

École Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Île-de-France

DEA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES GRAVITATIONNELS

Stage de DEA *soutenu le 2 juillet 2003*

Guillaume MORIN

PROBLÈMES DE PETITS
DIVISEURS

JURY

Alain ALBOUY

IMCCE

Jacky CRESSON

directeur de stage, Université de Franche-Comté

Ana GÓMEZ

responsable du DEA, Observatoire de Paris

Jean-Pierre MARCO

Université Paris VI

Bruno SICARDY

Université Paris VI

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	v
1. Forme normale	1
1.1. Notations et premières définitions	1
1.1.1. Décomposition homogène d'un champ de vecteurs	1
1.1.2. Un exemple	3
1.1.3. Forme prénormale continue	4
1.2. Équation de conjugaison	4
2. L'algèbre des moules	7
2.1. Calcul moulien	7
2.1.1. Le langage des moules	7
2.1.2. Quelques règles de calcul	9
2.1.3. Un exemple	10
2.1.4. Algèbre à composition des moules	11
2.2. Équation de conjugaison moulienne	12
2.2.1. L'équation générale	12
2.2.2. Équation de linéarisation	13
2.3. Résolution de l'équation de linéarisation	16
3. Les théorèmes de POINCARÉ	17
3.1. En l'absence de termes résonnants	17
3.1.1. Le théorème de POINCARÉ	17
3.1.2. Un exemple	18

3.1.3. À propos des coefficients	19
3.2. En présence de résonances	19
3.2.1. La forme normale de POINCARÉ-DULAC	19
3.2.2. Résolution de l'équation moulienne	21
4. Problèmes de convergence	27
4.1. Convergence dans les séries de POINCARÉ	28
4.1.1. En l'absence de petits diviseurs	28
4.1.2. En présence de petits diviseurs	31
4.2. L'arborification	32
4.2.1. Exemples	32
4.2.2. Définition formelle de l'arborification	35
4.2.3. Le théorème de BRJUNO	39
5. Systèmes Hamiltoniens	43
5.1. Systèmes Hamiltoniens isochrones	43
5.1.1. Opérateurs homogènes	43
5.1.2. Linéarisation	45
5.1.3. Convergence	46
5.2. La forme normale de BIRKHOFF	46
Conclusion	49
Bibliographie	51

INTRODUCTION

QUAND on place dans la conversation qu'on « fait un DEA d'astronomie », cela suscite immédiatement des réactions enthousiastes et les mots « merveilleux », « passionnant », pour ne citer que ceux-là, font leur apparition. Si l'on est prié ensuite de donner des précisions et que l'on prononce le terme de *moule*, ce grain d'ironie qui change l'admiration en goguenardise modifie instantanément la physionomie des visages qui vous entourent : chacun se met alors –et je serais le dernier à m'en priver– à chercher intérieurement le calembour permettant de « rentabiliser » au mieux ce mot.

On constate à ce moment, et de manière frappante, que l'inconscient collectif associe instantanément au terme de *moule* le genre *féminin comestible*. C'est pourquoi je souhaite préciser d'entrée, et avant même de les définir, que tous les moules que nous utilisons ici sont exclusivement *masculins* et, au premier abord, relativement indigestes. Cependant, on s'apercevra au cours de ce mémoire qu'ils peuvent s'introduire assez naturellement et s'adaptent parfaitement à la théorie des formes normales. Ils ont été définis par Jean ÉCALLE dans les années 1970, qui a écrit de nombreux articles sur le sujet, mais n'ont pas encore reçu l'accueil qu'ils méritaient, peut-être à cause d'un manque de transparence dans les écrits d'ÉCALLE ; c'est d'ailleurs pour cela que certaines preuves de ce mémoire sont incomplètes, et bien que les résultats soient affirmés par ÉCALLE, je n'ai pas réussi à les redémontrer, ni à les infirmer.

Ce mémoire de DEA présente donc des résultats classiques de la théorie des formes normales dans le formalisme moulien ; mon travail a été essentiellement de comprendre ce formalisme et la méthode d'*arborification*, qui s'y rattache, puis de mettre en relief leur intérêt à travers quelques exemples ; par ailleurs, je n'ai pas limité ni abrégé les calculs pour leur donner justement un maximum de transparence et de poids, car les moules sont avant tout un puissant outil de calcul. Les travaux de Jacky CRESSON sur le calcul moulien m'ont beaucoup aidé, ainsi naturellement que les nombreuses discussions que nous avons eues. La présentation des moules en tant que coefficients d'une série formelle non commutative se trouve d'ailleurs dans [4] ainsi que les théorèmes formels de POINCARÉ (et bien d'autres choses encore...).

Ainsi s'il n'y a dans ces pages aucun résultat nouveau en substance, on trouvera par contre –je l'espère– une présentation claire et naturelle de ce qu'est un moule ainsi que son utilité ; par ailleurs le calcul moulien fait apparaître naturellement la notion de *petit diviseur* (voir l'équation de linéarisation) et les problèmes de convergence qui s'y rapportent, que la méthode d'arborification permet d'analyser et de traiter, dans une certaine mesure, en tout cas dans le cas de petits diviseurs diophantiens.

Le plan du mémoire est le suivant : au chapitre 1 on pose le problème de la recherche d'une forme normale, puis on introduit les moules au chapitre 2, ce qui nous permet de formuler le problème de départ dans le formalisme moulien. Le chapitre 3 en donne des applications qui sont des résultats classiques : le théorème de linéarisation formelle de POINCARÉ ainsi que l'obtention de la forme normale de POINCARÉ-DULAC, mais sous forme moulienne. L'étude de transformations non plus formelles mais analytiques est faite au chapitre 4, où le formalisme moulien permet l'introduction de la méthode d'arborification. Enfin le chapitre 5 présente, dans l'esprit des chapitres 3 et 4, le formalisme moulien appliqué aux équations hamiltoniennes, et notamment aux séries de Fourier.

CHAPITRE 1

FORME NORMALE

NOUS allons commencer par exposer le problème et fixer quelques notations qui vaudront pour toute la suite du texte.

Soit ν un entier naturel au moins égal à 1. Dans tout ce texte on considère un champ de vecteurs X sur \mathbb{C}^ν dont l'origine est un point fixe ou singulier, c'est-à-dire tel que $X(0) = 0$. On cherche à « simplifier » l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$, c'est-à-dire à la transformer, par un changement de variable adéquat, en une équation plus simple, qu'on sache éventuellement résoudre ; dans tous les cas on cherche ainsi à obtenir une classification des champs de vecteurs : c'est la recherche d'une *forme normale*. L'idéal est ainsi de se ramener à la partie linéaire du champ X , mais ce n'est pas toujours le cas comme nous le verrons par la suite.

1.1. Notations et premières définitions

On considère un champ de vecteurs sur \mathbb{C}^ν , de la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \partial_{x_i},$$

où on note ∂_{x_i} la dérivée partielle par rapport à x_i et où $X_i : \mathbb{C}^\nu \mapsto \mathbb{C}$ est, suivant les cas, une série formelle en les x_1, \dots, x_ν , ce qu'on notera $X_i \in \mathbb{C}[[x]]$, ou analytique, ce qu'on notera $X_i \in \mathbb{C}\{x\}$.

1.1.1. Décomposition homogène d'un champ de vecteurs. — Pour $n \in \mathbb{Z}^\nu$ on notera x^n le produit $x_1^{n_1} \cdots x_\nu^{n_\nu}$. Un *opérateur différentiel homogène de degré* $n = (n_1, \dots, n_\nu)$ vérifie : pour $m \in \mathbb{N}^\nu$, il existe un $c_{n,m}$ complexe tel que :

$$B_n(x^m) = c_{n,m} x^{n+m}. \tag{1.1}$$

On décompose alors le champ X sous la forme de sa partie linéaire et d'une somme d'opérateurs différentiels homogènes. Écrivons pour cela

$$X_i(x) = \sum_{w \in \mathbb{N}^\nu} b_{i,w} x^w,$$

où les $b_{i,w}$ sont des complexes. Alors

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{w \in \mathbb{N}^\nu} b_{i,w} x^w \partial_{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{w \in \mathbb{N}^\nu} b_{i,w} x^{\hat{w}_i} x_i \partial_{x_i}, \end{aligned}$$

où $\hat{w}_i = (w_1, \dots, w_i - 1, \dots, w_\nu)$ est également le degré de l'opérateur $b_{i,w} x^{\hat{w}_i} x_i \partial_{x_i}$. On remarque ici que ce degré est un ν -uplet d'entiers positifs sauf un au plus qui vaut -1 . Ainsi,

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\substack{w \in \mathbb{N}^\nu \\ \hat{w}_i = n}} b_{i,w} x^{\hat{w}_i} x_i \partial_{x_i} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^\nu} x^n \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{\substack{w \in \mathbb{N}^\nu \\ \hat{w}_i = n}} b_{i,w} \right) x_i \partial_{x_i}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

La somme $\left(\sum_{\substack{w \in \mathbb{N}^\nu \\ \hat{w}_i = n}} b_{i,w} \right)$ est bien finie car elle contient au plus un seul terme ! La partie linéaire correspond au degré $n = (0, \dots, 0)$ et on obtient donc :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n, \quad (1.3)$$

où $A(X)$ est l'*alphabet* du champ X c'est-à-dire l'ensemble des degrés des opérateurs différentiels homogènes intervenant dans la décomposition de X . Ces degrés sont donc des ν -uplets d'entiers positifs sauf un au plus qui vaut -1 . De plus pour n dans $A(X)$, $\sum_i n_i \geq 1$. Remarquons ici que l'on peut munir $A(X)$ d'une structure naturelle de semi-groupe.

On considérera toujours la partie linéaire X_{lin} diagonale, de spectre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ dans \mathbb{C}^ν fixé (cela ne nuit pas à la généralité, voir l'article [7] de Jean MARTINET). On a donc :

$$X_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i}.$$

Un champ mis sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i} + \sum_{n \in A(X)} B_n$$

est un champ sous *forme bien préparée*.

Comme X est un champ de vecteurs, c'est une dérivation sur l'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ en ν variables. Les B_n sont donc des dérivations et d'après la décomposition (1.2) :

$$B_n = x^n \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^n x_i \partial_{x_i}, \text{ avec } \beta_i^n \in \mathbb{C}, \quad (1.4)$$

et le coefficient $c_{n,m}$ de l'écriture (1.1) vaut :

$$c_{n,m} = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^n m_i = \beta^n \cdot m. \quad (1.5)$$

Enfin, on remarquera qu'un tel opérateur peut s'écrire de la manière suivante :

$$B_n = \sum_{i=1}^{\nu} B_n(x_i) \partial_{x_i},$$

où $B_n(x_i)$ est la fonction donnée par l'action de B_n sur la fonction $x \mapsto x_i$.

1.1.2. Un exemple. — Considérons le champ de vecteurs sur \mathbb{C}^2 :

$$X = \lambda_1 x \partial_x + \lambda_2 y \partial_y + (a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2) \partial_x + (b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2) \partial_y. \quad (1.6)$$

On a alors $X_{\text{lin}} = \lambda_1 x \partial_x + \lambda_2 y \partial_y$ et les opérateurs homogènes de la décomposition sont :

$$B_{(1,0)} = x(a_{20} x \partial_x + b_{11} y \partial_y),$$

$$B_{(0,1)} = y(a_{11} x \partial_x + b_{02} y \partial_y),$$

$$B_{(-1,2)} = a_{02} y^2 \partial_x,$$

$$B_{(2,-1)} = b_{20} x^2 \partial_y.$$

Avec $A(X) = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 2), (2, -1)\}$ on a donc

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n.$$

1.1.3. Forme prénormale continue. — On rappelle la définition suivante :

Définition 1.1. — Étant donné le spectre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ de \mathbb{C}^ν , on dit que ce spectre vérifie une *relation de résonance*, ou est *résonnant*, si :

$$\exists s, 1 \leq s \leq \nu, \exists m \in \mathbb{N}^\nu \setminus \{0\} \text{ tel que } \lambda \cdot m = \lambda_s$$

où $\lambda \cdot m$ est le produit scalaire $\sum_i \lambda_i m_i$ et où $\sum_i m_i \geq 2$.

On dira que le champ de vecteurs X est résonnant si le spectre de sa partie linéaire l'est, c'est-à-dire s'il existe un degré $n \in A(X)$ tel que $\lambda \cdot n = 0$.

Le problème est alors le suivant : à partir du champ de vecteurs X , comment obtenir, par un changement de variable adéquat, un champ X_{nor} simplifié ; par exemple, ce champ X_{nor} peut être la partie linéaire seule (linéarisation) ou bien la somme de la partie linéaire et de termes résonnants uniquement (forme normale de POINCARÉ-DULAC) ? La terminologie de ce dernier objet est la suivante :

Définition 1.2. — • Lorsque le champ X s'écrit sous la forme de sa partie linéaire et de termes résonnants (c'est-à-dire dont le degré n vérifie une relation de résonance $\lambda \cdot n = 0$), on dit qu'on obtient une *forme prénormale* du champ X .

- Si, de plus, la partie linéaire étant fixée, X est continu par rapport aux opérateurs B_n , on dit que la forme est *prénormale continue*.

On étudie ici les formes prénormales continues d'un champ de vecteurs de partie linéaire fixée. Une forme *normale* correspondrait à une forme prénormale qui aurait un nombre minimal de termes et serait unique en ce sens ; voir l'article [2] pour une étude plus approfondie.

1.2. Équation de conjugaison

Nous allons pour l'instant travailler sur des objets (essentiellement définis par des séries) uniquement formels, et nous nous intéresserons à leur convergence par la suite. Fixons donc un champ de vecteurs, pour l'instant formel, sous forme bien préparée comme en (1.3). C'est une dérivation sur l'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}[[x]]$ en les variables x_1, \dots, x_ν , ou encore sur les germes de fonctions de $\mathbb{C}[[x]]$ en x . Un changement de variable $x = h(y)$ dans le champ X est le transport du champ X par le difféomorphisme h^{-1} . Notons alors Θ l'application de substitution suivante :

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{C}[[x]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[x]] & (1.7) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ h \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.3. — L'application Θ est un automorphisme de $\mathbb{C}[[x]]$.

Démonstration. — L'application Θ est bien \mathbb{C} -linéaire, et h étant un difféomorphisme, l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[[x]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[x]] \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ h^{-1}\end{aligned}$$

est bien Θ^{-1} . Enfin,

$$\begin{aligned}\Theta(\varphi\psi) &= (\varphi\psi) \circ h \\ &= (\varphi \circ h)(\psi \circ h) \\ &= \Theta(\varphi)\Theta(\psi)\end{aligned}$$

et Θ est bien un morphisme d'algèbres. □

Écrivons alors l'équation de conjugaison du champ, c'est-à-dire le champ X_{nor} image de X par h^{-1} . Le champ X est une dérivation sur les germes de fonction en x . Le transport du champ X par le difféomorphisme h^{-1} donne une dérivation sur les germes de fonction en $y = h^{-1}(x)$. Ainsi, pour tout germe de fonction φ en y , $\Theta^{-1}\varphi = \varphi \circ h^{-1}$ est un germe en x , et l'action de la dérivation X donne à nouveau un germe de fonction en x , $X(\varphi \circ h^{-1})$ soit $X(\Theta^{-1}\varphi)$. Pour obtenir un germe de fonction en y on recompose par h à droite et on obtient $X(\varphi \circ h^{-1}) \circ h$ c'est-à-dire $\Theta \circ X \circ \Theta^{-1}$. L'image du champ X par le difféomorphisme h^{-1} est donc le champ $\Theta X \Theta^{-1}$. L'équation de conjugaison s'écrit alors :

$$\Theta X \Theta^{-1} = X_{\text{nor}}. \tag{1.8}$$

Définition 1.4. — L'opérateur Θ est le *normalisateur* du champ X .

Remarque 1.5. — En fait, on peut définir directement l'image d'une dérivation δ par un difféomorphisme φ comme la dérivation $\Theta^{-1}\delta\Theta$ (voir par exemple [6]) mais il me semble que l'explication ci-dessus rend les choses plus naturelles.

Il s'agit maintenant de résoudre, toujours formellement, cette équation.

CHAPITRE 2

L'ALGÈBRE DES MOULES

NOUS allons maintenant résoudre l'équation de conjugaison, c'est-à-dire *calculer* Θ . Pour cela nous cherchons Θ sous une forme bien particulière, qui nous conduit à introduire de nouveaux objets : les *moules*.

L'intérêt est d'obtenir une forme prénormale du champ qui soit *calculable*, de manière algorithmique ; les moules sont en effet des objets qui se prêtent remarquablement bien au calcul formel.

2.1. Calcul moulien

2.1.1. Le langage des moules. — Pour un entier $r \geq 1$, des degrés n^1, \dots, n^r de $A(X)$, on note \underline{n} le mot, c'est-à-dire la suite totalement ordonnée (n^1, \dots, n^r) et $l(\underline{n})$ sa longueur r . La suite de longueur nulle sera, par convention, l'ensemble vide \emptyset . On note également $\|\underline{n}\|$ le ν -uplet $n^1 + \dots + n^r$ (qui est toujours un degré de $A(X)$, puisque ce dernier est un semi-groupe) et pour un $n = (n_1, \dots, n_\nu)$ de \mathbb{C}^ν , $|n|$ le complexe $n_1 + \dots + n_\nu$. Enfin, on note $\underline{n}_1 \bullet \underline{n}_2$ la *concaténation* des suites \underline{n}_1 et \underline{n}_2 , c'est-à-dire la juxtaposition des deux suites avec conservation de l'ordre de chacune, les éléments de \underline{n}_2 étant plus grands que ceux de \underline{n}_1 .

On note alors la composée des opérateurs différentiels B_{n^i} :

$$B_{n^1} \circ \dots \circ B_{n^r} = B_{(n^1, \dots, n^r)} = B_{\underline{n}}.$$

Reprenons le champ de vecteurs (1.3) :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n.$$

On cherche à transformer ce champ de vecteurs. Remarquons que $X - X_{\text{lin}}$ est un élément de $\mathbb{C}[[B_n]]$, algèbre des séries formelles non commutatives dont les monômes sont les B_n . L'idée est alors de chercher l'automorphisme (de $\mathbb{C}[[x]]$) de substitution Θ défini en (1.7) sous la forme d'une série formelle en les B_n ,

c'est-à-dire comme un élément de l'algèbre $\mathbb{C}[[B_n]]$. Le calcul de l'action de Θ sur X , ou de X sur Θ , sera ainsi plus facile puisqu'il aura lieu dans une seule et même algèbre $\mathbb{C}[[B_n]]$ (il reste également à calculer l'action de X_{lin} sur Θ –et réciproquement– ce qui se fera par un calcul comme on le verra plus loin).

On a donc :

$$\Theta = \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \Theta^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \quad (2.1)$$

où les coefficients $\Theta^{\underline{n}}$ sont des complexes et $A(X)^*$ désigne l'ensemble des mots (ou des suites) sur l'alphabet $A(X)$. Par convention, on aura toujours $B_{\emptyset} = \text{Id}$. On cherche de plus Θ sous la forme d'une transformation tangente à l'identité, car on veut préserver la partie linéaire du champ lors du changement de variable. On aura donc $\Theta^{\emptyset} = 1$.

Attardons nous maintenant sur ces coefficients $\Theta^{\underline{n}}$. On a ainsi une application

$$\begin{aligned} A(X)^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \underline{n} &\longmapsto \Theta^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

Remarquons plus généralement que toute série formelle non commutative en les B_n :

$$S = \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} S^{\underline{n}} B_{\underline{n}}$$

définit une telle application

$$\begin{aligned} A(X)^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \underline{n} &\longmapsto S^{\underline{n}}, \end{aligned}$$

par l'intermédiaire de ses coefficients $S^{\underline{n}}$.

Définition 2.1. — En suivant la terminologie de Jean ÉCALLE (voir notamment [3]) on appelle *moule* cette application et on la note S^\bullet .

On écrira par la suite la forme *moulienne* de S de la manière suivante :

$$S = \sum_{\bullet} S^\bullet B_\bullet$$

Remarque 2.2. — Le langage des moules a été introduit et développé par Jean ÉCALLE dans les années 1970. Cependant, plutôt qu'en donner brutalement une définition trop abstraite (une suite de complexes indexée par des mots sur un alphabet...), on suit ici l'approche plus naturelle proposée par Jacky CRESSON (voir [4] et [5]) en termes de coefficients de séries formelles non commutatives, ce qui va permettre d'en déduire les opérations élémentaires sur les moules, et la structure d'algèbre déduite de celle des séries formelles.

2.1.2. Quelques règles de calcul. — Les règles de calcul découlent des opérations sur les séries formelles. Ainsi on définit de manière naturelle la multiplication par un complexe α :

$$(\alpha S)^\bullet = \alpha S^\bullet$$

c'est-à-dire

$$\forall \underline{n} \in A(X)^*, (\alpha S^\bullet)^{\underline{n}} = \alpha S^{\underline{n}}.$$

De la même manière on définit l'addition et la multiplication de deux moules par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\bullet} S^\bullet B_\bullet + \sum_{\bullet} T^\bullet B_\bullet &= \sum_{\bullet} (S^\bullet + T^\bullet) B_\bullet \\ \left(\sum_{\bullet} S^\bullet B_\bullet \right) \left(\sum_{\bullet} T^\bullet B_\bullet \right) &= \sum_{\bullet} (S^\bullet \times T^\bullet) B_\bullet. \end{aligned}$$

L'addition est donc définie de façon naturelle par :

$$P^\bullet = S^\bullet + T^\bullet \iff \forall \underline{n} \in A(X)^*, P^{\underline{n}} = S^{\underline{n}} + T^{\underline{n}}.$$

Quant à la multiplication c'est celle sur les séries formelles non commutatives :

$$P^\bullet = S^\bullet \times T^\bullet \iff \forall \underline{n} \in A(X)^*, P^{\underline{n}} = \sum_{\underline{n}_1 \bullet \underline{n}_2 = \underline{n}} S^{\underline{n}_1} T^{\underline{n}_2},$$

où $\underline{n}_1 \bullet \underline{n}_2$ est la concaténation des mots \underline{n}_1 et \underline{n}_2 .

Cette multiplication est associative : pour un mot \underline{n} on a :

$$\begin{aligned} ((S^\bullet \times T^\bullet) \times P^\bullet)^{\underline{n}} &= \sum_{\underline{n}_1 \bullet \underline{n}_2 = \underline{n}} (S^\bullet \times T^\bullet)^{\underline{n}_1} P^{\underline{n}_2} \\ &= \sum_{\underline{n}_1 \bullet \underline{n}_2 = \underline{n}} \left(\sum_{\underline{w}_1 \bullet \underline{w}_2 = \underline{n}_1} S^{\underline{w}_1} T^{\underline{w}_2} \right) P^{\underline{n}_2} \\ &= \sum_{\underline{w}_1 \bullet \underline{w}_2 \bullet \underline{n}_2 = \underline{n}} S^{\underline{w}_1} T^{\underline{w}_2} P^{\underline{n}_2} \\ &= \sum_{\underline{w}_1 \bullet \underline{m} = \underline{n}} S^{\underline{w}_1} \left(\sum_{\underline{w}_2 \bullet \underline{n}_2 = \underline{m}} T^{\underline{w}_2} P^{\underline{n}_2} \right) \\ &= \sum_{\underline{w}_1 \bullet \underline{m} = \underline{n}} S^{\underline{w}_1} (T^\bullet \times P^\bullet)^{\underline{m}} \\ &= (S^\bullet \times (T^\bullet \times P^\bullet))^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

Le moule neutre pour la multiplication doit alors suivre les coefficients du neutre pour la composition des opérateurs différentiels, c'est-à-dire l'identité. Ainsi, on note 1^\bullet le moule défini par :

$$1^{\underline{n}} = 1 \text{ si } \underline{n} = \emptyset \text{ et } 1^{\underline{n}} = 0 \text{ sinon.}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \forall \underline{n} \in A(X)^*, (S^\bullet \times 1^\bullet)^{\underline{n}} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1 \bullet \underline{n}_2 = \underline{n}}} S^{\underline{n}_1} 1^{\underline{n}_2} \\ &= S^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout moule S^\bullet , $S^\bullet \times 1^\bullet = S^\bullet$. De même on montre que $1^\bullet \times S^\bullet = S^\bullet$.

2.1.3. Un exemple. — Voici un exemple qui va nous permettre de comprendre clairement la multiplication des moules, et qui va nous montrer en outre que cette multiplication n'est pas commutative.

Soit $P^\bullet = S^\bullet \times T^\bullet$; écrivons $P^{\underline{n}}$ pour un mot $\underline{n} = (n^1, n^2, n^3)$ de longueur 3.

$$P^{n^1, n^2, n^3} = S^\emptyset T^{n^1, n^2, n^3} + S^{n^1} T^{n^2, n^3} + S^{n^1, n^2} T^{n^3} + S^{n^1, n^2, n^3} T^\emptyset.$$

De même, si $Q^\bullet = T^\bullet \times S^\bullet$ on aura :

$$Q^{n^1, n^2, n^3} = T^\emptyset S^{n^1, n^2, n^3} + T^{n^1} S^{n^2, n^3} + T^{n^1, n^2} S^{n^3} + T^{n^1, n^2, n^3} S^\emptyset.$$

Ainsi, on voit bien que $S^\bullet \times T^\bullet$ est différent de $T^\bullet \times S^\bullet$: la multiplication des moules n'est pas commutative.

Par contre on peut voir qu'un moule T^\bullet possède un inverse $(T^{-1})^\bullet$ si et seulement si $T^\emptyset \neq 0$. En effet, si on cherche S^\bullet tel que $T^\bullet \times S^\bullet = 1^\bullet$ on a :

$$T^\emptyset S^\emptyset = 1,$$

donc si $T^\emptyset \neq 0$, $S^\emptyset = \frac{1}{T^\emptyset}$; puis pour un mot de longueur 1 :

$$T^n S^\emptyset + T^\emptyset S^n = 0,$$

donc :

$$S^n = -\frac{T^n}{(T^\emptyset)^2},$$

et, plus généralement, pour un mot de longueur r :

$$S^{n^1, \dots, n^r} = \sum_{s=1}^r \frac{(-1)^s}{(T^\emptyset)^{1+s}} \sum_{\substack{w^1 \bullet \dots \bullet w^s = \underline{n}}} T^{w^1} \dots T^{w^s}.$$

2.1.4. Algèbre à composition des moules. — On peut définir également la composition de deux moules. En effet considérons l'application \mathcal{S} qui à toute somme d'opérateurs différentiels homogènes D_n de degré n sur l'alphabet $A(X)$: $\sum_{n \in A(X)} D_n$ associe $\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} S^{\underline{n}} D_{\underline{n}}$, et de même, l'application \mathcal{T} qui à $\sum_{n \in A(X)} D_n$ associe $\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} T^{\underline{n}} D_{\underline{n}}$. La composée des moules $S^\bullet \circ T^\bullet$ est alors le moule P^\bullet défini par :

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{T} \left(\sum_{n \in A(X)} D_n \right) = \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} P^{\underline{n}} D_{\underline{n}}.$$

On peut expliciter $P^{\underline{n}}$ pour un mot \underline{n} quelconque : on a tout d'abord

$$\mathcal{T} \left(\sum_{n \in A(X)} D_n \right) = \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} T^{\underline{n}} D_{\underline{n}}.$$

On décompose alors en une somme d'opérateurs différentiels homogènes cette dernière somme. Comme tout opérateur $D_{\underline{n}}$ est de degré $\|\underline{n}\|$, le nouvel alphabet est $W = \{\|\underline{n}\|, \underline{n} \in A(X)^*\}$. Notons, pour w dans W , Δ_w les nouveaux opérateurs homogènes ainsi définis ; on a donc :

$$\Delta_w = \sum_{\substack{\underline{n} \in A(X)^* \\ \|\underline{n}\|=w}} T^{\underline{n}} D_{\underline{n}}.$$

En outre, comme on a simplement regroupé des termes, on a :

$$\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} T^{\underline{n}} D_{\underline{n}} = \sum_{w \in W} \Delta_w.$$

On peut alors appliquer \mathcal{S} à cette somme :

$$\mathcal{S} \left(\sum_{w \in W} \Delta_w \right) = \sum_{\underline{w} \in W^*} S^{\underline{w}} \Delta_{\underline{w}},$$

soit finalement :

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{T} \left(\sum_{n \in A(X)} D_n \right) = \sum_{\underline{w} \in W^*} S^{\underline{w}} \prod_{i=1}^{l(\underline{w})} \left(\sum_{\substack{\underline{n} \in A(X)^* \\ \|\underline{n}\|=w^i}} T^{\underline{n}} D_{\underline{n}} \right).$$

Il reste à réécrire le deuxième membre sous la forme $\sum_{\underline{s} \in A(X)^*} P^{\underline{s}} D_{\underline{s}}$. Pour cela, on regarde, pour un \underline{s} fixé dans $A(X)^*$ quels sont les \underline{w} de W^* tels que $D_{\underline{s}}$ apparaisse

dans $\Delta_{\underline{w}}$: un tel $\underline{w} = (w^1, \dots, w^r)$ s'écrit $(w^1, \dots, w^r) = (\|\underline{n}_1\|, \dots, \|\underline{n}_r\|)$, où les \underline{n}_i sont des mots de $A(X)^*$ tels que leur concaténation $\underline{n}_1 \bullet \dots \bullet \underline{n}_r$ soit égale à \underline{s} . Donc pour \underline{s} dans $A(X)^*$, le coefficient $P^{\underline{s}}$ vaut :

$$\sum_{\substack{r \geq 0 \\ \underline{n}_1 \bullet \dots \bullet \underline{n}_r = \underline{s}}} S^{\|\underline{n}_1\|, \dots, \|\underline{n}_r\|} T^{\underline{n}_1} \dots T^{\underline{n}_r}.$$

On a donc la définition suivante :

Définition 2.3. — Soient S^\bullet et T^\bullet deux moules, alors on définit le moule composé $P^\bullet = S^\bullet \circ T^\bullet$ par :

$$P^{\underline{s}} = \sum_{\substack{r \geq 0 \\ \underline{n}_1 \bullet \dots \bullet \underline{n}_r = \underline{s}}} S^{\|\underline{n}_1\|, \dots, \|\underline{n}_r\|} T^{\underline{n}_1} \dots T^{\underline{n}_r}.$$

Remarque 2.4. — La composition des moules nécessite la structure de semi-groupe sur l'alphabet $A(X)$.

On a finalement le théorème suivant :

Théorème 2.5. — *L'ensemble des moules $M(A)$ sur l'alphabet A est une \mathbb{C} -algèbre non commutative, à composition.*

L'élément neutre pour la multiplication est le moule 1^\bullet défini par :

$$1^{\underline{n}} = 1 \text{ si } \underline{n} = \emptyset \text{ et } 1^{\underline{n}} = 0 \text{ sinon.}$$

L'élément neutre pour la composition est alors le moule I^\bullet défini par :

$$I^{\underline{n}} = 1 \text{ pour toute suite } \underline{n} \text{ de longueur } 1 \text{ et } I^{\underline{n}} = 0 \text{ sinon.}$$

Nous allons à présent utiliser le formalisme des moules pour résoudre notre problème.

2.2. Équation de conjugaison moulienne

2.2.1. L'équation générale. — Commençons tout d'abord par écrire le champ X sous forme moulienne :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^\bullet B_{\bullet},$$

où I^\bullet est le neutre pour la composition des moules. On a de plus

$$\Theta = \sum_{\bullet} \Theta^\bullet B_{\bullet},$$

et on écrit de même

$$\Theta^{-1} = \sum_{\bullet} (\Theta^{-1})^{\bullet} B_{\bullet}.$$

L'équation de conjugaison (1.8) s'écrit alors :

$$X_{\text{nor}} = \left(\sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet} \right) \left(X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet} \right) \left(\sum_{\bullet} (\Theta^{-1})^{\bullet} B_{\bullet} \right). \quad (2.2)$$

Nous allons expliciter cette équation dans le cas particulier de la linéarisation, ce qui nous permettra de redémontrer par là un théorème dû à POINCARÉ au chapitre suivant.

2.2.2. Équation de linéarisation. — Considérons le cas « idéal » de la linéarisation, c'est-à-dire celui pour lequel on a $X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}}$. L'équation de conjugaison s'écrit donc :

$$\Theta X \Theta^{-1} = X_{\text{lin}},$$

ou encore

$$X = \Theta^{-1} X_{\text{lin}} \Theta. \quad (2.3)$$

Rappelons que $\Theta^{\emptyset} = (\Theta^{-1})^{\emptyset} = 1$ et que $B_{\emptyset} = \text{Id}$. On notera également 1 cet opérateur. Comme on l'a déjà dit, la forme sous laquelle on cherche Θ permet un calcul plus facile dans l'équation de conjugaison, à condition d'avoir calculé $X_{\text{lin}} B_{\underline{n}}$ au préalable.

Commençons donc par calculer $X_{\text{lin}} B_{\underline{n}}$ pour un $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ dans $A(X)^*$ de longueur r . Soit $\varphi \in \mathbb{C}[[x]]$. On écrit

$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{\nu}} a_m x^m,$$

avec a_m dans \mathbb{C} . On a donc

$$\begin{aligned} B_{\underline{n}} \varphi(x) &= \sum_m a_m B_{\underline{n}}(x^m) \\ &= \sum_m a_m B_{n^1} \cdots B_{n^r}(x^m). \end{aligned}$$

De plus, d'après les propriétés des B_n vues en (1.4) et (1.5), on a successivement :

$$\begin{aligned} B_{n^r} \varphi(x) &= \sum_m a_m (B_{n^r} x^m) \\ &= \sum_m a_m (\beta^{n^r} \cdot m) x^{m+n^r}, \end{aligned}$$

puis

$$B_{n^{r-1}}B_{n^r}\varphi(x) = \sum_m a_m(\beta^{n^r} \cdot m)(\beta^{n^{r-1}} \cdot (m+n^r))x^{m+n^r+n^{r-1}},$$

et on obtient finalement

$$B_{\underline{n}}\varphi(x) = \sum_m a_m(\beta^{n^r} \cdot m)(\beta^{n^{r-1}} \cdot (m+n^r)) \cdots (\beta^{n^1} \cdot (m+n^r+\cdots+n^2))x^{m+n^r+\cdots+n^1}.$$

On rappelle alors que $X_{\text{lin}}(x^m) = (\lambda \cdot m)x^m$. Par conséquent :

$$X_{\text{lin}}B_{\underline{n}}\varphi(x) = \sum_m a_m(\beta^{n^r} \cdot m) \cdots (\beta^{n^1} \cdot (m+n^r+\cdots+n^2))(\lambda \cdot (m+n^r+\cdots+n^1))x^{m+n^r+\cdots+n^1}.$$

On rappelle que $\|\underline{n}\|$ est le ν -uplet $n^1 + \cdots + n^r$; développons par rapport au dernier terme :

$$\begin{aligned} X_{\text{lin}}B_{\underline{n}}\varphi(x) &= \sum_m a_m(\beta^{n^r} \cdot m) \cdots (\beta^{n^1} \cdot (m+n^r+\cdots+n^2))(\lambda \cdot m)x^{m+n^r+\cdots+n^1} \\ &\quad + \sum_m a_m(\beta^{n^r} \cdot m) \cdots (\beta^{n^1} \cdot (m+n^r+\cdots+n^2))(\lambda \cdot \|\underline{n}\|)x^{m+n^r+\cdots+n^1}. \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est égal à $B_{\underline{n}}X_{\text{lin}}\varphi(x)$ et le deuxième vaut $(\lambda \cdot \|\underline{n}\|)B_{\underline{n}}\varphi(x)$. On a donc :

$$X_{\text{lin}}B_{\underline{n}} = (\lambda \cdot \|\underline{n}\|)B_{\underline{n}} + B_{\underline{n}}X_{\text{lin}}. \quad (2.4)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} X_{\text{lin}}\Theta &= \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \Theta^{\underline{n}}X_{\text{lin}}B_{\underline{n}} \\ &= \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \Theta^{\underline{n}}((\lambda \cdot \|\underline{n}\|)B_{\underline{n}} + B_{\underline{n}}X_{\text{lin}}) \\ &= \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} (\lambda \cdot \|\underline{n}\|)\Theta^{\underline{n}}B_{\underline{n}} + \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \Theta^{\underline{n}}B_{\underline{n}}X_{\text{lin}}. \end{aligned}$$

Notons alors $\nabla\Theta^\bullet$ le moule défini par :

$$\forall \underline{n} \in A(X)^*, \nabla\Theta^{\underline{n}} = (\lambda \cdot \|\underline{n}\|)\Theta^{\underline{n}} \quad (2.5)$$

L'équation de conjugaison moulienne (2.3) se réécrit alors :

$$\left(\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} (\Theta^{-1})^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \right) \left(\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \nabla\Theta^{\underline{n}} B_{\underline{n}} + \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \Theta^{\underline{n}} B_{\underline{n}} X_{\text{lin}} \right) = X_{\text{lin}} + \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} I^{\underline{n}} B_{\underline{n}}.$$

Développons alors le membre de gauche de cette dernière équation ; par définition du produit moulien \times , on a :

$$\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} ((\Theta^{-1})^\bullet \times \nabla \Theta^\bullet)^{\underline{n}} B_{\underline{n}} + \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} ((\Theta^{-1})^\bullet \times \Theta^\bullet)^{\underline{n}} B_{\underline{n}} X_{\text{lin}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} I^{\underline{n}} B_{\underline{n}}.$$

Comme $\Theta^{-1} \circ \Theta = \text{Id}$, on a $(\Theta^{-1})^\bullet \times \Theta^\bullet = 1^\bullet$, donc le deuxième terme de la somme du membre de gauche de l'équation ci dessus vaut

$$1^\emptyset B_\emptyset X_{\text{lin}} = X_{\text{lin}}.$$

L'équation de conjugaison se réécrit donc :

$$\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} ((\Theta^{-1})^\bullet \times \nabla \Theta^\bullet)^{\underline{n}} B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} I^{\underline{n}} B_{\underline{n}}.$$

D'où, en identifiant terme à terme, on tire la forme moulienne de l'équation de conjugaison :

$$(\Theta^{-1})^\bullet \times \nabla \Theta^\bullet = I^\bullet,$$

soit, en multipliant par le moule Θ^\bullet à gauche :

$$\nabla \Theta^\bullet = \Theta^\bullet \times I^\bullet. \quad (2.6)$$

Nous allons maintenant résoudre cette équation, comme il est fait dans ÉCALLE [3] ou CRESSON [4].

Remarque 2.6. — En fait, l'opérateur ∇ défini ci-dessus est une dérivation sur les moules, c'est-à-dire que pour tous moules A^\bullet et B^\bullet ,

$$\nabla(A^\bullet \times B^\bullet) = \nabla A^\bullet \times B^\bullet + A^\bullet \times \nabla B^\bullet.$$

Ainsi l'équation (2.6) que nous venons d'obtenir est une équation différentielle sur le moule Θ^\bullet .

Remarque 2.7. — On obtient également une équation différentielle moulienne sur $(\Theta^{-1})^\bullet$ en conduisant des calculs analogues :

$$\nabla (\Theta^{-1})^\bullet = -I^\bullet \times (\Theta^{-1})^\bullet. \quad (2.7)$$

Remarque 2.8. — Pour l'équation de normalisation $\Theta^{-1} X_{\text{nor}} \Theta = X$, si on écrit X_{nor} sous la forme $X_{\text{nor}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Pran}^\bullet B_\bullet$ alors, avec les mêmes calculs, on vérifie que le moule Θ^\bullet vérifie l'équation différentielle :

$$\nabla \Theta^\bullet + \text{Pran}^\bullet \times \Theta^\bullet = \Theta^\bullet \times I^\bullet.$$

2.3. Résolution de l'équation de linéarisation

À partir de l'équation (2.6), nous allons calculer Θ^\bullet par récurrence sur la longueur des suites \underline{n} . Par définition du produit de deux moules, l'équation (2.6) est équivalente à :

$$\forall \underline{n} \in A(X)^*, \nabla \Theta^{\underline{n}} = \sum_{n_1 \bullet n_2 = \underline{n}} \Theta^{n_1} I^{n_2}.$$

En se souvenant de la définition de I^\bullet , $I^{\underline{n}}$ vaut 0 si $l(\underline{n}) \neq 1$ et 1 sinon. Donc, par définition du moule $\nabla \Theta^\bullet$, l'équation précédente équivaut à la relation de récurrence suivante : si $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ est de longueur r ,

$$(\lambda \cdot \|\underline{n}\|) \Theta^{\underline{n}} = \Theta^{n^1, \dots, n^{r-1}} I^{n^r},$$

soit

$$(\lambda \cdot (n^1 + \dots + n^r)) \Theta^{n^1, \dots, n^r} = \Theta^{n^1, \dots, n^{r-1}}. \quad (2.8)$$

Notons pour tout i , $\omega(n^i) = \omega_i = \lambda \cdot n^i$. Si $l(\underline{n}) = 1$, l'équation (2.8) est équivalente à :

$$(\lambda \cdot n) \Theta^n = \Theta^\emptyset,$$

soit

$$\omega(n) \Theta^n = 1.$$

Si $\omega(n) \neq 0$ on a une solution

$$\Theta^n = \frac{1}{\omega}.$$

Si r est fixé supposons que pour toute suite (n^1, \dots, n^{r-1}) de longueur $r-1$, pour tout k dans $\{1, \dots, r-1\}$ on ait $\omega_1 + \dots + \omega_k \neq 0$ et

$$\Theta^{n^1, \dots, n^{r-1}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \dots + \omega_{r-1})}.$$

Alors pour toute suite (n^1, \dots, n^r) de longueur r on a

$$(\omega_1 + \dots + \omega_r) \Theta^{n^1, \dots, n^r} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \dots + \omega_{r-1})},$$

et donc si $\omega_1 + \dots + \omega_r \neq 0$, alors

$$\Theta^{n^1, \dots, n^r} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \dots + \omega_r)}.$$

Remarque 2.9. — La résolution de l'équation (2.7) à la remarque 2.7 sur $(\Theta^{-1})^\bullet$ conduit de la même manière à :

$$(\Theta^{-1})^{\underline{n}} = \frac{(-1)^r}{\omega_r(\omega_r + \omega_{r-1}) \cdots (\omega_r + \dots + \omega_1)}.$$

CHAPITRE 3

LES THÉORÈMES DE POINCARÉ

ON redémontre dans ce chapitre le théorème de linéarisation de POINCARÉ et celui de POINCARÉ-DULAC, par les méthodes mouliennes d'ÉCALLE.

On notera dans la suite, pour n dans $A(X)$, $\omega(n) = \lambda \cdot n$; si $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ est dans $A(X)^*$, $\omega(n^i) = \omega_i$.

3.1. En l'absence de termes résonnants

Grâce à l'équation résolue précédemment, nous pouvons maintenant énoncer le théorème de linéarisation formelle dû à POINCARÉ.

3.1.1. Le théorème de POINCARÉ. —

Théorème 3.1. — Soit X un champ de vecteurs formel non résonnant sous forme bien préparée :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n.$$

Alors il existe un changement de variable formel $x = h(y)$ tel que, dans les nouvelles variables, l'équation

$$\dot{x} = X(x)$$

s'écrit

$$\dot{y} = X_{\text{lin}}(y),$$

En d'autres termes, un champ de vecteurs non résonnant est formellement conjugué à sa partie linéaire. De plus on a explicitement l'automorphisme formel de substitution

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{C}[[x]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[x]] \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ h \end{aligned}$$

donné par $\Theta = \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \Theta^{\underline{n}} B_{\underline{n}}$ où les coefficients $\Theta^{\underline{n}}$ sont donnés par :

$$\Theta^{\underline{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \cdots + \omega_r)},$$

pour un mot $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ de longueur r .

Démonstration. — Écrivons comme d'habitude $X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n$. Comme le champ est non résonnant, pour tout $\underline{n} \in A(X)^*$, $\lambda \cdot \|\underline{n}\|$ est non nul. Donc pour tout k , $\omega_1 + \cdots + \omega_k$ est non nul. La recherche du changement de variable revient à la résolution de l'équation moulienne (2.6) vue précédemment. D'après le chapitre précédent, le changement de variable est donné par le normalisateur Θ :

$$\Theta = \sum_{\underline{n} \in A(X)} \Theta^{n^1, \dots, n^r} B_{\underline{n}},$$

avec

$$\Theta^{\underline{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \cdots + \omega_r)}.$$

□

Une fois qu'on connaît Θ (resp. Θ^{-1}), on trouve h (resp. h^{-1}) en prenant $\Theta(\text{Id})$ (resp. $\Theta^{-1}(\text{Id})$).

3.1.2. Un exemple. — Reprenons le champ sur \mathbb{C}^2 vu au chapitre 1 page 3 :

$$X = \lambda_1 x \partial_x + \lambda_2 y \partial_y + (a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2) \partial_x + (b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2) \partial_y,$$

dont les opérateurs homogènes sont

$$\begin{aligned} B_{(1,0)} &= x(a_{20} x \partial_x + b_{11} y \partial_y), \\ B_{(0,1)} &= y(a_{11} x \partial_x + b_{02} y \partial_y), \\ B_{(-1,2)} &= a_{02} y^2 \partial_x, \\ B_{(2,-1)} &= b_{20} x^2 \partial_y. \end{aligned}$$

Les premiers termes du développement moulien de Θ sont :

$$\begin{aligned}\Theta^\emptyset &= 1, \\ \Theta^{(1,0)} &= \frac{1}{\lambda_1}, \\ \Theta^{(0,1)} &= \frac{1}{\lambda_2}, \\ \Theta^{(-1,2)} &= \frac{1}{-\lambda_1 + 2\lambda_2}, \\ \Theta^{(2,-1)} &= \frac{1}{2\lambda_1 - \lambda_2}.\end{aligned}$$

Ainsi le changement de variable $(x, y) = h(u, v)$ a un développement dont les premiers termes sont :

$$\begin{aligned}(x, y) = h(u, v) &= (u, v) \\ &+ \frac{1}{\lambda_1}(u^2 a_{20}, uv b_{11}) \\ &+ \frac{1}{\lambda_2}(uva_{11}, v^2 b_{02}) \\ &+ \frac{1}{-\lambda_1 + 2\lambda_2}(v^2 a_{02}, 0) \\ &+ \frac{1}{2\lambda_1 - \lambda_2}(0, b_{20}) + \dots\end{aligned}$$

3.1.3. À propos des coefficients. — On peut maintenant faire quelques remarques : tout d'abord la démonstration « moulienne » de ce théorème donne explicitement, et de manière directe et calculable, le normalisateur Θ ; de plus, il apparaît que le moule Θ^\bullet porte une certaine *universalité* : en effet, deux champs de vecteurs de même partie linéaire et de même alphabet (mêmes degrés dans la décomposition en opérateurs homogènes) ont *exactement* le même normalisateur Θ . De manière plus générale, *tous* les champs de vecteurs non résonnants se linéarisent par le « même » changement de variable, en ce sens que la *forme* du moule Θ^\bullet est toujours la même.

Étudions maintenant l'apparition de résonances. C'est l'objet du théorème de POINCARÉ-DULAC.

3.2. En présence de résonances

3.2.1. La forme normale de POINCARÉ-DULAC. — Rappelons que si n est dans $A(X)$ on note $\omega(n) = \lambda \cdot n$. Lorsque le champ comporte des termes

résonnants, on ne peut pas le linéariser complètement ; on peut cependant obtenir, par changement de variable formel, le champ X_{nor} sous la forme suivante, dite *forme normale de Poincaré-Dulac* ou encore *forme prénormale élaguée* dans ÉCALLE-VALLET [1] :

$$X_{\text{tram}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \text{Tram}^{\underline{n}} B_{\underline{n}},$$

où le moule Tram^\bullet vérifie :

$$\text{Tram}^{\underline{n}} = 0 \text{ si } \lambda \cdot \|\underline{n}\| \neq 0.$$

C'est le théorème de POINCARÉ-DULAC. Ainsi le champ ne comporte plus que des termes résonnants : c'est une forme prénormale (et continue).

Nous allons donner une version moulienne de la démonstration de ce théorème. En suivant la présentation d'ÉCALLE-VALLET [1], on associe à X un champ « simplifié » X_{sam} défini par :

$$X_{\text{sam}} = \left(\exp \left(\sum_{\substack{\underline{n} \in A(X) \\ \omega(\underline{n}) \neq 0}} \frac{1}{\omega(\underline{n})} B_{\underline{n}} \right) \right) X \left(\exp \left(- \sum_{\substack{\underline{n} \in A(X) \\ \omega(\underline{n}) \neq 0}} \frac{1}{\omega(\underline{n})} B_{\underline{n}} \right) \right). \quad (3.1)$$

Écrivons alors

$$X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Sam}^\bullet B_{\bullet}.$$

On va calculer le moule Sam^\bullet . Donnons tout d'abord la définition de l'*exponentielle* d'un moule :

Définition 3.2. — Pour un moule S^\bullet , on note $\exp(S^\bullet)$ le moule défini par :

$$\exp(S^\bullet) = \sum_{r \geq 0} \frac{(S^\bullet)^r}{r!},$$

où $(S^\bullet)^r$ est le moule $\underbrace{S^\bullet \times \cdots \times S^\bullet}_{r \text{ facteurs}}$, avec la convention $(S^\bullet)^0 = 1^\bullet$.

On peut voir qu'alors

$$\exp \left(\sum_{\bullet} S^\bullet B_{\bullet} \right) = \sum_{\bullet} \exp(S^\bullet) B_{\bullet}.$$

On écrit maintenant l'équation de simplification (3.1) sous sa forme moulienne. Notons $\Psi = \sum_{\substack{n \in A(X) \\ \omega(n) \neq 0}} \frac{1}{\omega(n)} B_n$. On l'écrit sous sa forme moulienne :

$$\Psi = \sum_{\bullet} \Psi^{\bullet} B_{\bullet},$$

où Ψ^{\bullet} est le moule défini par

$$\Psi^{\underline{n}} = \begin{cases} \frac{1}{\omega(n)} & \text{si } l(\underline{n}) = 1 \text{ et } \omega(n) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$\exp \Psi = \sum_{\bullet} \exp(\Psi^{\bullet}) B_{\bullet},$$

d'où l'écriture moulienne du champ simplifié :

$$X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Sam}^{\bullet} B_{\bullet} = \left(\sum_{\bullet} \exp(\Psi^{\bullet}) B_{\bullet} \right) \left(X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet} \right) \left(\sum_{\bullet} \exp(-\Psi^{\bullet}) B_{\bullet} \right),$$

où I^{\bullet} est le neutre pour la composition des moules.

En utilisant l'équation (2.4) qui traduit l'action de X_{lin} sur $B_{\underline{n}}$ et la définition de la dérivation ∇ donnée à l'équation (2.5) sur les moules, l'équation ci-dessus se réécrit :

$$\text{Sam}^{\bullet} = \exp(\Psi^{\bullet}) \times \nabla \exp(-\Psi^{\bullet}) + \exp(\Psi^{\bullet}) \times I^{\bullet} \times \exp(-\Psi^{\bullet}).$$

Il faut maintenant calculer le moule Sam^{\bullet} !

3.2.2. Résolution de l'équation moulienne. — Nous allons procéder en plusieurs étapes.

3.2.2.1. Exponentielle moulienne. — Tout d'abord, effectuons le calcul du moule $\exp(\Psi^{\bullet})$. Par définition de l'exponentielle d'un moule, pour tout mot \underline{n} de longueur r :

$$\exp(\Psi^{\bullet})^{\underline{n}} = (1^{\bullet})^{\underline{n}} + (\Psi^{\bullet})^{\underline{n}} + \frac{1}{2!} (\Psi^{\bullet} \times \Psi^{\bullet})^{\underline{n}} + \dots$$

Comme $\Psi^{\underline{s}}$ est nul si $l(\underline{s}) \neq 1$, on a d'une part

$$\exp(\Psi^{\bullet})^{\emptyset} = 1,$$

et d'autre part, si $r \geq 1$, le seul terme éventuellement non nul dans la somme ci-dessus est le terme d'ordre r du développement :

$$\frac{1}{r!} \underbrace{(\Psi^\bullet \times \dots \times \Psi^\bullet)}_{r \text{ facteurs}}^n = \frac{1}{r!} \Psi^{n^1} \dots \Psi^{n^r},$$

et d'après la définition de Ψ^\bullet ,

$$(\exp(\Psi^\bullet))^n = \begin{cases} 0 & \text{si l'un au moins des } \omega_i \text{ est nul,} \\ \frac{1}{r! \omega_1 \dots \omega_r} & \text{si tous les } \omega_i \text{ sont non nuls.} \end{cases}$$

De la même manière,

$$(\exp(-\Psi^\bullet))^n = \begin{cases} 0 & \text{si l'un au moins des } \omega_i \text{ est nul,} \\ \frac{(-1)^r}{r! \omega_1 \dots \omega_r} & \text{si tous les } \omega_i \text{ sont non nuls.} \end{cases}$$

3.2.2.2. *Un premier terme...*— Notons maintenant $C^\bullet = \exp(\Psi^\bullet) \times I^\bullet$. On a $C^\emptyset = 0$. Pour un mot n de longueur 1 on a :

$$C^n = (\exp(\Psi^\bullet))^\emptyset I^n = 1.$$

De manière générale, pour un mot de longueur r ,

$$C^n = (\exp(\Psi^\bullet))^{n^1, \dots, n^{r-1}} I^{n^r} = \begin{cases} 0 & \text{si au moins un des } (\omega_i)_{1 \leq i \leq r-1} \text{ est nul,} \\ \frac{1}{(r-1)! \omega_1 \dots \omega_{r-1}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.2.3. *...un deuxième...*— En notant $D^\bullet = C^\bullet \times \exp(-\Psi^\bullet)$, on a $D^\emptyset = 0$, puis pour un mot de longueur 1, $D^n = C^n = 1$.

Pour un mot \underline{n} de longueur $r \geq 2$ on a :

$$D^{n^1, \dots, n^r} = C^{n^1} (\exp(-\Psi^\bullet))^{n^2, \dots, n^r} + C^{n^1, n^2} (\exp(-\Psi^\bullet))^{n^3, \dots, n^r} + \dots + C^{n^1, \dots, n^r}.$$

On a alors plusieurs cas :

- si au moins un ω_i est nul, $1 \leq i \leq r-1$, alors tous les C^{n^1, \dots, n^j} , avec $j \geq i+1$ sont nuls (voir le calcul de C^n), ainsi que tous les $(\exp(-\Psi^\bullet))^{n^k, \dots, n^r}$ pour $k \leq i$. Donc $D^n = C^{n^1, \dots, n^i} (\exp(-\Psi^\bullet))^{n^{i+1}, \dots, n^r}$. On peut donc calculer D^n :

$$D^n = \begin{cases} 0 & \text{si un autre des } (\omega_l)_{\substack{1 \leq l \leq r \\ l \neq i}} \text{ est nul;} \\ \frac{1}{(i-1)! \omega_1 \dots \omega_{i-1}} \times \frac{(-1)^{r-i}}{(r-i)! \omega_{i+1} \dots \omega_r} & \text{si aucun autre } \omega_l, l \neq i \text{ n'est nul;} \end{cases}$$

- si ω_r est nul, $D^{\underline{n}} = C^{n^1, \dots, n^r}$ donc :

$$D^{\underline{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si un des } (\omega_l)_{1 \leq l \leq r-1} \text{ est nul;} \\ \frac{1}{(r-1)! \omega_1 \cdots \omega_{r-1}} & \text{sinon;} \end{cases}$$

- si aucun ω_i n'est nul alors

$$\begin{aligned} D^{n^1, \dots, n^r} &= \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)! \omega_2 \cdots \omega_r} + \frac{1}{\omega_1} \times \frac{(-1)^{r-2}}{(r-2)! \omega_3 \cdots \omega_r} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(r-2)! \omega_1 \cdots \omega_{r-2}} \times \frac{-1}{\omega_r} + \frac{1}{(r-1)! \omega_1 \cdots \omega_{r-1}}, \end{aligned}$$

soit

$$D^{n^1, \dots, n^r} = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{r-k} \omega_k}{(k-1)! (r-k)!}.$$

3.2.2.4. *...un troisième...* — Calculons maintenant le moule $E^\bullet = \nabla \exp(-\Psi^\bullet)$: grâce aux calculs effectués sur l'exponentielle, et par définition de la dérivation ∇ , on a $E^\emptyset = 0$ et pour un mot de longueur $r \geq 1$:

$$E^{n^1, \dots, n^r} = (\omega_1 + \cdots + \omega_r) (\exp(-\Psi^\bullet))^{\underline{n}},$$

donc

$$E^{\underline{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si un au moins des } (\omega_i)_{1 \leq i \leq r} \text{ est nul;} \\ \frac{(\omega_1 + \cdots + \omega_r) (-1)^r}{r! \omega_1 \cdots \omega_r} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.2.5. *...et le quatrième pour finir.* — Enfin, il reste à calculer le produit moulien $F^\bullet = \exp(\Psi^\bullet) \times E^\bullet$; tout d'abord, $F^\emptyset = 0$; pour un mot de longueur 1, $F^n = E^n$ donc $F^n = 0$ si $\omega(n) = 0$ et $F^n = -1$ si $\omega(n) \neq 0$; enfin, pour un mot \underline{n} de longueur $r \geq 1$ on a :

$$F^{n^1, \dots, n^r} = (\exp(\Psi^\bullet))^{\emptyset} E^{\underline{n}} + (\exp(\Psi^\bullet))^{n^1} E^{n^2, \dots, n^r} + \cdots + (\exp(\Psi^\bullet))^{n^1, \dots, n^{r-1}} E^{n^r},$$

donc grâce aux calculs de $\exp(\Psi^\bullet)$ et de E^\bullet , $F^{\underline{n}}$ est nul si un au moins des ω_i est nul. Si aucun ω_i n'est nul, alors :

$$\begin{aligned} F^{n^1, \dots, n^r} &= \frac{(\omega_1 + \cdots + \omega_r) (-1)^r}{r! \omega_1 \cdots \omega_r} + \frac{1}{\omega_1} \times \frac{(\omega_2 + \cdots + \omega_r) (-1)^{r-1}}{(r-1)! \omega_2 \cdots \omega_r} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(r-1)! \omega_1 \cdots \omega_{r-1}} \times \frac{(-1) \omega_r}{\omega_r}, \end{aligned}$$

soit, en définitive :

$$F^n = \begin{cases} 0 & \text{si un des } \omega_i \text{ est nul,} \\ \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{r-k+1} (\omega_k + \cdots + \omega_r)}{(r-k+1)!(k-1)!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2.2.6. *Expression du moule cherché.* — Comme $\text{Sam}^\bullet = F^\bullet + D^\bullet$, on a déjà

$$\text{Sam}^\emptyset = F^\emptyset + D^\emptyset = 0.$$

Pour un mot de longueur 1, on obtient :

$$\text{Sam}^n = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(n) = 0, \\ 0 & \text{si } \omega(n) \neq 0. \end{cases}$$

Ainsi on a bien supprimé les termes non résonnants du champ X dans le champ X_{sam} .

De plus, pour un mot \underline{n} de longueur $r \geq 2$, d'après ce qui précède, on a :

- si il existe i et j , deux indices distincts de $\{1, \dots, r\}$ tels que $\omega_i = \omega_j = 0$ alors $D^n = F^n = 0$ donc

$$\text{Sam}^n = 0.$$

- si un ω_i exactement est nul, $F^n = 0$ et

$$\text{Sam}^n = \frac{1}{(i-1)!\omega_1 \cdots \omega_{i-1}} \cdot \frac{(-1)^{r-1}}{(r-i)!\omega_{i+1} \cdots \omega_r}.$$

- si tous les $(\omega_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont non nuls, alors

$$D^n = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{r-k} \omega_k}{(k-1)!(r-k)!},$$

$$F^n = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{r-k+1} (\omega_k + \cdots + \omega_r)}{(r-k+1)!(k-1)!},$$

et

$$\text{Sam}^n = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{r-k} (\omega_k(r-k) - \omega_{k+1} - \cdots - \omega_r)}{(k-1)!(r-k+1)!}.$$

On obtient finalement le résultat suivant :

Lemme 3.3. — *Le moule Sam^\bullet est défini par*

- $\text{Sam}^\emptyset = 0$;
- $\text{Sam}^n = 0$ si $\omega(n) \neq 0$ et $\text{Sam}^n = 1$ si $\omega(n) = 0$ pour les mots de longueur 1 ;

- si $r = l(\underline{n}) \geq 2$ et $\omega_1, \dots, \omega_r$ sont non nuls, alors

$$\text{Sam}^{\underline{n}} = \frac{1}{\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{k=1}^r \frac{(-1)^{r-k} (\omega_k(r-k) - \omega_{k+1} - \cdots - \omega_r)}{(k-1)!(r-k+1)!}.$$

- Si un seul ω_i s'annule,

$$\text{Sam}^{\underline{n}} = \frac{(-1)^{r-1}}{(i-1)!(r-i)!\omega_1 \cdots \omega_{i-1}\omega_{i+1} \cdots \omega_r},$$

- Enfin si plus d'un ω_i s'annule, alors $\text{Sam}^{\underline{n}} = 0$.

On supprime ainsi les termes non résonnants du champ X de départ, mais on en introduit d'autres *a priori*. En effet en réécrivant $\sum_{\bullet} \text{Sam}^{\bullet} B_{\bullet}$ comme une somme d'opérateurs différentiels homogènes en degré $\sum_{w \in W} \Delta_w$ (avec $W = \{\|\underline{n}\|, \underline{n} \in A(X)^*\}$ comme on l'a fait lorsque l'on a introduit la composée de deux moules), des termes non résonnants (tels que $\lambda \cdot \|\underline{n}\| \neq 0$) peuvent très bien apparaître. Pour obtenir la forme voulue (ne comportant que des termes résonnants), on doit itérer le processus, ce qui revient à composer le moule Sam^{\bullet} avec lui-même une infinité de fois.

Ainsi, on obtient le théorème de POINCARÉ-DULAC, avec une amélioration puisque l'on a la forme (si l'on veut bien la calculer...) explicite du normalisateur, donc du changement de variable :

Théorème 3.4. — *Le champ sous forme bien préparée*

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} I^{\bullet} B_{\bullet}$$

est formellement conjugué au champ

$$X_{\text{tram}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Tram}^{\bullet} B_{\bullet},$$

qui est une forme prénormale continue, c'est-à-dire que pour un mot de longueur 1, $\text{Tram}^{\underline{n}} = 0$ si $\omega(\underline{n}) \neq 0$. De plus on a l'expression du moule Tram^{\bullet} pour un mot \underline{n} de longueur r quelconque :

$$\text{Tram}^{\underline{n}} = (\text{Sam}^{\bullet})^{\circ r},$$

où $(\text{Sam}^{\bullet})^{\circ r} = \underbrace{\text{Sam}^{\bullet} \circ \cdots \circ \text{Sam}^{\bullet}}_{r \text{ fois}}$.

CHAPITRE 4

PROBLÈMES DE CONVERGENCE

ON étudie dans ce chapitre la convergence des objets formels définis dans le chapitre précédent. L'algèbre des séries formelles sur \mathbb{C}^ν est toujours notée $\mathbb{C}[[x]]$ et $\mathbb{C}\{x\}$ l'algèbre des fonctions *analytiques* en 0 sur \mathbb{C}^ν .

On aura l'occasion de chercher à quelle condition un champ de vecteurs analytique est linéarisable de manière analytique. On aura ainsi une version analytique des théorèmes de POINCARÉ, qui nous mènera jusqu'au théorème de BRJUNO. En prélude à ce dernier nous présenterons la *méthode d'arborification* de Jean ÉCALLE pour étudier la convergence de séries d'opérateurs différentiels. Cependant, l'étude de cette convergence nécessite tout d'abord la définition d'une norme (on suit ici ÉCALLE [3]) :

Définition 4.1. — Soient U et V deux voisinages compacts de 0 dans \mathbb{C}^ν , tels que $V \subset U$. Pour tout germe de fonction φ de $\mathbb{C}\{x\}$ en 0, on définit :

$$\|\varphi\|_U = \sup_{x \in U} |\varphi(x)|,$$

et pour tout opérateur P de $\mathbb{C}\{x\}$ dans lui-même, on définit également :

$$\|P\|_{U,V} = \sup_{\|\varphi\|_U \leq 1} \|P\varphi\|_V.$$

On dira alors que la série d'opérateurs $\sum_{\underline{n}} P_{\underline{n}}$ est *normalement convergente* si la famille $(\|P_{\underline{n}}\|)_{\underline{n}}$ est sommable pour une paire (U, V) au moins.

Enfin, pour le champ

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n,$$

de partie linéaire $X_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i \partial_{x_i}$, on notera Ω l'ensemble $\{\lambda \cdot n, n \in A(X)\}$ et les complexes éléments de Ω seront toujours notés $\omega(n)$ ou ω s'il n'y a pas d'ambiguïté. Pour un mot $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ on aura donc $\omega(\underline{n}) = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ et $\|\omega(\underline{n})\| = \omega_1 + \dots + \omega_r$. Les degrés (ou lettres) n de $A(X)$ sont toujours des

ν -uplets d'entiers positifs ou nul, sauf au plus un valant -1 , de somme $|n| = n_1 + \cdots + n_\nu \geq 1$.

4.1. Convergence dans les séries de POINCARÉ

On s'intéresse ici à la convergence de la série d'opérateurs différentiels définissant Θ^\bullet vue dans le théorème de POINCARÉ 3.1. Cela dépend de la grosseur des coefficients Θ^n , en particulier de la vitesse à laquelle les $\omega(\underline{n})$ peuvent s'approcher de 0 quand $\|\underline{n}\|$ augmente. Ce dernier phénomène dépend essentiellement de la répartition dans le plan complexe des valeurs propres du spectre λ de la partie linéaire du champ. C'est ce qui motive la définition suivante :

Définition 4.2. — Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ une collection de valeurs propres dans \mathbb{C}^ν . On définit :

- le *domaine de Poincaré* \mathcal{P} comme l'ensemble des λ dont l'enveloppe convexe ne contient pas 0.
- le *domaine de Siegel* \mathcal{S} , comme le complémentaire du précédent.

On voit que si λ est dans le domaine de Poincaré \mathcal{P} , les ω auront tendance à s'éloigner de 0 (car ce sont des combinaisons $\sum_i \lambda_i n_i$ d'entiers *positifs* sauf au plus un valant -1); *a contrario* si λ est dans \mathcal{S} il sera beaucoup plus facile aux ω de se rapprocher de 0.

4.1.1. En l'absence de petits diviseurs. — Nous commençons par nous placer dans le cas où les ω ne peuvent pas trop s'approcher de 0 :

Définition 4.3. — On dira que le champ X ne contient pas de petits diviseurs s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega, |\omega| \geq C.$$

Remarquons que si le champ X ne contient pas de petits diviseurs, il est nécessairement non résonnant donc formellement linéarisable d'après le théorème de POINCARÉ 3.1 page 17. Une condition suffisante pour que le changement de variable soit analytique est donnée par le théorème suivant, également dû à POINCARÉ.

Théorème 4.4. — *Soit un champ de vecteurs X ne contenant pas de petits diviseurs, et dont le spectre λ est dans le domaine de Poincaré. Alors il existe un changement de variable analytique qui linéarise le champ au voisinage de 0 et ce*

changement de variable est donné par le normalisateur Θ . De plus, $\Theta = \sum_{\bullet} \Theta \bullet B_{\bullet}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}\{x\}$, et on a :

$$\Theta^{\underline{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \cdots + \omega_r)},$$

pour un mot $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ de longueur r .

Si on démontre que Θ est un automorphisme de $\mathbb{C}\{x\}$, alors le changement de variable h est aussi dans $\mathbb{C}\{x\}$, car $h = \Theta(\text{Id})$. Il s'agit donc de prouver que la série définissant Θ est normalement convergente, au sens de la définition 4.1.

Démonstration. — On écrit comme d'habitude le champ

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n,$$

et on rappelle que, le champ n'étant pas résonnant, il est linéarisable par le normalisateur

$$\Theta = \sum_{\bullet} \Theta \bullet B_{\bullet}$$

dont les coefficients sont définis par :

$$\Theta^{\underline{n}} = \frac{1}{\omega_1(\omega_1 + \omega_2) \cdots (\omega_1 + \cdots + \omega_r)},$$

pour tout mot de $A(X)^*$ de longueur r .

Observons alors que les λ_i étant dans \mathcal{P} , ils sont tous dans un même demi-plan ouvert $P_{\theta} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(ze^{i\theta}) > 0\}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, quitte à effectuer une rotation, on peut les considérer tous dans le demi-plan $\{\text{Re}(z) > 0\}$. Il existe donc une constante $\rho > 0$ telle que pour tout i $\text{Re}(\lambda_i) > \rho$. On peut alors en déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de ω dans Ω tels que $\text{Re}(\omega) < 0$. En effet, un tel ω s'écrit $\lambda \cdot n$ avec, par exemple, $n_s = -1$ pour un certain s dans $\{1, \dots, \nu\}$, les autres n_i étant positifs. On a alors :

$$0 > \text{Re}(\omega) = -\text{Re}(\lambda_s) + \sum_{i \neq s} n_i \text{Re}(\lambda_i),$$

donc

$$\text{Re}(\lambda_s) > \left(\sum_{i \neq s} n_i \right) \rho,$$

et il n'y a qu'un nombre fini de $n_i, i \neq s$ vérifiant cette inégalité.

On peut alors effectuer un changement de variable polynomial (car il n'y a qu'un nombre fini de ω à éliminer) pour obtenir le champ X sous la forme :

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in \mathfrak{A}(X)} B_n,$$

où $\mathfrak{A}(X)$ est le nouvel alphabet, tel que

$$\forall n \in \mathfrak{A}(X), \operatorname{Re}(\omega(n)) > 0.$$

Notons alors S^\bullet indifféremment pour Θ^\bullet ou pour $(\Theta^{-1})^\bullet$. ÉCALLE donne les inégalités suivantes dans [3], pour $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$:

$$|S^{\underline{n}}| \leq \frac{1}{r! C_1^r} \quad C_1 > 0 \quad (4.1)$$

$$\|B_{\underline{n}}\|_{U,V} \leq r! \|B_{n^1}\|_{U,V} \cdots \|B_{n^r}\|_{U,V} C_2^{N(\underline{n})} \quad C_2 > 0 \quad (4.2)$$

$$\|B_n\|_{U,V} \leq (C_{U,V})^{|\underline{n}|} \quad C_{U,V} > 0 \quad (4.3)$$

$$c(N) \leq (C_3)^{N(\underline{n})} \quad C_3 > 0 \text{ dépend de } V \quad (4.4)$$

où $|\underline{n}| = n_1 + \dots + n_r$ et $N(\underline{n}) = |n^1| + \dots + |n^r|$ est le *poids* de \underline{n} ; $c(N)$ est le nombre de mots de poids N .

Supposons ces inégalités prouvées. On peut compléter la preuve (inexistante dans [3]...) d'ÉCALLE. Pour un bon choix de (U, V) on peut rendre $C_{U,V}$ aussi petite qu'on veut, et on a, pour tout mot \underline{n} de longueur r et de poids N :

$$\begin{aligned} \|S^{\underline{n}} B_{\underline{n}}\| &\leq \frac{1}{r! C_1^r} r! \|B_{n^1}\|_{U,V} \cdots \|B_{n^r}\|_{U,V} C_2^N \\ &\leq \frac{1}{C_1^r} (C_{U,V})^{rN} C_2^N \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\substack{l(\underline{n})=r \\ N(\underline{n})=N}} S^{\underline{n}} B_{\underline{n}} \right\|_{U,V} &\leq \sum_{\substack{l(\underline{n})=r \\ N(\underline{n})=N}} \|S^{\underline{n}} B_{\underline{n}}\|_{U,V} \\ &\leq \frac{c(N)}{C_1^r} C_{U,V}^{rN} C_2^N \\ &\leq (C_3 C_2)^N \frac{(C_{U,V}^r)^N}{C_1^r}. \end{aligned}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$ et r_0 fixés on peut choisir (U_0, V_0) tel que $C_{U_0, V_0} < \varepsilon^{1/r_0} \leq \varepsilon^{1/r}$ pour tout $r \geq r_0$. On a donc :

$$\sum_{\substack{l(\underline{n})=r \\ N(\underline{n})=N}} \|S^{\underline{n}} B_{\underline{n}}\| \leq \frac{(C_3 C_2 \varepsilon)^N}{C_1^r} \quad (4.5)$$

Si $C_1 > 1$ le dénominateur tend vers $+\infty$ lorsque r tend vers $+\infty$ et la série $\sum \bullet S^{\bullet} B_{\bullet}$ est normalement convergente au sens de la définition 4.1 ; si $C_1 < 1$, comme on a toujours $r \leq N$, on a

$$\frac{1}{C_1^r} \leq \frac{1}{C_1^N}. \quad (4.6)$$

Le cas $C_1 = 1$ ne posant pas de problème, on a dans tous les cas la convergence normale de la série $\sum \bullet S^{\bullet} B_{\bullet}$ et donc un changement de variable analytique. Le théorème est prouvé (ou presque) !... \square

Il s'agit maintenant de démontrer les inégalités (4.1) à (4.4).

Démonstration de (4.1). — Puisque l'on s'est ramené à des $\omega(n)$ de partie réelle strictement positive, comme on a supposé que, pour tout ω , $|\omega| \geq C > 0$, alors on a :

$$\forall \omega \in \mathfrak{A}(X), \operatorname{Re}(\omega) \geq C.$$

Ainsi, pour tout r ,

$$\begin{aligned} |\omega_1 + \cdots + \omega_r| &\geq \operatorname{Re}(\omega_1 + \cdots + \omega_r) \\ &\geq rC. \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$|S^{\underline{n}}| \leq \frac{1}{r! C^r}. \quad \square$$

4.1.2. En présence de petits diviseurs. — On a la proposition suivante :

Proposition 4.5. — *En présence de petits diviseurs, les séries mouliennes de Θ et Θ^{-1} ne sont pas, en général, normalement convergentes.*

Démonstration. — À démontrer ! \square

Bien que les séries mouliennes définissant les normalisateurs Θ ne soient pas, en général, normalement convergentes, Jean ÉCALLE a proposé une autre manière de compter, ou de regrouper les termes : c'est la *méthode d'arborification*. Cette méthode permet d'améliorer la compréhension de la convergence ; on peut, grâce à elle, démontrer le théorème de BRJUNO.

4.2. L'arborification

L'arborification est définie de manière tout à fait abstraite dans ÉCALLE ([3]). On préfère s'inspirer ici de la présentation faite par Jacky CRESSON dans [5] et surtout des nombreuses discussions avec lui à ce sujet.

Définition 4.6. — Pour tout ν -uplet $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_\nu)$ d'entiers positifs, on notera ∂_x^δ pour $\partial_{x_1}^{\delta_1} \cdots \partial_{x_\nu}^{\delta_\nu}$ et on dira que ∂_x^δ est d'ordre de dérivation $|\delta| = \delta_1 + \cdots + \delta_\nu$. On dira alors qu'un opérateur différentiel

$$B = \sum_{\delta} b_{\delta}(x) \partial_x^{\delta}$$

est homogène en ordre de dérivation d'ordre d si pour tout δ on a $|\delta| = d$.

4.2.1. Exemples. — On cherche à regrouper les termes de la série

$$\sum_{\underline{n} \in A(X)^*} \Theta^{\underline{n}} B_{\underline{n}}$$

d'une autre manière. Pour cela, on commence par regarder la composition de deux opérateurs différentiels homogènes respectivement de degrés n^1 et n^2 : soient $B_1 = \sum_{i=1}^{\nu} B_1(x_i) \partial_{x_i}$ et $B_2 = \sum_{j=1}^{\nu} B_2(x_j) \partial_{x_j}$ deux tels opérateurs. On peut écrire leur composée $B_{(1,2)} = B_1 B_2$ de la manière suivante :

$$B_{(1,2)} = \sum_{i,j} B_1(x_i) \partial_{x_i} [B_2(x_j)] \partial_{x_j} + \sum_{i,j} B_1(x_i) B_2(x_j) \partial_{x_i x_j}^2. \quad (4.7)$$

On voit que le premier terme de la somme n'augmente pas en ordre de dérivation et que B_1 n'agit que sur les coefficients de B_2 , tandis que le deuxième terme voit son ordre augmenter mais son coefficient identique. De plus, chaque terme définit un opérateur différentiel homogène de degré $n^1 + n^2$.

Ainsi l'ordre de dérivation de la composée d'opérateurs différentiels homogènes $B_{\underline{n}} = B_{n_1} \cdots B_{n_r}$ augmente avec r . La première idée de l'arborification est de chercher à écrire cette composée comme une somme d'opérateurs différentiels homogènes en ordre et en degré, donc de séparer les termes dont l'ordre de dérivation n'augmente pas des autres. Dans l'écriture (4.7), on note

$$B_{(1,2)<} = \sum_{i,j} B_1(x_i) \partial_{x_i} [B_2(x_j)] \partial_{x_j}$$

le terme où B_1 agit sur le coefficient de B_2 et

$$B_{1\oplus 2} = \sum_{i,j} B_1(x_i) B_2(x_j) \partial_{x_i x_j}^2$$

le terme où B_1 fait augmenter l'ordre de dérivation. On peut remarquer ici que $B_{1\oplus 2} = B_{2\oplus 1}$ (d'après le théorème de SCHWARZ). On a ainsi des symétries possibles sur ces opérateurs.

La problématique de la méthode d'arborification est donc la suivante : on part d'une considération d'analyse (regrouper les termes de même ordre de dérivation) que l'on traite de manière algébrique (utiliser les symétries).

Considérons maintenant la composée $B_{n^1, n^2, n^3} = B_{n^1} B_{n^2} B_{n^3}$ de trois opérateurs différentiels homogènes, avec

$$B_{n^1} = \sum_{i=1}^{\nu} B_{n^1}(x_i) \partial_{x_i},$$

$$B_{n^2} = \sum_{j=1}^{\nu} B_{n^2}(x_j) \partial_{x_j},$$

et

$$B_{n^3} = \sum_{k=1}^{\nu} B_{n^3}(x_k) \partial_{x_k}.$$

On a donc :

$$B_{n^1, n^2, n^3} = B_{n^1} \left(\sum_{j,k} B_{n^2}(x_j) \partial_{x_j} [B_{n^3}(x_k)] \partial_{x_k} + \sum_{i,j} B_{n^2}(x_j) B_{n^3}(x_k) \partial_{x_j x_k}^2 \right)$$

$$= \sum_{i,j,k} B_{n^1}(x_i) \left(\partial_{x_i} [B_{n^2}(x_j)] \partial_{x_j} [B_{n^3}(x_k)] \partial_{x_k} \right. \quad (4.8)$$

$$+ B_{n^2}(x_j) \partial_{x_i x_j}^2 [B_{n^3}(x_k)] \partial_{x_k} \quad (4.9)$$

$$+ B_{n^2}(x_j) \partial_{x_j} [B_{n^3}(x_k)] \partial_{x_i x_k}^2 \quad (4.10)$$

$$+ \partial_{x_i} [B_{n^2}(x_j)] B_{n^3}(x_k) \partial_{x_j x_k}^2 \quad (4.11)$$

$$+ B_{n^2}(x_j) \partial_{x_i} [B_{n^3}(x_k)] \partial_{x_j x_k}^2 \quad (4.12)$$

$$+ B_{n^2}(x_j) B_{n^3}(x_k) \partial_{x_i x_j x_k}^3 \quad (4.13)$$

On a deux termes d'ordre 1, trois d'ordre 2 et un d'ordre 3. Cependant pour deux termes de même ordre, les coefficients ne sont pas les mêmes (ne proviennent pas de la même « manière » de dériver c'est-à-dire du même coefficient). En utilisant

le même principe de notation que dans (4.7), on écrit successivement :

$$(4.8) = B_{(n^1 n^2 n^3) <}$$

$$(4.9) = B_{((n^2 \oplus n^1) n^3) <}$$

$$(4.10) = B_{(n^2 n^3) < \oplus n^1}$$

$$(4.11) = B_{(n^1 n^2) < \oplus n^3}$$

$$(4.12) = B_{(n^1 n^3) < \oplus n^2}$$

$$(4.13) = B_{n^1 \oplus n^2 \oplus n^3}$$

Plus généralement, considérons deux opérateurs différentiels homogènes en degré et en ordre :

$$B_1 = \sum_{\delta} b_{\delta}(x) \partial_x^{\delta} \text{ avec } |\delta| = d$$

et

$$B_2 = \sum_{\gamma} c_{\gamma}(x) \partial_x^{\gamma} \text{ avec } |\gamma| = e$$

où les b_{δ} et c_{γ} sont des coefficients dans $\mathbb{C}[[x]]$. On note alors

$$B_{(12) <} = \sum_{\delta, \gamma} b_{\delta}(x) \partial_x^{\delta} [c_{\gamma}(x)] \partial_x^{\gamma}$$

et

$$B_{1 \oplus 2} = \sum_{\delta, \gamma} b_{\delta}(x) c_{\gamma}(x) \partial_x^{\delta + \gamma}.$$

Définition 4.7. — Une suite construite sur (w_1, \dots, w_r) avec les opérations ci-dessus $<$ et \oplus est notée $\underline{\hat{w}}$. On dit que $\underline{\hat{w}}$ est *arborescente*. On définit également $l(\underline{\hat{w}})$ comme la longueur de cette suite. On notera par ailleurs $\text{Arb}(X)$ l'ensemble des suites arborescentes formées sur l'alphabet $A(X)$ avec les deux opérations $<$ et \oplus .

Rappelons l'idée de départ : décomposer $B_{\underline{w}}$ en somme d'opérateurs différentiels homogènes en ordre de dérivation. On a donc l'égalité suivante :

$$\sum_{\underline{n} \in A(X)} \Theta^{\underline{n}} B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{\hat{w}} \in \text{Arb}(X)} \Theta^{\underline{\hat{w}}} B_{\underline{\hat{w}} < }.$$

Définition 4.8. — On note Θ^{\bullet} le moule arborifié de Θ^{\bullet} c'est-à-dire le coefficient de $B_{\underline{\hat{w}} < }$ dans la décomposition ci-dessus.

Si $\underline{n} \in A(X)^*$, on notera $\text{Arb}(\underline{n})$ l'ensemble des $\underline{\hat{a}}$ de $\text{Arb}(X)$ intervenant dans la décomposition de $B_{\underline{n}}$. On a donc, si $\underline{n} \in A(X)$,

$$B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{\hat{a}} \in \text{Arb}(\underline{n})} B_{\underline{\hat{a}}}.$$

Le problème est maintenant de trouver la décomposition inverse, c'est-à-dire $B_{\underline{\hat{a}}}$ étant donné avec $\underline{\hat{a}} \in \text{Arb}(X)$, quels sont les opérateurs $B_{\underline{n}}$ avec $\underline{n} \in A(X)$ tels que dans leur décomposition, ou plutôt leur *arborification*, apparaisse $B_{\underline{\hat{a}}}$?

Si on note $X(\underline{\hat{a}})$ l'ensemble des mots de $A(X)^*$ tels que

$$\underline{n} \in X(\underline{\hat{a}}) \text{ si et seulement si } \underline{\hat{a}} \in \text{Arb}(\underline{n}),$$

alors

$$B_{\underline{\hat{a}}} = \sum_{\underline{n} \in X(\underline{\hat{a}})} B_{\underline{n}},$$

donc

$$\Theta^{\underline{\hat{a}}} = \sum_{\underline{n} \in X(\underline{\hat{a}})} \Theta^{\underline{n}}.$$

Il s'agit maintenant d'expliciter ces dernières formules ; pour cela nous allons redéfinir l'arborification formellement.

4.2.2. Définition formelle de l'arborification. — Jusqu'à présent, on a toujours considéré les moules indexés par des suites totalement ordonnées (les éléments de $A(X)^*$). L'inconvénient est que pour un mot $\underline{n} = (n^1, \dots, n^r)$ le nombre de termes de $B_{\underline{n}}$ quand on l'écrit comme une somme d'opérateurs homogènes en ordre (et en degré) est $r!$, où r est la longueur de \underline{n} .

Lemme 4.9. — *La composée $B_{\underline{n}}$ où \underline{n} est un mot de longueur r est une somme de $r!$ termes constituant des opérateurs différentiels homogènes en degré et en ordre de dérivation.*

Démonstration. — On prouve le résultat par récurrence sur r : on a déjà vu qu'il était vrai pour $r = 1, 2, 3$. Supposons le prouvé pour un r fixé et considérons une composée $B_1 \cdots B_{r+1}$ de $r + 1$ opérateurs. On peut l'écrire $B_1(B_2 \cdots B_{r+1})$ et $B_2 \cdots B_{r+1}$ est une somme de $r!$ termes par hypothèse de récurrence, et ces termes ont r coefficients (issus de chacun des opérateurs) ; on fait agir B_1 sur chacun de ces termes, qui produit un terme avec les mêmes coefficients et un ordre de dérivation supérieur, puis r termes, chacun provenant de la dérivation d'un des coefficients, les autres étant inchangés. Au total, B_1 produit $r + 1$ termes pour chacun des $r!$ termes de la somme $B_2 \cdots B_r$, soit $(r + 1) \times r! = (r + 1)!$. \square

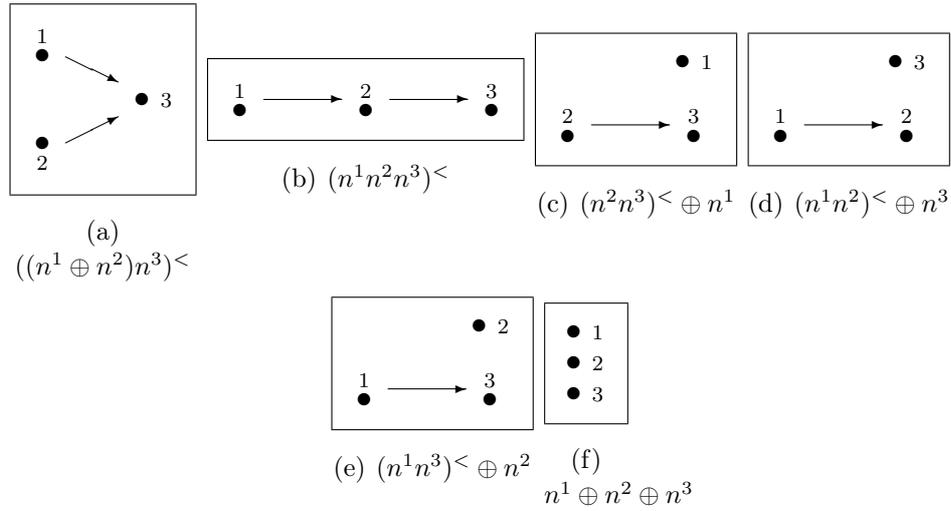


FIGURE 1. Un exemple d'arbres

La technique d'arborification permet de corriger cette croissance trop rapide, qui fait diverger les séries mouliennes, et de mieux contrôler ce nombre de termes.

4.2.2.1. Suites arborescentes. —

Définition 4.10. — On définit une *suite arborescente* sur $A(X)$ comme une suite $\check{n} = (n^1, \dots, n^r)^<$ d'éléments de $A(X)$, avec sur les indices un ordre partiel particulier appelé *ordre arborescent* : chaque i de $\{1, \dots, r\}$ possède au plus un conséquent (c'est-à-dire, si i est fixé, il existe au plus un élément plus grand que i pour l'ordre partiel sur la suite) noté i_+ . De plus, on note $\check{n}_1 \oplus \check{n}_2$ l'union disjointe de \check{n}_1 et \check{n}_2 ; dans cette suite, l'ordre partiel interne est conservé, mais les éléments de \check{n}_1 et \check{n}_2 sont incomparables.

Un \check{n} est dit *irréductible* s'il ne possède pas de décomposition non triviale $\check{n} = \check{n}_1 \oplus \check{n}_2$, autrement dit s'il possède un plus grand élément.

On peut représenter ces suites par des arbres : on l'a fait pour la composée $B_1 B_2 B_3$, voir figure 1.

On peut également donner une définition formelle du *moule arborescent* $S^{\check{n}}$: c'est une suite de coefficients complexes $S^{\check{n}}$ indexée par les suites arborescentes.

4.2.2.2. Arborification des opérateurs. —

On reprend la définition donnée par Bruno VALLET dans sa thèse [8].

Définition 4.11. — Pour une suite arborescente donnée $\check{n} = (n^1, \dots, n^r)^<$, on définit $B_{\check{n}}$ comme étant l'unique opérateur vérifiant les trois propriétés suivantes :

•

$$B_{\underline{n}}^<(\varphi\psi) = \sum_{\underline{n}_1 \oplus \underline{n}_2 = \underline{n}} \left(B_{\underline{n}_1}^<\varphi \right) \left(B_{\underline{n}_2}^<\psi \right).$$

• Si la suite \underline{n} se décompose en exactement d suites irréductibles non vides :

$$\underline{n} = \underline{n}_1 \oplus \cdots \oplus \underline{n}_d,$$

alors $B_{\underline{n}}^<$ est un opérateur différentiel homogène d'ordre de dérivation d .• Si $\underline{n} = \underline{n}_1 \cdot n_0$ alors

$$B_{\underline{n}}^< = B_{\underline{n}_1}^< B_{n_0}.$$

Ces trois propriétés définissent bien $B_{\underline{n}}^<$ qui se calcule par récurrence de la manière suivante :

$$B_{\underline{n}}^< = \sum_{i=1}^{\nu} (B_n(x_i)) \partial_{x_i} \text{ si } l(\underline{n}) = 1,$$

$$B_{\underline{n}}^< = \sum_{i=1}^{\nu} B_{\underline{n}_1}^< (B_{n_0}(x_i)) \partial_{x_i} \text{ si } \underline{n} = \underline{n}_1 \cdot n_0,$$

$$B_{\underline{n}}^< = \frac{1}{d_1! \cdots d_s!} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_d \leq \nu \\ 1 \leq j_1, \dots, j_d \leq d}} \left(B_{\underline{n}_{j_1}}^<(x_{i_1}) \right) \cdots \left(B_{\underline{n}_{j_d}}^<(x_{i_d}) \right) \partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_d}}.$$

où d_i est le nombre de suites arborescentes identiques \underline{n}_i qui interviennent dans la décomposition de $\underline{n} = \underline{n}_1 \oplus \cdots \oplus \underline{n}_d$. Ainsi, si l'on applique $B_{\underline{n}}^<$ à une fonction φ , B_{n_j} agit sur φ si n_j est maximal et B_{n_i} agit uniquement sur les coefficients de l'opérateur $B_{n_{i+}}$.

4.2.2.3. *Principaux résultats.* — On a vu que

$$\sum_{\underline{n} \in A(X)} S^{\underline{n}} B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{a} \in \text{Arb}(X)} S^{\underline{a}} B_{\underline{a}}^<,$$

et que

$$\Theta^{\underline{a}} = \sum_{\underline{n} \in X(\underline{a})} \Theta^{\underline{n}}.$$

Quels sont les $B_{\underline{n}}$ qui, dans leur arborification donnent $B_{\underline{a}}^<$? En d'autres termes comment obtient-on une suite arborifiée $\underline{a} = (a^1, \dots, a^r)^<$ donnée à partir d'une suite ordinaire (totalement ordonnée) $\underline{n} = (n^1, \dots, n^{r'})$? Tout d'abord, il faut que $l(\underline{n}) = l(\underline{a})$ soit $r = r'$ (une composée de r' opérateurs donne des termes indexés par des suites arborescentes de longueur r'). Ensuite il faut que ce soient

les mêmes lettres qui interviennent dans $\underline{\hat{a}}$ que dans \underline{n} (on ne peut pas faire apparaître d'autres opérateurs différentiels que ceux donnés par $\underline{\hat{a}}$). Ainsi une suite arborescente $\underline{\hat{a}} = (a^1, \dots, a^r)^<$ provient nécessairement d'une permutation de l'ensemble $\{a^1, \dots, a^r\}$. Cependant toutes les permutations de cet ensemble ne conviennent pas. En effet, le type de permutation σ que l'on cherche doit préserver l'ordre partiel de $\underline{\hat{a}}$ (ce qui correspond à l'ordre dans lequel les opérateurs sont composés); finalement σ doit vérifier :

$$\begin{aligned} \text{si } i_1 < i_2 \text{ dans } \underline{\hat{a}}, \text{ alors } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) \text{ dans } \underline{n} \\ \text{et } n^j = a^i \text{ si } j = \sigma(i). \end{aligned}$$

Pour une suite arborescente $\underline{\hat{a}} = (a^1, \dots, a^r)^<$ (partiellement ordonnée) et une suite $\underline{n} = (n^1, \dots, n^{r'})$ (totalement ordonnée) notons alors $\text{proj}\left(\frac{\underline{\hat{a}}}{\underline{n}}\right)$ le nombre de bijections de $\{1, \dots, r\}$ dans $\{1, \dots, r'\}$ (nul si $r \neq r'$) vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{si } i_1 < i_2 \text{ dans } \underline{\hat{a}}, \text{ alors } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) \text{ dans } \underline{n} \\ \text{et } n^j = a^i \text{ si } j = \sigma(i). \end{aligned}$$

Alors on a la relation

$$S^{\underline{\hat{a}}} = \sum_{\underline{n} \in A(X)} \text{proj}\left(\frac{\underline{\hat{a}}}{\underline{n}}\right) S^{\underline{n}},$$

pour tout moule S^\bullet . En fait, la somme ne s'effectue que sur les mots \underline{n} qui possèdent les mêmes lettres que $\underline{\hat{a}}$. De même,

$$B_{\underline{n}} = \sum_{\underline{\hat{a}} \in \text{Arb}(X)} \text{proj}\left(\frac{\underline{\hat{a}}}{\underline{n}}\right) B_{\underline{\hat{a}}}.$$

4.2.2.4. *Deux exemples.* — Développons B_{a^1, a^2, a^3} ; on a vu que

$$B_{a^1, a^2, a^3} = B_{(a^1 a^2 a^3)^<} + B_{((a^2 \oplus a^1) a^3)^<} + B_{(a^2 a^3)^< \oplus a^1} + B_{(a^1 a^2)^< \oplus a^3} + B_{(a^1 a^3)^< \oplus a^2} + B_{a^1 \oplus a^2 \oplus a^3}.$$

Cherchons $S^{a^1 \oplus a^2 \oplus a^3}$; comme il n'y a pas d'ordre partiel sur $a^1 \oplus a^2 \oplus a^3$, toute bijection de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même convient, c'est-à-dire pour toute permutation σ de $\{1, 2, 3\}$, l'opérateur $B_{a^{\sigma(1)}, a^{\sigma(2)}, a^{\sigma(3)}}$ comporte $B_{a^1 \oplus a^2 \oplus a^3}$ dans son arborifié. Ainsi,

$$S^{a^1 \oplus a^2 \oplus a^3} = S^{a^1 a^2 a^3} + S^{a^1 a^3 a^2} + S^{a^2 a^1 a^3} + S^{a^2 a^3 a^1} + S^{a^3 a^1 a^2} + S^{a^3 a^2 a^1}.$$

Si on veut calculer $S^{((a^2 \oplus a^3) a^1)^<}$ on regarde la suite arborescente $((a^2 \oplus a^3) a^1)^<$. On a $a^3 < a^1$ et $a^2 < a^1$. Donc une projection σ sur le mot $\underline{n} = (n^1, n^2, n^3)$ vérifie nécessairement $\sigma(2) < \sigma(1)$ et $\sigma(3) < \sigma(1)$ puisqu'elle doit préserver l'ordre

partiel. Étant donné l'ordre total sur \underline{n} , on a nécessairement $\sigma(1) = 3$ donc $n^3 = a^1$. Ensuite, $(\sigma(2) = 2 \text{ et } \sigma(3) = 1)$ et $(\sigma(2) = 1 \text{ et } \sigma(3) = 2)$ conviennent. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} n^2 &= a^2 \text{ et } n^1 = a^3 \text{ dans le premier cas} \\ n^2 &= a^3 \text{ et } n^1 = a^2 \text{ dans le deuxième cas.} \end{aligned}$$

Finalement,

$$S^{((a^2 \oplus a^3)a^1)^<} = S^{a^2 a^3 a^1} + S^{a^3 a^2 a^1}.$$

4.2.3. Le théorème de BRJUNO. — On a vu qu'un champ de vecteurs pouvait être linéarisé formellement en l'absence de petits diviseurs (théorème de POINCARÉ), puis qu'on pouvait le mettre sous forme de la somme de sa partie linéaire et de termes résonnants (théorème de POINCARÉ-DULAC). On a ensuite étudié la convergence éventuelle des séries donnant le changement de variable, ce qui nous a conduit à un théorème de POINCARÉ analytique dans le cas du spectre dans le domaine de Poincaré. Une amélioration de ce théorème est la condition diophantienne de SIEGEL, mais la meilleure condition – à ce jour – est la condition diophantienne de BRJUNO.

Introduisons, pour le champ $X = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(X)} B_n$ la quantité $\varpi(k)$ définie pour tout entier k par :

$$\varpi(k) = \inf \left\{ \lambda \cdot m = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i m_i \right) \text{ avec } |m| \leq 2^{k+1} \text{ et } \lambda \cdot m \neq 0 \right\}, \quad (4.14)$$

où les m_i sont tous positifs, un au plus valant -1 , de somme $|m| = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \geq 0$. Cette quantité « mesure » la vitesse à laquelle s'approchent les $\lambda \cdot m$ de 0.

La condition diophantienne de BRJUNO est alors la suivante :

$$\text{La série } \mathcal{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log(1/\varpi(k))}{2^k} \text{ est convergente.} \quad (\text{B})$$

Remarquons encore que si le champ vérifie la condition (B), il n'est pas résonnant (sinon \mathcal{S} vaudrait ∞). De plus, on dit alors qu'on est en présence de petits diviseurs *diophantiens*.

L'introduction des séries arborifiées permet à ÉCALLE de redémontrer le théorème suivant :

Théorème 4.12 (BRJUNO). — *Soit X un champ de vecteurs analytique dont le spectre de la partie linéaire vérifie la condition (B). Alors ce champ est linéarisable par un changement de variable analytique ; les séries arborifiées donnant*

les normalisateurs

$$\Theta = \sum_{\underline{a} \in \text{Arb}(X)} \Theta^{\underline{a} \prec} B_{\underline{a} \prec}$$

et

$$\Theta^{-1} = \sum_{\underline{a} \in \text{Arb}(X)} (\Theta^{-1})^{\underline{a} \prec} B_{\underline{a} \prec}$$

convergent en norme vers des opérateurs Θ et Θ^{-1} qui sont des automorphismes de $\mathbb{C}\{x\}$ définissant le changement de variable.

Ce théorème (1971) est presque contemporain des premiers travaux d'ÉCALLE sur les moules (1975). La preuve originale par BRJUNO n'utilise bien sûr ni moule ni série arborifiée. Par rapport au formalisme moulien, on rencontrera au cours de la démonstration quelques résultats *a priori* étonnants qu'on ne manquera pas de souligner.

Démonstration. — On note $S^{\check{\bullet}}$ indifféremment le moule $\Theta^{\check{\bullet}}$ ou $(\Theta^{-1})^{\check{\bullet}}$. La preuve repose sur les inégalités suivantes proposées par ÉCALLE dans [3] :

$$|S^{\check{\underline{n}}}| \leq Q_1^{N(\check{\underline{n}})}, \quad Q_1 > 0, \quad (4.15)$$

$$\|B_{\check{\underline{n}}}\|_{U,V} \leq \|B_{n_1}\|_{U,V} \cdots \|B_{n_r}\|_{U,V} Q_2^{N(\check{\underline{n}})}, \quad Q_2 > 0, \quad (4.16)$$

$$\|B_n\|_{U,V} \leq (C_{U,V})^{|n|}, \quad C_{U,V} > 0, \quad (4.17)$$

$$q(N) \leq Q_3^{N(\check{\underline{n}})}, \quad Q_3 > 0, \quad (4.18)$$

où (4.15), (4.16), (4.18) sont les analogues respectivement des inégalités (4.1), (4.2), (4.4) déjà vues page 30 pour les séries non arborifiées, tandis que (4.17) est l'identique de (4.3), ce qui est normal, puisque pour un mot n de longueur 1, $B_{\check{\underline{n}}} = B_n$.

En supposant ces inégalités prouvées, par des majorations analogues à celles utilisées dans la preuve de la convergence des séries non arborifiées en l'absence de petits diviseurs, on prouve également la convergence de la série $\sum_{\bullet} S^{\check{\bullet}} B_{\check{\bullet}}$ et donc le théorème. \square

Remarque 4.13. — S'il n'est pas étonnant de voir que, dans (4.16), le facteur $r!$ de (4.2) a disparu –c'est l'effet de l'arborification de faire « disparaître » les $r!$ termes du produit $B_{\underline{n}}$ en « individualisant » chacun d'eux–, il est par contre surprenant de constater avec (4.15) que le moule arborifié correspondant n'augmente pas considérablement mais suit le même type de croissance que le moule ordinaire. On a pourtant vu que le moule arborifié s'exprimait à partir du moule

ordinaire, comme une somme comportant parfois jusqu'à $r!$ termes. C'est le miracle de l'arborification !

Il semble en fait qu'on puisse trouver des explications à ce miracle : d'après Jacky CRESSON, notamment dans ce cas, le moule arborifié est solution d'une équation différentielle moulienne identique à celle du moule non arborifié, ce qui entraîne des croissances voisines pour les deux types de moules.

Il serait ainsi intéressant d'étudier plus complètement ce problème, à savoir : quand un moule arborifié a-t-il le même comportement que le moule ordinaire ? Une équation différentielle sur un moule se transporte-t-elle toujours sur l'arborifié, et si oui, cela transporte-t-il également le type de croissance ?

CHAPITRE 5

SYSTÈMES HAMILTONIENS

BIEN qu'ÉCALLE ait déjà étudié les systèmes hamiltoniens à travers le formalisme des moules, il ne l'a pas appliqué aux séries de Fourier ; rappelons que ces dernières interviennent naturellement dans l'étude des hamiltoniens sous leur forme privilégiée, c'est-à-dire en coordonnées action-angle. On présente donc ici les idées de Jacky CRESSON à ce sujet (voir [5]) et l'on va voir que le formalisme moulien s'adapte tout à fait aux séries de Fourier.

On notera usuellement $(I, \theta) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{T}^\nu$ un couple de variables action-angle, où \mathbb{T}^ν désigne le tore de dimension ν $\mathbb{R}^\nu / \mathbb{Z}^\nu$.

5.1. Systèmes Hamiltoniens isochrones

5.1.1. Opérateurs homogènes. — On étudie ici le système hamiltonien suivant :

$$H(I, \theta) = \Omega \cdot I + f(\theta),$$

où Ω est un vecteur de \mathbb{R}^ν (le *vecteur fréquence*) et f une fonction analytique \mathbb{Z}^ν -périodique ne dépendant pas des actions.

Les équations de Hamilton sont données par :

$$\begin{cases} \dot{I} = -f'(\theta) \\ \dot{\theta} = \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

et le champ de vecteurs associé est

$$X_H = \varphi(\theta)\partial_I + \Omega\partial_\theta,$$

avec $\varphi(\theta) = -f'(\theta)$ et où on note comme dans les chapitres précédents ∂_I pour $\frac{\partial}{\partial I}$ et ∂_θ pour $\frac{\partial}{\partial \theta}$. La partie linéaire de ce champ est $X_{\text{lin}} = \Omega\partial_\theta$. On peut écrire

le spectre de la partie linéaire :

$$\lambda = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{\nu \text{ composantes}}, \Omega_1, \dots, \Omega_\nu \right).$$

On cherche à écrire alors $\varphi(\theta)\partial_I$ comme une somme d'opérateurs différentiels homogènes ainsi que nous l'avons déjà fait au premier chapitre. Pour cela, décomposons φ en série de Fourier : notons $(\varphi^1, \dots, \varphi^\nu)$ les composantes de φ . Chacune de ces composantes se décompose en série de Fourier sous la forme :

$$\varphi^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} \varphi_{j,k} e^{ik \cdot \theta}$$

pour tout j , $1 \leq j \leq \nu$, où $\varphi_{j,k}$ est le coefficient de Fourier (complexe) d'ordre k de φ^j et $k \cdot \theta$ est le produit scalaire usuel $\sum_{i=1}^\nu k_i \theta_i$. On a donc la décomposition suivante de φ en série de Fourier :

$$\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} \varphi_k e^{ik \cdot \theta},$$

où φ_k est le vecteur $(\varphi_{1,k}, \dots, \varphi_{\nu,k})$ de \mathbb{C}^ν .

Le champ $\varphi(\theta)\partial_I$ se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\theta)\partial_I &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^\nu} e^{ik \cdot \theta} \varphi_k \cdot \partial_I \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq \nu \\ k \in \mathbb{Z}^\nu}} e^{ik \cdot \theta} \varphi_{j,k} \partial_{I_j}. \end{aligned}$$

Pour j dans $\{1, \dots, \nu\}$ et k dans \mathbb{Z}^ν notons alors $B_{j,k} = e^{ik \cdot \theta} \varphi_{j,k} \partial_{I_j}$. Alors $B_{j,k}$ est un opérateur différentiel homogène sur l'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}[[I, e^{i\theta}]]$ (c'est-à-dire des séries de Fourier). En effet, soit un monôme $I^n e^{im \cdot \theta}$ de cette algèbre (avec toujours $I^n = I_1^{n_1} \dots I_\nu^{n_\nu}$). Alors :

$$B_{j,k}(I^n e^{im \cdot \theta}) = \varphi_{j,k} e^{i(m+k) \cdot \theta} n_j I^{\hat{n}_j},$$

où $I^{\hat{n}_j} = I_1^{n_1} \dots I_j^{n_j-1} \dots I_\nu^{n_\nu}$. Le degré de cet opérateur est donc

$$d_{j,k} = ((0, \dots, -1, \dots, 0), k)$$

où le -1 est à la position j .

Finalement on a bien écrit X_H sous la forme voulue

$$X_H = X_{\text{lin}} + \sum_{d \in A(H)} B_d$$

avec l'alphabet $A(H)$ défini comme l'ensemble (infini en général) des degrés $d_{j,k}$, j décrivant $\{1, \dots, \nu\}$ et k décrivant \mathbb{Z}^ν . L'ensemble des mots sur $A(H)$

est encore noté $A(H)^*$. Un mot $\underline{s} = (s^1, \dots, s^r) = (d_{j_1, k_1}, \dots, d_{j_r, k_r})$ sera noté $((j_1, k_1), \dots, (j_r, k_r))$ et aura pour longueur $l(\underline{s}) = r$; enfin on note $\|\underline{s}\| = (j_1, k_1) + \dots + (j_r, k_r)$.

5.1.2. Linéarisation. — Le problème de la linéarisation a déjà été formulé : il revient à la résolution de l'équation de conjugaison $X_{\text{lin}} = \Theta X \Theta^{-1}$ où Θ est l'automorphisme de substitution (ou le normalisateur) $\psi \mapsto \psi \circ h$, si h est le changement de variable cherché. On cherche encore Θ sous la forme $\Theta = \sum_{\underline{s} \in A(H)^*} \Theta^{\underline{s}} B_{\underline{s}}$.

Un calcul analogue à celui déjà effectué donne :

$$X_{\text{lin}} B_{\underline{s}} = i(\lambda \cdot \|\underline{s}\|) B_{\underline{s}} + B_{\underline{s}} X_{\text{lin}},$$

et on retrouve l'équation moulienne (2.6)

$$\nabla' \Theta^\bullet = \Theta^\bullet \times I^\bullet \quad (5.2)$$

à ceci près que la dérivation ∇' sur l'algèbre des moules est cette fois définie par :

$$\nabla' \Theta^{\underline{s}} = i(\lambda \cdot \|\underline{s}\|) \Theta^{\underline{s}},$$

et comporte un facteur i .

La résolution de cette équation est encore similaire à celle déjà effectuée au chapitre 2, avec des hypothèses analogues : si pour tout k de $\mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, $\Omega \cdot k$ est non nul, alors pour tout mot $\underline{s} = ((j_1, k_1), \dots, (j_r, k_r))$ de longueur r , on a l'expression du coefficient $\Theta^{\underline{s}}$:

$$\Theta^{\underline{s}} = \frac{1}{(i)^r (\Omega \cdot k_1) \cdots (\Omega \cdot (k_1 + \cdots + k_r))},$$

et de même

$$(\Theta^{-1})^{\underline{s}} = \frac{(-1)^r}{(i)^r (\Omega \cdot k_r) \cdots (\Omega \cdot (k_r + \cdots + k_1))}.$$

Ainsi on a l'analogie (en fait l'identité) du théorème de POINCARÉ 3.1.

Théorème 5.1. — Si H est un hamiltonien de la forme $H(I, \theta) = \Omega \cdot I + f(\theta)$, avec Ω non résonnant, le champ de vecteurs X_H associé est formellement linéarisable par l'automorphisme Θ de $\mathbb{C}[[I, e^{i\theta}]]$ donné par :

$$\Theta = \sum_{\underline{s} \in A(H)^*} \Theta^{\underline{s}} B_{\underline{s}},$$

où les $B_{\underline{s}}$ sont les opérateurs différentiels définis précédemment. Le moule Θ^\bullet est donné par :

$$\Theta^{(j_1, k_1), \dots, (j_r, k_r)} = \frac{1}{(i)^r (\Omega \cdot k_1) \cdots (\Omega \cdot (k_1 + \cdots + k_r))}.$$

5.1.3. Convergence. — En reprenant les majorations (4.1) (4.2) (4.3) et (4.4), on a les mêmes résultats qu'au chapitre 2, à savoir convergence normale de la série $\sum_{\bullet} \Theta^{\bullet} B_{\bullet}$ en l'absence de petits diviseurs.

5.2. La forme normale de BIRKHOFF

Le problème de la forme normale de BIRKHOFF est l'application du théorème de POINCARÉ-DULAC au champ de vecteurs X_H du hamiltonien suivant :

$$H(I, \theta) = \Omega \cdot I + f(I, \theta),$$

où f est une fonction analytique en I et \mathbb{Z}^{ν} -périodique en θ . Les équations de Hamilton sont :

$$\begin{cases} \dot{I} = -\partial_{\theta} f(I, \theta) \\ \dot{\theta} = \Omega + \partial_I f(I, \theta) \end{cases}$$

et le champ associé est

$$X_H = \Omega \partial_{\theta} + \partial_I f \partial_{\theta} - \partial_{\theta} f \partial_I.$$

Notons X_{lin} la partie linéaire, de spectre $\lambda = (0, \dots, 0, \Omega_1, \dots, \Omega_{\nu})$ dans $\mathbb{C}^{2\nu}$. Il s'agit toujours de décomposer la partie non linéaire $\partial_I f \partial_{\theta} - \partial_{\theta} f \partial_I$ en série de Fourier. Écrivons pour cela

$$f(I, \theta) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^{\nu} \\ l \in \mathbb{N}^{\nu}}} f_{kl} I^l e^{i(k \cdot \theta)}.$$

On a alors

$$\partial_I f \partial_{\theta} - \partial_{\theta} f \partial_I = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^{\nu} \\ l \in \mathbb{N}^{\nu} \\ 1 \leq j \leq \nu}} f_{kl} e^{i(k \cdot \theta)} I^{\hat{l}_j} (l_j \partial_{\theta_j} - I_j i k_j \partial_{i_j}),$$

où $\hat{l}_j = (l_1, \dots, l_j - 1, \dots, l_{\nu})$.

Notons B_{jlk} l'opérateur $f_{kl} e^{i(k \cdot \theta)} I^{\hat{l}_j} (l_j \partial_{\theta_j} - I_j i k_j \partial_{i_j})$: c'est un opérateur homogène sur l'algèbre des séries de Fourier $\mathbb{C}[[I, e^{i\theta}]]$ de degré $d_{jlk} = (\hat{l}_j, k)$. On a bien

$$X_H = X_{\text{lin}} + \sum_{n \in A(H)} B_n,$$

où $A(H) = \{d_{jlk}, 1 \leq j \leq \nu, l \in \mathbb{N}^{\nu}, k \in \mathbb{Z}^{\nu}\}$.

On cherche à obtenir la forme suivante pour X_H :

$$X_{\text{sam}} = X_{\text{lin}} + \sum_{\bullet} \text{Sam}^{\bullet} B_{\bullet}.$$

Avec le même procédé de simplification du champ que pour la forme normale de POINCARÉ-DULAC, on obtient la même équation sur le moule Sam^\bullet :

$$\text{Sam}^\bullet = \exp(\Psi^\bullet) \times \nabla' \exp(-\Psi^\bullet) + \exp(\Psi^\bullet) \times I^\bullet \times \exp(-\Psi^\bullet),$$

où Ψ^\bullet est cette fois-ci le moule défini par :

$$\Psi^n = \begin{cases} \frac{1}{\lambda \cdot n} & \text{si } l(\underline{n}) = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et ∇' la dérivation sur les moules définie par :

$$\nabla' \Theta^n = i(\lambda \cdot \|\underline{n}\|) \Theta^n.$$

La résolution formelle se fait alors comme pour la forme normale de POINCARÉ-DULAC.

CONCLUSION

AU COURS de ce bref panorama sur le traitement des formes normales par le calcul moulien, nous avons pu apprécier l'intérêt de ce formalisme : l'obtention directe de changements de variables, et de manière algorithmique, puis l'étude fine de convergences grâce à la méthode d'arborification. De plus, on a remarqué l'universalité que les moules peuvent porter (ce qui n'est d'ailleurs pas limité aux formes normales...).

Ainsi, si le formalisme moulien montre sa capacité à résoudre des problèmes, il en pose également d'autres : comme nous l'avons déjà dit, il serait intéressant de mieux étudier les équations différentielles sur des moules, et les liens entre séries mouliennes ordinaires et séries mouliennes arborifiées, notamment le transport de ces équations lors de l'arborification ; d'autre part, il serait également intéressant de poursuivre l'application du calcul moulien aux séries de Fourier dans les systèmes hamiltoniens, jusqu'au théorème KAM par exemple, où l'on pourrait peut-être espérer avoir des conditions explicites sur la stabilité des tores de solutions perturbées grâce aux possibilités calculatoires que portent les moules.

Pour conclure, je voudrais remercier Jacky CRESSON, pour le sujet du stage tout d'abord, qui m'a fait découvrir ces objets *a priori* si curieux que sont les moules ; pour sa disponibilité et sa pédagogie aussi, ainsi que son exigence, qui m'ont permis de présenter, je pense clairement, toutes ces idées ; enfin pour l'opportunité de connaître Besançon, pour laquelle je remercie également Ana GÓMEZ et le DEA de l'Observatoire qui ont pu financer les quelques aller-retour entre Paris et cette jolie ville.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ÉCALLE & B. VALLET – « Prenormalization, correction and linearization of resonant vector fields or diffeomorphisms », Prépublications mathématiques d'Orsay, 1995.
- [2] A. BAIDER – « Unique normal forms for vector fields and hamiltonians », *Journal of differential equations* (1988).
- [3] J. ÉCALLE – « Singularités non abordables par la géométrie », *Annales de l'Institut Fourier* **42** (1992), no. 1-2, p. 73–164.
- [4] J. CRESSON – « Calcul moulien », à paraître.
- [5] J. CRESSON – « Mould calculus and fourier series », en préparation.
- [6] J. LAFONTAINE – *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [7] J. MARTINET – « Normalisation des champs de vecteurs holomorphes », *Séminaire Bourbaki* **564** (1980), no. 1.
- [8] B. VALLET – « Géométrie analytique des champs de vecteurs et des difféomorphismes », Thèse, Université d'Orsay, 1996, sous la direction de Jean Écalle.