) \mid < \mid l^n - \hat{u} \mid + \epsilon^{1+\kappa} < 2\epsilon^{1+\kappa}$$

d'où

$$\mid r_n(z) \mid < M_1 \epsilon^{1+\kappa}$$

où M_1 est une constante.

b) Inégalité pour $\mathbf{Dr_n(z)}$: Notons v un vecteur tangent à Δ au point z, et $v_n = (v_n^s, v_n^u, v_n^y, v_n^x)$ l'image du vecteur v par $Df^n(z)$. Soit $\hat{v} = (0,1,0,1)$ un vecteur tangent à $W^u(\mathcal{T})$ au point hétérocline. On a, d'après le lemme d'échange C^1 et le lemme de correspondance, les inégalités suivantes sur les composantes de v_n:

$$\begin{array}{lcl} \mid v_n^s \mid & \leq & \epsilon^{1+\kappa} \\ \mid v_n^u - 1 \mid & \leq & \epsilon^{1+\kappa} \\ \mid v_n^y \mid & \leq & \epsilon^{1+\kappa} \\ \mid v_n^x - 1 \mid & \leq & \epsilon^{1+\kappa} \end{array}$$

On a

$$Dr_n(z) = Df^n(z) - Df_a^n(z) = Df^n(z) - f_l^n(z)$$

Pour tout v appartenant au plan tangent à Δ en z, nous avons

$$\begin{array}{lcl} \mid Dr_n(z)(v) \mid & = & \mid Df^n(z)(v) - \hat{v} + \hat{v} - f_l^n(z)(v) \mid \\ & \leq & \mid v_n - \hat{v} \mid + \mid f_l^n(z)(v) - \hat{v} \mid \\ & \leq & \epsilon^{1+\kappa} + \epsilon^{1+\kappa} \end{array}$$

soit

$$\mid Dr_n(z) \mid \leq M_2 \epsilon^{1+\kappa}$$

où M_2 est une constante. Ceci termine la démonstration du lemme. □

Exemples concrets d'instabilité

0. Introduction

La recherche d'exemples concrets pour lesquels le mécanisme d'Arnold existe est restée longtemps ouverte. Pourtant dès 1964, Arnold et Avez [AV] suggèrent que ce mécanisme doit se retrouver dans des problèmes "génériques" comme le problème des trois corps.

En 1993, Z. Xia [Xi] montre l'existence d'une chaîne de transition dans le problème restreint elliptique plan des trois corps. La même année, L. Chierchia et G. Gallavotti [CG] montrent l'existence d'une chaîne de transition dans le problème de d'Alembert : mouvement d'une planète aplatie autour du soleil. Plus récemment, R. Moeckel [M] obtient un résultat analogue pour le problème des 5 corps.

Chacun de ces articles suit une démarche qui semble spécifique. Le but de notre travail est d'unifier dans une même construction chacun de ces exemples.

Nous allons donc décrire une classe de systèmes hamiltoniens pour lesquels il existe une famille de tores partiellement hyperboliques dont les variétés stable et instable se coupent dans une surface d'énergie donnée. Il convient de noter que nous n'aborderons pas le problème de l'existence de connexions hétéroclines. Ce problème est lié à des estimations fines du splitting des variétés invariantes et au choix dans l'espace des phases de domaines suffisamment non résonnant pour avoir une densité de tores hyperboliques compatible avec ces estimations. Il est résolu dans Chierchia-Gallavotti [CG] par l'existence de grands angles homoclines. Ces estimations de splitting sont dans la plupart des cas difficiles à réaliser. On se propose plus modestement de montrer l'existence de tores de transition dans certains systèmes.

Cette partie s'organise de la manière suivante : Dans le §.1 nous donnons des conditions suffisantes d'existences d'une chaîne de transition dans un système donné. Notre pésentation, originale, nous permet de proposer un nouveau mécanisme d'instabilité. Les §.2 et 3 vérifient ces conditions pour le problème restreint elliptique plan des 3 corps et le système hamiltonien représentant la dynamique d'une galaxie elliptique. Le §.4 discute des extensions possible de ce travail à divers exemples de physique.

1. Construction de tores de transition dans des exemples

Ce paragraphe décrit une classe de systèmes possèdant des tores de transition suceptibles de former une chaîne. Elle suit la première construction d'Arnold, ainsi que les travaux de Holmes-Marsden et Z. Xia. Bien que de faible portée d'un point de vue théorique, nous verrons que les hypothèses effectuées dans cette partie sont souvent vérifiées par les hamiltoniens à trois degrés de libertés décrivant des phénomènes physiques. Nous décrivons ensuite un nouveau mécanisme d'instabilité.

1.1. La méthode

Soit H un système hamiltonien défini sur $(\mathbf{T}^3)^* = \mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3$ de la forme[31]

$$H_{\epsilon,\mu}(\phi, I) = H_0(I) + \epsilon\ H_1(I, \phi) + \mu\ H_2(I, \phi)$$

Lorsque $\epsilon = \mu = 0$ le système est complétement intégrable, et son espace des phases est feuilleté en tores invariants de dimension 3.

Lorsque $\epsilon \neq 0$, nous effectuons l'hypothèse suivante :

($\mathcal{H}_1$) *Il existe une intégrale première, notée C, du système d'équations différentielles donné par $H_{\epsilon 0}$.*

Pour simplifier l'exposé, nous allons prendre I_3 (sinon, il faut effectuer un changement de coordonnées afin de mettre en évidence cette intégrale première[32]). Dans les exemples que nous aborderons, on verra que le Hamiltonien ne dépend pas de toutes les variables d'angles (c'est à dire qu'une des variables angulaires est *ignorable*), ce qui conduit à l'hypothèse précédente.

On est donc conduit à l'étude de la famille à un paramètre

$$H_{\epsilon,I_3}(\phi, I) = H_0(I, I_3) + \epsilon H_1(\phi, I; I_3)$$

défini pour $(\phi, I) \in (\mathbf{T}^2)^* = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$, l'intégrale première I_3 étant fixée.

C'est un Hamiltonien à deux degrés de liberté et, par conséquent, sa dynamique peut s'analyser au moyen d'une *surface de section.*

On se fixe d'abord une surface d'énergie $h_{I_3} = h - \alpha(I_3)$, où $\alpha(.)$ est un difféomorphisme défini sur un intervalle $\mathcal{J}$ contenant une valeur I_3^0 convenable. On effectue ensuite une section Σ convenable du flot (en fixant une des deux première variable d'angle égale à zéro par exemple). Notons f_Σ l'application de section (ou de premier retour).

Nous effectuons maintenant l'hypothèse d'hyperbolicité :

[31] Nous avons ici donné l'idée sur un hamiltonien à trois degrés de liberté autonome. Il est bien évident que la même construction est possible pour une perturbation périodique d'un hamiltonien à deux degrés de liberté.

[32] Le changement de coordonnées en question n'est pas obligatoirement canonique. Le nouveau système d'équations n'a donc aucune raison d'être hamiltonien. Ceci est sans importance pour la suite.

($\mathcal{H}_2$) *Il existe pour chaque valeur de C un point fixe hyperbolique pour l'application de section f_Σ, dont les variétés stable et instable se coupent transversalement dans Σ*[33].

Remarque : Le point fixe hyperbolique de l'application de section n'est pas forcement directement observable dans le hamiltonien initial. Dans Chierchia-Gallavotti [CG] c'est après un travail de forme normale au voisinage d'une résonance simple que cette hyperbolicité apparait.

Il est alors facile de construire une famille à un paramètre (I_3) de tores partiellement hyperboliques, donnée par

$$\mathcal{C}_h = \{\ I_3 \in \mathcal{J},\ \phi_3 \in \mathbf{T},\ (\phi_i, I_i) \in O_{I_3},\ i = 1, 2\ \ \}$$

On a la proposition suivante :

Proposition : *L'ensemble $\mathcal{C}_h$ est un ensemble invariant normalement hyperbolique de dimension 4, muni de variétés stable et instable de dimension 3, notées $W^s(\mathcal{C}_h)$ et $W^u(\mathcal{C}_h)$ respectivement.*

La démonstration est analogue à celle de ([Wi], prop. 4.1.15, p. 382). On peut visualiser l'ensemble précédent sous la forme :

L'ensemble invariant hyperbolique

Remarque : Nous n'avons pas imposé de petitesse pour le paramètre ϵ. Dans la plupart des exemples, l'hyperbolicité existe même pour de grandes valeur de ϵ. Dans ce cas, il faut prendre garde au fait que le phénomène que nous étudions n'est aucunement relié au mécanisme d'Arnold, mais lié à des propriétés des systèmes initialement hyperboliques, avec toutes les conséquences qui s'en suivent, notamment sur les estimations du temps d'instabilité (voir chapitre 2).

La théorie des ensembles normalement hyperboliques, développée par Hirsh, Pugh et Shub [HPS] nous assure que cet ensemble subsiste sous faible perturbation. Les résultats

[33] Cette dernière hypothèse est vérifiée par tous les exemples que nous allons considérer.

de Fenichel ([Fe1], [Fe2]) nous donnent la persistence du feuilletage en variété stable et instable des points de l'ensemble invariant normalement hyperbolique perturbé.

Néanmoins, aucun résultat ne permet de préciser plus avant la structure de l'ensemble invariant normalement hyperbolique perturbé. Notamment, deux questions se posent dans notre cas :

i) Les tores invariants feuilletant l'ensemble $\mathcal{C}_h$ subsistent-t-ils ?

ii) Le feuilletage des variétés stable et instable de l'ensemble invariant normalement hyperbolique en variété lagrangienne invariantes associées aux tores subsiste-t-il ?

Pour répondre au point i), il convient de mieux décrire la dynamique restreinte à $\mathcal{C}_h$. On définit

$$\mathcal{C}_h^{\Sigma} = \{ \ I_3 \in \mathcal{J}, \ \phi_3 \in \mathbf{T}, \ (\phi, I) \in \Sigma, \ (\phi, I) \in O_{I_3} \ \}$$

et l'application

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} & : \mathcal{T}_h^{\Sigma} & \longrightarrow \mathcal{T}_h^{\Sigma} \\ \mathcal{A} & (\phi_3^0, I_3^0) & (\phi_3^0 + \gamma(I_3^0), I_3^0) \end{array}$$

On reconnait la forme usuelle d'une distortion monotone de l'anneau définie sur $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$.

Dynamique sur l'ensemble invariant

La dynamique (la structure) de l'ensemble invariant perturbé est donc décrite par une perturbation d'une distortion monotone de l'anneau.

On utilise maintenant le fait que nos systèmes sont en fait des systèmes hamiltoniens. Il existe donc une 2-forme différentielle ω associé au système. Celle-ci est non dégénérée en restriction à $\mathcal{C}_h$ et invariante par $\mathcal{A}$. On en déduit donc que par perturbation $\mathcal{A}^{\mu}$ préserve les aires.

Nous effectuons maintenant l'hypothèse de non-dégénérescence suivante :

($\mathcal{H}_3$) Nous avons $\gamma'(I_3) \neq 0 \quad I_3 \in \mathcal{J}$.

Lorsque $\mu \neq 0$, la dynamique sur $\mathcal{C}^{\mu}$ dans la même section est donnée par

$$f_{\mu}(I_3^0, \phi_3^0) = (I_3^0, \phi_3^0 + \omega(I_3^0)) + O(\mu)$$

En effet, le théorème de persistence des ensembles normalement hyperboliques nous assure l'existence d'un difféomorphisme de classe C^r, noté $g : \mathcal{C}^\mu \to \mathcal{C}^0$. Notons $\mathcal{A}_\mu : \Lambda_\mu = \mathcal{C}^\mu \cap \Sigma \to \Lambda_\mu$ l'application de premier retour associée à $\mathcal{S}$ restreinte à $\mathcal{C}^\mu$, on a alors

$$f_\mu = g^{-1} \circ \mathcal{A}_\mu \circ g$$

La dynamique de $\mathcal{A}_\mu$ se lit donc dans f_μ par le biais d'une conjugaison de classe C^r. Comme g est μ proche de l'identité en topologie C^r, on a bien le résultat attendu.

Le théorème KAM s'applique maintenant à notre situation. On en déduit que $\mathcal{C}^\mu$ contient un grand nombre de tores invariants partiellement hyperboliques[34].

Remarques :

1. La conservation des tores invariants partiellement hyperboliques ne dépend pas de la perturbation (on utilise ici des résultats de stabilité, c'est à dire des résultats valables indépendamment de la perturbation, pourvu que celle ci soit suffisamment petite).

2. On note que l'utilisation du théorème KAM pour assurer l'existence des tores partiellement hyperboliques pour $H_{\epsilon,\mu}$ impose un choix du paramètre μ de la forme $\mu << \epsilon$ sans hypothèses supplémentaires sur la forme de la perturbation.

On note désormais, $T^\mu_{I_3}$ les tores partiellement hyperboliques qui persistent sous la perturbation.

Lorsque $\epsilon \neq 0$ et $\mu \neq 0$, nous avons

$$H_{\epsilon,\mu}(I,\phi) = H_0(I) + \epsilon H_1(I,\phi) + \mu H_2(I,\phi)$$

L'essentiel du travail a effectuer en vue de montrer l'existence d'une chaîne de transition, est de montrer que les variétés stable et instable des tores $T^\mu_{I_3}$ se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$.

C'est dans cette partie que la forme de la perturbation va jouer un rôle.

On commence par noter[35] que lorsque $\mu = 0$, la variété stable (resp. instable) d'un tore T_{I_3} coupe transversalement la variété instable (resp. stable) de l'ensemble $\mathcal{C}_h$ en un cercle C_s (resp. C_u).

Un simple argument de stabilité des intersection transverse sous faible perturbation C^1 suffit pour montrer que lorsque $\mu \neq 0$, la variété stable (resp. instable) de $T^\mu_{I_3}$ coupe transversalement la variété instable (rep. stable) de $\mathcal{C}^\mu_h$.

On note C^μ_s et C^μ_u les courbes ainsi obtenues. On introduit les ensembles asymptotiques (sur l'ensemble invariant normalement hyperbolique)

$$\begin{aligned} C^*_s &= \alpha(C_s) \\ C^*_u &= \omega(C_u) \end{aligned}$$

[34] Cette question est directement résolue dans l'exemple d'Arnold car la perturbation s'annule sur la famille de tores.

[35] C'est ici qu'intervient l'hypothèse un peu forte de $(\mathcal{H}_2)$ sur la transversalité des variétés stable et instable du point fixe hyperbolique de f_Σ.

munis de leurs variétés stables et instables notées $W^s(C_i^*)$ et $W^u(C_i^*)$, pour $i = (s, u)$. La partie technique du travail consiste à montrer que

$$W^u(C_u^*) \pitchfork_{\mathcal{H}} W^s(C_s^*)$$

On note que lorsque $\mu = 0$, la variété stable de C_s^* coupe la variété instable de C_u^* en un cercle d'équation $I_3 = I_3^0$, où I_3^0 est une constante.

Cette intersection est *dégénérée*[36] seulement dans les directions (I_3, ϕ_3). En effet, par projection sur les variables (I_2, ϕ_2) l'intersection est transverse.

On utilise maintenant la méthode de *Liapunoff-Schmidt*[37] pour réduire la démonstration de l'existence d'une intersection transverse des variétés stable et instable de C_s^* et C_u^* lorsque $\mu \neq 0$, à la recherche des zéros d'une certaine fonction dans les variables (I_3, ϕ_3).

Il suffit de montrer que les courbes $I_3 = c_s(\phi_3)$ et $I_3 = c_u(\phi_3)$ obtenues par projection de la variété stable $W^s(C_s^*)$ et instable $W^u(C_u^*)$ se coupent transversalement. Pour ce faire, on écrit un développement au premier ordre en μ de ces courbes, à savoir :

$$\begin{array}{rcl} c_s(\phi_3) & = & I_3^0 + \mu c_s^1(\phi_3) + O(\mu^2) \\ c_u(\phi_3) & = & I_3^0 + \mu c_u^1(\phi_3) + O(\mu^2) \end{array}$$

On note $d(\phi_3) = c_s(\phi_3) - c_u(\phi_3) = \mu d_1(\phi_3) + O(\mu^2)$, où $d_1(\phi_3) = c_s^1(\phi_3) - c_u^1(\phi_3)$. Il suffit donc de trouver un ϕ_0 tel que $d_1(\phi_0) = 0$ et $d_1'(\phi_0) \neq 0$. Alors un simple théorème des fonctions implicites nous donnera une solution de $d(\phi_3) = 0$.

On effectue donc l'hypothèse suivante :

$(\mathcal{H}_4)$ Il existe ϕ_3^0 tel que $d_1(\phi_3^0) = 0$ et $d_1'(\phi_3^0) \neq 0$.

On peut se représenter ce problème par le dessin suivant :

L'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$

[36] non-transverse

[37] On consultera à ce sujet, les quelques pages du livre de S-N. Chow et J.K. Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer, **251**, (1982), 30-34.

Remarque : L'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ peut aussi jouer un rôle dans la vérification de $(\mathcal{H}_4)$. En effet, d'après $(\mathcal{H}_2)$ et le théorème de Smale-Birkhoff, il existe un ensemble de Cantor invariant pour f_Σ, hyperbolique. On note O_n les orbites périodiques hyperboliques de période $n \in \mathbf{N}$ appartenant à ce Cantor. Le point fixe de f_Σ^n vérfie $(\mathcal{H}_2)$. On peut donc construire une infinité de famille à un paramètre de tores hyperboliques paramétés par I_3 et n. L'idée est de profiter de ce double paramétrage pour montrer que la condition $(\mathcal{H}_4)$ est vrai pour un certain ensemble de $n \in \mathbf{N}$.

Il est possible d'écrire pour un ensemble normalement hyperbolique un analogue du λ-lemme (même quand le point fixe de l'application de section est dégénéré), qui peut s'énoncer comme suit:

Un λ-lemme: *Soit $\mathcal{N}$ un ensemble normalement hyperbolique de dimension 2 et c une courbe régulière dans $\mathcal{N}$. On note $W^s(c)$ (resp. $W^u(c)$) sa variété stable (resp. instable). Soit $\mathcal{P}$ une surface régulière qui coupe $W^s(\mathcal{N})$ (de dimension 3) en une courbe l telle que :*

i) (transversalité) $\forall q \in l$, on a $\mathcal{P} \pitchfork_q W^s(\mathcal{N})$ dans Σ.

ii) (asymptotique) $\omega(l) = c$

Alors, pour tout $p \in W^u(c)$ et un petit voisinage V de p dans $W^u(c)$, $\epsilon > 0$, il existe un petit disque $\mathcal{D} \in \mathcal{P}$, tel que il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n(\mathcal{D})$ soit ϵ C^1 proche de V au point p.

On applique maintenant le λ-lemme aux courbes C_i^*, $i = (s,u)$, précédentes. On montre alors que $W^s(T_{h,I_3,\mu})$ est C^1-ϵ proche de $W^s(C_s^*)$ et $W^u(T_{h,I_3,\mu})$ est C^1-ϵ proche de $W^u(C_u^*)$. Comme $W^u(C_u^*)$ coupe transversalement $W^s(C_s^*)$, on en déduit par un simple argument de stabilité des intersections transverses sous faible perturbation C^1 que

$$W_s(T_{h,I_3}) \pitchfork_{\mathcal{H}} W_u(T_{h,I_3})$$

Un simple théorème des fonctions implicites permet de montrer l'existence d'intersections hétéroclines entre les variétés stable et instable des tores. Néanmoins, il convient de discuter plus longuement la construction effective de la chaîne de transition.

La construction de la chaîne de transition est maintenant liée à un problème de rapport entre la densité des tores hyperboliques le long de la chaîne et la taille du splitting. Nous effectuons donc l'hypothèse suivante :

$(\mathcal{H}_5)$ Il existe des connexions hétéroclines le long de la chaîne[38]

[38] Commes R. Moechel [Moe] le souligne, nous sommes seulement capable de mettre en évidence (pour le moment) des chaînes de transition de longueur $\sqrt{\epsilon}$, ce qui n'est pas, à proprement parlé, de la "diffusion d'Arnold". Le raisonnement s'effectue de la manière suivante ([Moe], §.5, p.314): La mesure totale des "trous" est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. On en déduit que pour tout nombre réel $k > 0$ donné, il existe un intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ d'ordre $\sqrt{\epsilon}$ qui ne contient pas de "trous" plus large que $k\epsilon$. L'idée est de découper l'intervalle en N sous-intervalles égaux. Supposons que chaque intervalle contienne un "trous" de taille au moins $k\epsilon$, alors la mesure totale des trous sera de $Nk\epsilon$. On obtient donc une borne supérieure pour N (à savoir $N = 1/\sqrt{\epsilon}$) au dessus de laquelle au moins un des intervalles ne contient pas de larges trous. Cet intervalle

On a alors le :

Théorème D : *Sous les hypothèses ($\mathcal{H}_i$), $i = 1, \ldots, 5$, le système $H_{\epsilon,\mu}$ possède une chaîne de transition. L'instabilité se traduit par une dérive de la variable I_3.*

La portée de ce théorème peut sembler faible. Néanmoins, nous allons montrer qu'un grand nombre de système hamiltoniens classiques provenant de problèmes physiques entrent dans le domaine d'application de ce résultat.

---

est de taille $O(\sqrt{\epsilon})$.

2. Le problème restreint elliptique plan des 3 corps

Nous présentons ici les travaux[39] de Z. Xia [Xi] en suivant l'approche du §.1. L'existence d'instabilité dans le problème restreint elliptique plan des 3 corps avait déja été abordé par R. Easton et R. Mc-Gehee [EaMc] et R. Martinez-C.Simo [MaSi].

2.1. Définitions et équations

Le problème restreint elliptique plan des 3 corps est l'étude du mouvement d'une particule A de masse nulle, en intéraction Newtonienne avec deux points J et S, de masses respectives $\mu \in]0,1[$ et $1-\mu$, tels que le vecteur $\vec{SJ}$ décrive une ellipse d'excentricité e dont le foyer est situé à leur centre de masse O. Décrivons brièvement la mise en équation (classique) du système.

On commence par donner une paramètrisation de la trajectoire suivie par les deux corps S et J. On obtient :

Pour $t \in R$,

$$\begin{array}{rcl} S_t & = & ((1-\mu)r\cos(u), (1-\mu)r\sin(u)) \in R^2 \\ J_t & = & (-\mu r\cos(u), \mu r\sin(u)) \in R^2 \end{array}$$

avec $r = (1-e^2)/(1+e\cos(u))$ et $u = e\sin(u) + (t/\sqrt{1-e^2})$.

Le hamiltonien du problème restreint elliptique plan des trois corps, défini sur $M \subset R \times T^*R^2$ muni de sa structure symplectique usuelle, est donné par

$$H_{e\mu}(t,q,p) = \frac{\| p \|^2}{2} - \left(\frac{\mu}{\delta(t,q,e)} + \frac{1-\mu}{\sigma(t,q,e)} \right)$$

[39]Pour cette raison, nous énoncons la plupart des résultats sans démonstration, en nous contentant de donner une idée des méthodes utilisées et des étapes essentielles.

où $\| \ . \ \|$ est la norme euclidienne, $\delta(t,q,e) = \| q - J_t \|$ et $\sigma(t,q,e) = \| q - S_t \|$. Le système d'équations différentielles ordinaires associé est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q} & = & p \\ \dot{p} & = & q\left(\mu/\delta^3 + (1-\mu)/\sigma^3\right) + \mu(1-\mu)z\left(1/\delta^3 - 1/\sigma^3\right) \end{array} \right.$$

où $z = (x_{SJ}, y_{SJ})$.

2.1.1. Résumé des travaux de Z. Xia sur l'instabilité d'Arnold dans le problème restreint elliptique plan des trois corps

Le résultat de Z. Xia sur le problème restreint elliptique plan des 3 corps (PREP) peut se résumer de la manière suivante :

Théorème A: *Il existe une chaîne de transition dans le (PREP).*

La démonstration est astucieuse. Nous en résumons ici les grandes lignes.

Schéma de démonstration

La construction des chaînes est basée sur les orbites paraboliques du problème restreint circulaire plan des 3 corps (PRCP). Celles-ci sont obtenues comme trajectoires homoclines à une orbite périodique à l'infini. Les variétés stable et instable de cette orbite s'intersectent transversalement, donnant lieu à la création d'une infinité d'orbites périodiques hyperboliques. Le (PREP) peut être vu comme une petite perturbation périodique du (PRCP). Les orbites périodiques précédentes donnent naissance, par l'intermédiaire du théorème KAM, à une famille de tores invariant hyperboliques. On montre alors que les variétés stables et instables de ces tores s'intersectent transversalement.

Le théorème de Z. Xia précise la variable dans laquelle l'instabilité se manifeste. Le (PRCP) possède une intégrale première appelée intégrale de Jacobi. Les tores de la chaîne sont paramètrés par cette intégrale. L'instabilité se traduit ici par une lente dérive de l'intégrale de Jacobi.

Remarque : La démonstration du théorème de Xia est en fait incomplète. En effet, l'existence des connexions hétéroclines est difficile à établir. Ce problème n'est pas mentionné dans l'article et éludé par un argument de stabilité des intersections transverses sous faible perturbation C^1. Les lacunes dans la famille de tores hyperboliques rend cet argument insuffisant.

Dans son article [Xi1], Z. Xia énonce le théorème suivant :

Théorème B: *Il n'existe pas d'intégrale première analytique réelle dans le problème restreint elliptique plan des trois corps.*

Il en donne une démonstration heuristique, dont nous pourrions nous contenter si les arguments avancés étaient trivialement vrais. Nous allons voir qu'il n'en ait rien. Examinons tout d'abord la démarche de Z. Xia.

L'idée est que l'intersection tranverse des variétés stable et instable des tores de la chaîne de transition va créer un ensemble d'unicité (key-set) pour les fonctions analytiques.

Pour appuyer cette idée, Z. Xia nous assure que les variétés stable et instable des tores vont s'accumuler (dans un sens non précisé) l'une sur l'autre, et donner lieu à un phénomène de type *fer à cheval de Smale* comme celui existant pour les tores normalement hyperboliques.

Nous avons essentiellement deux remarques sur les idées précédentes :

• L'existence d'un ensemble d'unicité (non trivial) pour les fonctions analytiques en dimension supérieur à deux est un point délicat encore non résolu.

• La généralisation du théorème de Birkhoff-Smale est effectuée dans le chapitre 1 de cette thèse (voir la partie 2). Néanmoins, les hypothèses sous-tendant ce travail ne sont pas génériques et rendent difficile son utilisation dans des exemples.

2.1.2. Orbites paraboliques

On s'intéresse aux *orbites paraboliques*, c'est à dire celles qui arrivent à l'infini avec une vitesse nulle, ou en termes mathématiques

Définition: *On appelle orbite parabolique une orbite* $(q(t), p(t))$ *telle que* $\| q \| \to \infty$ *et* $\| p \| \to 0$ *lorsque* $t \to \pm\infty$.

L'étude des trajectoires paraboliques nous conduit introduire un nouveau système de coordonnées qui raméne l'infini en zéro. Précisément, effectuons le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} q & = & e^{i\theta}/x^2 \\ p & = & (y + i\rho x^2)e^{i\theta} \end{array} \right.$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, l'infini correspondant à $q = \infty$ est envoyé sur $x = 0$ et les vitesses nulles correspondant à $p = 0$ en $y = 0$. Une trajectoire parabolique correspond maintenant à une orbite asymptotique à $O = (0, 0)$.

Bien entendu, ce changement de coordonnées n'a aucune raison d'être symplectique. Par conséquent, le nouveau système d'équations ne s'écrit pas sous forme Hamiltonienne.

2.2. Le cas initial intégrable: $\mu = 0$, $e = 0$; le problème des deux corps

Pour $\mu = 0$, $e = 0$, nous nous ramenons au problème des deux corps. Le corps de masse $1 - \mu = 1$ est à l'origine. Les équations du mouvement du troisième corps sont données par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -x^3 y/2 \\ \dot{y} & = & -x^4 + x^6 \rho^2 \\ \dot{\theta} & = & x^4 \rho \\ \dot{\rho} & = & 0 \end{array} \right.$$

On remarque que ρ est une intégrale première du système. L'équation de l'énergie s'écrit

$$y^2 + \rho^2 x^4 - 2x^2 = 2h$$

Plaçons nous dans le plan (x, y). Nous sommes conduit à l'étude du système à 1 paramètre (S_ρ) donné par

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -x^3 y/2 \\ \dot{y} & = & -x^4 + x^6 \rho^2 \end{array}$$

Lemme 17 *L'origine O=(x,y)=(0,0) est un point fixe dégénéré du système* (S_ρ), *possédant des variétés stable et instable confondues, dont l'équation est donnée par*

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sqrt{2}/\left((3t+\sqrt{9t^2+\rho^6})^{2/3}+(3t-\sqrt{9t^2+\rho^6})^{2/3}-\rho^2\right)^{1/2} \\ y(t) & = & signe(x) \pm \sqrt{2x^2(t)-x^4(t)\rho^2} \end{array}$$

Allure qualitative du flot dans la section

2.3. Création de l'hyperbolicité: $0 < \mu << 1$, $e = 0$; le problème restreint circulaire plan des trois corps

Dans ce cas, nous nous trouvons dans le problème restreint circulaire plan des trois corps (PRCP). Contrairement à l'exemple de V.I. Arnold [Ar1] où le hamiltonien médian créant l'hyperbolicité est choisi complètement intégrable, le (PRCP) est un système hamiltonien non intégrable. Il est de plus fortement couplé, alors que l'exemple d'Arnold est une situation produit. Le système d'équations s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -x^3y/2 \\ \dot{y} & = & -x^4+x^6\rho^2+\mu g_1(x,t-\theta)+O(\mu^2) \\ \dot{\theta} & = & x^4\rho \\ \dot{\rho} & = & \mu g_2(x,t-\theta)+O(\mu^2) \end{array} \right.$$

Ce système possède une intégrale premiére, appelée *intégrale de Jacobi*, donnée par

$$y^2+x^4\rho^2-2U-2\rho=2C$$

où C est appellée *constante de Jacobi*. Cette intégrale correspond au hamiltonien du problème à deux corps écrit dans un repère tournant.

Cette intégrale nous permet de réduire le système en supprimant l'équation en ρ. De plus, les fonctions g_1 et g_2 ne faisant intervenir le temps que sous la forme $t-\theta$, nous introduisons une nouvelle variable s définie par

$$s=t-\theta$$

nous permettant de supprimer l'équation en θ. Notre système d'équations se réduit donc à l'étude du système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x^3y/2(1-x^4\rho) \\ y' & = & (-x^4+x^6\rho^2+\mu g_1(x,s))/(1-x^4\rho)+O(\mu^2) \end{array}\right.$$

où $'$ représente la différentiation par rapport à s, et ρ est déduit de l'intégrale de Jacobi.

2.3.1. Section de Poincaré

Les équations précédentes sont périodiques en s, de période 2π. On définit alors pour tout $s_0 \in [0, 2\pi[$, la section Σ_{s_0} correspondant à $s = s_0$. Soit ϕ l'application de premier retour associée à Σ_{s_0}. Il est facile de voir que l'origine O est un point fixe dégénéré de ϕ. Néanmoins, il est possible de démontrer le résultat suivant:

Lemme 18 *Il existe une variété stable $W^s(O)$ (resp. instable $W^u(O)$) analytique pour $x > 0$.*

C'est une simple application du théorème de la variété stable de Mc-Gehee [MG] dans un cas dégénéré.

Remarque: La variété stable (resp. instable) est donc obtenue comme le graphe d'une fonction ϕ analytique pour $x > 0$. Le problème de la *perte d'analyticité* de la fonction ϕ à l'origine n'a pas été étudié par R. Mc-Gehee [MG]. En effet, le caractère C^k à l'origine de la variété stable n'a que peut d'importance dans les notre cas. Une étude de ce type de problème a été effectuée par D.L. Slotnik [Sl]. Il montre que si f est symplectique alors la fonction ϕ est C^∞ à l'origine, et présente un exemple où ϕ n'est pas analytique à l'origine. Il serait intéressant de voir ce qui provoque cette perte d'analyticité.

L'application de la *méthode de Melnikov* permet alors de montrer

Lemme 19 *Pour toutes les valeurs de C, sauf un ensemble discret et $0 < \mu << 1$, les variétés stable $W^s(O)$ et instable $W^u(O)$ s'intersectent tranversalement dans Σ_{s_0}.*

Nous renvoyons à Z.Xia [Xi1] pour la démonstration.

Cette intersection transverse donne naissance à une dynamique compliquée décrite par une dynamique symbolique. Il faut prendre garde au fait que le point fixe de l'application de section est dégénérée, par conséquent ce théorème ne rentre pas dans le domaine d'application du théorème de Smale-Birkhoff. L'existence d'une conjugaison à un shift à une infinité de symbole est démontrée par Moser [Mo].

L'ensemble de Cantor ainsi obtenu contient des orbites périodiques hyperbolique $\gamma_n(C)$ de période $n \in \mathbf{N}$, avec n arbitraire. C'est sur ces orbites que nous allons appliquer les raisonnement du §.1.

2.3.2. Existence de tores partiellement hyperboliques

Afin de mettre en évidence l'existence de l'intégrale première de Jacobi, nous allons écrire notre système dans les variables (x,y,C,t). Dans ce cas, il prend la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x^3y/2(1-x^4\rho) \\ y' & = & (-x^4+x^6\rho^2+\mu g_1(x,s))/(1-x^4\rho)+O(\mu^2) \\ C' & = & 0 \\ t' & = & (1-x^4\rho)^{-1} \end{array}\right.$$

La famille à un paramètre de tores partiellement hyperboliques est définie par

$$T_C = \{C \in R,\ (x,y,s) \in \gamma_n(C),\ t \in S^1\}$$

Le tore T_C est de dimension 2, muni d'une variété stable (resp. instable) $W^s(T_C) = W^s(\gamma_n) \times S^1$ (resp. $W^u(T_C) = W^u(\gamma_n) \times S^1$) de dimension 3. Ils sont donc partiellement hyperboliques.

Nous avons donc une famille à un paramètre de tores hyperboliques dont les variétés stable et instable ne s'intersectent pas transversalement dans $\mathcal{H}$. Ceci est dû à la présence de l'intégrale première de Jacobi. Elle interdit de plus toute intersection hétérocline entre les variétés stable et instable de deux tores distincts. Nous allons voir comment l'introduction de l'exentricité e, brise l'intégrale première et permet l'instabilité.

2.4. Instabilité: $0 < \mu << 1$, $0 < e << \mu$; le problème restreint elliptique plan des trois corps

Dans ce cas, la variable C n'est plus une intégrale première et l'intersection des variétés stables et instables de deux tores distinctes est possible.

2.4.1. Conservation de tores partiellement hyperboliques

Soit Ω_n l'ensemble défini par

$$\Omega_n = \{(x,y,C,t,s) \mid (x,y) = p_n(C), s = \pi; t \in S^1, C \in J \subset R\}$$

On vérifie que Ω_n est *normalement hyperbolique.*

Lemme 20 *Soit $n > N$ suffisamment grand, il existe $\delta_1 > \delta_2 > 0$ et μ_0 tels que pour tout $C \in J =]\sqrt{2}+\delta_1, \sqrt{2}+\delta_2[$, $\delta_2 > \delta_1$ et $0 < \mu < \mu_0$, l'application $\widehat{\phi}_n$ sur Ω_n est une application de torsion analytique, i.e*

$$\widehat{\phi}_n(C,t) = (C, t + f_n(C))$$

avec $f_n'(C) \neq 0$ pour $C \in J$.

Nous renvoyons à [Xi1] pour la démonstration. Le problème est ici de vérifier la condition de torsion. On utilise pour ce faire le fait que toutes les intégrales que l'on peut calculer divergent lorsque la constante de Jacobi tend vers $\sqrt{2}$. Cette valeur est liée à la possibilité de collision entre le petit corps et les corps primaires sur les orbites paraboliques. On se place donc dans un voisinage suffisamment petit de $\sqrt{2}$ pour assurer le fait que $f_n'(C) \neq 0$.

Cet argument de proximité à une collision double est à la base de toutes les démonstrations de Xia.

Les hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ à $(\mathcal{H}_3)$ du §.1.1. sont vérifiées. Nous avons donc:

Lemme 21 *Pour $e > 0$, $e << \mu$, un grand nombre de tores invariant partiellement hyperboliques persistent.*

2.4.2. Existence de tores de transition

Nous sommes maintenant en mesure de construire des tores de transition suivant la définition d'Arnold. On commence par montrer que les tores partiellement hyperboliques conservés sous la perturbation ont des variétés stables et instables qui se coupent transversalement dans $\mathcal{H} = H_{e\mu}^{-1}(h)$ (ce qui constitue le résultat fondamental de Z. Xia)

Lemme 22 *Soit $n \geq N$ et δ_1, δ_2 et μ_0 donnés par le lemme 20. Il existe $e_0 > 0$ tel que pour tout $0 < e < e_0$ et $0 < \mu < \mu_0$ on a :*

Soit $C \in J =]\sqrt{2} + \delta_1, \sqrt{2} + \delta_2[$ tel que le tore invariant partiellement hyperbolique T_C se conserve sous la perturbation en T_C^e. Alors

i) $W^s(T_C^e) \pitchfork W^u(T_C^e)$ dans $\mathcal{H}$,

ii) Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $\mid C_1 - C_2 \mid \leq \epsilon$ alors $W^s(T_{C_1}^e) \pitchfork W^u(T_{C_2}^e)$ dans $\mathcal{H}$.

Démonstration : Placons nous dans la surface de section $s = \pi$. Dans ce cas, nous allons étudier l'application de Poincaré associée ϕ.

Toute la démonstration repose sur les propriétés du flot au voisinage de l'ensemble invariant

$$\mathcal{K}_e = \{ \ x = y = 0, \ C \in R, \ t \in S^1 \ \} \subset \Sigma_\pi$$

On commence par noter que $\mathcal{K}$ possède des variétés invariantes analytiques. C'est une généralisation du lemme 17 de Mc-Gehee en dimension supérieur dûe à C. Robinson [Ro].

a) Préliminaires: Nous allons maintenant construire deux ensembles dans $\mathcal{K}$ associés aux variétés stable et instable d'un tore T_C. Pour cela, on note que lorsque $e = 0$, la variété instable (resp. stable) $W^u(T_C^e)$ (resp. $W^s(T_C^e)$) intersecte transversalement dans Σ_π la variété stable de $\mathcal{K}$ en un cercle. Sous une faible perturbation, cette intersection transverse est conservée. On obtient encore un cercle c_u. Par itération négative de l'application de Poincaré, nous obtenons une courbe (asymptotique) c_u^* dans $\mathcal{K}$. De même, il est possible d'associer à $W^s(T_c) \pitchfork W^u(\mathcal{K})$ une courbe c_s^* dans $\mathcal{K}$. On montre alors le résultat suivant.

Lemme 23 *Il existe deux constantes δ_1, δ_2, positives, telles que pour $\mu < \mu_0$ et $e < e_0$, si $c_u^* \in \mathcal{K}$ avec $C \in J$, alors $W^u(c_u^*) \pitchfork W^s(c_s^*)$ dans Σ_π. L'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ est donc vérifiées.*

b) Un λ-lemme : Nous allons maintenant utiliser un résultat de type λ-lemme dans le cas d'un ensemble invariant dégénéré. Celui ci découle de l'étude locale de C. Robinson [Ro] dans sa généralisation du théorème de la variété stable dû à Mc-Cehee [MG].

On conclut alors d'aprés le lemme 23 que $W^s(T_C^e) \pitchfork W^u(T_C^e)$ dans $\mathcal{H}$ par un simple argument de stabilité des intersections transverse sous faible perturbation C^1. □

Un résultat similaire est valable pour le *problème des trois corps plan* (voir Z.Xia [Xi2]).

3. Instabilité en dynamique galactique

Le tiers des galaxies “brillantes” de l’Univers sont de la classe des *Galaxies elliptiques*. En comparaison aux galaxies spirales, qui ont des composantes facilement identifiables (bulbe, bras, halo), les galaxies elliptiques ont un aspect régulier (aucune structure particulière n’apparait). La seule caractéristique évidente permettant de distinguer deux galaxies, en dehors de sa taille, de sa luminosité et de sa distance, est la grandeur de ces demi-grand axes apparents.

Comme on ne voit que la projection sur un plan dans l’axe de visée, il est impossible de savoir directement si les galaxies elliptiques sont *axi-symétriques* (aplaties ou allongées) ou *triaxiales* (c’est à dire des ellipsoides dont tous les axes sont différents).

Jusqu’en 1975, il était communément admis (en analogie avec le comportement dynamique des fluides en rotation) que les galaxies elliptiques étaient axi-symétriques. Néanmoins, des contraintes observationnelles (mesure de la vitesse de rotation) ont conduit à une révision de ce jugement.

Une des grandes question (ouverte) est donc de savoir si les galaxies elliptiques sont triaxiales. Une seconde est de découvrir le mécanisme d’applatissement observé.

Ces questions ont d’hors et déja donné lieu à une abondante littérature (voir [Me]). Les études dynamiques visent à résoudre ces questions en donnant une description fine de l’espace des phases de ces systèmes, et donc des effets dynamiques suceptibles de ce produire.

Le but de ce travail est d’apporter quelques éléments nouveaux sur la dynamique de ces systèmes.

3.1. Présentation des résultats

En adaptant les méthodes de construction des chaînes de transition donnée au §1, nous montrons l’existence de deux chaînes distinctes dans un modèle de galaxie triaxiale. Ces deux chaînes se coupent au niveau d’une orbite périodique hyperbolique appelée x-axiale dans les travaux de [LP2].

Cette particularité du système nous permet de mettre en évidence un phénomène qualitatif nouveau: l’échange entre surfaces de résonance, décrit succinctement par Arnold [Ar2] et encore peu étudié (voir [Lo]). L’ exemple le plus simple de ce phénomène est donné dans l’appendice A au moyen de méthodes constructives et dans [Be] à l’aide de méthodes variationnelles.

L’étude que nous présentons est semi-analytique. On utilise en effet des résultats de [LP1] et [LP2] sur la stabilité des orbites et des évidences numériques pour la transversalité des variétés invariantes. Les résultats obtenus au moyen de méthodes numériques seront signalées d’une *.

3.2. Notations et définitions

Les contraintes observationnelles pour la dynamique des galaxies elliptiques sont données par la courbe de rotation qui est plate (vitesse tangentielle constante) lorsque l’étoile est loin du centre galactique (voir [Ri] et [BT]). Un potentiel vérifiant cette propriété est donné par

$$\Phi(x,y,z) = \ln(c^2 + x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2})$$

Les paramètres a et b, représentant les rapports axials de l'ellipsoïde, sont aussi imposés par les observations. En effet, il semble que certaines propriétés des galaxies elliptiques soient non-axisymétrique [BT], mais cela est sujet à controverse [Me].

Le paramètre c est ici introduit pour éviter un difficile problème de distribution de densité infinie au centre galactique (ou, ce qui revient au même, la singularité du potentiel à l'origine). Cette difficulté provient de la méconnaissance du contenu et du comportement dynamique du centre galactique.

Nous reprenons ici les travaux de divers astronômes sur les modèles de Galaxie elliptiques. L'étude de ces galaxies remonte à M. Schwarzschild [Sc], qui a étudié un modèle numérique pour un système triaxial non tournant en équilibre dynamique. Une étude analytique a ensuite été effectuée par J. Binney [Bi]. Pour plus de détails, on se referera à l'article de P. Magnenat [Ma]. Le hamiltonien que nous allons étudier est le suivant :

$$H_{a,b}(x,y,z,X,Y,Z) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \ln(x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} + c^2)$$

défini sur $R^3 \times R^3$.

Le système différentiel associé est

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & X \\ \dot{y} & = & Y \\ \dot{z} & = & Z \\ \dot{X} & = & -2x/\star \\ \dot{Y} & = & -2y/a^2\star \\ \dot{Z} & = & -2z/b^2\star \end{array}$$

où $\star = x^2 + (y^2/a^2) + (z^2/b^2) + c^2$.

Les régions de Hill de ce système sont simples. Nous avons trois configurations possibles :

- Lorsque $h < 2\ln c$, le mouvement ne peut pas avoir lieu et la région de Hill est vide.
- Lorsque $h = 2\ln c$, la région de Hill est un point.
- Lorsque $h > 2\ln c$, la région de Hill est un ellipsoïde, dont le bord correspond à la *courbe de vitesse nulle*. Precisément, pour $X = Y = Z = 0$, nous avons

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} + c^2 = \exp h$$

Les paramètres a et b représentant les axes de l'ellipsoïde sont reliés à la densité de distribution du potentiel logarithmique. Celle ci doit rester positive pour que le système étudié ait un sens physique.

On calcul la densité de distribution via l'équation de Poisson

$$\Delta^2 V = 4\pi G\rho$$

où V est le potentiel considéré, ρ la densité de distribution associée.

Pour le potentiel logarithmique, nous obtenons l'expression suivante pour la distribution de densité

$$\rho(x,y,z) = \frac{\alpha x^2 + \beta(y^2/a^2) + \gamma(z^2/b^2) + \delta}{2\pi G(x^2 + (y^2/a^2) + (z^2/b^2) + c^2)}$$

où

$$\begin{array}{rcl}\alpha &=& -1 + (1/a^2) + (1/b^2) \\ \beta &=& 1 - (1/a^2) + (1/b^2) \\ \gamma &=& 1 + (1/a^2) - (1/b^2) \\ \delta &=& 1 + (1/a^2) + (1/b^2)\end{array}$$

Nous voulons avoir $\rho(x,y,z) > 0$, ce qui se traduit par

$$\alpha x^2 + \beta(y^2/a^2) + \gamma(z^2/b^2) + \delta > 0$$

Cette simple contrainte se traduit par les intervalles suivants:

Pour $b \in]0, \sqrt{\frac{\exp(h) - 2c^2}{\exp(h)}}[$, nous avons $a \in]\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1 - b^2 - 2(c^2/\exp h)}}[$, et pour $b \in]\sqrt{\frac{\exp h}{\exp h - 2c^2}}, \infty[$ nous avons $a \in]\sqrt{\frac{b^2}{1+b^2}}, \sqrt{\frac{\exp h}{(1-1/b^2)\exp h - 2c^2}}[$.

Pour plus de détails, on consultera le travail de [LP2].

3.3. Le cas intégrable: $a = b = 1$, ou une Galaxie sphérique

Nous allons maintenant regarder le cas le plus simple, à savoir $a = b = 1$. Nous savons alors que le système est complètement intégrable. En effet, nous pouvons facilement mettre en évidence deux intégrales premières , notées Ξ et Θ, en plus de la conservation de l'énergie correspondant au moment angulaire d'une particule dans les plans (x,y) et (x,z). Precisément

$$\Xi = xY - yX$$
$$\Theta = xZ - zX$$

L'idée est d'introduire un système de coordonnée polaire dans le plan (x,z) afin de mettre en évidence une des symétries du problème. Nous posons donc

$$\begin{array}{rcl}x &=& r\cos\theta \\ y &=& y \\ z &=& r\sin\theta\end{array}$$

On compléte ce changement de variable par les variables conjuguées suivante :

$$\begin{array}{rcl}R &=& \cos\theta X + \sin\theta Z \\ Y &=& Y \\ \Theta &=& -r\sin\theta X + r\cos\theta Z\end{array}$$

Dans ce système de coordonnées, le hamiltonien prend la forme suivante

$$H_{1,1}(r,y,\theta,R,Y,\Theta) = \frac{1}{2}(R^2 + Y^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) + \ln(r^2 + y^2 + c^2)$$

défini pour $(r,y,\theta) \in R^2 \times T^1$ et $(R,Y,\Theta) \in R^3$. Le système différentiel associé est

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & = & R \\ \dot{y} & = & Y \\ \dot{\theta} & = & \Theta/r^2 \\ \dot{R} & = & -2r/\star + \Theta^2/r^3 \\ \dot{Y} & = & -2y/\star \\ \dot{\Theta} & = & 0 \end{array}$$

où $\star = r^2 + y^2 + c^2$.

La variable Θ est bien entendu une intégrale première et nous sommes conduit à l'étude du système à deux degrés de liberté

$$\widehat{H_\Theta}(r,R,y,Y) = \frac{1}{2}(R^2 + Y^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) + \ln(r^2 + y^2 + c^2)$$

où Θ est un paramètre.

Le hamiltonien H_Θ défini sur R^4 donne le système différentiel

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & = & R \\ \dot{y} & = & Y \\ \dot{R} & = & -2r/\star + \Theta^2/r^3 \\ \dot{Y} & = & -2y/\star \end{array} \tag{44}$$

Pour une énergie fixée h_2, les régions de Hill du système sont des ellipses pleines.

Le plan $y = Y = 0$ est invariant sous H_Θ. La dynamique sur ce plan est gouvernée par le hamiltonien à un degré de liberté

$$H_\Theta^{(0,0)}(r,R) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) + \ln(r^2 + c^2)$$

Il est bien evidemment complètement intégrable (c'est l'analogue du hamiltonien $H_{a,b}$ à deux degrés de liberté écrit en coordonnées polaires [LP1])) et donne naissance à une famille à un paramètre δ d'orbites périodiques. Ce paramètre δ est donné par $\delta = h - \frac{1}{2}\Theta^2$. Pour h et Θ fixés nous avons donc une orbite périodique notée $\mathcal{O}$. C'est précisément sur cette orbite périodique (un tore de dimension deux pour le système complet) que nous allons effectuer notre étude.

Le système $H_\Theta^{(0,0)}$ possède un point fixe *elliptiques*, qui est donné par

$$\begin{array}{rcl} r_0 & = & (\Theta/4)(\Theta + (1 + 16c^2)^{1/2}) \\ R_0 & = & 0 \end{array}$$

Les valeurs propres du système linéarisé en ce point se calcule facilement. On obtient

$$\lambda^2 = i^2 2/(r_0^2 + c^2)$$

Supposons $\Theta \neq 0$. L'orbite périodique

$$\mathcal{O}_\Theta = (r, y, \theta, R, Y, \Theta) = (r_0, 0, \Theta/r_0^2 t + \Theta_0, 0, 0, \Theta)$$

est dégénérée.

Le voisinage du point fixe elliptique $(r, R) = (r_0, 0)$ est feuilleté en cercles concentriques. Nous avons donc une famille à un paramètre d'orbites périodiques résonnantes ou non. Le paramètre est donné

$$\delta = h - \Theta^2/2r_0^2 - \ln(2r_0^4/\Theta^2) + \mu$$

pour μ variant dans un intervalle $\mathcal{I}$. Chacune de ces orbites périodiques donnent naissance à un tore non maximal de dimension deux pour le Hamiltonien complet qui sont résonnants ou non.

Nous allons ici introduire une surface de section convenable pour le flot de $H_{1,1}$ qui nous sera utile par la suite pour mieux visualiser les objets.

Soit $\mathcal{S}$ la surface de section définie par

$$\mathcal{S} = ((r \in V_{r_0}, y \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{T}, R = 0, Y \in \mathbf{R}, \Theta \in \mathbf{R}^*))$$

où V_{r_0} est un voisinage *annulaire* de r_0.

On a

Lemme*: *Le point fixe $O = (y, Y) = (0, 0)$ de l'application de retour $f_{\mathcal{S}}$ est dégénéré.*

Ceci découle des études de la stabilité des points fixes effectuée par J. Laskar et Y. Papaphilippou [LP2] numériquement.

Nous allons voir comment l'introduction du petit paramètre a va créer l'hyperbolicité et détruire l'intégrabilité du système.

3.4. Creation d'hyperbolicité: $a > 1, b = 1$

Dans le système de coordonnées décrit au §.3.1, le hamiltonien $H_{a,1}$ s'écrit

$$H_{a,1}(r, \theta, y, R, \Theta, Y) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} + Y^2) + \ln(r^2 + \frac{y^2}{a^2} + c^2)$$

Le système différentiel associé est donné par

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & = & R \\ \dot{\theta} & = & \Theta/r^2 \\ \dot{y} & = & Y \\ \dot{R} & = & -2r/\star + 2\Theta^2/r^3 \\ \dot{\Theta} & = & 0 \\ \dot{Y} & = & -2y/a^2\star \end{array}$$

La variable Θ est encore une intégrale première du système. Supposons désormais que

$$a_0 > a > 1$$

où a_0 est une constante à déterminer.

Nous sommes conduit à étudier une famille à un paramètre Θ de Hamiltonien

$$H_{a,1,\Theta}(r,y,R,Y) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} + Y^2) + \ln(r^2 + \frac{y^2}{a^2} + c^2)$$

On observe que $y = Y = 0$ est invariant par le flot. Le hamiltonien restreint à ce plan est donné par

$$H_{a,1}^{(0,0)}(r,R) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) + \ln(r^2 + c^2)$$

On reconnait le hamiltonien complètement intégrable du potentiel logarithmique à deux degrés de libertés.

Placons nous une nouvelle fois au voisinage du point fixe elliptique. Nous obtenons alors des orbites périodiques. Par passage au système complet, nous avons des tores non maximaux de dimension deux définis par

$$\mathcal{T}_\Theta = (\theta \in \mathbf{T}, y = Y = 0, \Theta \in \mathbf{R}^*, (r,R) \in \mathcal{O}_{r_0})$$

où $\mathcal{O}_{r_0}$ est une orbite périodique autour du point fixe elliptique r_0.

La nature de ces tores (hyperbolique ou non) dépend de la nature des orbites périodiques

$$\mathcal{O}_{(0,0)} = \{\ (y,Y,r,R) = (0,0,r(t),R(t))\ \}$$

Une étude numérique, analogue à celle effectuée au paragraphe précédent, permet de conclure.

Lemme*: *Le point $O = (y,Y) = (0,0)$ est un point fixe hyperbolique dans $\mathcal{S}$.*

Un travail analogue à ([LP1], p.429, fig.1.a.) permet de plus de montrer

Lemme*: *Les variétés stables $W^s(O)$ et instable $W^u(O)$ de O se coupent transversalement dans $\mathcal{S}$.*

Il est bon de noter que le résultat précédent est à priori valable pour toutes les valeurs de $a \neq 1$.

3.4. Instabilité: le cas $a > 1$ et $b \neq 1$

Il suffit de montrer la persistence d'une famille de tores partiellement hyperboliques dont les variétés stable et instable se coupent de manière à former une *chaîne de transition*.

3.4.1. Conservation des tores partiellement hyperboliques

Commençons par définir l'ensemble de tores partiellement hyperboliques

$$\Omega_n = \Big((y,Y) = p_n(\Theta), R = 0, r \in R, \Theta \in R, \theta \in T^1\Big)$$

L'ensemble Ω_n est un ensemble invariant normalement hyperbolique. On montre alors le résultat fondamental suivant :

Lemme: *Soit $n > N$ suffisamment grand, pour tout $\Theta \neq 0$, l'application de section restreinte à Ω_n est conjuguée à une distortion monotone, donnée par*

$$(\Theta, \theta) \longmapsto (\Theta, \theta + \alpha_n(\Theta))$$

avec $\alpha'_n(\Theta) \neq 0$.

Démonstration : Nous avons Θ qui est une intégrale première du sytème. Par conséquent, l'application $f_{\Omega_n}(\Theta, .) = (\Theta, *)$. Pour la seconde composante, il nous faut regarder le comportement de θ. Or, par construction nous avons $\dot{\theta} = \Theta/r^2$. Comme Θ est une intégrale première, on obtient $\theta(t) = \Theta \int_0^t 1/r^2(u)du \ + \theta_0$. Soit T_n la période du point p_n, alors $\pi_2(f_{\Omega_n}(\Theta, \theta)) = \Theta \displaystyle\int_0^{T_n} 1/r^2(u)du \ + \theta$ et $\alpha_n^{'}(\Theta) = \displaystyle\int_0^{T_n} 1/r^2(u)du > 0$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

Les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ à $(\mathcal{H}_3)$ sont vérifiées. Nous avons donc :

Lemme: *Pour $a \neq 1$ et b suffisamment proche de 1, un grand nombre de tores invariants partiellement hyperboliques subsistent.*

3.4.2. Existence de tores de transition

Le lemme précédent permet de montrer l'existence d'une chaîne de transition.

Lemme*: *Pour $a \neq 1$ et b suffisamment proche de 1, $a \neq b$ et $\Theta \neq 0$, soit T_Θ un tore partiellement hyperbolique qui se conserve sous perturbation, alors*

i) $W^s(T_\Theta) \pitchfork W^u(T_\Theta)$ dans $\mathcal{H}$,

ii) Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout Θ' tel que $\mid \Theta' - \Theta \mid < \epsilon$ alors $W^s(T_{\Theta'}) \pitchfork W^u(T_\Theta)$ dans $\mathcal{H}$.

3.5. Echange entre surfaces de résonance

3.5.1. Le problème

Le problème d'échange entre surface de résonance consiste à transiter le long d'une première famille de tores partiellement hyperboliques issus d'une surface de résonance, puis à changer de surface de résonance pour transiter le long d'une seconde chaîne de tores. Ce type de problème intervient naturellement lors de l'étude de l'instabilité globale [Ar2].

Peu de travaux existent à ce jour. On pourra consulter [Lo] pour une rapide introduction au sujet. Un exemple simple est donné dans l'appendice A (voir aussi [Be]).

La principale difficulté du problème est la mise en évidence d'orbites reliant deux tores de deux familles distinctes au voisinage de la résonance double. Celle ci se traduit dans l'appendice A par la construction d'intersection hétérocline transverse entre les variétés stable et instable des deux tores. C'est un problème difficile, qui est considérablement simplifié dans l'appendice, par l'utilisation d'un système médian intégrable produit. Dans ce cas, il est facile de montrer la dépendance C^1 des variétés invariantes. Cet exemple possède la particularité supplémentaire de n'avoir qu'une seule orbite périodique hyperbolique transverse à la résonance double. On utilise alors un argument de stabilité des intersection transverses sous faible perturbation C^1 sur l'intersection transverse homocline de l'orbite périodique pour en déduire l'intersection transverse hétérocline des tores voisins. En général, il existe plusieurs orbites périodiques à la résonance double, ce qui nécessite un choix convenable de l'orbite périodique pour effectuer les constructions.

Aucun exemple (même modèle) d'échange entre surfaces de résonances dans le cas d'un système médian couplé n'existe. Nous allons voir comment, dans le modèle de galaxie triaxiale, ce phénomène intervient.

3.5.2. Construction d'une seconde chaîne de transition

La particularité du hamiltonien que nous avons étudié est qu'il fait jouer des rôles symétriques aux paramètres a et b. Par conséquent, les résultats précédents sont aussi valables en remplacant simplement a par b et vice versa. On obtient ainsi une seconde chaîne de transition, associée à la variable Ξ.

On commence par introduire un système de coordonnées polaires sur le plan (x, y). Nous obtenons alors le nouvel hamiltonien suivant lorsque $a = b = 1$

$$H_{1,1}(r, z, \theta, R, Z, \Theta) = \frac{1}{2}(R^2 + Z^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) + \ln(r^2 + z^2 + c^2)$$

défini pour $(r, z, \theta) \in R^2 \times T^1$ et $(R, Z, \Theta) \in R^3$. En suivant des étapes analogues à la construction de la chaîne $\mathcal{T}_\Theta$, on montre que le hamiltonien

$$H_{1,b}(r, \theta, z, R, \Theta, Z) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} + Z^2) + \ln(r^2 + \frac{z^2}{b^2} + c^2)$$

admet une famille à un paramètre Ξ de tores partiellement hyperboliques de la forme

$$\mathcal{T}_\Xi = (\theta \in \mathbf{T}, z = Z = 0, \Theta \in \mathbf{R}^*, (r, R) \in \mathcal{O})$$

où $\mathcal{O}$ est une orbite périodique autour du point fixe elliptique r_0.

Par perturbation lorsque $a \neq 1$, on a le lemme suivant.

Lemme*: *Il existe une chaîne de transition $(\mathcal{T}_\Xi)$ pour le modèle de galaxie triaxiale.*

La coexistence des deux chaînes suppose le choix des paramètres a et b suivant :

$$\widehat{a_0} > a > 1 \qquad \widehat{b_0} > b > 1$$

où $\widehat{a_0}$ et $\widehat{b_0}$ sont donnés par les seuils de validité du théorème KAM utilisé dans les démonstrations.

Supposons de plus, $a \neq b$, ce qui assure la non-intégrabilité analytique du système. Une connexion entre les deux chaînes de tores est possible si l'équation $\Theta = \Xi$ possède une solution. Celle ci va être donnée par

$$\mathcal{O} = \{ (x, y, z, X, Y, Z) \in \mathbf{R}^6 \mid y = Y = z = Z = 0 \} \tag{45}$$

qui correspond à $\Theta = \Xi = 0$.

L'ensemble défini par (45) correspond à une orbite périodique hyperbolique. En effet, d'après l'étude de J. Laskar et Y. Papaphilippou [LP2], lorsque a et b sont plus grand que 1, l'orbite qu'ils appellent *x-axiale* est hyperbolique. On peut donc montrer le lemme suivant :

Lemme*: *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite périodique hyperbolique définie par en (45). Sa variété stable $W^s(\mathcal{O})$ coupe transversalement sa variété instable $W^u(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{H}$.*

De plus, dans un voisinage aussi petit que l'on veut de cette orbite périodique, nous avons des tores partiellement hyperboliques des familles $\mathcal{T}_\Theta$ et $\mathcal{T}_\Xi$. Plus précisément, nous avons le lemme suivant :

Lemme 24 *Soit $V^s_{\mathcal{O}}$ (resp. $V^u_{\mathcal{O}}$) un voisinage arbitrairement petit de la variété stable (resp. instable) de $\mathcal{O}$. Il existe des tores T de chacune des familles tels que $W^s(T) \in V^s$ et $W^u(T) \in V^u$.*

On a alors, en utilisant un simple argument de stabilité des intersections transverses sous faible perturbation.

Lemme 25 *Il existe des tores T_Θ et T_Ξ tels que $W^s(T_\theta)$ coupe transversalement $W^u(T_\Xi)$ dans $\mathcal{H}$.*

Cela nous permet de "passer" d'une chaîne à l'autre. Une des difficultés, dans un cadre générique, pour montrer l'existence d'orbites d'échange entre surfaces de résonance de multiplicité 1 distinctes, est de montrer un équivalent du lemme (25). Contrairement à notre cas, il n'existe pas de tores partiellement hyperboliques dans un voisinage aussi petit que l'on veut de la résonance double. Le lemme (24), sur lequel est basé notre résultat n'est alors pas possible.

On a le donc le théorème suivant :

Théorème 3 *Pour a et b suffisamment proche de 1, $a \neq b$, $\widehat{a_0} > a > 1$, $\widehat{b_0} > b > 1$, soit T_Ξ un tore de la première famille et T_Θ un tore de la seconde famille. Il existe une orbite reliant un voisinage arbitrairement petit du tore T_Ξ à un voisinage arbitrairement petit du tore T_Θ.*

4. Conclusion et perspectives

Deux nouveaux exemples sont à notre porté en utilisant la méthode du §.1. Le premier, en mécanique céleste, concerne le mouvement d'un satellite autour d'une planète aplatie, non axi-symétrique. Le second étudie le mouvement d'un atome de Rydberg soumis à des champs magnétique et électrique orthogonaux.

4.1. Satellite autour d'une planète triaxiale

Nous allons considérer le hamiltonien

$$H_{J_2,\epsilon}(p,q) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\mu}{r} + J_2\mu\frac{a_e^2}{r^3}P_2(z/r) + \epsilon F_\epsilon(p,q)$$

défini pour $(p,q) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, où a_e est le rayon équatorial de la planète, P_2 le polynôme de Legendre du second degré, J_2 le coefficeint de l'harmonique zonal d'ordre 2 (représentant l'applatissement de la planète), et ϵ mesure la non axi-symétrie.

Cas intégrable : Lorsque $\epsilon = 0$, $J_2 = 0$, nous avons un problème de Kepler, complètement intégrable.

Hyperbolicité : Lorsque $\epsilon = 0$, $J_2 \neq 0$, l'intégrabilité du système est détruite, mais il conserve une intégrale première. En effet, par passage en coordonnées cylindrique, le hamiltonien s'écrit

$$H_{J_2,0} = \frac{1}{2}(p_z^2 + p_\rho^2) - \frac{\mu}{r} + \frac{p_\theta^2}{2\rho^2} + \frac{\widehat{J_2}}{r^3}(\frac{3}{2}(z/r)^2 - \frac{1}{2})$$

où $\widehat{J_2} = J_2 a_e^2 \mu$.

La variable θ est ignorable, et p_θ est donc une intégrale première. C'est la projection du moment angulaire sur l'axe de symétrie (z).

On fixe la valeur de cette intégrale, et on regarde le hamiltonien à 2 degrés de liberté ainsi obntenu. On peut effectuer une surface de section en $z = 0$. Dans le plan (ρ, p_ρ), nous avons deux points fixes elliptiques, ainsi que deux points fixes hyperboliques associés à la résonance 1-1 qui correspond à l'inclinaison critique. On peut de plus montrer que les variétés stable et instable de ces points ne coincident pas et se coupent transversalement (voir [Si] pour une revue de ce problème).

Nous avons donc deux familles à 1 paramètre (p_θ) de tores partiellement hyperboliques, notées $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

Instabilité : $\epsilon \neq 0$, $J_2 \neq 0$

Lorsque $\epsilon \neq 0$, l'intégrale première se "brise". Nous obtenons alors deux chaînes de transition (il faut montrer l'existence des intersections transverses hétéroclines). La structure de l'espace des phases médian (obtenu pour $J_2 \neq 0$, $\epsilon = 0$) permet de montrer l'existence d'orbites "passant" d'une chaîne à l'autre. Ce phénomène n'a rien à voir avec le problème d'échange entre surfaces de résonance exposé au §.3, la dérive s'effectuant toujours suivant la même variable p_θ.

4.2. Atome de Rydberg dans des champs magnétiques et électriques orthogonaux

Nous allons ici discuter la dynamique d'un *système atomique* à trois degrés de liberté. Un atome de Rydberg placé dans deux champs perpendiculaires, un champ electrique et un champ magnétique possède une dynamique compliquée qui n'a été etudiée jusqu'à présent que sous l'angle numérique [MDU], au moyen de l'*analyse en fréquence* développée par J. Laskar [La]. Cette méthode très puissante permet d'analyser finement la dynamique, notamment les processus de type "diffusion" (pour employer un terme de physique) et de transition le long des résonances.

Ce système est d'un point de vue théorique et expérimental très intéressant. Reprenant ici les commentaires de [MDU] à ce sujet, on note que ce système est dans le champ d'application du *Principe de Correspondance* où un accord convenable entre la mécanique quantique et la mécanique classique peut être attendu (voir [Gu]).

Nous nous proposons dans cette partie, de donner quelques indices sur l'existence d'instabilité asymptotique pour ce problème. L'instabilité se traduit par une lente dérive d'une des composante du moment angulaire. Les étapes de la construction des chaînes de transition présentées dans le chapitre II ont ici une signification physique particulière.

Le cas intégrable correspond à un atome d'hydrogéne soumis à aucune force. La création d'hyperbolicité correspond à l'application d'un champ magnétique. Le problème dans ce cas, possède une symétrie, qui se traduit par l'existence d'une intégrale première (une composante du moment angulaire suivant l'axe de la symétrie). Cet hamiltonien a deux degrés de liberté a un espace des phases qui a été complétement étudié par différents auteurs [Gu], [HRW], [UFMRS]. En écrivant une forme normale convenable pour cet hamiltonien [FURSM], on montre l'existence de deux orbites périodiques hyperboliques dont les variétés stables et instables se coupent transversalement dans une section convenable du flot. L'idée est alors de casser la symétrie du problème en introduisant un faible champ électrique transverse au champ magnétique (le cas ou il est parallèle ne conduisant pas à cette "brisure" de symétrie). On en déduit l'existence de chaînes de transition pour ce problème.

Le hamiltonien du problème, appelé *hamiltonien de Coulomb*, s'écrit (voir [MDU])

$$H_{B,F}(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{r} + \frac{B}{2}L_z + \frac{B^2}{8}(x^2+z^2) + Fx$$

où B est un champ magnétique suivant z, F un champ électrique suivant x, et L_z la composante en z du moment angulaire $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$, $L_z = xp_y - yp_x$.

Cas intégrable : $B = 0,\ F = 0$

Comme dans le problème du satellite, nous sommes ramenés à un problème de Kepler, complètement intégrable.

Hyperbolicité: $B \neq 0,\ F = 0$

Nous avons un hamiltonien de la forme

$$H_{B,0}(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{r} + \frac{B}{2}L_z + \frac{B^2}{8}(x^2+z^2)$$

Par passage en coodonnées cylindriques, on obtient le hamiltonien

$$H_{B,0} = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_z^2) - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{B}{2}p_\theta + \frac{B^2}{8}\rho^2$$

La variable θ est ignorable, et p_θ est donc une intégrale première du système. Fixons p_θ, la quantité constante $\frac{B}{2}p_\theta$ s'appelle *énergie de Zeeman* (voir [HRW]). Le hamiltonien à deux degrés de liberté ainsi obtenu peut s'étudier au moyen d'une surface de section en $z=0$. On obtient un espace des phases équivalent à celui du problème du J_2 (voir la figure III.3, p.235 de [HRW]). Une étude analytique détaillée de ce système a été effectuée par divers auteurs. L'article de [HRW] en donne un revue. Nous avons deux points fixes hyperboliques dont les variétés stable et instable se coupent transversalement (dans la section), donnant naissance au comportement "chaotique" du système (voir [HRW]).

Instabilité: $B \neq 0$, $F \neq 0$

L'intégrale première p_θ se brise et donne naissance à une chaîne de transition. La signification physique de cette chaîne ne semble pas évidente, et un travail doit donc être effectué dans cette voie. Cet exemple fera l'objet d'une étude ultérieure.

4.3. Sur l'abondance des systèmes instables en physique

L'existence d'orbites d'instabilité dans les systèmes hamiltoniens issus de problèmes physique ne doit pas surprendre. Nous pensons même que c'est un phénomène relativement général et ceci pour les raisons suivantes.

Lorsque nous modélisons l'évolution d'un système physique quelconque, on introduit, pour les besoins de la description, un certain nombre de paramètres. Les systèmes hamiltoniens ainsi dérivés possèdent, naturellement, une multi-paramètrisation.

Certains de ces paramètres ont un rôle particulier. On se demande notamment l'effet d'un petit changement de sa valeur sur la dynamique du système. Habituellement, on étudie des systèmes qui pour une valeur critique du paramètre ont une dynamique indépendante de celui ci (c'est le cas du problème restreint elliptique plan des trois corps, qui lorsque l'excentricité vaut $e=1$ correspond à un mouvement circulaire des deux corps principaux). L'étude de la dynamique s'effectue alors pour des valeurs du paramètre proches de la valeur critique (là où on s'attend à avoir un changement qualitatif important de la dynamique). On se ramène alors (dans les bons cas) à un problème fondamental de la dynamique tel que l'a écrit Poincaré. La multi-paramètrisation fait que l'on se ramène à des systèmes hamiltoniens de la classe de Poincaré.

Le fait que les systèmes hamiltoniens initiaux soient (le plus souvent) intégrables semble dû à la nature même du travail du physicien. On commence par décrire les phénomènes les plus réguliers, qui peuvent être assimilés à un système intégrable. On introduit alors une série de perturbations et de paramètres afin de prendre en compte les irrégularités du mouvement.

Bien qu'informelle, la discussion précédente indique le chemin qui conduit à l'existence d'instabilité dans les systèmes physiques.

Perspectives

Perspectives

Nous allons maintenant discuter, de manière informelle, les perspectives que nous offrent les résultats de cette thèse. Il convient de noter que le présent travail n'est pas sous forme définitive, et reste donc, en certains points, spéculatif. Nous avons néanmoins estimé que les idées étaient suffisamment précises pour être exposées.

Le point de vue du chapitre 3, partie 1, nous permet de décrire un nouveau mécanisme d'instabilité. On suppose que les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ à $(\mathcal{H}_4)$ sont vérifiées. Le but de ce paragraphe est de montrer que l'hypothèse $(\mathcal{H}_5)$ nécessaire à la construction d'une chaîne de transition, n'est pas indispensable à la mise en évidence d'orbites d'instabilité.

§1. Le problème des "trous"

Le problème de la construction d'Arnol'd est le suivant : deux tores consécutifs de la famille étant donnés, peut-on trouver des connexions hétéroclines, c'est à dire

$$W^s(T_{i+1}) \pitchfork W^u(T_i)$$

où $\pitchfork$ signifie que les deux variétés se coupent transversalement dans $\mathcal{H}$.

Ce problème est pratiquement insoluble dans le cas où $\mu = \epsilon^m$, $m \in \mathbf{N}^*$ qui est le cas intéressant.

Le mécanisme d'Arnol'd semble donc bien difficile à mettre en oeuvre dans un cadre général.

Essayons tout de même de voir jusqu'où le problème précédent est important. Il semble clair que l'hypothèse précédente n'est là qu'en vue de simplifier la construction. En fait, le problème général qu'évite cette idée d'Arnol'd est :

Problème des connecteurs : *Existe-t-il des orbites reliant deux voisinages arbitrairement petits de deux tores consécutifs* ?

Bien entendu, une fois résolu ce problème de connexion entre chaque tore de la famille, il reste à montrer qu'il existe une orbite du système partant d'un voisinage arbitrairement petit du premier tore à un voisinage arbitrairement petit du dernier. Nous référerons à ce problème comme *problème de recollement.*

L'objet des deux paragraphes suivants est de montrer que les *orbites de Birkhoff* résolvent le problème des connecteurs et que l'existence d'*orbites homoclines* aux tores résout celui du recollement.

§2. Les connecteurs

2.1. Rappels sur les régions d'instabilité

On note $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ le tore de dimension 1 et on définit sur $\mathbf{A} = \mathbf{T^1} \times \mathbf{R}$ muni de sa structure de variété orientée habituelle. On note $\tilde{\mathbf{A}}$ le revêtement universel de $\mathbf{A}$ et l'application $\pi : \tilde{\mathbf{A}} \to \mathbf{A}$, $(\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{\theta} + \mathbf{Z}, r)$.

Si X est une partie de $\mathbf{A}$ ou de $\tilde{\mathbf{A}}$, on écrira respectivement $Ad(X)$, $Int(X)$, $Fr(X)$ pour l'adhérence, l'intérieur et la frontière de X; et si Y est inclus dans X on écrira $X \setminus Y$ pour le complémentaire de Y dans X. D'autre part, pour toute partie X de $\mathbf{A}$, on pose $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$.

Si ϕ et ψ sont deux applications de $\mathbf{T^1}$ dans $\mathbf{R}$, on écrira $\phi \leq \psi$ (resp. $\phi < \psi$) si, pour tout θ appartenant à $\mathbf{T^1}$, on a : $\phi(\theta) \leq \psi(\theta)$ (resp. $\phi(\theta) < \psi(\theta)$).

On considère dans ce qui suit un difféomorphisme f de $\mathbf{A}$, de classe C^∞, préservant l' aire, au vosinage d'un point fixe elliptique. Le difféomorphisme aura au voisinage du point fixe un ensemble fermé formé de graphes invariants indexés et ordonnés par leur nombre de rotation.

Cet ensemble est non vide car il contient toutes les courbes données par le théorème de *Kolmogorov, Arnol'd, Moser*, c'est à dire un ensemble de mesure non nulle, ayant le point fixe comme point de densité, et formé de graphes invariants, où f est conjugué à une rotation de nombre de rotation diophantien, mais il contient beaucoup d'autre courbes obtenues comme limites de celles-ci (densité ?).

Par ailleurs J.C. Yoccoz (voir aussi Herman [He2]) montre qu'un graphe invariant générique n'est pas un graphe donné par le théorème K.A.M, et plus précisément a un nombre de rotation qui est un nombre de Liouville. On peut montrer également que l'ensemble des nombres de rotation des graphes invariants est génériquement (à préciser) formé uniquement des nombres irrationels et qu'il est donc totalement discontinu [He].

Ainsi, il existe des régions annulaires délimitées par deux graphes invariants et ne contenant aucun autre graphe invariant, que l'on appelle des *régions annulaires d'instabilité* (voir Birkhoff [Bi]).

régions d'instabilité

L'étude des régions d'instabilité a en partie était effectuée par Birkhoff [Bi]. Les résultats les plus récents dans ce domaine sont contenus dans l'article de revue de P. Le Calvez [LC2]. Les théorèmes qui nous interessent dans notre étude sont justement ceux qui justifient le nom de région d'instabilité.

On note C la région délimitée par deux graphes invariants C^- et C^+.

Proposition : *Si V^+ et V^- sont deux voisinages respectifs de C^- et C^+, il existe $x \in V^-$ et $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n(x) \in V^+$.*

Une application répétée de la proposition précédente permet de préciser ce résultat et d'obtenir une démonstration [LC1] d'un théorème de Mather [Mat1] dont la démonstration originale utilise des méthodes variationnelles.

Théorème : *i) Il existe $x \in C$ tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} d(f^n(x), C^-) = \lim_{n \to +\infty} d(f^n(x), C^+) = 0\,.$$

ii) Pour tout voisinage V de C^+, il existe $x \in V$ tel que

$$\lim_{n \to \pm\infty} d(f^n(x), C^-) = 0\,.$$

Nous convenons d'appeler *orbites de Birkhoff*, les orbites joignant deux voisinages arbitraires de C^- et C^+.

Remarque : Les orbites de Birkhoff traversent les *ensembles invariants d'Aubry-Mather* qui sont génériquement hyperboliques [LC3]. Il n'est pas clair de savoir ce que donne ces ensembles pour le système complet, sinon un ensemble invariant robuste, puisque stable sous faible perturbation.

2.2. Retour sur le problème des connecteurs

Chacune des courbes invariantes de l'anneau donne naissance à un tore invariant partiellement hyperbolique[40]. Etant donnés deux voisinages arbitrairement petit de deux tores consecutifs, le problème des connecteurs se résume à trouver une orbite du difféomorphisme de l'anneau reliant deux voisinages arbitraires de deux courbes invariantes consecutives. Les résultats précédents nous assurent l'existence de telles orbites. Nous avons donc :

Théorème des connecteurs : *Etant donnés deux voisinages arbitrairement petits V^+ et V^- de deux tores partiellement hyperboliques consécutifs T^+ et T^-, il existe toujours une orbite γ du système telle que $\gamma \cap V^\pm \neq \emptyset$.*

Nous pouvons résumer le résultat précédent par la figure :

Remarque : Le théorème des connecteurs n'est pas à proprement parler "perturbatif". L'aspect théorie des perturbations entre en jeux dans le problème de recollement.

[40] Il faut noter que ce point n'est pas établi de manière rigoureuse et pourrait très bien se révéler faux.

Le théorème précédent est valable même lorsque l'une des courbes se réduit à un point[41] qui correspond dans notre cas à la connexion d'un tore hyperbolique le long d'une résonance simple à une orbite périodique associée à la résonance double.

Un des problème que nous aurons à surmonter pour généraliser cette démarche au cas $n \geq 4$ degrés de liberté, sera de connecter les différentes orbites que nous aurons contruites le long des résonances simples. Cette connexion aura lieu au voisinage des résonances doubles et n'entre pas dans notre analyse. Nous donnerons une formulation précise du problème à résoudre au §. 4.

La possibilité de construire une orbite reliant le premier tore de la famille au dernier est liée à la possibilité de choisir arbitrairement le voisinage sur chacune des courbes invariantes C^+ et C^-.

§3. Les orbites sauteuses et le recollement

Soient T_i, $i = 1, \ldots N$ une famille de N tores associés aux courbes invariantes C_i pour le difféomorphisme de section. On note A_i l'anneau délimité par les courbes invariantes C_{i-1} et C_i. Le théorème des connecteurs nous assure, pour tout voisinage V_i du tore T_i (et donc de la courbe C_i), l'existence d'une orbite γ_i du système telle que

$$\gamma_i \cap V_i \cap A_i \neq \emptyset \quad \gamma_i \cap V_{i-1} \cap A_i \neq \emptyset \quad i = 1, \ldots, N$$

Nous allons dans un premier temps relier les orbites γ_i entre elles. Cela revient à trouver des orbites du système qui passent d'un voisinage de la courbe invariante C_i dans A_i à un voisinage de la courbe invariante C_i dans A_{i+1}. De manière imagée, on doit "sauter" la barrière associée à la courbe invariante C_i. Nous appelerons donc de telles orbites des *orbites sauteuses*.

Ces orbites sauteuses associées aux orbites de birkhoff nous fournissent un *squelette* pour construire les orbites d'instabilité. On dispose alors le long de ce chemin des *fenêtres* en suivant les idées d'Easton ([Ea1], [Ea2], [Ea3]). L'existence des orbites se traduira alors de manière algébrique par le biais du *critère d'alignement* des fenêtres.

3.1. Les orbites sauteuses

Nous conservons les notations du paragraphe précédent. L' hypothèse $(\mathcal{H}_4)$ nous assure l'existence d'au moins une orbite homocline à chaque tore de la famille. La transversalité nous sera utile pour démontrer l'existence des orbites sauteuses.

Nous avons alors le théorème :

Théorème : *Pour tout voisinage V_i de la courbe invariante C_i, on note $V_{i,i} = V_i \cap A_i$ et $V_{i,i+1} = V_i \cap A_{i+1}$. Il existe une orbite du système $s_{i,i+1}$ telle que*

$$s_{i,i+1} \cap V_{i,j} \neq \emptyset \quad j = i, i+1$$

[41]Il existe aussi un résultat analogue pour les régions infinies, c'est à dire, une région délimitée par une courbe invariante et ouverte sur l'infinie.

Idée de démonstration : Nous allons écrire une *méthode de Melnikov* sur les variétés stable et instable des points de l'ensemble invariant normalement hyperbolique, et non pas sur les variétés stable et instable des tores hyperboliques contenu dans cet ensemble.

On note o_i une orbite homocline à un tore T_i de la famille. Soit p_i le point homocline transverse de premier retour (c'est à dire que $W^s_\mu(T_i) \pitchfork W^u_\mu(T_i)$ dans $\mathcal{H}$ au point p_i), il appartient à une variété stable (resp. instable) d'un point du tore T_i noté q_i. On a donc $p_i \in W^s_\mu(q_i) \cap W^u_\mu(q_i)$.

(i) Cas homocline : Nous savons que le feuilletage en variété stable et instable des points de l'ensemble normalement hyperbolique est μ proche en topologie C^r $(r \geq 1)$ des variétés stable et instable non perturbées. Cela nous permet d'écrire une approximation de la fonction distance entre deux variétés invariantes au premier ordre en μ :

$$d(x, x', \mu) = d(x, x', 0) + \mu d_1(x, x') + O(\mu^2)$$

où x et x' sont deux points bases sur l'ensemble $\mathcal{N}_\mu$. Lorsque $x = x'$, on a $d(x, x, 0) = 0$ car les variétés stable et instable sont confondues. On peut obtenir une expression de d_1 par une *équation aux variations.* L'existence d'une orbite homocline au tore T_i, implique que cette équation a une solution pour $x = q_i$.

(ii) Cas hétérocline : Le feuilletage en point est de classe C^r par rapport au point de base [42]. Pour obtenir des connexions hétérocline entre deux variétés stable et instable de points qui ne sont pas sur le tore, il faut utiliser un théorème des fonctions implicites. C'est ici que la condition de *transversalité* doit entrer en jeux, mais sans doute sous une forme plus faible que celle que nous utilisons habituellement [43] $\square$

[42] Cette remarque, couplée à la précédente, jusitifie la relation $\phi = \alpha + O(\mu)$ utilisée par M. Rudnev et S. Wiggins [RW] pour le calcul du splitting à un ordre exponentiellement élevé.

[43] Il me semble que nous pouvons en fait utiliser les résultats déja connus pour démontrer ce théorème. Ce que nous avons c'est l'existence d'orbites hétéroclines entre les tores qui sont proches du tore homocline initialement choisi pour effectuer l'analyse. C'est un résultat d'existence de connexion hétérocline entre des variétés stable et instable de points de l'ensemble invariant normalement hyperbolique. Le problème qui nous préocupe d'habitude est celui de l'existence effective d'un tore dans le voisinage considéré, ce qui n'est pas le cas ici.

3.2. Les fenêtres

L'existence des orbites d'instabilité le long d'une *chaîne* de tores hyperboliques se démontrent habituellement à l'aide d'une propriété de dynamique locale des tores appelée *propriété d'obstruction.* Une autre voie, initiée par Easton ([Ea1], [Ea2], [Ea3]) consiste à disposer convenablement des *fenêtres* le long de la chaîne. Cette démarche a été clarifiée et généralisée par Marco [Ma].

Cette dernière méthode a l'avantage d'être formulée de manière abstraite. Notre but est de montrer comment cet outil s'applique dans notre cas. Comparativement à l'approche de Marco, cela revient à disposer les fenêtres de manière différente.

On dispose les fenêtres comme sur la figure suivante :

Disposition des fenêtres

Tout le problème consiste maintenant à choisir la forme des fenêtres et à décrire les applications de transition entre les fenêtres $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_{i+1}$, notées Ψ_i.

Ces applications seront obtenues comme la composée de l'application qui suit une orbite de connexion de Birkhoff, notée f_c et d'une application qui suit l'orbite sauteuse du tore T_{i+1} notée f_s. On supposera que chacune de ces applications est indépendante de $i = 1, \dots, N$. On a donc

$$\Psi_i = f_s \circ f_c$$

Nous avons alors deux étapes :

(i) Expression de f_s : C'est de loin la plus simple a obtenir, car ces orbites suivent une orbite homocline au tore.

(ii) Expression de f_c : Elle semble difficile à déterminer. Néanmoins, nous connaissons extrêmement bien la dynamique sur l'anneau et il est donc facile d'obtenir une approximation au premier ordre en μ de f_c.

§4. La conjecture d'Arnold

La construction des orbites d'instabilité précédente est liée au cas des hamiltoniens à 3 degrés de liberté. Nous montrons que la conjecture d'Arnold dans le cas des hamiltoniens à

3 degrés de liberté implique, moyennant un résultat sur le *passage* des résonances doubles, la conjecture en dimension supérieure.

4.1. Mise en forme

Nous reprenons le Hamiltonien d'Arnold à $n+1$ degrés de libertés, défini par

$$H(I,\phi,p,q) = \frac{1}{2}I^2 + \epsilon(\cos(q)-1) + \mu H_1(I,\phi,p,q)$$

avec $(I,\phi) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{T}^{n-1}$ et $(p,q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{T}^1$.

Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{N}_0$ est encore normalement hyperbolique et nous obtenons en section une perturbation d'un difféomorphisme symplectique complètement intégrable :

$$f_\mu(\bar{I},\bar{\phi}) = (\bar{I},\bar{\phi}+\omega(\bar{I})) + O(\mu)$$

où $\bar{I} = (I_2,\ldots,I_{n-1})$ et $\bar{\phi} = (\phi_2,\ldots,\phi_{n-1})$.

Remarque : Il n'existe pas un équivalent multidimensionel des orbites de Birkhoff.

On considére maintenant ce difféomorphisme comme une section de Poincaré d'un champ de vecteurs hamiltonien proche d'un système intégrable à n degrés de libertés. Ceci est toujours possible, même en analytique (voir [Do2], [KP]) par les théorèmes de *suspension.*

4.2. Idée de la récurrence

Dans le cas $n = 4$, nous obtenons f_μ comme suspension d'un hamiltonien proche d'une système intégrable à 3 degrés de libertés. L'idée est d'utiliser une *diffusion d'Arnold* conrôlée pour construire les orbites de connexion. Les cas $n > 4$ se traitent de la même manière.

La construction des orbites d'instabilité le long des résonances simples n'est pas suffisante pour mener à bien ce programme.

Supposons que nous ayons démontré la conjecture d'Arnold dans le cas de 3 degrés de libertés, alors le théorème des connecteurs est vrai pour les difféomorphismes symplectiques proches intégrables de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2$. Le résultat sur les orbites sauteuses étant indépendant de la dimension, on en déduit l'existence des orbites d'instabilité dans le cas de 4 degrès de liberté.

Par conséquent, en supposant la conjecture d'Arnold vérifiée dans le cas de n degrés de liberté, on démontre l'existence d'orbites d'instabilité le long des résonances simples dans le cas de $n+1$ degrés de liberté.

Cette simple remarque est nouvelle à ma connaissance.

Remarque : La construction précédente est a rapprocher des idées de Douady [Do] sur l'instabilité des points fixes elliptiques en classe C^∞. Néanmoins, notre démarche est différente. Nous n'avons pas éluder le problème des "trous" dans les familles de tores, inévitable dans le cas analytique.

4.3. La conjecture d'Arnold

Supposons maintenant que nous ayons montré l'existence d'orbites d'instabilité le long des résonances simple. Quel est le problème à résoudre en vue de démontrer la conjecture d'Arnold ?

Comme le souligne Arnold dans un article récent [Ar2] (et déja en 1966 [Ar4]), la conjecture est liée à un problème de passage des résonances doubles. On a donc :

Problème de passage : *Existe-t-il une orbite du système reliant des tores hyperboliques associés à deux résonances simples distinctes* ?

Ce problème a d'hors et déja été résolu par J.P. Marco [Ma2] dans le cadre des perturbations de classe C^∞. Cela lui permet de construire un exemple d' *instabilité asymptotique globale*.

Il nous semble que les idées que nous avons présentées, couplées à ces derniers résultats doivent permettre de faire un pas dans la résolution de la conjecture d'Arnold.

§.5. Généricité du mécanisme ?

Le mécanisme d'Arnold, tel qu'il est présenté par exemple dans l'article de revue de P. Lochak [Lo], n'est pas générique. En effet, comme le montre J.P. Marco ([Ma], §.8), l'instabilité est stable: " Soit X_ϵ un champ hamiltonien proche d'un système intégrable X_0, possèdant une chaîne de transition et donnant donc lieu à une instabilité en action. Il existe donc un ouvert $\mathcal{B}$ autour de X_ϵ dans l'espace des champs de vecteur $\mathcal{X}(M)$ de classe C^2 sur M muni de la topologie C^1, telle que tout champ X dans $\mathcal{B}$ possède une orbite d'instabilité. Les champs $X \in \mathcal{B}$ sont eventuellement dissipatifs, et il n'y a aucune raison pour que le mécanisme des chaînes de transition, basé sur les tores invariants et leurs connexions hétéroclines, subsiste dans ces perturbations."

Quand est-il de notre construction ?

Le premier point est la persistence de courbes invariantes pour une perturbation d'un difféomorphisme symplectique intégrable sous des perturbations quelconques. Ce problème a été étudié par un grand nombres d'auteurs, on en trouvera une revue dans le récent livre [BHS].

Le second point est l'existence des orbites de connexion. Il se trouve que ce résultat n'est en aucun cas lié au caractère symplectique de l'application de section, mais à une propriété beaucoup plus générale appelée *déviation de la verticale*. La généralisation des résultats sur les orbites de Birkhoff pour ces applications est étudié en détail par P. Le Calvez ([LC1], [LC2] et [LC3]).

Le troisième point est l'existence d'une orbite homocline à chaque tore hyperbolique de la famille. Cette hypothèse est encore générique dans le cadre des perturbations non hamiltoniennes.

Notre construction est donc *générique* dans le sens précisé ci-dessus.

Appendice A. Exemple d'échange entre surfaces de résonance

1 Introduction

Nous construisons un exemple de système hamiltonien à trois degrés de libertés de la forme

$$H(\phi, I) = \frac{1}{2} \parallel I \parallel^2 + \epsilon H_1(\phi, I, \mu)$$

défini sur $T^*(T^3)$, où H_1 est choisi de facon à créer deux familles de tores partiellement hyperboliques le long des surfaces de résonance $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$, et tel qu'il existe une orbite qui transite le long de la première famille, puis change de surface de résonance pour transiter le long de la seconde famille de tores.

Ce type de problème intervient naturellement lorsque lors de l'étude de l'instabilité globale [Ma] pour le cas C^ω et [Do] pour le cas C^∞).

La particularité de cet exemple est que le système médian (obtenue pour $\mu = 0$) est choisi intégrable (comme dans [Ar]).

U.Bessi [Be] obtient un résultat similaire au moyen de méthodes variationnelles. Notre travail peut être considéré comme son pendant constructif.

2 Modèle

Le hamiltonien modèle que nous allons considérer est directement inspiré de la construction d'Arnold [A1]. Soit $H_{\epsilon,\mu}$ le hamiltonien défini sur $T^*(T^3) = T^3 \times R^3$ (muni de sa structure symplectique usuelle) par

$$H_{\epsilon,\mu}(I, \phi) = \frac{1}{2} \parallel I \parallel^2 + \epsilon.(\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) - 2) + \epsilon\mu.H_1(\phi)$$

où le terme perturbatif est donné par $H_1 = \sin^2(\phi_1/2)\sin^2(\phi_2/2)\cos(\phi_3)$, et où ϵ et μ sont de petits paramètres. On supposera partout que l'énergie $h > 0$ est fixée.

Cas intégrable initial $\mathbf{H_{00}}$: Lorsque $\epsilon = 0$ le système est complétement intégrable. L'espace des phases est feuilleté en tores de dimension 3, et la sous variété d'energie $\mathcal{H} = H_{00}^{-1}(h)$ est le produit direct du tore T^3 et de la sphère S^2. La projection de $\mathcal{H}$ sur l'espace des actions est la sphère S^2 d'équation $I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = 2h$. Ce sont les deux surfaces résonnantes $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$ qui vont jouer un rôle particulier dans la suite.

$$\epsilon = \mu = 0$$

Creation de l'hyperbolicité: Pour $\mu = 0$, $\epsilon \neq 0$, le système est encore intégrable. C'est le produit non couplé de deux pendules simples par le système défini par $H(I_3, \phi_3) = (1/2)I_3^2$ sur $T^1 \times R$. La sous variété d'énergie $\mathcal{H} = H_{\epsilon,0}^{-1}(h)$ est difféomorphe au produit direct $S^2 \times T^3$, et sa projection sur l'espace des actions est la couche sphérique $2h \leq I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \leq 2(h + 4\epsilon)$.

La destruction des tores sur les surfaces résonnantes précédentes donne naissance à deux familles à un paramètre de tores invariants de dimension 2, partiellement hyperboliques, possèdant des variétés stable et instable de dimension 3.

Décrivons la famille de tores invariants partiellement hyperboliques obtenue sur la surface 1-résonnante $I_1 = 0$. Pour cela, il est commode d'introduire des variables action-angle J_2, θ_2 pour le second pendule. Ces variables existent en dehors des séparatrices, i.e. pour les mouvements de *libration* et de *circulation*. Les tores précédents sont alors le produit du tore T^2 (variables θ_2, ϕ_3) par la sous variété d'équation $I_1 = 0, \phi_1 = 0, \frac{1}{2}I_3^2 + H_p(J_2) = h$ dans $T^1 \times R^3$, où $H_p(J_2)$ représente le hamiltonien du pendule sous forme action-angle. Les variable J_2 et I_3 sont des intégrales premières. C'est donc bien une famille à un paramètre (variant dans la sous variété précédente) de tores invariants (variables θ_2, ϕ_3). Leurs variétés stables et instables s'obtiennent comme le produit de celles du point fixe du pendule par le tore T^2. Ce sont donc des cylindres (difféomorphe à $T^2 \times R$) de dimension 3.

A la surface 2-résonnante $I_1 = I_2 = 0$ se crée une orbite périodique hyperbolique. On l'obtient comme le produit du tore T^1 (variable ϕ_3) par le point $\frac{1}{2}I_3^2 = h$, $I_1 = I_2 = 0$ et $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Ses variétés stable et instable de dimension 3 (difféomorphe à $R^2 \times T^1$) s'obtiennent comme le produit de celles des deux points fixes de chaque pendule par le tore T^1.

$$\epsilon \neq 0,\ \mu = 0$$

Instabilité: Pour $\mu \neq 0$ les tores précédents subsistent car la perturbation a été choisie nulle sur les deux familles de tores. L'idée est alors que les variétés stables et instables de ces tores vont s'intersecter transversalement et nous permettre de construire ce qu'il est habituel de nommer une chaîne de transition. Notons $\mathcal{H} = H_{\epsilon,\mu}^{-1}(h)$ la sous variété d'énergie.

La méthode de *Poincaré-Melnikov* (voir [Wi]) permet de démontrer les résultats suivant:

Lemme a: *Les variétés stables et instables des tores appartenant aux familles P^i, $i = (1,2)$ s'intersectent transversalement dans $\mathcal{H}$.*

et

Lemme b: *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite périodique hyperbolique. Les variétés stable et instable de l'orbite périodique hyperbolique $\mathcal{O}$ s'intersectent transversalement dans $\mathcal{H}$.*

Les démonstrations de ces lemmes sont données en appendice.

3 Construction des chaînes de transition

Le lemme a permet de construire les deux chaînes de transition le long des surfaces de résonance $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$.

Lemme c: *Il existe une famille finie de tores T_j^i, $j = 1, \ldots, n_i$ de la famille $\mathcal{P}_i$ formant une chaîne de transition, i.e. $W^u(T_j^i)$ intersecte transversalement $W^s(T_{j+1}^i)$ dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration: Le lemme a nous assure que pour tout tore $T^i \in \mathcal{P}^i$, $i = (1,2)$, nous avons $W^s(T^i)$ qui intersecte transversalement $W^s(T^i)$ dans $\mathcal{H}$. Par continuité, il est alors possible d'extraire une famille finie $\widehat{P}^i$ de tores partiellement hyperboliques $\widehat{T}_j^i$, toujours contenus dans $\mathcal{H}$, tels que les sous variétés $W^u(\widehat{T}_j^i)$ et $W^s(\widehat{T}_{j+1}^i)$ s' intersectent transversalement suivant (au moins) une orbite hétérocline. $\square$

Les deux chaînes de transition étant maintenant construites, il nous reste à passer de l'une à l'autre. C'est precisément ce que nous permet de montrer le lemme b.

Lemme d: *Soit T_i des tores de la famille $i = (1, 2)$ contenus dans un petit voisinage de l'orbite périodique hyperbolique $\mathcal{O}$. Alors, nous avons $W^u(T_i) \pitchfork W^s(\mathcal{O})$ et $W^s(T_i) \pitchfork W^u(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration: Nous avons deux familles de variétés lagrangiennes $W^u(T_i^j)$ et $W^s(T_i^j)$ aussi proches que l'on veut de $W^u(\mathcal{O})$ et $W^s(\mathcal{O})$. Comme $W^u(\mathcal{O})$ intersecte transversalement $W^s(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{H}$ d'aprés le lemme b, nous en déduisons, par un argument de stabilité des intersection transverses par petites perturbations C^0, l'intersection transverse dans $\mathcal{H}$ de $W^u(T_i^j)$ avec $W^s(\mathcal{O})$ et de $W^s(T_i^j)$ avec $W^u(\mathcal{O})$ dans un voisinage convenable de l'orbite périodique, ce qui termine la démonstration du lemme. □

Le lemme d nous permet donc de construire une chaîne de transition suivant deux résonances distinctes. La jonction des deux chaînes de transition "simple" s'effectue à la résonance double.

Il n'est pas nécessaire de calculer des splittings de séparatrices entre deux tores appartenant à chacune des familles. En effet, l'intersection transverse des variétés stables et instables de l'orbite périodique contraint les variétés stables et instables des tores voisins à s'intersecter transversalement.

Lemme e: *Les tores $T_{i,j}$, $j \in N_i$ de la famille $i = (1, 2)$ dans un petit voisinage U de l'orbite périodique $\mathcal{O}$ sont tels que $W^s(T_{i,j}) \pitchfork W^u(T_{i',j'})$ dans $\mathcal{H}$, avec $(i, i') \in \{1, 2\}$ et $(j, j') \in \{N_i, N_{i'}\}$, notamment $W^u(T_{1,j}) \pitchfork W^s(T_{2,l})$ dans $\mathcal{H}$.*

Nous avons donc deux chaînes de transition entre surfaces résonnantes:

La première, déduite des lemmes c et d, suit une première chaîne de transition, passe par la résonance double, et repart suivant une seconde chaîne de transition. Elle sera appelée *chaîne de passage.*

La seconde, déduite des lemmes c et e, suit une première chaîne de transition, passe au voisinage de la résonance double, puis repart suivant une seconde chaîne de transition. Elle sera appelée *chaîne de virage.*

$\epsilon \neq 0$, $\mu << \epsilon$

4 Existence des orbites de transition

Nous utilisons maintenant le résultat de J.P.Marco [Ma] nous assurant l'existence d'orbites de transition le long d'une chaîne de tores standards. Les chaînes de virage et de passage donnent alors naissance à deux types d'orbites de transition entre surfaces résonnantes, donnés par les théorèmes suivant:

Théorème *(Orbites de virage)*: *Notons $p^{1,2}_{\epsilon\mu}$ la projection de $H^{-1}_{\epsilon\mu}(h)$ sur le plan (I_1, I_2). Soient I^0_1 et I^0_2 deux réels dans l'intervalle $]0, 2h[$ et $\mathcal{O}_1$ (resp. $\mathcal{O}_2$) un voisinage de I^0_1 (resp. I^0_2) dans $]0, 2h[$. Pour tout ϵ vérifiant $0 < \epsilon << 1$, il existe $\mu_0(\epsilon)$ tel que pour tout μ vérifiant $0 < \mu < \mu_0(\epsilon)$, il existe une orbite $o_{\epsilon\mu}$ du système défini par H, contenu dans le niveau $H^{-1}_{\epsilon\mu}(h)$ dont la projection par $p^{1,2}_{\epsilon\mu}$ intersecte les voisinages $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$.*

La chaîne de passage, contrairement à l'idée intuitive du problème, ne conduit pas au même énoncé. Ceci est dû au passage obligé par l'orbite périodique. La construction des orbites de transition repose sur la *propriété d'obstruction* (voir [Ma]). Celle ci demande une dynamique minimale sur le tore et un énoncé de type λ-lemme. Pour l'orbite périodique normallement hyperbolique, le λ-lemme ([PM]) est valable. La condition de minimalité n'est vérifiée que pour un ensemble dense de valeurs de l'énergie pour laquelle la fréquence $\omega = \sqrt{2h}$ est irrationnelle.

Théorème *(Orbites de passage)*: *Soit V un voisinage arbitrairement petit de $\mathcal{O}$. Pour un ensemble dense de valeurs de l'énergie h, il existe une orbite $o_{\epsilon\mu}$ du système défini par $H_{\epsilon\mu}$, contenue dans $H^{-1}_{\epsilon\mu}(h)$ dont la projection par $p^{1,2}_{\epsilon\mu}$ coupe les voisinages $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ et V.*

Problème (P. Lochak): Les orbites de virage et de passage sont-elles réellement distinctes ?

5 Démonstration du lemme a

Les calculs qui suivent sont techniques et donnent un apperçu des problèmes posés par l'application de la méthode de Melnikov dans un cas pratique.

Il nous faut écrire la perturbation sous forme action-angle, passage obligé pour appliquer la méthode de Melnikov [Wi]. On utilise pour cela les variables action-angle du pendule simple exprimées à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi. Nous obtenons donc

$$H_1 = \sin^2(\phi_1/2)\,\mathrm{cn}^2(D(k)\theta_2, k)\cos(\phi_3)$$

où $D(k) = \dfrac{K(k)}{\pi}$, avec $k^2 = \dfrac{2\epsilon}{2\epsilon + h_2}$, la constante h_2 représentant l'énergie du second pendule.

La fréquence du mouvement sur chacun des tores est donnée par

$$\omega_2 = \frac{\pi\sqrt{\epsilon}}{k.K(k)}$$

La première étape consiste à calculer divers dérivées partielles, à savoir $\partial H_1/\partial\theta_2$ et $\partial H_1/\partial\phi_3$.

Nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H_1}{\partial \theta_2} = -2D(k)\sin^2(\phi_1/2)\,\mathrm{sn}(D(k)\theta_2,k)\,\mathrm{dn}(D(k)\theta_2,k)\,\mathrm{cn}(D(k)\theta_2,k)\cos(\phi_3) \\ \dfrac{\partial H_1}{\partial \phi_3} = -\sin^2(\phi_1/2)\sin(\phi_3)\,\mathrm{cn}^2(D(k)\theta_2,k) \end{array}\right.$$

ceci, à partir de la formule (731.02) de [BF],

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{cn}(u)) = -\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{dn}(u)$$

Sur la trajectoire homocline non perturbée notée $\gamma(t)$, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \sin^2(\phi_1/2) = -\frac{1}{4\epsilon}I_1^2 = ch^{-2}(\sqrt{\epsilon}t) \\ \theta_2 = \theta_2^0 + \omega_2 t \\ \phi_3 = \phi_3^0 + \omega_3 t \end{array}\right.$$

avec $\omega_2 = \pi\sqrt{\epsilon}/k.K(k)$ et $\omega_3 = I_3^0$.

Notons $a(t,\theta_2^0,\phi_3^0) = \dfrac{\partial H_1}{\partial \theta_2}(\gamma(t))$ et $b(t,\theta_2^0,\phi_3^0) = \dfrac{\partial H_1}{\partial \phi_3}(\gamma(t))$. Les intégrales de Melnikov s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{l} M(\theta_2^0,\phi_3^0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} a(t)dt \\ m(\theta_2^0,\phi_3^0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} b(t)dt \end{array}\right.$$

avec

$$a(t) = -2D(k)\,\mathrm{ch}^{-2}(\sqrt{\epsilon}t)\,\mathrm{sn}(D(k)(\theta_2^0+\omega_2 t))\,\mathrm{dn}(D(k)(\theta_2^0+\omega_2 t))\,\mathrm{cn}(D(k)(\theta_2^0+\omega_2 t))\cos(\phi_3^0+\omega_3 t)$$

et

$$b(t) = -\,\mathrm{ch}^{-2}(\sqrt{\epsilon}t)\sin(\phi_3^0+\omega_3 t)\,\mathrm{cn}^2(D(k)(\theta_2^0+\omega_2 t))$$

Remarque : Les intégrales m et M n'ont aucun sens pour $k = 1$, car les variables action-angle sont dégénérées. Autrement dit, à la résonance double, nos calculs ne sont plus valables.

Pour avoir une intersection des variétés stable et instable d'un tore donné, il suffit de trouver un zéro de M et m. Une solution provient alors de la simple remarque suivante:

Pour $\theta_2^0 = \phi_3^0 = 0$, les fonctions a et b sont impaires.

En effet, nous savons (cf. formule (122.00) de [BF]) que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sn}(-u) = -\,\mathrm{sn}(u) \\ \mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}(u) \\ \mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}(u) \end{array}\right.$$

D'où, lorsque $\theta_2 = \phi_3 = 0$, on vérifie $a(-t) = -a(t)$ et $b(-t) = -b(t)$.

Afin de montrer que l'intersection est transverse, nous devons étudier le déterminant suivant:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial \theta_2^0}(0,0) & \frac{\partial m}{\partial \theta_2^0}(0,0) \\ \frac{\partial M}{\partial \phi_3^0}(0,0) & \frac{\partial m}{\partial \phi_3^0}(0,0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Notons

$$\frac{\partial M}{\partial \theta_2^0}(0,0) = \alpha \quad et \quad \frac{\partial m}{\partial \theta_2^0}(0,0) = \beta$$

et

$$\frac{\partial M}{\partial \phi_3^0}(0,0) = \gamma \quad et \quad \frac{\partial m}{\partial \phi_3^0}(0,0) = \delta$$

Nous avons alors

$$\mathcal{D} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

La condition de transversalité de l'intersection correspond à

$$\alpha\delta \neq \beta\gamma \qquad (T)$$

Introduisons les fonctions suivantes:

$$\begin{cases} f_1(u) = 2\,\mathrm{sn}(u)\,\mathrm{cn}(u)\,\mathrm{dn}(u) \\ f_2(u) = \mathrm{cn}^2(u) \end{cases}$$

où $u = K(k)\theta/\pi$.

Les fonction f_i, $i = 1, 2$ sont 4π périodiques. Nous pouvons donc les écrire sous forme de série de Fourier, à savoir

$$\sum_j s_j e^{\frac{iju}{2}}$$

où les coefficients sont donnés par

$$s_j = \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f_l(\theta\frac{K}{\pi})e^{-ij\theta/2}d\theta$$

soit, avec nos notations

$$s_j = \frac{1}{4K}\int_{-2K}^{2K} f_l(u)e^{-iju\pi/2K}du$$

où $u = \theta K/\pi$.

On note que f_1 est impaire et f_2 paire. Par conséquent leur développement en série de Fourier a la forme suivante

$$\begin{cases} f_1(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \sin(j\theta) \\ f_2(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cos(j\theta) \end{cases}$$

Le calcul de s_j est effectué par H.R.Dullin ([Du], appendice) au moyen de la méthode des résidus et renvoyons à son article pour les détails techniques. Nous pouvons de même effectuer le calcul de c_j.

En posant $\theta = \theta_0 + \omega t$, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\theta_0 + \omega t) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j(\sin(j\theta_0)\cos(j\omega t) + \cos(j\theta_0)\sin(j\omega t)) \\ f_2(\theta_0 + \omega t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\cos(j\theta_0)\cos(j\omega t) - \sin(j\theta_0)\sin(j\omega t)) \end{array} \right.$$

Seul les termes paires de $f_1(\theta_0+\omega t)\cos(\phi_0+\alpha t)$ et $f_2(\theta_0+\omega t)\sin(\phi_0+\alpha t)$ vont intervenir dans le calcul des intégrales de Melnikov. Ils sont donnés par

$$Paire(f_1 \cos) = \sum_j d_j(\cos j\omega t \cos \alpha t \sin j\theta_0 \cos \phi_0 - \sin j\omega t \sin \alpha t \cos j\theta_0 \sin \phi_0)$$

et

$$Paire(f_2 \sin) = \sum_j c_j(\cos j\omega t \cos \alpha t \cos j\theta_0 \sin \phi_0 - \sin j\omega t \sin \alpha t \sin j\theta_0 \cos \phi_0)$$

Nous savons d'autre part que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\mathrm{ch}^2(t)} dt = \pi\omega / \mathrm{sh}(\omega\pi/2) \tag{46}$$

Les intégrales de Melnikov m et M ont donc les expressions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\theta_0, \phi_0) = -\frac{D}{\sqrt{\epsilon}} \sum_j d_j(A_j \sin j\theta_0 \cos \phi_0 - B_j \cos j\theta_0 \sin \phi_0) \\ m(\theta_0, \phi_0) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sum_j c_j(A_j \cos j\theta_0 \sin \phi_0 - B_j \sin j\theta_0 \cos \phi_0) \end{array} \right.$$

où $A_j = \int \frac{\cos j\widehat{\omega} t \cos \widehat{\alpha} t}{\mathrm{ch}^2 t} dt$ et $B_j = \int \frac{\sin j\widehat{\omega} t \sin \widehat{\alpha} t}{\mathrm{ch}^2 t} dt$, avec $\widehat{\omega} = \omega/\sqrt{\epsilon}$ et $\widehat{\alpha} = \alpha/\sqrt{\epsilon}$.

On a alors, en utilisant l'équation 46

$$\begin{array}{c} A_j = \pi(a_j + b_j) \\ B_j = \pi(b_j - a_j) \end{array}$$

où $a_j = j\widehat{\omega} + \widehat{\alpha} / \mathrm{sh}(\pi(j\widehat{\omega} + \widehat{\alpha})/2)$ et $b_j = j\widehat{\omega} - \widehat{\alpha} / \mathrm{sh}(\pi(j\widehat{\omega} - \widehat{\alpha})/2)$.

On a alors

$$\begin{array}{c} M = -\pi D/\sqrt{\epsilon}(\sum_j d_j(a_j \sin j\theta_0 + \phi_0 + b_j \sin j\theta_0 - \phi_0)) \\ m = -\pi/\sqrt{\epsilon}(\sum_j c_j(a_j \sin j\theta_0 + \phi_0 - b_j \sin j\theta_0 - \phi_0)) \end{array}$$

Nous voyons que pour $\theta_0 = \phi_0 = 0$ les fonctions m et M s'annullent. On en déduit alors l'existence d'un point d'intersection entre les variétés stable et instable d'un tore partiellement hyperbolique de la chaîne. La condition de transversalité s'écrit alors

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial M}{\partial \theta_2^0}(0,0) & \dfrac{\partial m}{\partial \theta_2^0}(0,0) \\ \dfrac{\partial M}{\partial \theta_3^0}(0,0) & \dfrac{\partial m}{\partial \theta_3^0}(0,0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Or, nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial \theta_0}(0,0) = -\pi D/\sqrt{\epsilon}(\sum_j j d_j(a_j+b_j)) \\ \frac{\partial M}{\partial \phi_0}(0,0) = -\pi D/\sqrt{\epsilon}(\sum_j d_j(a_j-b_j)) \\ \frac{\partial m}{\partial \theta_0}(0,0) = -\pi/\sqrt{\epsilon}(\sum_j j c_j(a_j-b_j)) \\ \frac{\partial m}{\partial \phi_0}(0,0) = -\pi/\sqrt{\epsilon}(\sum_j c_j(a_j+b_j)) \end{cases}$$

Nous devons donc comparer les produits suivant: $(\sum_j j d_j(a_j+b_j))(\sum_j c_j(a_j+b_j))$ et $(\sum_j d_j(a_j-b_j))(\sum_j j c_j(a_j-b_j))$.

Nous savons (voir les travaux de H.Dullin [Du]) que

$$d_j = (\pi/K)^3 k^2 j^2 / \operatorname{sh} 2j\xi$$

avec $\xi = \pi K'/2K$, $K' = K(k')$ où $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Comme $\partial(\mathrm{cn}^2(D\theta))\partial\theta = 2D\,\mathrm{sn}\,\mathrm{cn}\,\mathrm{dn}$, on en déduit

$$c_j = Djd_j$$

par une simple identification des termes des deux séries de Fourier. En particulier, les deux produits précédent s'écrivent maintenant $(\sum_j j d_j(a_j+b_j))^2$ et $(\sum_j d_j(a_j-b_j))(\sum_j j^2 d_j(a_j-b_j))$.

La condition de transversalité s'écrit alors

$$4\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^3\left(j\omega/\sqrt{\epsilon}\sinh(\pi j\omega/2\sqrt{\epsilon})\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon}) - \alpha/\sqrt{\epsilon}\cosh(\pi j\omega/2\sqrt{\epsilon})\sinh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon})\right)}{\sinh(2\xi j)\left((\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon}))^2 - (\cosh(\pi j\omega/2\sqrt{\epsilon}))^2\right)}\right)^2$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^4\left(j\omega/\sqrt{\epsilon}\cosh(\pi j\omega/2\sqrt{\epsilon})\sinh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon}) - \alpha/\sqrt{\epsilon}\sinh(\pi j\omega/2\sqrt{\epsilon})\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon})\right)}{\sinh(2\xi j)\left(-(\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon}))^2 + (\cosh(\pi j\omega/2\sqrt{\epsilon}))^2\right)} \neq 0$$

où $\omega = \pi\sqrt{\epsilon}/k.K(k)$ et $\alpha = \sqrt{2(hk^2 - 2\epsilon(1-k^2))}/k$.

On obtient donc

$$4\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^3\left(j\beta\sinh(\pi j\beta/2)\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon})-\alpha/\sqrt{\epsilon}\cosh(\pi j\beta/2)\sinh(\pi\alpha/\sqrt{\epsilon})\right)}{\sinh(2\xi j)\left((\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon}))^2-(\cosh(\pi j\beta/2))^2\right)}\right)^2$$
$$+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^4\left(j\beta\cosh(\pi j\beta/2)\sinh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon})-\alpha/\sqrt{\epsilon}\sinh(\pi j\beta/2)\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon})\right)}{\sinh(2\xi j)\left(-(\cosh(\pi\alpha/2\sqrt{\epsilon}))^2+(\cosh(\pi j\beta/2))^2\right)}\neq 0 \qquad (47)$$

où $\beta=\pi/k.K(k)$.

Supposons maintenant que $k^2<1-\nu(\epsilon)$ avec $\nu(\epsilon)$ aussi petit que l'on veut. Nous allons maintenant restreindre notre attention aux valeurs de l'énergie telles que

$$h<2\epsilon\nu(\epsilon)/(1-\nu(\epsilon))$$

Nous pouvons alors montrer que $\beta>\alpha/\sqrt{\epsilon}$. On termine alors la démonstration en remarquant que la fonction $f(x)=x/\operatorname{th}(x)$ est strictement croissante pour $x>0$. Ceci implique que le numérateur du second terme de l'équation 47 est toujours positif. La somme des deux termes est alors strictement positive ce qui achéve la démonstration du lemme. □

6 Démonstration du lemme b

On utilise les formules dérivées par S.Wiggins [Wi]. Afin de simplifier l'exposé et la comprehension des calculs, nous allons utiliser les mêmes notation que [Wi]. Pour cela, nous écrivons notre hamiltonien modèle sous la forme

$$H(x,I,\theta)=H_1(x_1,x_2)+H_2(x_3,x_4)+\frac{1}{2}I^2+\mu H_1(x_3,x_4,\theta)$$

défini sur $(x_1,x_3,x_2,x_4)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{T}^2$ et $(i,\theta)\in\mathbf{R}\times\mathbf{T}^1$, où $H_i(x)=\frac{1}{2}x_i^2+\epsilon(\cos x_{i+1}-1)$ pour $i=1,3$, et $H_1(x_3,x_4,\theta)=\epsilon(\sin^2(x_2/2)\sin^2(x_4/2)\cos\theta)$.

Le système (SH) associé au hamiltonien $H_x=H_1+H_2$ possède un point fixe hyperbolique en $x=0$, dont les variétés stable et instable de dimension 2 coincident.

Le système associé à $H_{\mu=0}$ possède deux intégrales première en involution données par

$$K_{\ 1}=H_1+H_2K_2=H_1 \qquad (48)$$

On vérifie sans peine les hypothèses III3.1 et III3.2 p.381 de [Wi], c'est à dire:

III3.1. Les vecteurs D_xK_i, pour $i=1,2$ sont linéairement indépendants $\forall I\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}^4$ n'étant pas un point fixe du système (SH).

III3.2. $<JD_xK_i,K_j>=0$ $\forall i,j$, $I\in\mathbf{R}$, où $<.,.>$ est le produit scalaire usuel.

A l'orbite périodique $\mathcal{O}$, nous avons deux intégrales de Melnikov à calculer.

La première intégrale M_2 s'écrit de la manière suivante (cf. [Wi], p.413, formule (4.1.169) a et b).

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[<D_xK_2,JD_xH_1>-<D_IK_2,D_\theta H_1>\right](\gamma(I),\mu=0)dt \\ &+ <D_IK_2(\gamma(I),I),\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}D_\theta H_1(\gamma(I))dt> \end{aligned}$$

où $\gamma(I)$ représente la trajectoire homocline non perturbée.
La seconde intégrale notée M_3 s'écrit (cf. [Wi], p.413-414, formule (4.1.172)).

$$M_3 = -\int_{-\infty}^{\infty} D_\theta H_1(\gamma(I))dt$$

Nous allons maintenant introduire un paramètre u nous permettant de paramètriser la variété homocline non perturbée. Cette variété est donnée par les équations suivantes

$$\sin^2(x_2/2) = \mathrm{ch}^{-2}(\sqrt{\epsilon}t)\sin^2(x_4/2) = \mathrm{ch}^{-2}(\sqrt{\epsilon}(t+u))\theta = \theta_0 + \omega t$$

Calcul de M_2

On remarque tout d'abord que $D_I K_2 = 0$, ce qui nous permet de simplifier l'expression de l'intégrale M_2. Nous obtenons

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} < D_x K_2, JD_x H_1 > (\gamma(I))dt$$

Soit, en utilisant les expressions de K_2 et H_1, nous avons

$$M_2 = (1/2)\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \sin(2x_2)\sin^2(x_4/2)\cos(\theta))(\gamma(I))dt$$

Un simple calcul nous conduit alors à l'expression suivante pour M_2:

$$\begin{aligned} M_2(u,\theta_0) &= 32\epsilon^4(\cos\theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}t)\,\mathrm{sh}(\sqrt{\epsilon}t)\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}(t+u))}dt \\ &+ \sin\theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}t)\,\mathrm{sh}(\sqrt{\epsilon}t)\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}(t+u))}dt \end{aligned}$$

Calcul de M_3

Un simple calcul nous conduit à l'expression suivante pour M_3.

$$\begin{aligned} M_3(u,\theta_0) &= \sin\theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}t)\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}(t+u))}dt \\ &+ \cos\theta_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}t)\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{\epsilon}(t+u))}dt \end{aligned}$$

Intersection et transversalité

Les calculs précédents montrent que pour $u = \theta_0 = 0$ les intégrales M_2 et M_3 s'annulent. Nous savons donc qu'il y a intersection des variétés stable et instable de l'orbite périodique.
Nous allons maintenant montrer que cette intersection est transverse. Pour cela, nous allons vérifier les hypothèses du théorème 4.1.20, p.393 de [Wi]. Cela revient à montrer que le déterminant

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} -32\epsilon^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{\mathrm{ch}^4\sqrt{\epsilon}t\,\mathrm{sh}\sqrt{\epsilon}t}dt & -64\sqrt{\epsilon}\epsilon^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{\mathrm{ch}^5\sqrt{\epsilon}t}dt \\ -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{\mathrm{ch}^4\sqrt{\epsilon}t}dt & -2\sqrt{\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega t\,\mathrm{sh}\sqrt{\epsilon}t}{\mathrm{ch}^3\sqrt{\epsilon}t}dt \end{vmatrix}$$

Nous avons donc $\mathcal{D} \neq 0$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

Appendice B. La méthode de Poincaré-Melnikov

Nous exposons ici la méthode de Melnikov que nous avons utilisée dans l'appendice A. Elle repose sur l'existence d'un système de coordonnées canonique pour un système hamiltonien initialement hyperbolique. Cette idée remonte au premiers travaux de Gruendler [Gru] et Wiggins [Wi]. Nous signalons la méthode de calcul direct de Chierchia-Gallavotti [CG] et celle de Lazutkin [LaST] qui consiste à trouver un système de coordonnées symplectique dans lesquelles les variétées sont redressées.

1. Notations et définitions

On considère un hamiltonien du type $H(x,I)$, défini pour $x \in \mathbf{R}^{2n}$ et $I \in \mathbf{R}^n$ et vérifiant les hypothèses suivantes:

$\mathbf{h}_1$) **(Condition d'intégrabilité)** On suppose qu'il existe un ouvert $U \in \mathbf{R}^n$ tel que pour tout $I \in U$ le système

$$\dot{x} = JD_xH_0(x,I) \tag{SH}$$

soit complétement intégrable. Il existe donc n fonctions de (x,I), à valeurs réelles, notées $H_0 = K_1,\ K_2, \ldots, K_n$ qui satisfont les deux propriétés suivantes

i) (indépendances) les vecteurs $D_xK_1,\ D_xK_2, \ldots, D_xK_n$ sont linéairements indépendants pour tout $I \in U$, en tout point de $\mathbf{R}^{2n}$ qui n'est pas un point fixe de (SH).

ii) (involution) On a $< JD_xK_i, D_xK_j >= 0$, $\forall i,j$, $I \in U$, où $< .,. >$ est le produit scalaire usuel.

$\mathbf{h}_2$) **(Condition d'hyperbolicité)** Pour tout $I \in U$, le système (SH) possède un point fixe hyperbolique, qui varie continument avec I, et une variété homocline de dimension n qui connecte ce point fixe à lui même.

On suppose que les trajectoires le long de la variété homoclines sont représentées par une équation du type $x^I(t,\alpha)$, où $t \in \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}^{n-1}$.

La base de notre étude est la donnée d'une famille à m paramétres de tores partiellement hyperboliques. Ils sont définis pour $I = I_0$ fixé par

$$\tau(I_0) = \Big\{(x,I,\theta) \in \mathbf{R}^{2n} \times U \times \mathbf{T}^m \mid x = \gamma(I_0), I = I_0\Big\}$$

où $\gamma(I)$ est la solution de l'équation de $D_xH_0(\gamma(I),I) = 0$ avec $det(D_{x^2}H_0(\gamma(I),I)) \neq 0$ pour $I \in U$ avec U un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Ceux sont des tores de dimension m, possèdant des variétés stable t instable de dimension $n+m$, notés $W^s(\tau(I))$ et $W^u(\tau(I))$ respectivement, qui s'intersectent le long d'une variété homocline de dimension $n+m$ donnée par

$$\Gamma(I) = \Big\{(x^I(-t,\alpha), I, \theta) \in \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^m \mid (t,\alpha,\theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{T}^m\Big\}$$

Pour plus de détails sur la structure de l'espace des phases nous renvoyons à [Wi], p.381-384.

Tous les objets considérés ici sont analytiques, ce qui évite les discussions sur la classe de régularité à choisir pour que les constructions proposées aient un sens et nous permet de mettre en lumière les difficultées du problème.

On se donne un système hamiltonien de la forme

$$H(x, I, \theta, \epsilon) = H_0(x, I) + \epsilon H_1(x, I, \theta, \epsilon) \tag{49}$$

défini pour $x \in \mathbf{R}^{2n}$, $(I, \theta) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^m$ et $0 < \epsilon << 1$, où H_0 est un système initiallement hyperbolique.

Le problème est de savoir, à partir de la donnée du hamiltonien initiallement hyperbolique H_0 et de sa perturbation, si les variétés stables et instables des tores qui subsistent après perturbation, se coupent transversalement. Nous savons que c'est génériquement le cas, par la théorie des intersections lagrangiennes dûe à A.Weinstein [We] et V.I.Arnold [Ar5]. La vérification de la transversalité dans un cas pratique est délicate, et demande l'utilisation de ce qu'il est commun d'appeler la *méthode de Melnikov*, ou de *Poincaré-Melnikov*.

Nous n'allons pas aborder le problème de la persistence des tores partiellement hyperboliques. Essentiellement, on utilise un théorème KAM sur l'ensemble des tores hyperboliques et un résultat de S.Graff [Gr] pour assurer la conservation des variétés invariantes. Pour plus de détails, on se référera à [Wi], p.386-387.

2. Le fibré de Melnikov

Nous allons maintenant choisir un tore $\tau(I)$ de la famille à m paramètres précédente. Nous supposons de plus, que ce tore subsiste après perturbation. Il est alors possible de construire en chaque point p de la variété homocline Γ, un plan π_p de dimension $n+m$, tel que les sous variétés $W^s(\tau_\epsilon(I))$ et $W^u(\tau_\epsilon(I))$ l'intersectent suivant des points p_ϵ^s et p_ϵ^u. Nous avons donc construit un espace fibré de base Γ, et de fibre π_p en chaque point $p \in \Gamma$.

Il est d'autre part possible de définir une notion de *distance entre les variétés stables et instables*. Il suffit pour cela de considérer la métrique usuelle sur $\mathbf{R}^{m+n}$ est de calculer

$$d_\epsilon(W^s(\tau_\epsilon(I)), W^u(\tau_\epsilon(I))) = \mid p_\epsilon^s - p_\epsilon^u \mid$$

Nous établissons alors un *critère d'intersection* des variétés stable et instable, ainsi q'une *condition de transversalité* de l'intersection, portant sut le jet d'ordre 1 de d_ϵ.

L'utilisation de la notion de fibré pour présenter ce paragraphe m'a été suggérée par J.P.Marco.

2.1. Préliminaire: construction d'une famille de $m+n$ plan

Nous allons utiliser le fait que le système H_0 est un système complétement intégrable pour construire un système de coordonnées intrinsèques pour notre problème.

Le long de la variété homocline Γ, nous pouvons définir $n+m$ vecteurs indépendants dans $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$.

Lemme 26 *Les $n+m$ vecteurs*
i) $v_1 = (D_x H_0 = D_x K_1, 0), \ldots, v_n = (D_x K_n, 0)$ où 0 représente le vecteur à $2m$ composantes nulles,
ii) $i_1, \ldots i_n$ où i_k $(k = 1, \ldots n)$ est un vecteur unité, paralléle à l'axe de coordonnées I_k, sont linéairement indépendants en tout point p de $\Gamma \setminus S$, où S représente les points fixes du système (SH).

Démonstration : Ce lemme découle de l'hypothèse h_1, propriété ii). □

On est alors en mesure de définir un $n+m$ plan de la manière suivante :

Définition 4 *Soit p un point de Γ. Le $n+m$ plan π_p est le plan engendré par les $n+m$ vecteurs v_i $(i = 1, \ldots, n)$, i_k $(k = 1, \ldots m)$, donnés au point p.*

Cette famille de plan va nous permettre de visualiser d'une manière commode l'intersection des variétés $W^s\tau_\epsilon(I)$ et $W^u\tau_\epsilon(I)$. En effet, nous avons le lemme suivant:

Lemme: *Pour tout point p de $\Gamma(I)$, la sous variété $W^s\tau(I) = W^u\tau(I)$ intersecte transversalement le plan Π_p en p.*

Démonstration : Par construction même du plan Π_p, $W^s\tau(I)$ intersecte Π_p au point p. Il nous suffit donc de vérifier la condition de transversalité suivante

$$dim(W^s\tau(I)) + dim(\Pi_p) - dim(W^s\tau(I) \cap \Pi_p) = dim(M)$$

ce qui est immédiat. □

L'importance de ce lemme tient dans le fait qu'il est stable par petite perturbation, c'est à dire

Lemme 27 *Pour $\epsilon > 0$ assez petit, $I \in U$, et $p \in \Gamma(I)$, la sous variété $W^s\tau_\epsilon(I)$ (resp. $W^u\tau_\epsilon(I)$) intersecte transversalement le plan Π_p en un point p^s_ϵ (resp. p^u_ϵ).*

Démonstration : C'est un simple argument de stabilité des intersections transverses par petite perturbation. □

L'ensemble des résultat précédents peut se visualiser sous la forme d'un espace fibré muni de différentes applications de section. Cette approche de la méthode de Melnikov est destinée à en simplifier la compréhension par le biais d'objets classiques, mais ne prétend pas simplifier le problème.

On définit le fibré de *Melnikov* comme suit,

Définition: *Le fibré de base* $\Gamma(I)$ *et de fibre* Π_p *en tout point* $p \in \Gamma(I)$ *est appelé fibré de Melnikov, et sera noté* F_{mel}.

Le lemme (27) nous permet de définir deux sections de ce fibré.

Notations: Nous noterons S^s (resp. S^u) la section de F_{mel} qui à tout point $p \in \Gamma(I)$ associe p^s_ϵ (resp. p^u_ϵ).

Le fibré de Melnikov

2.2. Une notion de distance entre sous variétés stable et instable d'un tore

Le paragraphe précédent nous permet de définir une distance entre la variété stable $W^s\tau_\epsilon(I)$ et la variété instable $W^u\tau_\epsilon(I)$.

Définition 5 *L'application* $d_{I,\epsilon}$ *de* $\Gamma(I)$ *dans* F_{mel}, *définie par*

$$\begin{array}{rccc} d_{I,\epsilon}: & \Gamma(I) & \longmapsto & F_{mel} \\ & p & \longmapsto & p^s_\epsilon - p^u_\epsilon \end{array}$$

est une section de F_{mel} *appellée distance.*

On interpréte alors les points d'intersection de $W^s\tau_\epsilon(I)$ et de $W^u\tau_\epsilon(I)$, comme les zéros de $d_{I,\epsilon}$, i.e. les points d'intersection entre l'image de la section *distance* dans la fibre et l'image de la *section nulle* du fibré.

Il nous reste à trouver un moyen de déterminer ces points d'intersection de manière explicite. Cette dernière étape se fait via ce qu'il est classique d'appeler l'*intégrale de Melnikov.*

2.3. L'intégrale de Melnikov

Le paragraphe précédent nous a permis d'introduire une notion de distance entre les variétés stable et instable de manière précise. Il convient maintenant de donner une expression calculable de cette distance. Pour cela, nous commençons par décomposer d en ses $n+m$ composantes, notées d_i. Nous avons

$$d_i^I(p,\epsilon) = \begin{cases} \frac{<D_x K_i(p), x_\epsilon^u - x_\epsilon^s>}{\|D_x K_i(p)\|}, & i=1,\dots,n \\ (I_\epsilon^u)_{i-n} - (I_\epsilon^s)_{i-n}, & i=n+1,\dots,m+n \end{cases}$$

Bien entendu, si $d_i^I(p,\epsilon)=0$ pour $i=1,\dots,n+m$ alors nous avons une intersection des variétés stable et instable de $\tau_\epsilon(I)$. La *conservation de l'énergie* nous permet de réduire cette condition. En effet,

Lemme 28 (réduction) *On a $p_\epsilon^u = p_\epsilon^s$ si et seulement si $d_i^I(p,\epsilon)=0$ pour $i=2,\dots,n+m$.*

Nous allons maintenant effectuer un développement de Taylor de d au voisinage de $\epsilon=0$. On a

$$d_i^I(p,\epsilon) = d_i^I(p,0) + \epsilon.\frac{\partial d_i^I}{\partial \epsilon}(p,0) + O(\epsilon^2) \qquad i=1,\dots,n+m$$

Comme $d_i^I(p,0)=0$ par construction, nous avons

$$d_i^I(p,\epsilon) = \epsilon \frac{M_i^I(p)}{\| D_x K_i(p) \|} + O(\epsilon^2)$$

où

$$\begin{cases} M_i^I(p) = < D_x K_i(p), \frac{\partial x_\epsilon^u}{\partial \epsilon}\mid_{\epsilon=0} - \frac{\partial x_\epsilon^s}{\partial \epsilon}\mid_{\epsilon=0}> \text{ pour } i=1,\dots,n \\ M_i^I(p) = \frac{\partial I_\epsilon^u}{\partial \epsilon}\mid_{\epsilon=0} - \frac{\partial I_\epsilon^s}{\partial \epsilon}\mid_{\epsilon=0} \text{ pour } i=n+1,\dots,n+m \end{cases}$$

La fonction M_i^I est appelée *intégrale de Melnikov.* Elle s'interpréte donc simplement comme la distance entre $W^s\tau_\epsilon(I)$ et $W^u\tau_\epsilon(I)$, à l'ordre ϵ au point p.

On définit le *vecteur de Melnikov*, noté M^I, comme le vecteur de composantes

$$M^I = (M_2^I, \dots, M_{m+n}^I)$$

en tenant compte du lemme de réduction.

3. Un critère d'intersection et de transversalité.

A l'aide du vecteur de Melnikov précédemment introduit, nous pouvons énoncer un résultat concernant l'intersection des variétés stable et instable d'un tore $\tau_\epsilon(I)$.

Théorème 4 *Soit $(\theta,\alpha)=(\theta_0,\alpha_0)$ dans $\mathbf{T}^m \times \mathbf{R}^{n-1}$, un point tel que*

i) $M^{\bar I}(\theta_0,\alpha_0)=0$
ii) $DM^{\bar I}(\theta_0,\alpha_0)$ *est de rang* $m+n-1$

alors, $W^s(\tau_\epsilon(\bar I))$ et $W^u(\tau_\epsilon(\bar I))$ s'intersectent transversalement au voisinage de (θ_0,α_0) pour ϵ assez petit.

Démonstration : C'est une simple utilisation du théorème des fonctions implicites. Nous avons

$$d^{\bar{I}}(t_0,\theta,\alpha;\epsilon) = \epsilon.M^{\bar{I}}(\theta,\alpha) + O(\epsilon^2)$$

On pose

$$\widehat{d^{\bar{I}}} = M^{\bar{I}}(\theta,\alpha) + O(\epsilon)$$

Pour $\epsilon = 0$, et $(\Theta,\alpha) = (\Theta_0,\alpha_0)$, on a $\widehat{d^{\bar{I}}} = 0$. De plus, l'hypothèse ii) implique

$$det(\widehat{d^{\bar{I}}}) = det(M^{\bar{I}}) \neq 0$$

Le théorème des fonctions implicites nous permet alors d'écrire l'équivalence suivante

$$\widehat{d^{\bar{I}}}(p,\epsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \quad p = p(\epsilon)$$

avec $p_0 = p(0)$, tel que

$$\widehat{d^{\bar{I}}}(p(\epsilon),\epsilon) = 0 \quad \text{pour} \quad \epsilon \quad \text{proche de} \quad 0.$$

□

4. Expression explicite des intégrales de Melnikov dans le cas d'une résonance simple

Nous allons nous limiter au cas d'une résonance simple, les développements ultérieurs ne faisant intervenir que ce cas. Nous avons alors , en conservant les notations des paragraphes précédents, $n = 1$ et m quelconque. D'après le §3 le vecteur de Melnikov est défini par $M = (M_j^I)$, $j = 1,\dots m$, avec

$$M_j^I = \frac{\partial (I_\epsilon^u)_j}{\partial \epsilon} \mid_{\epsilon=0} - \frac{\partial (I_\epsilon^s)_j}{\partial \epsilon} \mid_{\epsilon=0}$$

L'hamiltonien (48) conduit au système d'équations différentielles ordinaires suivant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x} = JD_xH_0(x,I) + \epsilon JD_xH_1(x,I,\theta) \\ \dot{I} = -\epsilon D_\theta H_1(x,I,\theta) \\ \dot{\theta} = D_IH_0(x,I) + \epsilon D_IH_1(x,I,\theta) \end{array} \right.$$

où $x \in \mathbf{R}^2$, $(I,\theta) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^m$.

Fixons nous un I tel que le tore partiellement hyperbolique associé se conserve par petite perturbation.

Prenons comme conditions initiales les points d'intersections des variétés stable et instable avec le $1+m$ plan associé à I au point p défini par $\widehat{\theta}$ (voir lemme 27).

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_\epsilon^{s,u} \\ I(0) = I_\epsilon^{s,u} \\ \theta(0) = \theta_\epsilon^{s,u} \end{array} \right.$$

Afin de simplifier les notations, introduisons les variables suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} x^{s,u}(t) = \frac{\partial x_\epsilon(t)}{\partial \epsilon}\mid_{\epsilon=0} \\ I^{s,u}(t) = \frac{\partial I_\epsilon(t)}{\partial \epsilon}\mid_{\epsilon=0} \\ \theta^{s,u}(t) = \frac{\partial \theta_\epsilon(t)}{\partial \epsilon}\mid_{\epsilon=0} \end{array}\right.$$

On utilise alors le théorème suivant, classique en théorie des perturbations.

Théorème 5 *Considérons l'équation différentielle*

$$\dot{x} = f(x,t,\epsilon), \qquad (x,t,\epsilon) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times R$$

où $f : U \mapsto \mathbf{R}^m$, avec U un ouvert de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
Supposons $f(x,t,\epsilon)$ de classe C^r, $r \geq 1$ dans U et soit $\phi(t,t_0,x_0,\epsilon)$, $(x_0,t_0,\epsilon) \in U$, une solution de l'équation. Alors le vecteur à n composantes $D_\epsilon\phi$ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\dot{Z} = D_x f(\phi(t),t;\epsilon)Z + D_\epsilon f(\phi(t),t;\epsilon), \qquad Z(t_0) = 0$$

où Z est un vecteur à n composantes.

Les variables $(x^{s,u}, I^{s,u}, \theta^{s,u})$ sont donc solutions de l'équation différentielle:

$$\begin{pmatrix} \dot{x^{s,u}} \\ \dot{I^{s,u}} \\ \dot{\theta^{s,u}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} JD_{x^2}H_0(x,I) & D_I J D_x H_1(x,I,\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_x D_I H_0(x,I) & D_{I^2}H_1(x,I,\theta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{s,u} \\ I^{s,u} \\ \theta^{s,u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} JD_x H_1(x,I,\theta) \\ -D_\theta H_1(x,I,\theta) \\ D_I H_1(x,I,\theta) \end{pmatrix}$$

où les matrices sont évaluées sur l'orbite homocline non perturbée, donnée par

$$\left\{\begin{array}{c} x(t) = \gamma(t) \\ I(t) = I \\ \theta(t) = \widehat{\theta} + \int_0^t D_I H_0(\gamma(s),I)ds \end{array}\right.$$

En vue d'intégrer ces équations, il convient de déterminer les domaines de définitions des solutions $(x_\epsilon(t), I_\epsilon(t), \theta_\epsilon(t))$. Nous avons

Lemme 29 *Pour ϵ suffisamment petit, $(x^s_\epsilon(t), I^s_\epsilon(t), \theta^s_\epsilon(t))$ (resp. $(x^u_\epsilon(t), I^u_\epsilon(t), \theta^u_\epsilon(t))$) existe, et est défini sur l'intervalle $[0,\infty[$ (resp. $]-\infty,0]$) pour toute condition initiale $(x^s_\epsilon(0), I^s_\epsilon(0), \theta^s_\epsilon(0))$ (resp. $(x^u_\epsilon(0), I^u_\epsilon(0), \theta^u_\epsilon(0))$) contenue dans la variété stable (resp. instable) du tore invariant.*

A l'aide du résultat du lemme (29) nous obtenons les expressions suivantes.

$$\left|\begin{array}{l} I^s(0) - I^s(T_s) = \int_0^{T_s} D_\theta H_1(\gamma^I(t),0)dt \\ I^u(0) - I^u(T_u) = \int_0^{-T_u} D_\theta H_1(\gamma^I(t),0)dt \end{array}\right.$$

Nous en déduisons

$$M^I(\widehat{\theta}) = I^u(0) - I^s(0) = -\int_{-T_u}^{T^s} D_\theta H_1(\gamma^I(t),0)dt + I^s(T_s) - I^u(T_u)$$

La forme finale de l'intégrale de Melnikov découle du lemme suivant.

Lemme 30 $\lim_{j \to +\infty} \mid I^s(T_j^s) - I^u(T_j^u) \mid = 0$

On en déduit alors la forme désormais classique de l'intégrale de Melnikov.

Théorème 6 *Le vecteur de Melnikov* $M = (M_i)_{i=1,\dots,n}$ *est donné par*

$$M_i^I(\theta) = -\int_{\infty}^{\infty} D_{\theta_i} H_1(\gamma^I(t), 0) dt$$

Dans le cas d'une résonance quelconque, le procédé est le même, mais conduit à des calculs plus techniques. Nous renvoyons à [Wi] pour un calcul des composantes du vecteur de Melnikov dans un cas quelconque, ainsi qu'une version de la méthode de Poincaré-Melnikov à paramétres.

5. Exemple: Instabilité d'Arnold

On considére le hamiltonien à 3 degrés de libertés défini par

$$H_{\epsilon,\mu}(x, I, \theta) = \frac{1}{2}(x_1^2 + I_1^2 + I_2^2) + \epsilon(\cos(x_2) - 1) + \mu\epsilon(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)(\cos x_2 - 1)$$

avec $(x, I, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2$. Il correspond à l'exemple construit par Arnold [Ar] pour mettre en évidence un phénomène d'instabilité. Avec les notations du §.3 , nous avons $n = 1$, $m = 2$. Le hamiltonien non perturbé initiallement hyperbolique est $H_{\epsilon 0}$. C'est le produit non couplé d'un pendule simple par le système défini par $H_r = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2)$. Nous avons une famille à 1 paramétre de tores partiellement hyperboliques, relévement du point fixe du pendule à une sous variété d'énergie $H_{\epsilon 0}^{-1}(h)$. La variété homocline à un tore donné est définie par

$$\gamma(I^0) = \begin{pmatrix} x_1(t) & = & \pm 2\sqrt{\epsilon}\,\mathrm{ch}^{-1}\,\tau \\ x_2(t) & = & \pm\,\mathrm{arctg}(-\,\mathrm{sh}^{-1}\,\tau) \\ I_i(t) & = & I_i^0,\ i = 1, 2 \\ \theta_i(t) & = & \theta_i^0 + \omega_i(t - t_0),\ i = 1, 2 \end{pmatrix}$$

où $\tau = \sqrt{\epsilon}(t - t_0)$.

Pour $\mu \neq 0$, la famille de tores précédente est conservée. Nous allons maintenant montrer, via la méthode de Poincaré-Melnikov, que les variétés stable et instable des tores s'intersectent transversalement.

Les résultats du §.4 nous permettent de calculer les intégrales de Melnikov pour ce problème. Nous obtenons (par la méthode des résidus):

$$M_i^I(\theta_1^0, \theta_2^0) = -\frac{\sin\theta_i^0}{2}\,\mathrm{sh}^{-1}(\omega_i\pi/2\sqrt{\epsilon}) \qquad i = 1, 2$$

On note que $M_i^I(0,0) = 0$ et $det[D_{\theta_i^0} M^I(0,0)] = \mathrm{sh}^{-1}(\omega_1\pi/2\sqrt{\epsilon})^{-1}(\omega_2\pi/2\sqrt{\epsilon})/4 \neq 0$. Le théorème 8 nous permet alors d'affirmer que les variétés invariantes des tores s'intersectent transversalement. On en déduit l'existence d'une chaîne de transition pour ce problème.

Notons que le splitting est de l'ordre de

$$\frac{\mu}{2} e^{-c/\sqrt{\epsilon}}$$

où c est une constante, et ϵ est suffisamment petit.

Références

[ABS] V.S. Afraimovich, V. Bykov, L.P. Silnikov, On structurally unstable attracting limit sets of Lorenz attractor type, Trans. Mosc. Math. Soc. **2** (1983), 153-216

[Ar1] V.I.Arnold, Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, Dokl. Akad. Nauk. USSR, **156**, (1964), p.9-11

[Ar2] V.I.Arnold, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Russian. Math. Survey, **18**, $n°$ **6**, (1963), 85-193

[Ar3] V.I. Arnold, Mathematical problems in classical physics, in Trends and perspective in Applied Mathematics, Appl. Math. Sc. Series **100**, (1992), Springer Verlag

[Ar4] V.I. Arnold, Problems of stability and ergodic properties of classical dynamical systems, Proceedings of the Moscow 1966 ICM, Mir. Publ. (1968), 387-392

[Ar5] V.I. Arnold, Sur une propriété topologique des applications globalement canonique de la mécanique classique, CRAS **26**, (1965)

[Al] V.M. Alekseev, Quasirandom dynamical systems, Math. USSR. Sbornik. **5**, p.73-128, (1968)

[AV] V.I.Arnold et A.Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Monographie Internationales de Mathématiques Modernes, Gautier-Villars Ed., Paris, (1967)

[BGW] J. Bourgain, F. Golse, B. Wennberg, The ergodisation time for linear flows on tori: application to kinetic theory, preprint, (1996)

[Bi] J.Binney, Resonant excitation of motion perpendicular to galactic planes, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **196**, 455-467, (1981)

[Bir] G.D. Birkhoff, *Collected Math. Papers of G.D. Birkhoff*, Vol. II, (1935)

[BHS] H.W. Broer, G.B. Huitema, M.B. Sevryuk , Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order amidst chaos, University of Groningen, Department of Mathematics, W-9519, (1997)

[B] P. Bernard, Perturbation d'un hamiltonien partiellement hyperbolique, CRAS, 323, (1996), 189-194

[Be1] U. Bessi, An approach to Arnold's diffusion through the calculus of variations, Nonlinear analysis **26** (6), (1996), 1115-1135

[Be2] U. Bessi, Arnold's diffusion with two resonances, preprint, (1995)

[Be3] U. Bessi, Arnold's model with two and three rotators, preprint (1996)

[BF] P.F. Byrd, M.D. Friedman, *Hanbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, (1971), Springer-Verlag

[BT] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic dynamics*, Princeton University Press, (1987)

[Bo] J. Bost, Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens, Astériques (1986) 113-157

[Bo1] S.V. Bolotin, Motions doubly asymptotic to invariant tori in the theory of perturbed hamiltonian systems, P.M.M. U.S.S.R., Vol. 54, N°3, p. 412-417, (1990)

[Bo2] S.V. Bolotin, Homoclinic orbits to invariant tori of hamiltonian systems, Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol. **128**, (1995)

[BT] H.W. Broer, F. Tangerman, From a differentiable to a real analytic perturbation theory, applications to the Kupka-Smale theorems, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1986), **6**, 345-362

[C1] L. Chierchia, Arnold's instability for nearly integrable analytic hamiltonian systems, in "Local and variational methods in the study of hamiltonian systems" Ambrosetti-Dell'Antonio eds. Worls Scientific Pub. (1995)

[C2] L. Chierchia, Non degenerate Arnold diffusion, à parraitre dans Egodic Theory and Dynamical systems (1997)

[CG] L. Chierchia, G. Gallavotti, Drift and Diffusion in phase space, Ann. Inst. Henri Poincaré **60** (1), p. 1-144, (1994)

[CHLCSX] R. Cuschman, S. Hu, J. Llibre, C. Mc. Coord, D.G. Saari, Z. Xia, Directions of Hamiltonian Dynamics and Celestial mechanics, S.R. Kaplan Ed., Contemp. Math. **198**, (1996)

[Ch] B.V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Physics reports, **52**, 5, p.263-379, (1979), North-Holland Publ.

[Che] A. Chenciner, La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique: de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather, Seminaire Bourbaki **36**, 622, (1984)

[Cr] J. Cresson, A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property, à paraitre dans *Letters in mathematical physics*, (1997)

[Cr2] J. Cresson, Symbolic dynamics for homoclinic partially hyperbolic torus and "Arnold diffusion", soumis à *Journal of Nonlinear Science*, (1997)

[Cr3] J. Cresson, The transfer lemma and the transitivity problem, manuscrit, (1997)

[CM] J. Cresson, J.P. Marco, Instability times, en préparation, (1997)

[CLMS] J. Cresson, P. Lochak, J.P. Marco, D. Sauzin, On the splitting of the invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems, en préparation, (1997)

[De] A. Delshams-Valdès, Por qué la diffusion de Arnol'd aparece genericamente en los sistemas hamiltonianos con màs de dos grados de libertad, Tesa, Facultad de matematicas, Universidad de Barcelona, Espagne, (1984)

[DLeC] R. Douady, P. Le Calvez, Exemple de point fixe alliptique non topologiquement stable en dimension 4, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 296, (1983), 895-898

[Do] R. Douady, Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques, Annales Scientifiques ENS **21** (1988), 1-46

[Do1] R. Douady, Applications du théorème des tores invariants, thèse, Paris VII, (1982)

[Dov] S.A. Dovbysh, Transversal intersection of separatrices and non-existence of an analytical integral in multi-dimensional systems, Proc. of the Workshop in *Variational and Local methods in the study of Hamiltonian sytems*, Trieste, (1994)

[Du] S. Dumas, Ergodisation rates for linear flows on the torus, J. of Dynamics and Diff. Equ. **3** (1991), 593-610

[Du] H.R.Dullin, Melnikov's method applied to the double pendulum, Z.Phys. B **93**, (1994), p.521-528

[Ea] R.W. Easton, Homoclinic Phenomena in Hamiltonian Systems with Several Degrees of Freedom, Journ. Diff. Equ. **29**, 241-252, (1978)

[Ea2] R.W. Easton, Orbit structure near trajectories biasymptotic to invariant tori, in *Classical mechanics and dynamical systems*, R. Devaney, Z. Nitecki Ed. Marcel Dekher, (1981), p. 55-67

[Ea3] R.W. Easton, Isolating blocks and symbolic dynamics, Journal of Diff. Equ. **17**, 96-118, (1975)

[El]L.H. Eliasson, Biasymptotic solutions of perturbed integrable Hamiltonian systems, Bol. Soc. Bras. Math., Vol. 25, N.1, (1994)

[Fe] N. Fenichel Persistance and smoothness of invariant manifolds for flows, Ind. Univ. Math. J. **21**, 3 (1971), 193-225

[FURSM] D. Farrelly, T. Uzer, P.E. Raines, J.P. Skelton, J.A. Milligan, Electronic structure of Rydberg atoms in parallel electric and magnetic fields, Physical Review A, Vol. 45, **7**, p.4738-4751, (1992)

[Ga] G. Gallavotti, Twistless KAM tori, quasi flat homoclinic intersections, and other cancellations in the perturbation series of certain completely integrable Hamiltonian systems. A review, Rev. Math. Phys. **6**, (1994), 343-411

[Ga1] G. Gallavotti, Fast Arnold diffusion in isochronous systems, preprint, mp-arc 97 479, (1997)

[Ga2] G. Gallavotti, Hamilton-Jacobi's equation and Arnold's diffusion near invariant tori in a priori unstable isochronous systems, preprint, (1997)

[Ga3] G. Gallavotti, Twistless KAM tori, Communication in mathematical physics 164, 145-156, (1994)

[GGM] G. Gallavotti, G. Gentile, V. Mastropietro, Pendulum separatrix splitting, preprint, (1997)

[Ge] G. Gentile, A proof of existence of whiskered tori with quasi flat homoclinic intersections in a class of almost integrable Hamiltonian systems, Forum. Math. **7** (6), (1995), 709-753

[Gr] S.Graff, On the conservation of hyperbolic invariant tori for hamiltonian systems, J. Diff. Eq. **15**, 1-69, (1974)

[Gu] M.C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Interdisciplinary Applied Mathematics **1**, (Springer-Verlag), 1990

[Ha] G. Haller, Diffusion at intersecting resonances in Hamiltonian systems, preprint, (1995)

[Ha2] G. Haller, Universal homoclinic bifurcations and chaos near double resonances, preprint, (1995)

[He] M. Herman, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Astérisque, Soc. Math. France, vol. 103-104, (1983)

[He2] M. Herman, On the dynamics on Lagrangian tori invariant by symplectic diffeomorphisms, preprint, Ecole polytechnique, (1990)

[He3] M. Herman, Inégalités a priori pour des tores lagrangiens invariants pour des difféomorphismes symplectiques, Publ. Math. IHES, 70, (1989), 47-101

[He4] M. Herman, L'hypothèse ergodique et la stabilité en mesure, conférence à la S.M.F, (1996)

[Hi] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **33**, (1976)

[HM] P.J. Holmes, J.E. Marsden, Melnikov method and Arnold diffusion for perturbations of integrable hamiltonian systems, J. Math. Phys. **23** (4), p. 669-675, (1982)

[HPS] M.W. Hirsch, C.C. Pugch, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. **583**, Springer-Verlag, (1977)

[HRW] H. Hasegawa, M. Robnik, G. Wunner, Classical and Quantal chaos in the diamagnetic Kepler problem, Progress of theorical physics supplement **98**, (1989)

[HW] G. Haller, S. Wiggins, Whiskered tori and chaos in resonant Hamiltonian normal forms, à paraitre dans les proceedings de *Normal forms and Homoclinic Chaos*, The Field institute: Waterloo, Ontario, (1992)

[Il] Y.S. Il'yashenko, A steepness test for analytic functions, Uspekhi Math. Nauk **41**:1, 193-194, (1986)

[JKK] C.K.R.T. Jones, T.J. Kaper, N. Kopell, Tracking invariant manifolds up to exponentially small errors, preprint, (1993)

[KP] S. Kuksin, J. Poschel, On the inclusion of analytic symplectic maps in analytic Hamiltonian flows and its applications, in *Seminar on Dynamical systems*, St. Petersburg, 1991, S. Kuksin, J. Poschel Eds, PNDLE **12**, Birkhauser Publ. (1994), 96-116

[LaST] V. Lazutkin, I. Schachmannski, M. Tabanov, Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings, Physica D **40** (2), (1989), 235-248

[La] J. Laskar, Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion, Physica D **67**, 257-281, 1993

[LC1] P. Le Calvez, Propriétés dynamiques des régions d'instabilité, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., **20**, (1987), 443-464

[LC2] P. Le Calvez, Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore, Astérisque **204**, (1991)

[LC3] P. Le Calvez, Les ensembles d'Aubry-Mather d'un difféomorphisme conservatif de l'anneau déviant la verticale sont en général hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris. **306**, (1988), 51-54

[Lo] P. Lochak, Arnold diffusion; a compendium of remarks and questions, *Proceedings of the N.A.T.O.'s Advanced Study Institute, 3-D Hamiltonian Systems*, S'agaro, C. Simo (Ed.), (1996), Plenum Press

[Lo2] P. Lochak, Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, Russian Math. Survey **47**, (1992), 57-133

[Lo3] P. Lochak, Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency, Nonlinearity 6, (1993), 885-904

[Lo4] P. Lochak, Effective speed of Arnold diffusion and small denominators, Physics letters A 143, (1990), 39-42

[LP1] Y.Papaphilippou et J.Laskar, Frequency map analysis and global dynamics in a two degrees of freedom galactic potential, Astronomy and Astrophysics, **307**, p. 427-449, (1996)

[LP2] J. Laskar, Y. Papaphilippou, Global dynamics and diffusion in a galactic system with three degrees of freedom, preprint (1996)

[LSX] X. Liao, D.G. Saari, Z. Xia, Resonance transition and instabilities; a numerical study of the restricted three-body problem, Contemporary Mathematics **198**, *Hamiltonian dynamics and Celestial mechanics*, D.G. Saari and Z. Xia Ed., p.219-228, (1996)

[LW] R. de la Llave, C.E. Wayne, Whiskered and low dimensional tori in nearly integrable Hamiltonian systems, Univ. of Texas, Austin preprint

[Ma] J.P.Marco, transition le long des chaines de tores invariants pour les systèmes hamiltonien analytiques, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, Vol. **64**, $n°2$, p. 205-252, (1996)

[Ma2] J.P. Marco, Global asymptotic instability for C^∞ perturbations of integrable Hamiltonian systems, en préparation

[Mag] P.Magnenat, Periodic orbits in triaxial galactic models, Astron. Astrophys. **108**, 89-94, (1982)

[Mat1] J. Mather, Minimal action measures for positive definite Lagrangian systems, Proc. IXth Int. Cong. Math. Phys.

[Mat2] J. Mather, Variational construction of connecting orbits, Journal AMS **4** (1991), 207-263

[McGE] R.W. Easton, R. Mc Gehee, Homoclinic phenomena for orbits doubly asymptotic to an invariant three-sphere, Ind. Univ. Math. Journal, Vol. **28**, 2, 211-240, (1979)

[MDU] J.V. Milczewski, G.H.F. Diercksen, T. Uzer, The Arnol'd Web in Atomic Physics, N.A.T.O. Adv. Stud. Inst. "Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom", S'Agraro, (1996)

[Me] D. Merritt, Dynamics of Elliptical Galaxies, Sciences, Vol. 259, p. 1867-1871, 1993

[MG] R.Mc-Gehee, A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to Celestial mechanics, J. Diff. Eq. **14**, 70-88, (1973)

[Mo] J.Moser. *Stable and random motions in dynamical systems.* Ann. Math. Stud. **77**, Princeton University Press, (1973)

[Mo2] J. Moser, The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point, Comm. on pure and applied Math., Vol. IX, 673-692, (1956)

[Moe] R. Moechel, Transition tori in the five body problems, Journ. Diff. Equ. **129** (1996), 290-314

[Ne] N.N. Nekhoroshev, An exponential estimate for the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, Russian Math. Surveys **32** (1977), 1-65

[Ni] L. Niederman, Dynamic around a chain of simple resonant tori in nearly integrable Hamiltonian systems, prépublication 97-19 de l'Université Paris-Sud, Mathématiques, Orsay, (1997)

[NP] S. Newhouse, J. Palis, Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems. In *Dynamical systems*, M.M. Peixoto (ed.), Academic Press: New York and London, (1973)

[P] J. Poschel, Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems, Math. Z. **213** (1993), 187-216

[Pa] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems, Topology, **8**, (1969), p. 385-405

[PdM] J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. an introduction*, Springer-Verlag, (1982)

[Pe] P. Perfetti, Fixed point theorems in the Arnol'd model about instability of the action-variables in phase space, preprint, (1997)

[Po] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol. 1 à 3, Paris, Gauthier-Villars, 1892, 1893,1899

[PS] C. Pugh et M. Shub, Linearization of normally hyperbolic diffeomorphisms and flows, Invent. Math. **10**, 187-198, (1970)

[PT] J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge Univ. Press, (1993)

[Ri] D.O. Richstone, Scale free models of galaxies II. A complete survey of orbits, Astron. Astroph. J. **252**, p. 496-507, (1982)

[Ro] C. Robinson, Homoclinic orbits and oscillation for the planar three body problem, Journ. Diff. Equ. **52**, 356-377, (1984)

[Ro2] C. Robinson, *Dynamical systems, stability, symbolic dynamics and chaos*, C.R.C. Press, (1994)

[Ru] H. Russmann, On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of the first order with constant coefficients on the torus, Lect. Notes in Physics **38**, Berlin, Springer-Verlag, p. 598-624, (1975)

[RW] M. Rudnev, S. Wiggins, KAM theory near multiplicity one resonant surfaces in perturbation of a-priori stable Hamiltonian systems, to appear in *Journal of Nonlinear Science*.

[RW2] M. Rudnev, S. Wiggins, Existence of exponentially small separatrix splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable hamiltonian systems, preprint

[Se] E. Séré, Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems, Math. Z. **209**, 27-42

[Se2] E. Séré, Looking for the Bernouilli shift, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire **10**, (1993), 561-590

[S] L.P. Shil'nikov, Structure of the neighborhood of a homoclinic tube of an invariant torus, Soviet. Math. Dokl. **9** (3), (1968), 624-628

[Sc] M.Schwarzschild, ?, Astrophys. J, **232**, 236, (1979)

[Sh] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque **56**, (1978)

[Sl] D.L. Slotnik, Asymptotic behaviour of solutions of canonical systems near a closed, unstable orbit, Contributions to the theory of Nonlinear Oscillations, Vol. IV, Ann. of Math. Studies, **41**, Princeton Univ. Press, 85-110, (1958)

[Si] C. Simó, Measuring the lack of integrability of the J_2 problem for earth's satellites, dans *Predictability, Stability and Chaos in N-Body dynamical systems*, Ed. A.E. Roy, Plenum Press, New-York, 305-309, (1991)

[Si2] C. Simo, Estabilitat de sistemes hamiltonians, Memorias de la Real Academia de Ciencas y artes de Barcelona, **48**, (1989), 303-348

[Ta] F. Takens, A non-stabilizable jet of a singularity of a vector field; the analytic case. In: *Algebraic and differential Topology-Global Differential Geometry* (ed. G.M. Rassias), Teubner Verlag, (1984)

[TK] V.V. Kozlov, D.V. Treshchev, On the integrability of hamiltonian systems with a toral position space, Math. USSR Sb. **63**, (1989)

[Tr] D.V. Treshchev, The mechanism of destruction of resonance tori of hamiltonian systems, Math. USSR Sbornik, **68**, (1991), p. 181-203

[Tr2] D.V. Treshchev, Hyperbolic tori and asymptotic surfaces in Hamiltonian systems, Russian Journal of Mathematical Physics Vol. **2**, 1, (1994)

[UFMRS] T. Uzer, D. Farrelly, J.A. Milligan, P.E. Raines, J.P. Skelton, Celestial Mechanics on a microscopic scale, Science, **253**, 42-48, (1991)

[We] A. Weinstein, Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems, Ann. of Math. **98**, (1973)

[Wi] S.Wiggins, *Global bifurcation and Chaos*, Appl. Math Sc. **73**, (1988), Springer-Verlag

[Wi2] S. Wiggins, *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences **105**, Springer-Verlag, (1994)

[Xi] Z. Xia, Melnikov method and transversal homoclinic orbits in the restricted three-body problem, Jour. Diff. Equ. **96** (1992), 170-184

[Xi1] Z.Xia, Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol.**5**, **2**, (1993)

[Xi2] Z. Xia, *Arnold diffusion and oscillatory solutions in planar three-body problem*, J. Diff. Equ., **110**, 289-321, 1994

[Y] J-C. Yoccoz, Introduction to hyperbolic dynamics, D. Branner, P. Hjorth eds., Real and complex dynamical systems, 265-291, (1995)

[Y1] J-C. Yoccoz, Travaux de Herman sur les tores invariants, Seminaire Bourbaki, n.754, (1992)

[Y2] J-C. Yoccoz, Quelques exemples de dynamique faiblement hyperbolique, Cours au Collège de France, (1997)

[Ze] E. Zhender, Generalized implicit function theorem with application to some small divisor problems II, Commun. in Pure and Applied Math. **29**, p.49-113, (1976)