Jacky Cresson

PROMENADE VERS LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

E-mail : cresson@math.univ-fcomte.fr

Université de Franche Comté, Equipe de Mathématiques de Besançon,,
16 route de Gray,, 25030 Besançon cedex.

Url : www.math.jussieu.fr/~cresson

Jacky Cresson

PROMENADE VERS LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Jacky Cresson

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La géométrie différentielle est une discipline mathématique récente. Son histoire commence avec les travaux de Gauss sur les surfaces, se poursuit avec Riemann, Whitney et d'autres. Par ailleurs, il existe de nombreuses connexions avec la physique et diverses applications (la plus connue étant l'utilisation de la géométrie Riemanienne dans la théorie de la relativité d'Einstein).

La géométrie différentielle qu'est-ce que c'est ?

Il me semble que l'on peut la résumer comme l'art de faire de l'analyse sur des surfaces ou objets géométriques généraux.

La formulation précédente présente le problème suivant : Comment définir un objet géométrique ?

Pour répondre à cette question, faisons un peu de travaux pratiques : si je vous donne des ciseaux, du papier et de la colle, comment allez-vous faire pour construire une boule ? Enfants, nous avons tous connus une situation de ce type, et a priori, nous avons tous reussi à faire quelque chose de plus ou moins ressemblant à une boule. La méthode, sans doute pas optimale, mais qui marche, et de découper des petits morceaux de papiers, et de les recoller de telle sorte qu'ils formes finalement une boule.

Cette idée est à la base de la géométrie différentielle. Les objets géométriques que nous considérerons dans la suite, sont dans le cas des surfaces, localements des petits bouts de feuilles de papier, ou plus mathématiquement, homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. C'est la notion de variété qui occupera toute une partie du cours.

L'intérêt de la formalisation précédente est qu'elle permet d'aborder de manière universelle des questions difficiles. Pour illustrer notre propos, nous allons faire un voyage à travers les ages, et nos différentes représentation de la Terre, à savoir comme un grande disque plat ou ou sphère.

Revenons au moyen-age, et supposons que nous marchions sur un plan. Si je vous demande de modéliser ce plan, vous allez sans doute utiliser l'espace $\mathbb{R}^2$, et vous aurez raison. On dispose d'un objet sur lequel on peut définir un système de coordonnées canoniques, et sur lequel notre parcours peut facilement être décrit.

A la renaissance, on peut supposer que l'on se balade sur une sphère. On voit experimentalement, que cet objet est localement un plan (d'ou la première hypothèse sur la géométrie de la Terre), et on tombe bien dans la classe des objets que l'on veut étudier. Mais du coup, qu'est-ce qui distingue notre situation d'un marcheur sur un plan ? On s'en doute il y a bien quelque chose, intuitivement, le plan est "courbé" et ca doit se retrouver quelque part. A l'aide de la géométrie différentielle, on peut effectivement définir une notion de courbure, qui nous permettra de distinguer la situation du plan et celle de la sphère.

Par ailleurs, la physique pose aussi des questions intéressantes aux quelles il nous faudra répondre : supposons que je lache un objet sur une sphère, et que l'objet doit circuler sur la sphère sous la seule action de la force de gravitation. Comment prédire son mouvement ? Cette question nécessite de définir plusieurs notions classique sur les variétés : les chemins, les vecteurs tangents, l'espace tangent. On parlera même à la fin du cours de métrique Riemanienne. Avec tous ces outils, on peut donner une réponse à ces questions.

J'aimerai ajouter que l'approche via l'analyse des questions de géométrie, ne doit pas faire oublier que beaucoup de structures algébriques se cachent dans les notions : groupe et algèbre de Lie par exemple, dont nous glisserons un mot dans le cours. Ils nous serviront a introduire des outils importants dans beaucoup de domaines mathématiques, comme l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, les séries formelles non commutatives, la notion de schèma en groupe et plus spécialement les algèbre de Hopf.

Une connexion algèbrique encore plus fructueuse entre l'étude des variétés et l'algèbre est donnée par le théorème de Gelfand et Naimark : Soit U une $\mathbb{C}^*$-algèbre[(1)] commutative, et M l'ensemble des ideaux maximaux de U. L'ensemble M peut être muni d'une topologie naturelle telle que M soit un espace localement compact, et $U = C_0(M)$, où $C_0(M)$ est la $\mathbb{C}^*$-algèbre des fonctions continues sur M qui s'annulent à l'infini. Autrement dit, les points d'un espace topologique compact peuvent être caractérisés en termes purement algèbriques comme les ideaux maximaux d'une algèbre de fonctions sur l'espace. La relaxation de la condition de commutativité de la $\mathbb{C}^*$-algèbre a conduit Alain Connes à définir une nouvelle géométrie, appellée *géométrie non commutative* [**5**]. Je renvoie à l'article de Lesniewski [**19**] pour un panorama des idées de Connes.

Il y aura donc dans le cours des va et vient constants entre ces trois domaines des mathématiques via les questions de géométrie :

$$\text{algèbre} \leftrightarrow \text{géométrie} \leftrightarrow \text{analyse}$$

[(1)]Une $\mathbb{C}^*$-algèbre est une algèbre sur $\mathbb{C}$ muni d'une involution $*$ et d'une norme $\| .. \|$, telle que $\| SS^* \| = \| S \|^2$.

Par ailleurs, comme le note Hirsch [**20**], il y a une profonde analogie entre l'étude des applications et les variétés. Le point essentiel est le résultat suivant : Soit $f : M \to N$, une application, alors sous certaines conditions, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de M. On obtient ainsi une relation forte entre la donnée de l'application f et les sous-variétés de M de la forme $f^{-1}(y)$. Autrement dit, savoir démontrer des résultats sur les variétés, c'est souvent savoir démontrér des résultats sur les applications.

Le cours en lui même demande peu de mathématiques difficiles. On rappellera en debut de cours deux résultats importants, à savoir le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites. C'est plus dans la compréhension des idées que les difficultés surgissent, notamment dans la notion de variété abstraite dont nous avons glissé un mot ci-dessus. Ce qu'il ne faut pas perdre de vue devant une notion difficile, c'est qu'elle est souvent le fruit d'une longue et profonde reflexion de plusieurs générations de mathématiciens pour élaborer une définition aussi limpide que possible. Il n'est donc pas déplacé de prendre un peu de temps pour la saisir.

Le plan du cours sera le suivant :

Le chapitre 1 est constitué de rappels de résultats d'analyses.

Le chapitres 2 constitue une balade vers la notion de variété abstraite, en utilisant l'intermédiaire des courbes paramétrées. On introduit la notion d'objet géométrique et d'invariant géométrique.

Le chapitre 3 étudie les surfaces et les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. C'est un chapitre important. Il contient ce qu'il faut savoir sur la géométrie du théorème d'inversion locale.

Le chapitre 4 tourne tout autour de la notion de variété et de sous variété. Dans la suite, on étudira principalement les variétés dites différentiables, i.e.

celle sur lesquelles les questions d'analyse ont un sens.

Le chapitre 5 défini la notion de vecteur tangent et d'espace tangent. On donnera quelques éléments sur la structure algèbriques de ces ensembles.

Ce texte est en cours de rédaction. J'aimerai recevoir vos commentaires pour l'améliorer. Notamment, en ce qui concerne l'exposition, n'hesitez pas à me signaler les points qui vous semblent obscures et ceux qui méritent des développements. Bien entendu les fautes de frappes et autres erreurs sont aussi les bienvenues. L'absence de figures dans le texte n'est pas volontaire (problèmes techniques). Faites des dessins pour comprendre les notions et vous fabriquer une intuition. Faites aussi les exercices qui sont donnés au cours du texte. Si vous avez une adresse email, n'hesitez pas a me l'envoyer. Je peux de cette façon envoyer des exercices, des corrections, des compléments, etc...

Bonne lecture.

CHAPITRE 1

ANALYSE LOCALE

Une grande partie de l'étude des courbes et des surfaces, comme celles des variétés, est locale. Nous rappelons donc quelques résultats sur l'analyse locale des applications, principalement le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites. En particulier, on discute les obstructions globales à ces théorèmes. On discute aussi la définition algébriques des dérivations.

1.1. Homéomorphismes, difféomorphismes

En géométrie, une idée importante est celle de *déformation*. Qu'est-ce qu'une déformation mathématiquement parlant. Plaçons nous dans le cas des courbes du plan. Soit γ une courbe et γ_T la courbe après transformation. L'application T entre γ et γ_T est une application bijective, continue et surtout de réciproque continue. Chacun de ces points assurent que la déformation T correspond bien à notre idée intuitive. Le caractère bijectif continue implique que nous allons déformer la courbe sans cassures ou déchirures, et ceci sans enlever ou rajouter quoi que ce soit à la courbe. Par ailleurs, comme l'application T^{-1} existe et est aussi continue, le procédé de déformation inverse se comporte de la même manière.

Les déformations sont des exemples d'*homéomorphismes*.

Définition 1.1.1. — Un homéomorphisme est une application bijective continue de réciproque continue.

Toujours en reprenant l'exemple des courbes du plan, on peut imposer à la déformation de respecter des contraintes supplémentaires, comme par exemple, de conserver les tangentes à la courbes.

Définition 1.1.2. — Un difféomorphisme de classe C^k est une application bijective de classe C^k dont la réciproque est aussi de classe C^k.

1.2. Autour du théorème du point fixe

Le théorème du point fixe est un outil très important de l'analyse et de la géométrie, non seulement parce qu'il assure, sous certaine conditions, l'existence d'une solution unique à une équation $f(x) = x$, mais aussi parce qu'il fournit de fait, un algorithme de construction de cette solution. Dans une persepctive purement constructive, il est alors interessant de savoir à quelle vitesse l'algorithme converge, et si un algorithme plus astucieux permet d'accélérer la convergence. On démontre que la vitesse est polynomiale dans le cas du théorème du point fixe, alors qu'elle est exponentielle dans le cas de la *méthode de Newton*.

1.2.1. Le théorème du point fixe. — On commence par la définition suivante :

Définition 1.2.1. — Un point fixe d'une application f d'un ensemble E dans lui-même est un point $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

La résolution d'équation se ramène à un problème de point fixe. Supposons que l'on veut résoudre l'équation $f(x) = a$, pour $a \in E$ fixé. Si E possède une structue d'espace vectoriel, on peut considérer l'application $g(x) = f(x)+x-a$ de E dans E. Résoudre l'équation $f(x) = a$ revient à trouver les points fixes de $g(x)$.

Dans la suite, on se donne un espace métrique E, de distance notée d.

Définition 1.2.2. — Une application f d'une partie U de E dans E est appellée une contraction s'il existe un nombre réel k, $0 \leq k < 1$ tel que

$$d[f(x), f(y)] \leq kd(x, y), \ \forall\ x, y \in U. \tag{1}$$

On appelle k le rapport de contraction.

On a le théorème suivant (parfois appelé *théorème de Banach* [**2**],p.125).

Théorème 1.2.3. — *Soient E un espace métrique complet et $f : U \to E$ une application d'un ouvert U de E dans E satisfaisant les conditions suivantes :*

i – f est une contraction de rapport k ;
ii – il existe $u \in U$ dont la distance $d[u, E \setminus U]$ au complémentaire de U excède un nombre fixe $M > 0$;
iii – $d[u, f(u)] < M(1-k)$.

Alors, f admet un unique point fixe dans U.

Le théorème assure deux choses : l'existence et l'unicité. La démonstration de l'existence est basé sur un algorithme, qui assure pratiquement de manière immédiate l'unicité. Cette technique est à retenir.

Démonstration. — Les conditions i) et ii), un peu tortueuses, sont uniquement là pour assurer l'existence d'un point qui reste dans U. Ces conditions sont evidemment inutiles si f est globalement contractante, i.e. sur E et pas seulement sur U.

On a $f(u) \in U$ car $d[u, f(u)] < M(1-k) < M < d(u, E \setminus U]$. On définit la suite u_n par récurrence en posant $u_0 = u$, $u_n = f(u_{n-1})$, $n \geq 1$. Pour que cela ait un sens, on doit montrer $u_n \in U$ pour tout $n \geq 1$. Commençons par une inégaité. On a, en utilisant la définition de la contraction et une récurrence immédiate

$$d[u_n, f(u_n)] = d[f^n(u), f^n(u_1)] \leq k^n M(1-k), \ 0 \leq n. \tag{2}$$

Supposons maintenant que $u_i \in U$ pour $i = 0, \dots, n$, alors

$$d(u, f(u_n)) \leq d(u, u_1) + \cdots + d(u_n, f(u_n)), \tag{3}$$

soit

$$d(u, f(u_n)) \leq M(1 - k^n) < M, \tag{4}$$

d'où le résultat.

Nous avons donc construit une suite et nous espérons qu'elle converge bien vers le point fixe. C'est ici que l'hypothèse de complétude va nous servir. La suite u_n est en fait une suite de Cauchy de U. En effet, on a

$$d[u_p, u_{p+q}] \leq M(1 - k)[k^p + \cdots + k^{p+q}] < Mk^p. \tag{5}$$

La suite u_n converge donc vers une limite a à priori dans E car E est complet. En fait, cette limite est dans U car en prenant $p = 0$ et $q \to \infty$ dans l'i'égalité précédente, on obtient

$$d(u, a) < M.$$

Le point a est evidemment un point fixe de f par continuité de f : il suffit de passer à la limite lorsque $n \to \infty$ dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$.

L'unicité provient essentiellement de la propriété de contraction de f. En effet, soit b un second point fixe de f dans U. On a $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$, qui implique $d(a, b) = 0$, soit $a = b$. □

La démonstration précédente fournit la *vitesse d'approximation* du point fixe. En effet, on a

$$d(a, u_n) \leq Mk^n, \tag{6}$$

ce qui veut dire que la vitesse est *polynomiale en n*.

Nous allons voir maintenant une méthode beaucoup plus rapide.

1.2.2. La méthode de Newton. — Nous donnons ici l'énoncé général (Banachique si j'ose dire) de la méthode de Newton, que vous avez dû tous tester en Deug, vir avant, sur votre calculette ou votre ordinateur avec une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, alors à vos claviers !

Théorème 1.2.4. — *Soient E et F deux espaces de Banach, B une boule de rayon $\delta > 0$ de E, $f : B \to F$ une application de classe C^1. Supposons que :*

i – il existe une constante M telle que

$$\| Df(x) - Df(y) \| \leq M \| x - y \|, \ \forall \ x, y \in B. \tag{7}$$

ii – il existe $x_0 \in B$ tel que $Df(x_0)$ soit un isomorphisme de E dans E et tel que $\| f(x_0) \|$ soit assez petit,

alors $x_{n+1} = x_n - [df(x_n)]^{-1} f(x_n)$ existe, et la suite x_n converge vers l'unique solution a de $f(x) = 0$. Par ailleurs, $\| a - x_n \|$ est de l'ordre de ϵ^{2^n}, où $0 < \epsilon < 1$ est une constante.

Je renvoie à ([**2**],p.128-129) pour la démonstration. Par ailleurs, je vous encourage à consulter le livre d'Hubbard et West ([**21**],chap. 5, §.5.3) pour une exploration des problèmes liés à l'utilisation de la méthode de Newton.

1.3. Le théorème d'inversion locale

1.3.1. Préliminaires. — Dans de nombreux problèmes, on a besoin d'inverser une application (pensez aux déformations précédentes). Mais en général cela n'est pas possible globalement (c'est une propriété très forte) et on doit se contenter d'un résultat local. Le point de départ de ce théorème est l'idée intuitive suivante, que nous allons développer ensuite :

Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, une application, où U eest un voisinage d'un point x_0 donné. Si f est différentiable en x_0, alors l'application linéaire $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vérifie

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x) \| x - x_0 \|, \tag{8}$$

où $r : U \to \mathbb{R}^m$ est une fonction continue en x_0 telle que $r(x_0) = 0$, et $\| \, . \, \|$ est une une norme fixé sur $\mathbb{R}^n$.

Localement, l'application est donc approximé par

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{9}$$

qui est une application affine. On parle souvent de l'approximation linéaire, i.e. au premier ordre du développement de Taylor. Une idée plus ou moins intuitive est que le comportement de f au voisinage de x_0 ne doit donc pas être trop loin de celui de T, et c'est précisément ce que nous allons quantifier.

Comment se pose le problème d'inversion locale pour T ? L'application T est définie en fait sur $\mathbb{R}^n$. On voit sans peine que la condition nécesaire et suffisante est celle de l'inversibilité de $f'(x_0)$[(1)] sur U, i.e. que $Df(x_0)$ soit bijective sur U. Pour étendre ce résultat au cas non linéaire, on doit contrôler les restes du développement de Taylor. En gros, il faut s'assurer que la prise en compte des termes restants ne perturbent pas trop $f'(x_0)$.

Pourquoi est-on en raison d'espérer un dénoument heureux ?

Prenons comme application linéaire initiale l'application identité, $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, à laquelle on peut se ramener dès que $f'(x_0)$ est inversible. On peut regarder la perturbation de Id par une application linéaire v de norme plus petite que 1, i.e. on regarde $Id + v$ avec $\| \, v \, \| \leq 1$. Cette application est-elle inversible ? La réponse est oui. On peut par exemple chercher l'application récirpsoque sous la forme $Id + u$, on a

$$(Id + u) \circ (Id + v) = Id + v + u \circ (Id + v) = Id, \tag{10}$$

soit

$$v = -u \circ (Id + v), \tag{11}$$

[(1)] Ici comme ailleurs, j'identifie la matrice de l'application linéaire et l'application linéaire associée.

d'où par linéarité de u,

(12) $$v = -u - u \circ v,$$

i.e. que v est un pint fixe pour la fonctionelle $\mathcal{T}(\bullet) = -u - u \circ \bullet$. Une façon de constuire v, "à la main", est de mettre en forme la méthode des approximations successives. On pose $v_0 = 0$, $v_1 = -u$, $v_2 = -u - u \circ v_1 = -u + u^2$, $\ldots$, $v_n = -u - u \circ v_{n-1}$ ... On a facilement par récurrence,

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u^i,$$

et $v = \lim_{n\to\infty} v_n$, les v_n formant une suite de Cauchy car $\| v_n - v_{n-1} \| \leq \| u \|^n$ avec $\| u \| \leq 1$.

Avant d'énoncer le théorème d'inversion locale, nous allons résoudre l'équation (11) dans le cas non linéaire, à savoir $v(x) = -u(x + v(x))$.

1.3.2. Premier résultat. — Introduisons tout d'abord quelques notions, qui interviennent bien evidemment déja dans le théorème du point fixe.

Soit E un espace vectoriel normé complet. Pour $r > 0$ et $\lambda > 0$, on note $\mathrm{Lip}_{r,\lambda}$ l'ensemble des applications u de la boule ouverte

$$B_r = \{x \in E, \| x \| < r\},$$

dans E telles que $u(0) = 0$ et qui sont Lipschitziennes de rapport λ, i.e.

(13) $$\| u(x) - u(y) \| \leq \lambda \| x - y \|, \ x \in B_r, \ y \in B_r.$$

Lemme 1.3.1. — *Supposons $\lambda < 1$ et posons $r' = (1 - \lambda)r$, $\lambda' = \lambda/(1 - \lambda)$. Soit $u \in \mathrm{Lip}_{r,\lambda}$. Il existe un élément unique $v \in \mathrm{Lip}_{r',\lambda'}$ tel que*

(14) $$v(x) = -u(x + v(x)), \ x \in B_{r'}.$$

Démonstration. — i – *unicité*. Soit y et y' deux éléments qui vérifient (14). On a

$$\| u(x + y') - u(x + y) \| = \| y - y' \| \leq \lambda \| y - y' \|,$$

donc $\| y - y' \| = 0$.

ii – *existence*. Soit y_n, la suite déléments de $B_{\lambda r}$ défini par $y_0 = 0$, $y_1 = -u(x)$, $\ldots$,

$$y_n = -u(x + y_{n-1}).$$

Cette équation a un sens, car si $\| y_{n-1} \| < \lambda r$, on a $\| x + y_{n-1} \| < r' + \lambda r = r$, et $\| u(x + y_{n-1}) \| < \lambda r$.

Pour $n \geq 2$, on a

$$\| y_n - y_{n-1} \| = \| u(x + y_{n-1}) - u(x + y_{n-2}) \| \leq \lambda \| y_{n-1} - y_{n-2} \|,$$

soit, comme $\| y_1 - y_0 \| = \| u(x) \| \leq \lambda \| x \|$, on en déduit

$$\| y_n - y_{n-1} \| \leq \lambda^n \| x \| .$$

Les y_n forment une suite de Cauchy dans l'espace métrique complet E. On note $y = \lim_{n \to \infty} y_n \in E$.

iii – $y \in Lip_{r',\lambda'}$. Soit $x' \in B_{r'}$, et construisons la suite $y'_n = -u(x' + y'_{n-1})$. On note y' sa limite. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\| y_n - y'_n \| = \| u(x + y_{n-1}) - u(x' + y'_{n-1}) \| \leq \lambda \| x - x' \| + \lambda \| y_{n-1} - y'_{n-1} \| .$$

Comme $\| y_0 - y'_0 \| = 0$, on a, par récurrence

$$\| y_n - y'_n \| \leq (\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n) \| x - x' \| \leq \lambda' \| x - x' \| .$$

Par passage à la limite, on obtient $y \in Lip_{r',\lambda'}$. □

La démonstration du théorème d'inversion locale est basé sur le résultat suivant :

Proposition 1.3.2. — *Soient r et λ des nombres réels avec $r > 0$ et $0 < \lambda < 1$. Soit f une application de B_r dans E telle que $f(0) = 0$ et que l'on ait, pour x et x' dans B_r,*

$$\| f(x) - f(x') - (x - x') \| \leq \lambda \| x - x' \| . \tag{15}$$

Posons $r' = (1-\lambda)r$, $\lambda' = \lambda/(1-\lambda)$, $U' = f^{-1}(B_{r'}) \cap B_r$ et $V' = B_{r'}$. Alors U' est ouvert, f induit une application continue et injective de U' dans $V' = B_{r'}$, *la bijection réciproque* $g : V' \to U'$ *est continue et l'on a*

$$\| g(y) - g(y') - (y - y') \| \leq \lambda \| y - y \|, \ \forall\ y, y' \in V'. \tag{16}$$

On trouve la démonstration dans ([**7**],p.33).

1.3.3. Le théorème d'inversion locale. —

Théorème 1.3.3 **(inversion locale)**. — *Soient* $EetF$ *deux espaces vectoriels normés complets,* U *un ouvert de* E*,* a *un point de* U *et* f *une application de* U *dans* F*, dérivable en* a*. On suppose que l'application* $f'a)$ *est un isomorphisme*(2) *de* E *sur* F*. Il existe alors un ouvert* U' *de* U *contenant* a *et un ouvert* V' *de* F *contenant* $f(a)$ *avec les propriétés suivantes :*

i) f *induit une bijection continue de* U' *sur* V'*,*

ii) l'application réciproque $g : V' \to U'$ *est continue,*

iii) g *est strictement dérivable au point* $f(a)$*, de dérivée* $f'a)^{-1} \in L(E, F)$*.*

On trouvera une démonstration, ainsi que des références historiques, dans le livre de Demazure ([**7**], chap.1,p.36-37).

1.4. Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites est avant tout un résultat géométrique. La démonstration peut se faire de multiples façon, et vous avez dû en faire une, peut être dans un cours de calcul différentielle, à renfort d'espace de Banach et autres notions puissantes de l'analyse. Néanmoins, et c'est peut être aussi pour cette raison qu'un mathématicien comme Euler l'a utilisé sans le démontrer, la démonstration de ce théorème se voit à l'oeil nu si je puis dire.

Considérons une fonction de deux variables $f(x, y)$, que nous allons supposer pour simplifier de classe C^∞. Traçon la courbe représentative de f dans $\mathbb{R}^3$, en regardant $z = f(x, y)$. Nous obtenons une surface de dimension deux.

(2) i.e. une bijection de E sur F, de bijection réciproque continue

Que dit le théorème des fonctions implicites ?

Choisissons un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ (on pourrait choisir une autre constante que 0 bien sûr). Supposons que la fonction f satisfait la condition

$$\partial f/\partial y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{17}$$

Alors, il existe un voisinage U de x_0 et V de y_0, et une fonction $y : U \to V$ unique telle que $y(x_0) = y_0$ et

$$f(x, y(x)) = 0. \tag{18}$$

Que veut dire la condition (17) ?

Si nous traçons la courbe obtenue en coupant la surface $z = f(x, y)$ par le plan $x = x_0$, nous obtenons une courbe $z = f(x_0, y)$. La condition (17) impose que la fonction soit monotone sur un petit voisinage de y_0. Par ailleurs, par continuité de $\partial f/\partial y$, on a $\partial f/\partial(x, y) \neq 0$ sur un petit voisinage de (x_0, y_0). Autrement dit, si on note U le voisinage ainsi défini pour x_0, la fonction $f(x, y)$ avec $x \in U$ fixé, est monotône. C'est précisément ce point qui implique l'existence de la fonction $y(x)$.

L'énoncé du théorème des fonctions implicites est :

***Théorème 1.4.1* (fonctions implicites)**. — *Soient E, E' et F trois espaces vectoriels de dimension finie, $\Phi : (x, y) \mapsto \Phi(x, y)$ une application de classe C^∞ d'un ouvert V de $E \times E'$ dans F et (a, a') un point de U tel que $\Phi(a, a') = 0$ et que la dérivée partielle de Φ le long de E'*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(a, a') : E' \to F$$

soit bijective. Il existe un ouvert U de E contenant a, un ouvert U' de E' contenant a' et une application $h : U \to U'$ de classe C^∞ tels que $U \times U' \subset V$ et que, pour $(x, y) \in U \times U'$, les relations $\Phi(x, y) = 0$ et $y = h(x)$ soient équivalentes. De plus la dérivée $h'(a) \in L(E, E')$ est égale à $-\partial_y \Phi(a, a')^{-1} \circ \partial_x \Phi(a, a')$.

Pour un panorama des différents énoncés possibles du théorème des fonctions implicites, on consultera le livre de Demazure ([**7**],chap.2,§.7).

1.5. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans toute la suite, $(E, \| \, . \, \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension fini.

Définition 1.5.1. — Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}\times E$ et f une application de Ω dans E. L'application f est localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable si pour tout (t_0, x_0) de Ω, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans Ω et une constante $C > 0$ tels que, si (t, x_1) et (t, x_2) sont dans V ; on a

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq C \| x_1 - x_2 \| .$$

Dans toute la suite, on considère une équation différentielle :

$$x'(t) = f(t, x(t)). \qquad (*)$$

***Théorème 1.5.2* (Cauchy-Lipschitz)**. — *Soient* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, r, M, $C > 0$ *tels que :*

i) $\bar{B}(x_0, r) \subset \Omega$ *;*

ii) f *est bornée par* M *sur* $I \times \bar{B}(x_0, r)$ *;*

iii) f *est* C*-lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur* $I \times \bar{B}(x_0, r)$.

Posons $J = I \cap]t_0 - r/M, t_0 + r/M[$. *Il existe alors une unique application* x *de* J *dans* $\bar{B}(x_0, r)$ *telle que* (J, x) *soit une solution du problème de Caucchy relatif à (*) et à la condition initiale* (t_0, x_0).

Démonstration. — Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de J dans $\bar{B}(x_0, r)$. En munissant $\mathcal{C}$ de la distance d de la convergence uniforme, on en fait un espace métrique complet. Si $x \in \mathcal{C}$, l'application $\hat{x} : J \to E$, $t \mapsto x_0 +^{d} i^{i} nt_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ est à valeurs dans $\bar{B}(x_0, r)$, de sorte que $T : x \mapsto \hat{x}$ définit une application de C dans C. L'énoncé du théorème signifie que T admet un point fixe unique. Il suffit, pour voir cela, de montrer que l'une des itérées de T est contractante (le théorème du point fixe). Or, si $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, $t \in J$ et $n \in \mathbb{N}$, on établit par récurrence la majoration suivante :

$$\| T^m(x)(t) - T^n(y)(t) \| \leq \frac{C^n}{n!} \mid t - t_0 \mid^n d(x, y).$$

Pour n assez grand, $\gamma = \dfrac{C^n}{n!} \left(\dfrac{r}{M}\right)^n < 1$, et T^n est γ-contractante. □

On trouvera tous les détails de cette démonstration dans le livre d'Arnold ([**1**],chap.4,p.267-279) que je vous encourage à lire.

Le théorème précédent n'est pas complétement satisfaisant. On sait qu'il existe localement une solution de (*). Qu'en est-il au niveau global ?

Pour répondre à cette question, on introduit la notion de solution maximale, qui n'est autre que la plus grande solution (i.e. définie sur le domaine en t le plus grand) satisfaisant $x(t_0) = x_0$.

Définition 1.5.3. — Une solution $\phi(t)$ de (*) est dite maximale si toute solution $\psi(t)$ de (*) dont l'intervalle de définition contient I et telle que $\psi \mid I = \phi$ soit égale à ϕ.

On a alors :

Théorème 1.5.4. — *Sous les mêmes hypothèses que le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale de (*) satisfisant à une donnée de Cauchy.*

1.6. Dérivations

Nous donnons la définition algébrique d'une dérivation.

Définition 1.6.1. — Soit A une algèbre sur un corps k. Une dérivation D sur A est une application k linéaire, qui vérifie l'identité de Leibniz

$$D(x.y) = D(x).y + x.D(y), \tag{19}$$

pour tout $x, y \in A$.

L'exemple le plus connu de dérivation est le suivant :

Définition 1.6.2. — Soit A un anneau quelconque. On note $A[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans A. On appelle dérivée sur $A[x]$, l'application A-linéaire $D : A[x] \to A[x]$, définie par $D(x^n) = nx^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On la note plus simplement $'$, i.e. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

On reconnait la traduction algébrique de la dérivée classique sur les fonctions.

Lemme 1.6.3. — *L'application $'$ est une dérivation sur $A[x]$.*

Démonstration. — Pour tout $a \in A$, on a $a' = 0$. En effet, si on note e l'élément neutre, on a $e' = 0$ car $e' = (e^2)' = e'.e + e.e' = 2e'$. Par ailleurs, $(a)' = a(e)'$ par A-linéarité, d'où le résultat. Soit P et Q deux polynômes de $A[x]$. On note $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$. On a $P(x)Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j x^{i+j}$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} D(PQ)(x) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j (i+j) x^{i+j-1}, \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} i a_i x^{i-1} b_j x^j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i x^i j b_j x^{j-1}, \\ & = & D(P)Q + QD(P). \end{array}$$

L'application $'$ vérifie donc l'identité de Leibniz. □

On peut se demander si il y a d'autres dérivations sur $A[x]$. En fait, les contraintes liées à l'identité de Leibniz couplée à la linéarité impose des contraintes importantes. Par exemple, nous avons le théorème de *rigidité*[(3)] suivant :

[(3)] J'emploie ici le terme rigide, car la forme de l'objet est fixée par les contraintes de la définition.

Théorème 1.6.4. — *Toute dérivation D de $A[x]$ est de la forme $D(f) = af'$, pour un $a \in A[x]$.*

Démonstration. — Il suffit de regarder l'action de D sur les monômes. On a $D(x^n) = nx^{n-1}D(x)$, par récurrence. On en déduit $D(P) = (P)'D(x)$, pour tout $P \in A[x]$, où $D(x) \in A[x]$ est fixé par la dérivation, d'où le résultat. $\square$

Un autre exemple est donnée par les dérivations sur les fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Théorème 1.6.5. — *Soit $C^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les dérivations de $C^\infty(\mathbb{R})$ sont les endomorphismes de la forme $f \mapsto uf'$, où $u \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Je renvoie au livre de préparation à l'agrégation ([**14**], p.44, ex.22) pour la démonstration, basée sur le lemme d'Hadamard ([**14**],p.13).

Vus les phénomènes de rigidité précédents, l'existence de dérivations non triviales pour une algèbre donnée ne va pas de soit. Il y a des algèbres tellement *riches* qu'aucune dérivations ne peut exister.

Théorème 1.6.6. — *Il n'existe pas de dérivation non triviale sur l'ensemble des fonctions continues $C^0(\mathbb{R})$.*

Démonstration. — Ici l'obstruction provient du fait que toute fonction continue f peut s'écrire comme le cube d'une autre fonction continue g, i.e. $f = g^3$. On a alors $D(f) = D(g^3) = 3g^2D(g)$. Comme $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$, on en déduit : si $f(x) = 0$ alors $Df(x) = 0$. Prenons maintenant une fonction continue quelconque f. Au point x on construit la fonction $g_x : f - f(x)$ qui s'annule au point x. On a donc $Dg(x) = 0$ par le résultat précédent, soit $Dg(x) = D(f - f(x))(x) = Df(x) = 0$, car $f(x)$ est une constante. Comme le point x a été choisi arbitrairement, on a donc $D(f)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Nous avons ici choisi des algèbres de fonctions, mais ce phénomène de rigidité existe bien sur sur d'autres types d'algèbres. Par exemple, on a :

Théorème 1.6.7. — *Il n'existe pas de dérivations continues non triviales sur* $\mathbb{R}$.

C'est dommage, d'autant plus que l'existence de telles dérivations auraient permi de démontrer des résultats intéressant de *transcendance*. On peut démontrer qu'il n'existe pas non plus de déivations mesurables non triviales. Du coup, la construction d'applications non mesurables relevant de l'*axiome du choix*, l'existence de dérivations non triviales sur $\mathbb{R}$ admet a priori une existence abstraite, mais sont de toute façon *non constructibles*. Ce n'est pas la fin de l'histoire puisqu'on peut envisager soit des contraintes moins fortes que celle de vérifier la condition de Leibniz, soit travailler sur des ensembles de nombres plus petit, quitte à modifier la structure algèbrique.

Démonstration. — Soit D une dérivation sur $\mathbb{R}$. On a $D(1) = D(1.1) = D(1).1 + 1.D(1) = 2D(1)$, soit $D(1) = 0$. Par récurrence, on a donc $D(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en écrivant $n = 1 + \cdots + 1$ et la linárité de D. On en déduit $D(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. En effet, soit $x = p/q \in \mathbb{Q}$, on a $D(q.(p/q)) = D(p) = 0$ et $D(q.(p/q)) = D(q)(p/q) + qD(p/q) = qD(p/q)$, soit en combinant les deux $D(p/q) = 0$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de D, on en déduit $D(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

CHAPITRE 2

COURBES, OBJETS GÉOMÉTRIQUES ET INVARIANTS

Ce chapitre concerne les constructions classiques sur les courbes. On introduit la notion importante d'objet géométrique, qui est le premier pas vers la notion de variété. On définit les invariants géométriques d'ordre k associés à une courbe. On discute aussi les divers moyens de représenter une courbe. Ces divers moyens se retrouveront dans l'étude des variétés. On discute le problème général de synthèse, i.e. de reconstruction d'un objet à partir de ses invariants.

2.1. Courbes régulières et notion d'objet géométrique

Dans la suite de ce texte, le mot lisse veut dire de classe C^∞.

2.1.1. Paramétrisation et coordonnées curvilignes. —

Définition 2.1.1. — Une courbe paramétrée γ de $\mathbb{R}^n$ est une application α d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Elle est lisse si l'application α est lisse.

Le couple (I, α) est une *représentation paramétrique* de γ.

Le vecteur dérivé $\alpha'(t)$, s'il est non nul représente la tangente en t. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable paramétrée et $t_0 \in I$. La longueur de l'arc paramétré entre les points $\alpha(t_0)$ et $\alpha(t)$ est donnée par

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)^2 \right)^{1/2} dt. \tag{20}$$

la fonction $t \to s(t)$ est dérivable, de dérivée ≥ 0 donnée par

$$\frac{ds}{dt} = \parallel \alpha'(t) \parallel . \tag{21}$$

Si $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout t, alors s est une fonction strictement croissante et admet une réciproque $t = \phi(s)$.

Définition 2.1.2. — Une courbe lisse paramétrée $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ est dite régulière si quel que soit $t \in I$, on a $\alpha'(t) \neq 0$.

Une courbe lisse paramétrée régulière peut-être paramétrée par son abcisse curviligne s. Dans ce cas, on a

$$s = \int_{s_0}^{s} \parallel \alpha'(u) \parallel du, \tag{22}$$

soit en dérivant

$$\parallel \alpha'(s) \parallel = 1. \tag{23}$$

Réciproquement, si $t \to \alpha(t)$ est une courbe paramétré telle que $\parallel \alpha'(t) \parallel = 1$, alors l'abcisse curviligne vérifie $s = t - t_0$. Une telle paramétrisation sera dite *normale*.

2.1.1.1. Digression sur les courbes non régulières. — Sur une courbe lisse (régulière), on peut donc définir une coordonnée, appelée coordonnée curviligne qui paramétrise la courbe de façon satisfaisante. Dans le cas d'une courbe non régulière, ceci est impossible. En effet, on a le théorème suivant, dû à Lebesgue :

Théorème 2.1.3. — *Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$. Si la longueur du graphe $\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in [a, b]\}$ est finie alors f est différentiable presque partout.*

On peut trouver un énoncé plus précis et général dans ([**31**],p.77).

Une conséquence immédiate de ce théorème est le suivant : *la longueur d'un arc quelconque du graphe d'une fonction partout non différentiable est infinie.*

Du coup, la coordonnée curviligne sur une telle courbe est infinie en chaque point, ce qui fait qu'il est inutilisable pour repérer des points sur la courbe. Evidemment, on peut imaginer une notion de coordonnée plus faible (ici, la coordonnée curviligne est différentiable), par exemple en prenant seulement un homéomorphisme de $\Gamma(f)$ dans $\mathbb{R}$. C'est ce que nous ferons dans le chapitre sur les variétés différentiables, mais il faut bien avouer qu'un tel système de coordonnées est de peu d'intérêt pour étudier le comportement de ces objets peu réguliers. Pour le moment, ces problèmes sont soigneusement éviter dans la littérature, mais il devient plus ou moins indispensable de développer des outils d'étude des objets non réguliers. En effet, ces objets deviennent de plus en plus incontournable dans bon nombre de domaines (médecine avec la structure de certaines cellules cancéreuses, physique avec la physique quantique,...etc).

2.1.2. Arc géométrique, adimissibilité et invariants. — Le problème avec la notion de courbe paramétrée, c'est qu'elle ne correspond pas à la notion intuitive de courbe. En effet, il existe plusieurs représentations paramétriques d'une même courbe. Autrement dit, pour obtenir une notion *géométrique*, i.e. indépendant de la paramétrisation, nous devons indiquer quelles sont les représentations paramétriques équivalentes.

Définition 2.1.4. — La représentation (J,β) est dite équuivalente à (I,α) s'il existe un difféomorphisme θ de classe C^∞ de J sur I satisfaisant $\beta = \alpha \circ \theta$.

Exercice 2.1. — *Démontrer que la notion de représentation équivalente est une relation d'équivalence.*

Chaque classe $\mathcal{C}$ de représentation équivalente définit un *arc géométrique* Γ et les éléments de $\mathcal{C}$ sont les *représentations paramétriques admissibles* de Γ.

Nous aimerions caractériser ce qu'il y a d'intrinsèque à une courbe, i.e. ne dépendant pas du choix de la paramétrisation. Ceci nous conduit à la notion d'invariant géométrique.

Définition 2.1.5. — Soit Γ une courbe régulière. Un objet $\mathrm{Ob}(\Gamma)$ attaché à Γ est appelé un invariant géométrique, si il est invariant sous les changements de paramètres admissibles.

Le mot objet ci-dessus regroupe aussi bien des quantités réels, que des espaces-vectoriels, comme nous allons le voir dans les exemples qui suivent.

Exercice 2.2. — *Montrer que la longueur d'une courbe régulière est une notion géométrique.*

2.2. Plan osculateur et invariant géométrique

Soit Γ une courbe lisse définie par une représentation paramétrique (I, f). Dans un changement de paramètre admissible $t = \theta(u)$, $g = f \circ \theta$, le vecteur accélération $\gamma_f = f"(t)$ se transforme suivant la loi :

$$\gamma_g = f"\theta'^2 + f'\theta". \tag{24}$$

Autrement dit, la variété linéaire déterminée par le vecteur tangent $f'(t)$ et le vecteur accélération $f"(t)$ est indépendante de la représentation paramétrique utilisée.

Si ces vecteurs ne sont pas colinéaires, ils déterminent une variété linéaire de dimension deux, appelée *plan osculateur* au point $(t, f(t))$.

Le coefficient de $f"$ étant toujours positif, on voit que les vecteurs accélérations sont tous situés d'un même coté de la tangente à Γ : le demi-plan osculateur ainsi détrminé définit la *concavité* de la courbe.

Exercice 2.3. — *Plus généralement, démontrer que la variété linéaire engendrée par les vecteurs $f'(t)$, $\ldots$, $f^{(k)}(t)$, est indépendante de la représentation paramétrique considérée.*

On peut ainsi construire une quantité importante de notions géométriques, i.e. invariantes dans tout changement de paramètre admissible. Par exemple :

Exercice 2.4. — *On considère la quantité*

$$P_f^k = f' \wedge f" \wedge \cdots \wedge f^{(k)}. \tag{25}$$

Démontrer que sous le changement de paramètre $g = f \circ \theta$, on a

$$P_g^k = \theta'^{k(k+1)/2} P_f^k. \tag{26}$$

En déduire que $\| f' \|^{-k(k+1)/2} P_f^k$ est un invariant géométrique attaché à Γ.

Un invariant d'ordre k est un invariant faisant intervenir seulement f, ..., $f^{(k)}$.

2.3. Représentations des courbes

Soit (I, f) une représentation paramétrique définissant une courbe régulière Γ de $\mathbb{R}^n$.

2.3.1. Représentation spéciale. — Soient $f^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, les composantes de $f(t)$. Les n dérivées $f'^i(t)$ ne peuvent s'annuler simultanément. On pose donc $f'^n(t_0) \neq 0$.

Il existe un voisinage de t_0 dans lequel $x^n = f^n(t)$ est un paramètre admissible, i.e. il existe un sous arc de Γ, contenant le point $(t_0, f(t_0))$ et admettant une représentation paramétrique de la forme

$$x^i = \phi^i(x^n),\ i = 1, \ldots, n-1. \tag{27}$$

Exercice 2.5. — *Le démontrer.*

On en déduit sans peine le :

Proposition 2.3.1. — *Chaque point d'une courbe régulière appartient à un sous arc sur lequel l'une des coordonnées est un paramètre admissible.*

2.3.2. Représentation implicite. — On se donne $n-1$ fonctions numériques F^i, $i = 1, \dots, n-1$, indépendantes et de classe C^∞, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

La matrice $\left(\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)$ est de rang $n-1$ en tout point. Soit $a = (a^i)$ un point de Ω tel que

$$\det\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)(a) \neq 0,\ \ i = 1, \dots, n-1. \tag{28}$$

Le système d'équations

$$F^i(x) = F^i(a), \tag{29}$$

admet une solution unique dans un voisinage $\mid x^i - a^i \mid < h^i$, $i = 1, \dots, n$, telle que

$$x^i = \phi^i(x^n). \tag{30}$$

Les fonctions ϕ^i sont de classe C^∞.

Exercice 2.6. — *Démontrer ce résultat en utilisant le théorème des fonctions implicites.*

On en déduit que les n fonctions $(\phi^1, \dots, \phi^{n-1}, id)$ définissent une courbe régulière de classe C^∞ contenue dans l'ensemble $F^i(x) = F^i(a)$.

On en déduit la :

Proposition 2.3.2. — *Si les $n-1$ fonctions numériques F^i sont de classe C^{infty} et indépendantes en tout point de l'ensemble E défini par $F^i(x) = 0$, alors chaque point a de E admet un voisinage V_a tel que $E \cap V_a$ soit le support d'une courbe géométrique simple et régulière unique de classe C^∞.*

2.3.3. Équivalence locale. — Les points précédents montrent que les différentes représentations d'une courbe régulière sont *localement* équivalentes. On utilisera donc dans les calculs la représentation la plus adéquate.

Question : Que se passe-t-il dans le cas d'une représentation paramétrique de classe C^0 ? (prendre une courbe un peu bizarre, comme la courbe de Peano, qui remplie le carré).

2.4. Courbes régulières en dimension deux et trois

Le but de cette section est de spécialiser notre approche des courbes en dimension deux et trois. On va principalement étudier les invariants d'ordre 2 et 3.

2.4.1. Invariants d'ordre 1 et 2 : courbure et trièdе de Serret-Frenet. — Soit Γ une courbe régulière orientée, de classe C^1, définie par une représentation pramétrique normale $OM = X(s)$. À chaque point M de Γ, nous associons le vecteur unitaire

$$t = \frac{DM}{ds}, \tag{31}$$

porté par la tangente orientée à Γ. Le plan perpendiculaire en M à la tangente est dit *normal* à Γ.

Si Γ est de classe C^2, on peut définir une accélération $\gamma = d^2M/ds^2$. La relation $\| dM/ds \|^2 = 1$ entraine

$$t.\gamma = 0. \tag{32}$$

Le vecteur accélération est donc nul ou normal à Γ.

Si $\gamma \neq 0$, on note n un des deux vecteurs unitaires colinéaires à γ. On a

$$\gamma = \rho.n, \tag{33}$$

où ρ est un réel.

Le réel ρ s'appelle la *courbure* orientée de la courbe Γ au point M et son inverse $R = \rho^{-1}$ le *rayon de courbure.*

Le plan déterminé par les vecteurs t et n est le *plan osculateur* à Γ en M. La droite déterminée par le point M et le vecteur n est la *normale principale* : c'est la seule normale à Γ contenue dans le plan osculateur.

La normale en M au plan osculateur est appelée *binormale*. Sa direction est celle du vecteur

$$b = t \wedge n. \tag{34}$$

Le plan déterminé par le point M et les vecteurs b et t est appelé *plan rectifiant*.

Le trièede orthonormal direct constitué des trois vecteurs t,n,b est appelé trièede de Serret-Frenet de Γ au point M.

Exercice 2.7. — *Dans le cas d'un point d'inflexion, ona $\gamma = 0$ et on doit poser $\rho = 0$. Le rayon de courbure est donc infini. Démontrer que si cela se produit en tous les points de la courbe alors cette courbe est un segment de droite, i.e. $Om = as + b$, où a et b sont deux vecteurs constants.*

On peut lever l'indétermination sur le choix de n en imposant à la courbure d'être positive.

Exercice 2.8. — *Expliciter la courbure, les vecteurs t, n, b, dans le cas d'une représentation paramétrique admissible quelconque de Γ.*

2.4.2. Invariants d'ordre 3 : torsion et formules de Frenet. — On suppose maintenant Γ de classe C^3. Le vecteur b est alors une fonction de classe C^1 de s. Les relations $b^2 = 1$ et $t.b = 0$ entraîne par dérivation

$$b.\frac{db}{ds} = 0,\ t.\frac{db}{ds} + \frac{dt}{ds}b = 0. \tag{35}$$

On en déduit

$$t.\frac{db}{ds} = -b\frac{n}{R}. \tag{36}$$

Le vecteur db/ds est donc orthogonal à b et t, donc colinéaire à n. On pose

$$\frac{db}{ds} = \tau n, \tag{37}$$

où τ est un réel, appelé *torsion* de la courbe Γ au point M, et son inverse $T = \tau^{-1}$, *rayon de torsion.*

Le signe de la torsion ne change pas suivant l'orientation de n ou de Γ (contrairement à la courbure).

Le repère (t, n, b) est orthonormal. On a les *formules de Serret-Frenet* :

$$\frac{dM}{ds} = t,\ \frac{dt}{ds} = \frac{n}{R},\ \frac{dn}{ds} = -\frac{t}{R} - \frac{b}{T},\ \frac{db}{ds} = \frac{n}{T}. \tag{38}$$

Exercice 2.9. — *Expliciter la torsion dans le cas d'une représentation paramétrique admissible quelconque. En déduire que le signe de la torsion a une siginfication géométrique indépendante de l'orientation de la courbe.*

Exercice 2.10. — *Que se passe-t-il en un point d'inflexion ?*

La signification géométrique de la torsion est la suivante : si la torsion est nulle en tout point de la courbe, alors c'est une réunion de courbes planes. Si de plus la courbure ne s'annule pas, alors la courbe est complétement contenue dans un plan.

Exercice 2.11. — *Montrer que la torsion d'une courbe plane est nulle.*

2.4.3. Invariants d'ordre supérieur à 3. — On peut se demander si une courbe régulière peut être entièrement caractérisée par la donnée d'une famille finie d'invariants. C'est le problème de *synthèse*, i.e. de reconstruction des objets à partir des invariants. Dans le cas des courbes, on peut montrer que tous les invariants géométriques d'ordre $k > 3$ s'obtiennent à partir des invariants d'ordre ≤ 3 et de leurs dérivées.

La démonstration repose sur deux remarques :

- tous les invariants géométriques d'ordre k relatifs à un point M de Γ peuvent (par définition) se définir à partir des dérivées d'ordre $\leq k$ de la fonction $OM = f(s)$.

- Les dérivées d^kM/ds^k s'obtiennent à partir de t,n,b,ρ,…,$\rho^{(k-2)}$,τ, …,$\tau^{(k-3)}$.

Exercice 2.12. — *Démontrer ce dernier point. On calculera pour cela d^3M/ds^3.*

On peut profiter de ce point pour donner au passage la position locale de la courbe par rapport à son trièdre de Frenet. Soit (I, γ) une paramétrisation de l'arc Γ. Le développement de Taylor à l'ordre 3 de γ peut se mettre sous la forme :

(39)
$$\begin{aligned}\gamma(s) - \gamma(s_0) \quad = \quad & (s - s_0)t + \frac{(s - s_0)^2}{2}\rho n + \frac{(s - s_0)^3}{6}(-\rho^2 t + \rho' n - \rho\tau b)\\ & + o(s - s_0)^3.\end{aligned}$$

On en déduit l'allure des projections de l'arc sur les trois plans du trièdre (voir [**4**],p.339).

Le théorème de synthèse (souvent appelé théorème fondamental dans la plupart des cours) est le suivant :

***Théorème 2.4.1* (synthèse).** — *Soient $k(s) > 0$ et $\tau(s)$ deux fonctions de classe C^∞ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$. Il existe un courbe γ de I dans $\mathbb{R}^3$ telle que s est l'abcisse curviligne, $k(s)$ la courbure et $\tau(s)$ la torsion de γ en s. De plus, tout autre courbe vérifiant les mêmes conditions se déduit de γ par un déplacement euclidien de $\mathbb{R}^3$.*

La démonstration est assez simple. On peut la trouver dans ([**3**],p.188-189) et ([**4**],p.340-341). Elle fera l'objet de votre premier devoir.

On peut se demander si l'hypothèse d'une courbure non nulle est fondamentale (cette condition est appelée *birégularité* dans ([**4**],§.8.4.3,p.326). Si la courbure est nulle en un point, on ne peut pas donner de sens au vecteur normal principal et la torsion n'est donc pas définie. Supposons que l'on puisse néanmoins prolonger la torsion par continuité. Le théorème de synthèse est-il encore vrai ?

La réponse est non. Pour cela, vous pouvez étudier les deux arcs suivants, qui ne sont pas déductible l'un de l'autre par déplacement :

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t}, 0) & \text{si} \quad t > 0, \\ (t, e^{1/t}, 0) & \quad\quad t < 0, \\ (0,0,0) & \quad\quad t = 0, \end{cases} \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t}, 0) & \text{si} \quad t > 0, \\ (t, 0, e^{1/t}) & \quad\quad t < 0, \\ (0,0,0) & \quad\quad t = 0, \end{cases} .$$

2.5. Digression : Synthèse et invariants

Le problème de synthèse et celui de la recherche d'invariants font partie des problèmes classiques des mathématiques. Evidemment, on pense à l'algèbre et la géométrie algébrique en premier lieu, mais pas seulement. La clssification des équations différentielles conduit aussi à ces problèmes. Quelles sont les difficultés que l'on rencontre en général ? Et bien, elles peuevent être de plusieurs sortes. Tout d'abord, il se peut très bien que les invariants soient en nombre infini (contrairement au cas des courbes ci-dessus). Mais supposons pour le moment qu'ils soient en nombre fini. Il se peut très bien qu'ils ne soient pas calculable (je veux dire par là qu'il existe une preuve de l 'existence formelle de ces invariants, mais qu'on ne dispose pas d'un algorithme effectif pour les calculer, soit qu'il n'existe pas ou qu'il donne une réponse en temps infini. Ces problèmes resurgissent evidemment sur le problème de synthèse. Pour un exemple abordable de construction d'invariants dans un problème de géométrie, voir l'article d'Aziz El Kacimi Alaoui, *La cohomologie comme exemple d'invariant topologique*, dans le livre [**11**], dont je recommande la lecture complète.

2.6. Un théorème de Classification

L'objet de ce paragraphe est de démontré le théorème de classification des courbes(1) connexes suivant ([**32**],p.154-155) :

Théorème 2.6.1. — *Toute courbe $\mathcal{C}$, connexe, de dimension 1, C^1, est difféomorphe au cercle unité, ou à un intervalle de $\mathbb{R}$.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.6.2. — *Soit $f : I \to \mathcal{C}$ et $g : J \to \mathcal{C}$, deux paramétrages de $\mathcal{C}$ par la longueur de l'arc. Alors $f(I) \cap g(J)$ a au plus deux composantes. S'il n'y en a qu'une, f peut être prolongée en une paramétrisation de la réunion $f(I) \cup g(J)$. S'il y en a deux, $\mathcal{C}$ est difféomorphe au cercle S^1.*

Démonstration. — $g^{-1} \circ f$ est un difféomorphisme local sur $I \cap f^{-1}(g(J))$ et la dérivée de $g^{-1} \circ f$ vaut ± 1. En effet, il suffit de dériver la relation $f = g \circ g^{-1} \circ f$ sur $I \cap f^{-1}(g(J))$. Soit $\Gamma = \{(s,t) \in I \times J; f(s) = g(t)\}$. Γ est un fermé de $I \times J$ qui consiste en des segments de pente ± 1. Comme Γ est fermé et $g^{-1} \circ f$ localement un difféomorphisme, ces segments ne peuvent s'arrêter a l'intérieur de $I \times J$ et doivent se terminer sur les bords. Comme $g^{-1} \circ f$ est injective, il ne peut y avoir qu'au plus un de ces segments se terminant sur chacun des quatre côés du rectangle $I \times J$. Donc Γ a au plus deux composantes connexes.

Si Γ est connexe, $g^{-1} \circ f$ se prolonge en une application $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f et $g \circ L$ se recollent pour donner le prolongement :

$$F : I \cup L^{-1}(J) \to f(I) \cup g(J).$$

Si Γ a deux composantes connexes, on construit ([**32**],p.155) un difféomorphisme h de $S^1 \to \mathcal{C}$, car l'image $h(S^1)$ est compacte et ouverte dans $\mathcal{C}$, don égale à $\mathcal{C}$ qui est connexe. □

Démontrons maintenant le théorème :

Démonstration. — Soit $f : I \to \mathcal{C}$ une paramétrisation maximale(2) par la longueur de l'arc de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ n'est pas difféomorphe à S^1, f est nécessairement

(1)On dit aussi variété de dimension 1.
(2)C'est à dire sur le plus grand intervalle possible.

surjective. En effet, si f n'est pas surjective, on considère x un point adhérent à $f(I)$ dans $\mathcal{C} \setminus f(I)$. Une paramétrisation locale au voisinage de x et l'utilisation du lemme précédent permet d'étendre f sur un intervalle plus grand, ce qui contredit f maximale. $\square$

En fait, avec un peu plus de travail, on a le résultat plus précis suivant ([**17**],p.114-115) :

Théorème 2.6.3. — *Une variété connexe de dimension* 1 *est difféomorphe à* S^1 *si elle est compacte, à* $\mathbb{R}$ *si elle n'est pas compacte.*

2.7. Lectures

Pour ce qui est de l'agrégation de mathématique, je renvoie au livre de Avez [**3**], p. 184, pour un exemple de leçon sur les propriétés métriques des courbes planes ou gauches. On consultera aussi le livre de Do Carmo [**8**], chapitre 1, qui reprend, avec beaucoup d'exemples et de détails, les points essentiels de ce cours. Il y a aussi le livre de Berger-Gostiaux ([**4**], Chap.8) qui est un emine d'informations et d'exemples en tout genre.

2.8. Exercices

1 – *Hélice circulaire droite et théorème de Von Neumann-Schoenberg.* C'est la courbe qui, en repère ad-hoc, a pour équations :

$$\begin{array}{rcl} x &=& a\cos t, \\ y &=& a\sin t, \\ z &=& bt, \end{array} \tag{40}$$

où $a > 0$ et b sont des constantes.

i – Démontrer que la courbure et la torsion sont constantes.

Réciproquement, une courbe de courbure et de torsion constantes est une hélice circulaire droite.

ii – Démontrer ce point en utilisant le théorème de synthèse.

Voici maintenant l'énoncé du théorème de Von Neumann et Schoenberg (Trans. Amer. Math. Soc. 50, 226-251, 1941) :

Une courbe de classe C^2, telle que $\mid \gamma(s) - gamma(r) \mid$ ne dépend que de $s - r$ est une hélice circulaire droite.

iii –le démontrer.

2 – *Théorème de Fary.* Soit $\gamma : [0,1] \to E$ une courbe de classe C^2 paramétrée normalement. On la suppose fermée, i.e. γ est la restriction à $[0,1]$ d'une application de classe C^2 et de période 1 de $\mathbb{R}$ dans E. Le théorème de Fary est le suivant (voir G.D. Chakerian, Pacific J. Math. 12, 53-57, 1962) :

Soient L sa longueur et K sa courbure totale. Si son image est confinée dans une boule de rayon r, alors $L \leq rK$, et l'égalité n'a lieu que si la courbe est un cercle.

Démontrer ce résultat.

3 – On considère la courbe de $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$\begin{aligned} x &= \frac{z^5}{10}, \\ y &= \frac{z^3}{10}, \\ z &= z, \end{aligned} \tag{41}$$

orientée dans le sens z croissant. Démontrer que

$$\begin{aligned} t &= (az^4, 2az^2, 2a), \\ n &= (2az^2, a(2-z^4), -2az^2), \\ b &= (-2a, 2az^2, -az^4), \end{aligned} \tag{42}$$

où $a = (z^4+2)^{-1}$.

En déduire que $k = -8a^2 z$, $\tau = -k$.

CHAPITRE 3

SURFACES ET SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbb{R}^n$

Ce chapitre traite essentiellement les surfaces de $\mathbb{R}^3$. De la même manière que pour les courbes, nous allons définir des quantités qui permettent de reconstruire la surface à partir de la donnée de ces quantités (i.e. l'équivalent du théorème de synthèse pour les courbes). Un objet important est l'*application de Gauss*, qui permet notamment de savoir quand une surface est ou non orientable. Par ailleurs, nous allons étudier tout ce qui reléve des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, i.e. le rapport existant entre la géométrie et le théorème d'inversion locale.

3.1. Nappes paramétrées de $\mathbb{R}^n$

3.1.1. Définitions. — Commençons par définir la notion de surface que nous allons étudier.

Définition 3.1.1. — Une nappe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ est une application différentiable $S : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, une nappe sur un sous-ensemble A quelconque de $\mathbb{R}^n$ est une application $S : U \to \mathbb{R}^n$ définie sur un ouvert U contenant A. L'image de la nappe $S(U)$ est appelée la nappe géométrique.

Dans la suite, on note

$$S : (u,v) \mapsto (S_1(u,v), \dots, S_n(u,v)),$$

une nappe paramétrée de $\mathbb{R}^n$. La matrice Jacobienne de la nappe est la fonction matricielle

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{\partial S_i}{\partial u}, \frac{\partial S_i}{\partial v} \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Un point régulier $S(u_0)$ de la nappe géométrique est un point tel que le rang de la matrice jacobienne est ≥ 2. En particulier, pour $n = 3$, un point régulier est tel que

$$\| \frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v} \| \neq 0,$$

où $e \wedge e'$ est le produit vectoriel de deux vecteurs e et e' de $\mathbb{R}^3$.

3.1.2. Normale et applications de Gauss. —

Définition 3.1.2. — On note $e_1 = \frac{\partial S}{\partial u}$ et $e_2 = \frac{\partial S}{\partial v}$. E un point régulier $S(u_0)$ de la nappe géométrique, il existe un vecteur unitaire, appelé vecteur normal en $S(u_0)$, et défini par

$$N(u_0) = \frac{e_1 \wedge e_2}{\| e_1 \wedge e_2 \|}(u_0).$$

On peut étudier la surface en suivant le vecteur normal le long de la surface : c'est l'application de Gauss.

Définition 3.1.3. — Soit $S : U \to \mathbb{R}^3$ une nappe r'egulière en tout point. L'application $N : U \to S^2$ qui associe, à chaque point (u, v), le vecteur unitaire normal en $S(u, v)$ est appelée application de Gauss de la nappe.

On peut en profiter pour introduire un objet d'importance : le *plan tangent*.

Définition 3.1.4. — Soit $S : U \to \mathbb{R}^3$ une nappe régulière. Le lan tangent à la nappe au point $S(u, v)$ est le plan affine passant par $S(u, v)$ et orthogonal au vecteur $N(u, v)$.

3.1.3. Courbes tracées sur des surfaces de $\mathbb{R}^3$. — Soit $S : U \to \mathbb{R}^n$ une nappe paramétrée de $\mathbb{R}^n$. Soit $\phi :]a, b[\to U$ une courbe du plan $\mathbb{R}^2$. La composée des deux applications $S \circ \phi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ définit une courbe tracée sur la nappe définie par S.

3.1.4. Première forme fondamentale. — Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $L : V \to V$ une application linéaire auto-adjointe. On peut toujours lui associer une forme quadratique définie par

$$Q_L(v) = L(v).v.$$

On suppose maintenant que $S : U \to \mathbb{R}^3$ est une nappe régulière.

Définition 3.1.5. — La première forme quadratique fondamentale est la restriction de la forme quadratique $v \to \parallel v \parallel^2$ au plan tangent à S. On note g la première forme quadratique fondamentale.

Le plan tangent à S est engendré par les deux vecteurs $e_1 = \partial S/\partial u$ et $e_2 = \partial S/\partial v$. Un vecteur du plan tangent s'écrit donc

$$v = xe_1 + ye_2$$

et la première forme quadratique fondamentale est

$$g(x, y) = x^2 \parallel e_1 \parallel^2 + 2xye_1.e_2 + y^2 \parallel e_2 \parallel^2 .$$

On peut remarquer que la première forme quadratique fondamentale est non-dégénérée et positive car la nappe et régulière.

La première forme quadratique fondamentale fournit l'exemple le plus simple d'une *structure riemannienne*. Soit Γ une courbe tracée sur la nappe g'eométrique S et définie paramétriquement sur $]a, b[$ par :

$$\phi : t \mapsto (u(t), v(t)) \mapsto S(u(t), v(t)).$$

Le vecteur tangent en $\phi(t)$ à Γ est $\phi'(t) = u'(t)e_1 + v'(t)e_2$ et on a

$$\parallel \phi'(t) \parallel^2 = g(u'(t), v'(t)).$$

La longueur de Γ est

$$\int_a^b \sqrt{g(u'(t), v'(t))}dt.$$

On peut donc définir sur Γ une *paramétrisation normale* en suivant la construction du chapitre précédent. À la paramétrisation normale on associe le *repère de Darboux-Ribaucour* :

$$s \mapsto (T(s), G(s), N(s)), \text{ où } T(s) = \phi'(s).$$

Le vecteur $G(s) = T'(s)$ est appelé *vecteur normal géodésique* au point $\phi(s)$ à la courbe Γ et $N(s) = T(s) \wedge G(s)$ est le vecteur normal à la surface S au point $\phi(s)$.

Le résultat important est le suivant :

Théorème 3.1.6. — *Soit $S : U \to \mathbb{R}^3$ une nappe régulière et Γ une courbe sur S. Soit $(T(s), G(s), N(s))$ le repère mobile*[1] *de Darboux associé à Γ. Il existe des fonctions ρ_g, ρ_n et θ_g telles que*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T(s) \\ G(s) \\ N(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho_g(s) & -\rho_n(s) \\ \rho_g(s) & 0 & \theta_g(s) \\ \rho_n(s) & -\theta_g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ G(s) \\ N(s) \end{pmatrix}.$$

On appelle ρ_n la courbure normale, ρ_g la courbure géodésique et θ_g la torsion géodésique.

La démonstration repose sur le fait que si $(A(s), B(s), C(s))$ est un repère mobile orthonormé, la matrice M telle que $(A'(s), B'(s), C'(s)) = M(s)(A(s), B(s), C(s))$ est antisymétrique.

3.1.5. Deuxième forme fondamentale : courbure moyenne et courbure totale. — Soit S une surface et γ une courbe tracée sur S. Soit O un point de γ, choisi comme origine des coordonnées. On choisit pour axe Oz la normale à la surface en O. On considère le plan osculateur à γ en O.

Soient θ l'angle de ce plan avec l'axe Oz, OQ la droite intersection du plan osculateur avec le plan tangent en O à la surface (i.e. le plan (x, y)) et ϕ l'angle de OQ avec l'axe Ox.

Comme la tangent à la courbe est à la fois dans le plan osculateur et orthogonale à la normale à la surface, la droite OQ est la tangente à γ en O.

Soit M un point de γ infiniment voisin de O, de coordonnées (x, y, z). On note P sa projectino sur le plan Oxy et N sa projection sur OQ.

---

[1] La théorie du repère mobile a été introduite par Élie Cartan. Elle consiste à rapporter un espace donné à un repère variable, dépendnat d'un ou plusieurs paramètres. Je renvoie à ([**18**],p.44) pour plus de détails.

La courbure c de γ en O est donné par :

$$c = \lim_{M \to O} \frac{2MN}{OM^2}.$$

L'angle entre PM et MN est équivalent à θ, donc $MN \sim z/\cos\theta$ quand $M \to O$. On écrit $z = F(x, y)$ l'équation de la surface. Le choix du point O comme origine et celui de l'axe Oz normal à la surface conduisent à une expression locale au voisinage de O du type

$$z = ax^2 + 2mxy + by^2 + O(x^2 + y^2)^{3/2}.$$

On peut de plus supposer que $m = 0$ en choisissant comme axes Ox et Oy un système d'axes orthogonaux qui diagonalise la form quadratique ci-dessus. On obtient ainsi l'expression de la courbure de γ en O :

$$c = \lim_{(x,y) \to O, (x,y,z) \in \gamma} \frac{2(ax^2 + by^2)}{(x^2 + y^2)\cos\theta} = \frac{2(a\cos^2\phi + b\sin^2\phi)}{\cos\theta}.$$

Les résultats suivants se déduisent de cette formule :

Proposition 3.1.7. — *La courbure c d'une courbe γ tracée sur la surface S est égale à la courbure de la courbe de section de S par le plan osculateur.*

Théorème 3.1.8 **(Meunier)**. — *La courbure c d'une courbe obtenue comme section de la surface S par un plan faisant un angle θ avec la normale à S est égale à celle de la section normale menée par la même tangente , divisée par* $\cos\theta$*.*

Théorème 3.1.9 **(Euler)**. — *La courbure d'une section normale est égale à $c = 2a\cos^2\phi + 2b\sin^2\phi$ et elle varie entre un maximum $k_1 = 2a$ et un minimum $k_2 = 2b$ (en supposant $a \geq b$) qui correspond à deux plans de section orthogonaux.*

On est donc conduit à introduire les quantités suivantes :

Définition 3.1.10. — La courbure totale de la surface S et le produit $k = k_1k_2$ et la courbure moyenne est $K = (k_1 + k_2)/2$. La courbure totale s'appelle aussi la courbure de Gauss.

Ces quantité s'expriment à l'aide d'un nombre fini d'information sur S :

Théorème 3.1.11 **(Theorema Egregium de Gauss)**

La courbure totale k et la courbure moyenne K en un point (x_0, y_0, z_0) s'expriment au moyen des seules quantités :

$$p = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ q = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ r = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Ces informations peuvent se résumer au moyen d'une forme quadratique :

Définition 3.1.12. — La forme quadratique $h_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial u_i \partial v_j}.N$ ainsi obtenue s'appelle la deuxième forme quadratique fondamentale.

Elle mesure l'écart que fait une courbe tracée sur la surface avec la plan tangent.

3.2. Sous-variétés

Définition 3.2.1. — Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout x de M, il existe des voisinages ouverts U et V de x et 0 dans $\mathbb{R}^n$ respectivement, et un difféomorphisme

$$f : U \to V \text{ tel que } f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

On dit alors que M est de codimension $n - p$ dans $\mathbb{R}^n$.

On peut caractériser les sous-variétés de plusieurs manières. Avant d'énoncer le théorème qui donne ces différentes caractérisation, on introduit un peu de vocabulaire.

Définition 3.2.2. — Une immersion de classe C^k d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est une application C^k de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est injective.

Une submersion est de même une application C^k de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2.3. — *Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i – M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$;

ii – Pour tout a de M, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.

iii – Pour tout a de M, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0, et une application $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.

iv – Pour tout a de M, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a^1, \ldots, a^p)$ et une application lisse G de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ est égal au graphe de G.

On reprend la démonstration de ([**17**],p.29-30).

Démonstration. — Montrons d'abord que i) implique ii) et iii). Soit f le difféomorphisme défini sur un voisinage U de $a \in M$, dont i) affirme l'existence. Alors f^{-1} est un difféomorphisme de $f(U)$ sur U. Sa restriction à $\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap f(U)$ est une immersion de cet ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, et un homéomorphisme sur $U \cap M$, d'où iii).

Pour voir que i) implique ii), considérons les composantes $(f^i)_{1 \le i \le n}$ de f. Par hypothèse, leurs différentielles sont linéairements indépendantes en tout point de U. Posons $g = (f^{p+1}, \ldots, f^n)$. On a bien une submersion de U dans $\mathbb{R}^{n-p}$ telle que $M \cap U = g^{-1}(0)$.

Supposons maintenant que iii) soit vérifiée. On peut[(2)], quitte à remplacer Ω par un sous-ouvert, trouver un difféomorphisme ϕ d'un ouvert U contenant $h(0) = a$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\phi \circ h(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots n, 0).$$

Alors

$$\phi(U \cap M) = \phi(h(\Omega)) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

[(2)] Cela provient du théorème suivant,à démontrer en exercice (voir [**17**],p.26) :

Théorème 3.2.4. — *Soit f une application C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On suppose que $0 \in U$ et que la différentielle df_0 est injective. Alors il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^q$ contenant 0, un ouvert U' contenu dans U tel que $f(U') \subset V$, et un difféomorphisme ϕ de V sur son image tels que*

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_p)) = (x_1, \ldots, x_p, 0 \ldots, 0).$$

L'implication ii) i) se montre de la même façon.

Montrons maintenant l'équivalence de ii) et iv). Le fait que iv) implique ii) est élémentaire : si M est localement le graphe d'une fonction $G : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ comme dans l'énoncé, de composante $G_1, \dots, G_{n-p}$, l'application

$$g : x \mapsto (x_{i+p} - G_i(x_1, \dots, x_p))_{1 \leq i \leq n-p}$$

est une submersion qui convient, quitte à restreindre son ouvert de définition. Inversement, une telle submersion étant donnée, on peut supposer, quitte à permuter les coordonnées, que la matrice

$$(\partial_{i+p} g_i(a))_{1 \leq i,j \leq n-p}$$

est inversible. On applique alors le théorème d'inversion locale à la fonction

$$F : x \mapsto (x_1, \dots, x_p, g_1(x), \dots g_{n-p}(x)).$$

Son inverse locale est aussi de la forme

$$F^{-1} : x \mapsto (x_1, \dots, x_p, \gamma_1(x), \dots, \gamma_{n-p}(x)),$$

ce qui fait apparaître M localement comme le graphe de

$$G : (x^1, \dots, x^p) \mapsto (\gamma_j(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)_{1 \leq j \leq n-p}.$$

□

Remarque 3.2.5. — L'implication ii) donne iv) est le contenu du *théorème des fonctions implicites*.

Un corollaire immédiat de ce théorème est le résultat suivant :

Théorème 3.2.6. — *Soit f une application lisse d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et soit a de $\mathbb{R}^p$ tel que $f^{-1}(a) \neq \emptyset$. Alors, pour que $f^{-1}(a)$ soit une variété, il suffit que la différentielle de f soit surjective en tout point de $f^{-1}(a)$.*

C'est ce théorème que nous utiliserons la plupart du temps. Il découle de ii) en remarquant que si la différentielle de g est surjective en un point x, alors c'est encore vrai dans un voisinage de x (pensez au fait que la surjectivité équivaut à la non-nullité d'un déterminant).

Le théorème précédent est souvent énoncé à l'aide de la notion de *valeur régulière* :

Définition 3.2.7. — Soit f une application lisse d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

i – un point $x \in U$ est dit critique si

$$\operatorname{rang}(f'(x)) < n.$$

Un point $y \in \mathbb{R}^n$ est une valeur critique s'il existe un point critique x tel que $f(x) = y$.

ii – Un point est dit régulier s'il n'est pas critique.

Le théorème 3.2.6 s'énonce alors ainsi : si a est une valeur régulière, alors $f^{-1}(a)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

3.3. Le lemme de Sard (ou de Morse-Sard)

Les résultats précédents donnent une importance particulière aux valeurs régulières des applications. Le lemme de Sard nous dit que le complémentaire de l'ensemble des valeurs régulières d'une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est une partie de mesure nulle de $\mathbb{R}^p$. Précisément, on a :

***Lemme 3.3.1* (Sard ou Morse-Sard)**. — *Soit f une application de classe C^k d'un ouvertΩ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. L'ensemble des points critiques de f est noté C. Si $k \geq \max(1, n-p+1)$, alors $f(C)$ est de mesure nulle.*

On renvoie à [**12**] pour la démonstration.

Nous allons ici démontrer une version beaucoup plus simple. On note $\| \, . \, \|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.3.2. — *Soit f une application C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et C l'ensemble des points critiques de f. L'ensemble $f(C)$ est de mesure (de Lebesgue) nulle dans $\mathbb{R}^n$.*

On reprend la démonstration proposée dans ([**14**],p.102).

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout cube compact K contenu dans Ω, $f(C \cap K)$ est de mesure nulle. On fixe un tel cube K, dont on note $r > 0$ le côté. On pose $M = \max_{x \in K} \| f'(x) \|$, et pour $\delta > 0$,

$$\lambda(\delta) = \sup_{(x,y) \in K^2,\ \|x-y\| \leq \delta} \| f'(x) - f'(y) \| .$$

L'uniforme continuité de f' sur K entraîne que $\lambda(\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$.

Soit H_x un hyperplan affine d $\mathbb{R}^n$ passant par $f(x)$ et dont la direction contient $\mathrm{Im} f'(x)$. On a, si $y \in K$:

$$f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) = \int_0^1 \left[f'(x + t(y-x)) - f'(x) \right] (y-x) dt.$$

La norme intégrale est majorée par $\lambda(\| x - y \|) \| x - y \|$, alors que $f(x) + f'(x)(y-x)$ est dans H_x. Alors, pour tout $y \in K$, on a

$$d(f(y), H_x) \leq \lambda(\| x - y \|) \| x - y \| .$$

Découpons K en k^n cubes compacts, tous de côtś r/k que l'on notera : $K_1, \ldots, K_{k^n}$. Le diamètre de chaque K_i est donc $\sqrt{n} r/k$. Si $K_i \cap C \neq \emptyset$, on fixe $x \in K_i \cap C$, et on a, pour $y \in K_i$:

$$\begin{array}{lll} \| f(x) - f(y) \| & \leq & M \| x - y \| \leq M\sqrt{n} r/k, \\ d(f(y), H_x) & \leq & \lambda(\sqrt{n} r/k)\sqrt{n} r/k. \end{array}$$

Il en résulte que si $K_i \cap C \neq \emptyset$, $f(K_i)$ est dans un pavé compact de $\mathbb{R}^n$ de volume

$$\left(2M\sqrt{n} r/k\right)^{n-1} 2\sqrt{n}\frac{r}{k}\lambda(\sqrt{n} r/k) = 2^n M^{n-1} n^{n/2} \left(\frac{r}{k}\right)^n \lambda(sqrtnr/k).$$

Par conséquent, $f(C \cap K)$ est dans la réunion d'un nombre fini de pavés dont la somme des mesures est majorée par $2^n M^{n-1} n^{n/2} r^n \lambda(\sqrt{n} r/k)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque k tend vers ∞. □

On trouvera une démonstration abordable du lemme de Sard C^∞ dans ([**14**],p.103-105), et le cas trivial ([**14**],p.56-57) :

Lemme 3.3.3. — *Soit f une application localement lipschitzienne de'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $p > n$, alors $f(C)$ est de mesure nulle.*

Notons que l'hypothèse d'être localement lipschitzienne ne peut pas être affaiblie. On consultera ([**15**],p.55-59) pour une étude des courbes de Peano.

3.4. Espace tangent à une sous-variété

Commençons par définir la notion de vecteur tangent.

Définition 3.4.1. — On dit qu'un vecteur v est tangent en un point a d'une partie A de $\mathbb{R}^p$ s'il existe une application différentiable $c :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^p$ telle que $c(]-\epsilon, \epsilon[) \subset A$, $c(0) = a$, $c'(0) = v$.

L'ensemble des vecteurs tangents en un point possède une structure.

Proposition 3.4.2. — *Les vecteurs tangents en un point à une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ forment un espace vectoriel de dimension p.*

Démonstration. — Soit a un point de la sous-variété M, et f un difféomorphisme défini sur un voisinage ouvert U contenant a et tel que $f(U \cap M) = f(U) \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. On peut toujours supposer $f(a) = 0$. Alors, si v est tangent en a, le théorème des fonctions composées appliqué à $f \circ c$ montre que $df(a).v \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$.

Inversement, si $w \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, en choisissant ϵ de façon que

$$\forall t, \mid t \mid < \epsilon, \ tw \in f(U),$$

on voit que la courbe $t \to f^{-1}(tw)$ définit un vecteur tangent à M en a, à savoir $df^{-1}(0).w$.

Autrement dit, l'ensemble des vecteurs tangent à M en a, s'identifie à l'image par l'application linéaire $df^{-1}(0)$ du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$. □

On peut donc définir l'espace tangent en un point.

Définition 3.4.3. — L'espace tangent à une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ en un point a, noté T_aM, est l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^n$ tels que le vecteur $m-a$ soit tangent à M en a.

L'espace tangent en a est donc un sous-espace affine de dimension p de l'espace ambiant. Il devient un espace vectoriel pour le choix naturel de a comme origine.

Dans certains cas, l'espace tangent est facile à expliciter.

Lemme 3.4.4. — *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $a \in M$. Soit g une submersion définie sur un voisinage U de a telle que $U \cap M = g^{-1}(g(a))$, alors l'espace tangent en a estle noyau de l'application linéaire $dg(a)$.*

Démonstration. — Soit $t \to c(t)$ un difféomorphisme définissant un vecteur tangent v au point a. On a $g(c(t) = g(a)$, d'où en différentiant cette expression $dg(a).v = 0$, où $v = c'(a)$. On a donc $\ker(dg(a)) \subset T_aM$.

Comme T_aM et $\ker(dg(a))$ sont deux espaces vectoriels, ils sont égaux si $\dim(T_aM) = \dim(\ker(dg(a)))$. Or, comme $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une submersion, on a $\mathrm{di}(\mathrm{Im}(dg(a))) = n - p$, soit $\dim(\ker(dg(a))) = p = \dim(T_aM)$. □

Un autre exemple est donné par les sous-variétés paramétrées.

Définition 3.4.5. — Une paramétrisation d'une sous-variété M de dimension p de $\mathbb{R}^n$ est une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$, et un homéomorphisme de Ω sur un ouvert de M.

Une paramétrisation locale est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$, qui induit une paramétrisation au voisinage de tout point de Ω.

Dans ce cas, on a :

Lemme 3.4.6. — *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, et $a \in M$. Si M est donnée par une paramétrisation g telle que $g(0) = a$, l'espace tangent en a est l'image de $\mathbb{R}^p$ par l'application linéaire $dg(a)$.*

La démonstration est analogue au lemme ci-dessus.

3.4.1. Quelques exemples. —

3.4.1.1. Structure de sous-variété de $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3-3xyz = 13\}$. — On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 13$. On a alors $A = f^{-1}(0)$. On a

$$df_{(x,y,z)} = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, 3z^2 - 3xy).$$

L'ensemble $f^{-1}(0)$ sera une sous-variété de dimension 2 si la différentielle est toujours de rang 1 en chaque point $(x, y, z) \in A$. Evidemment (on arrive dans un espace de dimension 1), cette application est au plus de rang 1. On doit voir les points ou elle est de rang 0, ce qui arrive lorsque $df_{(x,y,z)} = (0, 0, 0)$. Or, on remarque que

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz - 13 \\ & = & x(x^2 - yz) + y(y^2 - xz) + z(z^2 - xy) - 13. \end{array}$$

Si $df_{(x,y,z)} = (0, 0, 0)$, alors $f(x, y, z) = -13$, donc $(x, y, z) \notin f^{-1}(0)$. La différentielle est donc toujours de rang 1 sur $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(0)$ est donc bien une sous variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

3.4.1.2. Structure de sous-variété du groupe orthogonal $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid^t AA = Id\}$. — On identifie $M_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$.

On introduit donc l'application $f(A) =^t AA - Id$, définie sur $M_n(\mathbb{R})$ et à valeur dans $Sym(n)$, l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ (et oui, on a bien ${}^t f(A) = f(A)$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$).

Avec cette application, on a $O(n) = f^{-1}(0)$. Il nous suffit donc de montrer que la différentielle de f est surjective en chaque point $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On note tout d'abord que $df_A.H =^t AH +^t HA$ (je vous engage à reprendre la définition de la différentielle d'une application et à faire le calcul de $f(A + H) - f(A)$ pour retrouver ce résultat). Est-que cette application est surjective ?

Choisissons $S \in Sym(n)$. Il est facile de construire une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ qui s'envoie sur S par df_A. En effet, on pose $M = AS/2$. Comme ${}^t AA = Id$, on a $df_A.(AS/2) = ({}^t AAS +^t S^t AA)/2 = S$ car ${}^t S = S$. L'application est donc surjective, et par le théorème 1, $O(n)$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - p = dim(Sym(n))$. Or, on sait que $Sym(n)$ est de dimension $n(n + 1)/2$ (faites le calcul de la moitié des coefficients d'une matrice carré, en comptant la diagonale). Donc, $O(n)$ est une sous variété de dimension $n(n - 1)/2$ de $\mathbb{R}^{n^2}$.

3.4.1.3. Structure de sous-variété de $SL_2(\mathbb{R})$ et espace tangent au point Id. — $Sl_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices 2×2 de déterminant 1. On peut démontrer que c'est une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$. Pour cela, on identifie $M_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^4$, via

$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a,b,c,d). \end{array}$$

On peut introduire une application "déterminant" sur $\mathbb{R}^4$, en posant

$$det(a,b,c,d) = ad - bc.$$

Avec cette définition, on a $SL_2(\mathbb{R}) = det^{-1}(1)$. Par ailleurs, on a $d(det)_{(a,b,c,d)} = (d,-c,-b,a)$. Cette différentielle est de rang 1 sur tout $M_2(\mathbb{R})$. C'est donc une sous-variété de dimension 3 (4-1) de $\mathbb{R}^4$.

Par ailleurs, l'espace tangent à l'identité est le noyau de $d(det)_{(1,0,0,1)}$. On a

$$ker(d(det)_{(1,0,0,1)}) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+d=0\}.$$

Par identification, l'espace tangent à $SL_2(\mathbb{R})$ est donc l'ensemble des matrices $M_2(\mathbb{R})$ de trace nulle.

3.5. Fonction de Morse sur les surfaces

Dans toute la suite, on désigne par M une surface compacte.

3.5.1. Fonction de Morse sur une surface compacte. — Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^r, $r \geq 3$, dont tous les points critiques sont non-dégénérés. Une telle fonction a un nombre fini de points critiques. En effet, comme M est compacte, s'il y avait une infinité de points critiques, il y aurait un point $x \in M$ qui serait un point d'accumulation de points critiques. En un tel point, $Df(x) = 0$ car Df est continue et le point x serait critique, ce qui est impossible car il résulte de l'hypothèse sur f que les points critiques sont isolés.

Définition 3.5.1. — Une fonction de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction dont tous les points critiques sont non-dégénérés et les valeurs critiques correspondantes (en nombre fini) toutes distinctes.

On admet le théorème suivant :

Théorème 3.5.2. — *Soit M une surface compacte et $g : M \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction de Morse lisse $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $\| f - g \| < \epsilon$.*

On renvoie au livre de Milnor [**24**] pour la démonstration. Ce théorème est pour les surfaces une propriété globale assez forte pour qu'on puisse en déduire la classification de toutes les surfaces compactes.

3.5.2. Valeurs régulières d'une fonction de Morse. — Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse. SI a est une valeur régulière (non critique), on note $V(a)$ la courbe $f^{-1}(a)$, courbe de niveau a de la fonction f, et on note $M(a) = f^{-1}(]-\infty, a])$ l'ensemble des points de M tels que $f(x) \leq a$. L'intérieur de $M(a)$ est l'ensemble des points où $f(x) < a$; sa frontière est $V(a)$. Si $b < a$ est une autre valeur régulière, on note $W(a, b)$ le compact $M(b) \setminus int(M(a)) = f^{-1}([a, b])$.

Proposition 3.5.3. — *Supposons que la fonction de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ n'ait pas de valeur critique comprise entre a et b, alors $V(a)$ est difféomorphe à $V(b)$, $M(a)$ est difféomorphe à $M(b)$ et $W(a, b)$ est difféomorphe à $V(a) \times [a, b]$.*

Pour donner un sens aux deux dernières assertions, il faudrait élargir la notion d'application dérivable aux *variétés à bord*. Nous nous contenterons de trouver un homéomorphisme de $M(a)$ sur $M(b)$ qui induise un difféomorphisme des intérieurs et un difféomorphisme des frontières.

Démonstration. — Pour tout point $x \in M$ non critique, choisissons un vecteur tangent $X(x) \in T - x(M)$, transversal à la courbe de niveau $f(x) = cst$ et dirigé dans le sens de la croissance de f ; i.e. un vecteur $X(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial u} + \beta \frac{\partial}{\partial v}$ tel que $Df.X(x) = \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v} > 0$. On peut choisir $X(x)$ dépendant différentiablement de x, par exemple en choisissant $X(x)$ de longueur 1 et orthogonal aux courbes de niveau de f.

On aura besoin d'une fonction dérivable $\alpha : M \to \mathbb{R}$ nulle au voisinage des points critiques de f et égale à 1 hors d'un voisinage de ces points critiques.

On peut la construire de la manière suivante : Dans $\mathbb{R}^2$, soit ω une fonction dérivable égale à 0 dans la boule $D(\epsilon)$de rayon ϵ et à 1 hors de la boule $D(2\epsilon)$. Si $\phi : D(2\epsilon) \to M$ est une paramétrisation centrée au point critique c, on pose, pour $x \in \phi(D(2\epsilon))$, $\alpha(x) = \omega(\phi^{-1}(x))$. Si les voisinages $\phi(D(2\epsilon))$ des divers cpoints critiques (isolés) sont assez petits pour être disjoints, on prolonge α par 1 en dehors de ces voisinages.

Posons :

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{\alpha(x)}{Df.X(x)}.X(x) \text{ si } x \text{ n'est pas critique,} \\ Y(x) &= 0 \text{ si } x \text{ est critique.} \end{aligned} \tag{43}$$

Le champ de vecteur $Y(x)$ est différentiable et l'on a $Df.Y(x) = \alpha(x)$. Comme il n'y a pas de points critiques dans le compact $W(a,b)$, on peut supposer $\alpha = 1$ dans cette partie. Soit ϕ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M associé au champ $Y(x)$. On a

$$\frac{d}{dt}(f(\phi_t(x)) = Df.X(\phi_t(x)) = \alpha(\phi_t(x)).$$

La fonction $t \mapsto f(\phi_t(x))$ est linéaire de dérivée 1 pourvu que $\alpha(\phi_t(x)) = 1$; ce qui est le cas si $f(\phi_t(x)) \in [a,b]$. En particulier, le difféomorphisme ϕ_{b-a} envoie $M(a)$ sur $M(b)$ et $V(a)$ sur $V(b)$. L'application $\psi : V(a) \times [a,b] \to W(a,b)$ définie par $\psi(x,t) = \phi_{t-a}(x)$ est un "difféomorphisme" dont l'inverse est $\psi^{-1}(y) = (\phi_{a-f(y)}(y), f(y))$. $\square$

Ainsi, lorsque a varie continuement dans l'ensemble des vaeurs régulières de f, les variétés $M(a)$ et $V(a)$ sont invariantes à difféomorphismes près. La courbe $V(a)$ est compacte (car fermée dans M compacte).

CHAPITRE 4

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Toutes les idées explorées dans le chapitre précédent peuvent se placer dans un cadre général : on sait faire des choses lorsqu'on travail dans $\mathbb{R}^n$, et les courbes et surfaces que nous avons étudiées possèdent toutes la même propriété : elles sont localement des petits bouts de $\mathbb{R}^k$. Le problème est alors le collage de ces bouts. Moyennant cette compatibilité des parties locales, on obtient un objet géométrique bien défini. Une variété abstraite est une formalisation mathématique de cette idée.

4.1. Variétés, cartes et atlas

Définition 4.1.1. — Une variété topologique V et un espace V muni d'une topologie pour laquelle il est séparé, qui est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, i.e. pour tout $x \in V$, il existe un homéomorphisme $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, où U est un voisinage ouvert de x dans V et $\phi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La paire (U, ϕ) est appelée une carte de V.

On peut démontrer que la variété ainsi définie est de dimension topologique n.

Une famille $(U_i, \phi_i)_{i \in J}$ de cartes de V, J un ensemble d'indices, est appelé un *atlas* de V si les ouverts U_i forment un recouvrement de V, i.e.

$$\bigcup_i U_i = V.$$

Les applications

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \to \phi_i(U_{ij}), \tag{44}$$

où $U_{ij} = U_i \bigcap U_j$, sont appelés des changements de cartes.

Pour faire de l'analyse, nous aurons besoin d'avoir une certaines régularité des changements de cartes (nous reviendrons sur ce point lors de la définition des applications différentiables entre variétés).

Un atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in J}$ d'une variété V est dit de classe C^k, si tous les changements de cartes ϕ_{ij} sont de classe C^k. De la même manière, on définit la notion d'atlas de classe analytique, noté C^ω. Une variété de classe C^k est une variété topologique muni d'un atlas de classe C^k.

Deux atlas de classe C^k de V sont dits *équivalents*, si leur union est encore un atlas de classe C^k de V. Une classe d'équivalence d'atlas de classe C^k pour V est une *structure* de classe C^k sur V.

4.1.1. Résultats exotiques sur les structures différentiables. — L'existence et l'unicité d'une structure différentiable sur une variété est loin d'être intuitive. Pour preuve, je vous laisse méditer les résultats suivants :

- Toute variété qui admet une structure de classe C^1, admet une structure C^∞ et même C^ω structure C^1-équivalente (voir [**20**]).

- Il existe des variétés topologique sans structure différentiable (en dimension 4 voir [**28**],[**13**]).

- Il existe des variétés possédant plusieurs structures différentiables non équivalentes. Par exemple, la sphère de dimension 7 possède un nombre fini de structure différentiables [**23**], alors que $\mathbb{R}^4$ en possède une infinité ([**9**],[**13**]).

Au passage, on note qu'il existe de ce point de vue, une différence essentielle entre la dimension 3 et la dimension 4.

4.1.2. Approximation des variétés. — Dans la suite du cours, et sauf mention du contraire, nous parlerons de variété différentiables, i.e. de variétés topologiques muni d'une structure de classe C^∞.

On peut penser que cette hypothèse impose d'importantes limitations à notre propos. Ce n'est pas le cas en raison du *théorème de Withney* :

Théorème 4.1.2. — *Toute variété de classe C^r, $1 \leq r < \infty$, est C^r-difféomorphe à une variété de classe C^∞, cette dernière étant unique à diffeomorphismes C^∞ près.*

Ce résultat est vrai que la variété soit à bord ou non. Dans le cas des *variétés sans bord*, on a un résultat plus précis :

***Théorème 4.1.3* (Withney).** — *Toute variété de classe C^r, $1 \leq r \leq \infty$, de dimension n, est C^r difféomorphe à une sous variété fermée de $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Les démonstrations de ces théorèmes font partie des résultats d'approximation sur les variétés, dont ont trouvera une revue dans le livre de Hirsh ([**20**],Chap.2). Elles reposent sur des théorèmes d'approximation d'application de classe C^r entre variétés par des applications de classe C^∞.

4.1.3. Structure différentiables induites. — Si (V, Φ) est une variété et $M \subset V$ est un ouvert de M, la structure différentiable induite par V sur M est

$$\Phi \mid M = \{(\phi, U) \in \Phi : U \subset M\}. \tag{45}$$

Si M est un espace topologique et $h : M \to N$ est un homéomorphisme de M sur un ouvert de N, la structure différentiable induite sur M est

$$h^*\Phi = \{(\phi \circ h, h^{-1}(U)) : (\phi, U) \in \Phi \text{ et } U \subset h(M)\}. \tag{46}$$

Dans tous les cas, la structure différentiable induite par l'une ou l'autre de ces constructions peut être être non compatible avec la structure différentiable ambiante.

4.1.4. Digression sur les espaces topologiques non séparés. — La définition d'une variété topologique supposqe que l'espace sous-jascent est séparé. Cette hypothèse simplifie beaucoup de chose. La plupart des théorèmes d'Analyse que l'on connait fonctionnent seulement sur un espace topologique séparé. Je renvoie au livre de Schwartz [**29**] pour plus de détails.

Comme exemple d'espace toplogique non-séparé, on considère le *branchement simple*, introduit par Haefliger et Reeb ([**16**],p.110).

Soient $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ deux exemplaires de la droite numérique réelle $\mathbb{R}$. Soit Σ la somme topologique de $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit ρ, la relation d'équivalence dans Σ identifiant les points de $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ de même abcisse si $t \in \Omega$, et se réduisant à l'identité pour les autres points.

Par passage au quotient, on obtient une variété à une dimension, dnt les points non-séparés sont ceux dont l'abcisse est un point frontière de Ω. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^{+*}$, l'espace quotient obtenu porte le nom de *branchement simple*. Les points non-séparés sont ceux d'abcisse zéro.

La construction précédente peut s'itérer. On obtient alors une *plume composée*, qui est un espace topologique dont l'ensemble des points non-séparés est dénombrable et partout dense. La construction est la suivante : e, tout point de coordonnées rationnelles de $\mathbb{R}$, on greffe simultanément un branchement simple. On obtient une variété à une dimension qui mérite le nom de *plume*. La droite $\mathbb{R}$ est la *tige*, sur laquelle sont greffées les *barbes*. Les points non-séparés (on dit aussi points de branchement) sont denses dans $\mathbb{R}$. Si dans une plume, on remplace chaque barbe par une plume, on définit une variété à une dimension appelée *plume double*. En effectuant une suite dénombrable de cette opération, on obtient une *plume composée*.

4.2. Exemples

4.2.1. La sphère. — On considère $\mathbb{R}^{n+1}$, muni du produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = \sum x^i y^i$. La sphère de dimension n, notée S^n, est définie par

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \langle x, x\rangle = 1\}. \tag{47}$$

On peut construire un atlas de la sphère en considérant les projections *stéréographiques* de pôle nord et sud. Précisément, notons $P^+ = (0, \dots, 0, 1)$ et $P^- = (0, \dots, 0, -1)$. On note $U^+ = S^n \setminus \{P^+\}$ et $U^- = S^n \setminus \{P^-\}$. On définit les projections $p^\sigma : U^\sigma \to \{P^\sigma\}^{ort}$, où $\{P\}^{ort}$ est l'ensemble des points orthogonaux (pour le produit scalaire) au vecteur P.

$$p_\sigma(x) = \frac{x - \langle x, p^\sigma\rangle p^\sigma}{1 - \langle x, p^\sigma\rangle}, \ \sigma = \pm. \tag{48}$$

On peut montrer que les applications p_σ sont des homéomorphismes de U^σ sur $\mathbb{R}^n$ (celui-ci étant identifié avec $\{P^\sigma\}^{ort}$.

4.2.2. Variétés paramétrées. — Une variété paramétrée V de dimension p de l'espace $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un domaine D de $\mathbb{R}^p$ et d'une application continue f de D dans $\mathbb{R}^n$.

La variété paramétrée V est dite différentiable si f est différentiable. Le couple (D, f) constitue sa représentation paramétrique et l'ensemble $f(D)$ est son support.

Deux représentations paramétriques (D_1, f_1) et (D_2, f_2) sont dites équivalentes s'il existe une difféomorphisme θ de classe C^∞ de D_2 sur D_1, tel que $f_2 = f_1 \circ \theta$. Chaque classe de représentation paramétrique équivalentes définit une variété géométrique V de classe C^∞. Les éléments de la classe associée à V sont appelés des représentations paramétriques admissibles de V.

Les variétés paramétrées sont des variétés : on peut considérer que l'application f est un homéomorphisme de V sur D. La variété paramétrée D est donc une variété abstraite de diemnsion p, définie par la carte (V, f^{-1}).

Exercice : Pour justifier le fait que f est un homéomorphisme de V sur D, on doit munir V d'une topologie adéquate : deux points de V sont distincts si ils correspondent à deux points distincts u, u' de D, même si leurs supports $f(u)$, $f(u')$ sont confondus. On évite ainsi les problèmes liés aux points multiples. L'application f est alors une bijection de D sur V. Montrer que la topologie induite sur V par la topologie de D est plus fine que celle induite par $\mathbb{R}^n$ sur V.

4.2.3. Espace projectif. — Deux points p et p' de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sont dis ρ-équivalent s'ils sont sur la même droite passant par 0.

Exercice : Démontrer que c'est une relation d'équivalence.

Définition 4.2.1. — L'espace projectif à n dimensions P^n est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence ρ.

Un point de P^n est donc défini par $n+1$ nombres x^i, non tous nuls, qui sont appelés coordonnées homogènes du point x.

Pour que deux systèmes de coordonnées homogènes $\{x'^i\}$ et $\{x^i\}$ définissent le même point de P^n, il faut et il suffit qu'il existe un nombre λ tel que $x'^i = \lambda x^i$ pour $i = 1, \dots, n+1$.

On note π l'application canonique de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans P^n. Un ensemble U de P^n sera dit ouvert, si et seulement si, son image réciproque $\pi^{-1}(U)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit ainsi une topologie sur P^n, appelée *topologie quotient*.

Exercice : Démontrer que pour cette topologie, l'application π est continue.

Une représentation importante de P^n peut s'obtenir de la manière suivante :

Les points de P^n sont en correspondance avec les droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine. On peut donc identifier P^n avec l'espace des directions de droites passant par 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$. Or, une telle droite coupe la sphère S^n en deux points diamétralement opposés. L'espace P^n s'obtient donc en identifiant les points dimaétralement opposés de la sphère S^n. Si on note σ la relation : deux points de S^n sont σ équivalents s'ils sont identiques ou symétriques par rapport à 0, alors $P^n = S^n/\sigma$.

Exercice : Démontrer que σ est une relation d'équivalence.

Si on note ρ' la relation d'équivalence : deux points de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sont ρ'-équivalents s'ils sont sur une même demi-droite d'origine 0, alors $S^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\rho'$. Notons π' la projection de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur S^n, alors le résultat $P^n = S^n/\sigma$ est équivalent à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ S^n \arrow[rr, "q"] & & P^n, \end{tikzcd} \tag{49}$$

où q est la projection de S^n sur P^n induite par σ.

Exercice : Soit $\omega \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. On dit que ω est résonant si l'équation

$$\omega.k = 0. \tag{50}$$

où k est un vecteur entier (i.e. dont toutes les coordonnées sont entières) de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, admet des solutions.

Démontrer que l'ensemble des vecteurs résonants de $\mathbb{R}^n$ est dense et connexe si $n \geq 3$, et dense mais non connexe si $n = 2$. Pour cela, on travaillera dans l'espace projectif P^{n-1}.

On peut munir l'espace projectif d'une structure de variété analytique. On désigne par Ω_{n+1} l'ouvert de P^n défini par la condition $x^{n+1} \neq 0$. Chaque point de Ω_{n+1} est déterminé par n nombres $u_i = x^i/x^{n+1}$. Inversement, à chaque point $u = (u^i)$ de $\mathbb{R}^n$, on peut faire correspondre le point de coordonnées homogènes $(u_1, \ldots, u_n, 1)$ de P^n. L'ouvert Ω_{n+1} est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

L'espace P^n s'obtient donc en complétant $\mathbb{R}^n$ par l'hyperplan de $x^{n+1} = 0$, appelé *hyperplan à l'infini*[1].

L'ensemble des ouverts Ω_k, $k = 1, \ldots, n+1$, ainsi définis, constituent un atlas de P^n.

Exercice : Démontrer ce résultat et le fait que l'atlas est analytique.

Par ailleurs, l'étude des changements de cartes montre que cette variété analytique est orientable si n est impaire, et non orientable sinon.

4.2.4. Le tore. — Deux points (x^i) et (x'^i) de $\mathbb{R}^n$ sont dis ρ équivalents si $\mid x^i - x'^i \mid= 1$ est un entier pour $i = 1, \ldots, n$. Cette opération est une relation d'équivalence. On désigne par $\mathbb{T}^n$ le quotient $\mathbb{R}^n/\rho$.

Un point de $\mathbb{T}^n$ est défini par la donnée de n coordonnées x^i définies modulo 1. On peut définir des ouverts $U^i_{\alpha^i}$ de $\mathbb{R}^n$ en posant $\alpha^i < x^i < 1 + \alpha^i$, avec α^i égale à 0 ou 1.

Exercice : Démontrer que l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{T}^n$ est bijective sur les $U^i_{\alpha^i}$. En déduire que les cartes $(U^i_{\alpha^i}, f_i)$ forment un atlas analytique orientable de $\mathbb{T}^n$. On montrera que les changements de cartes sont de la forme $x'^i = x^i + c$, où c est une constante.

La variété $\mathbb{T}^n$ est donc une variété analytique de dimension n. Pour $n = 1$ on retrouve le cercle. Pour $n = 2$, on trouve une chambre à air comme celle des vélos.

[1] Attention : ne pas confondre ce procédé avec la compactification d'Alexandroff.

4.2.5. Ruban de Mobius. — Je vous conseille pour cet exercice de prendre des ciseaux et de la colle. Soit B une bande de $\mathbb{R}^2$ définie par $0 < x < 1 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$. On obtient une relation d'équivalence ρ sur B en posant :

$$(x, y) = (x', y') \text{ si } x' = x,\ y' = y \text{ ou si } \mid x' - x \mid = 1,\ y' + y = 0.$$

Désignons par f l'application canonique de B sur B/ρ, er recouvrons B par les deux ouverts P_1 et P_2 définis par $0 < x < 1/2 + \alpha$ et $1/2 < x < 1 + \alpha$ respectivement.

Exercice : Démontrer que la restriction f_i de f à P_i, $i = 1, 2$, est bijective. En déduire que les deux cartes $(f_i(P_i), f_i^{-1})$ forment un atlas analytique de dimension de 2 de B/ρ.

La variété ainsi obtenue s'appelle la *bande de Möbius* (ou ruban de Möbius).

Exercice : Démontrer que cette variété n'est pas orientable.

4.3. Partition de l'unité et recollement : passage du local au global

Pour étudier une variété, on est amené à recoller entre elles les cartes d'un atlas. Pour ce faire, on utilise des *partitions de l'unité*. L'hypothèse la plus faible entrainant l'existence des partitions de l'unité est la *paracompacité*.

***Théorème 4.3.1* (de partition de l'unité).** — *Sur une variété*[(2)] *différentiable de classe C^k (resp. C^∞), il existe une C^k (resp. C^∞) partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de donné.*

Un exemple d'utilisation des partitions de l'unité est donnée dans la démonstration du théorème de Whitney un peu plus loin.

[(2)] paracompacte

Démonstration. — Démontrons le résultat pour une des composantes connexes de V_n de la variété. On sait que V_n est dénombrable à l'infini, i.e. $V_n = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$, $K_p \subset \mathrm{int} K_{p+1}$, K_p compact.

Soit θ_i le recouvrement donné, pour $M \in K_{p+1} \setminus K_p$ considérons une carte locale (U_M, ϕ_M) telle que $\phi_M^{-1}(B_\epsilon)$ soit inclus dans un des ouverts θ_i et dans $K_{p+2} \setminus K_{p-1}$. $\phi_M(M) = 0$, M parcourant V_n, les ouverts $\phi_M^{-1}(B_1)$ recouvrent K_1, un nombre fini correspondant à $M_1, \ldots, M_{j_1}$ recouvre K_1. Les ouverts $\phi_M^{-1}(B_1)$ recouvrent $K_{p+1} \setminus \mathrm{int} K_p$, un nombre fini (correspondant à $M_{j_p+1}, \ldots, M_{j_{p+1}}$) recouvre $K_{p+1} \setminus \mathrm{int} K_p$. Les ouverts $\Omega_j = \phi_{M_j}^{-1}(B_\epsilon)$ forment un recouvrement localement fini plus fin que θ_i.

Considérons la fonction

$$\gamma(r) = \frac{\displaystyle\int_r^2 p(t)dt}{\int_1^2 p(t)dt},$$

avec

$$p(t) = \begin{cases} e^{\dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t-1}} & \text{si} \qquad 1 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\gamma(r)$ est égale à 1 pour $r \leq 1$ et est nulle pour $r \geq 2$. Posons

$$\gamma_j(M) = (\gamma \circ \phi_{M_j})(M), \text{ et } \Gamma_j = \frac{\gamma_j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i}.$$

Les Γ_j constituent une partition de l'unité subordonnée à θ_i. La fonction $\gamma(r)$ étant C^∞, si la variété est C^∞, la partition de l'unité est C^∞, si non elle n'est que C^k. □

4.4. Applications différentiables entre variétés

Pour définir la notion d'application différentiable entre variétés, on fait comme pour la définition d'un système de coordonnées sur la variété, on passe par l'ensemble des applications entre des $\mathbb{R}^k$, ou cette notion a un sens bien défini.

Définition 4.4.1. — Une application $f : M \to N$ entre deux variétés est de classe C^k, si pour tout $x \in M$ et toute carte (V, ψ) de N telle que $f(x) \in V$, il existe une carte (U, ϕ) de M telle que $x \in U$, $f(U) \subset V$ et l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est de classe C^k.

On note $C^k(M, N)$ l'ensemble des applications de classe C^k de M dans N.

Une application $f : M \to N$ de classe C^k est un C^k-*difféomorphisme*, si $f^{-1} : N \to M$ existe et est de classe C^k.

Introduisons quelques points de terminologie.

Définition 4.4.2. — Une immersion de M_p dans N_n est une application différentiable de M_p dans N_n qui est en tout point de rang égal à $p = \dim M_p$. Un plngement est une immersion qui est en même temps un homéomorphisme de M_p sur son image (muni de la topologie induite par N_n).

4.5. Le théorème de Whitney

Le théorème de Whitney dit la chose suivante :

***Théorème 4.5.1* (Whitney)**. — *Toute variété différentiable*[(3)] *M de dimension n, peut être plongée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Nous renvoyons au livre de Hirsh [**20**] pour la démonstration. Nous allons ici démontrer le résultat plus faible suivant (en fait un résultat plus précis) : *Toute variété différentiable C^2 peut être immergée dans $\mathbb{R}^{2n}$ et plongée dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

La démonstration se fait en deux étapes et repose sur les propositions suivantes :

Proposition 4.5.2. — *Soient $f(M)$ une application différentiable C^k, $2 \leq k \leq \infty$ de V_n différentiable C^k et connexe dans $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2n$, et $\psi(M)$ une*

(3) paracompacte et connexe, ou réunion dénombrable de composantes connexes

fonction continue partout positive sur V_n*, il existe une immersion* C^k *de* V_n *dans* $\mathbb{R}^p$*,* $g(M)$*, telle que*

$$\| f(M) - g(M) \| \leq \psi(M), \ \forall M \in V_n.$$

La démonstration est donnée plus tard. On déduit de cette proposition :

Théorème 4.5.3. — *Toute variété*[(4)] *différentiable de classe* C^k *peut être immergée dans* $\mathbb{R}^{2n}$*. L'image de la variété peut être incluse dans une boule* B_ρ *de rayon* $\rho > 0$ *aussi petit qu'on veut.*

Démonstration. — Soit f l'application de V_n dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par $f(M) = 0$ pour tout $M \in V_n$ et prenons $\psi(M) = \rho$. D'après la proposition 4.5.2, il existe une immersion g de V_n dans $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $g(V_n) \subset B_\rho$. □

Un résultat plus fort est obtenu via la proposition suivante :

Proposition 4.5.4. — *Soient* V_n *une variété différentiable* C^k*,* $2 \leq k \leq \infty$*,* f *une application différentiable* C^k *de* V_n *dans* $\mathbb{R}^p$*,* $p \geq 2n+1$*, et* ψ *une fonction continue partout positive sur* V_n*. Il existe une immersion* C^2 *injective* h *de* V_n *dans* $\mathbb{R}^p$ *telle que*

$$\| f(M) - h(M) \| \leq \psi(M), \ \forall M \in V_n.$$

On déduit de cette proposition le :

Théorème 4.5.5. — *Toute variété différentiable* C^k*,* $2 \leq k \leq \infty$*, est plongeable* C^k *dans* $\mathbb{R}^{2n+1}$*, et son image est un fermé de* $\mathbb{R}^{2n+1}$*.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.5.4, il existe une immersion injective de V_n dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Pour que ce soit un plongement, il faut et il suffit que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, $h^{-1}(K)$ soit compact. En effet, comme h est injective, h sera alors un homéomorphisme de V_n sur $h(V_n)$. Nous allons choisir $f(M)$ et $\psi(M)$ pour qu'il en soit ainsi. On prend $\psi(M) = 1$ et toutes les composantes de $f(M)$ nulles sauf la première égale à $\sum_{j=1}^{\infty} j\gamma_j(M)$. On a

[(4)] connexe et paracompacte

donc si $h(M) \in K$, $\| h(M) \| \leq \rho = \sup_{x \in K} \| x \|$ et $\| f(M) \| \leq \rho + 1$. D'où $M \in \cup_{i=1}^{\rho+1} \bar{U_j}$ qui est compact, γ_j étant égal à 1 sur $\bar{U_j}$. □

4.5.1. Deux lemmes préliminaires. — Les deux lemmes qui suivent sont deux résultats de *perturbation*.

Lemme 4.5.6. — *Soit f une application différentiable C^2 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $p \geq 2n$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une matrice $n \times p : A = (a_{i,j})$ telle que $| a_{i,j} | < \epsilon$ de telle sorte que $x \to f(x) + A.x$ soit une immersion.*

Démonstration. — Si $J(x)$ est la matrice jacobienne de f en x, nous voulons que $J(x) + A$ soit pour tout $x \in \Omega$ de rang n, i.e. que A ne doit être pour aucun $x \in \Omega$ de la forme $B - J(x)$, avec B une matrice de rang $k < n$.

L'application de $\Omega \times T(n,p,k)$ dans $T(n,p)$ définie par $(x, B) \mapsto B - J(x)$ est C^1. La dimension de $\Omega \times T(n,p,k)$ est $n + k(n+p-k)$. Par ailleurs, en faisant $k = n-1$, on obtient la majoration

$$n + k(n+p-k) \leq n + (n-1)(p+1).$$

Si $p \geq 2n$[5], alors on a

$$n + k(n+p-k) \leq np - 1.$$

Par conséquent l'image de $\Omega \times T(n,p,k)$ est de mesure nulle dans $T(n,p)$ identifiée à $\mathbb{R}^{np}$; elle a son intétrieur vide.

Donc, on peut prendre $A \in T(n,p)$ extérieur à cette image et aussi près qu'on veut de la matrice nulle. □

Lemme 4.5.7. — *Soit f une application C^1 de V_n dans $\mathbb{R}^p$. Si f est de rang n sur un compact $K \subset \Omega$, (Ω, ϕ) étant une carte locale de V_n, il existe $\eta > 0$, tel que pour toute application C^1 g vérifiant $\| J(g) \| < \eta$ sur K, on ait $f + g$ de rang n sur K.*

Démonstration. — Soit $\delta(x)$ le maximum de la valeur absolue des déterminants des sous-matrices $n \times n$ de $J(f)$. $\delta(x)$ est continue et > 0 sur K. Il exite donc $\mu > 0$ tel que $\delta(x) > \mu$ pour tout $x \in K$. Un détrminant est une

[5] Cette condition intervient seulement ici.

fonction continue de ses composantes, par conséquent il existe $\eta > 0$ tel que si $\| A \| < \eta$, la matrice $J(f) + A$ est partout de rang n sur K. □

4.5.2. Démonstration de la proposition 4.5.2. — Soit (Ω_j, ϕ_j) une suite de acrtes locales, telle que les Ω_j, homéomorphs à B_j, forment un recouvrement localement fini de de V_n, tous comme les ouverts

$$U_j = \phi_j^{-1}(B_1). \qquad (*)$$

Appliquons le lemme 4.5.6 à $f \circ \psi_1^{-1}$ sur B_ϵ avec ϵ suffisamment petit, on pose

$$f_1(M) = f(M) + \gamma_1(M) A_1 \circ \phi_1(M).$$

Comme $\gamma_1 \leq 1$, $\gamma_1 = 1$ sur U_1 et $\gamma_1 = 0$ à l'extérieur de $\phi 1^{-1}(B_2)$, f_1 est de rang n sur $\bar{U}_1$ et

$$\| f_1(M) - f(M) \| \leq \frac{\psi(M)}{2},$$

car on choisit ϵ assez petit pour cela.

Par récurrence, on définit une suite d'applications différentiables C^k : f_r de rang n sur $K_r = \cap_{j=1}^r \bar{U}_j$. Il suffit de poser

$$f_{r+1}(M) = f_r(M) + \gamma_{r+1}(M) A_{r+1} \circ \phi_{r+1}(M)$$

A_{r+1} étant choisi d'après le lemme 4.5.6 avec $\Omega = \Omega_{r+1}$ et ϵ assez petit pour que

$$\| f_{r+1}(M) - f_r(M) \| \leq 2^{-r-1} \psi(M)$$

et pour que $f_{r+1}(M)$ soit de rang n sur $K_r \cap \bar{\Omega}_{r+1}$ (lemme 4.5.7).

Le recouvrement étant localement fini, en un point donné P, à partir d'un certain rang J, pour $j \geq J$, $f_j(P) = f_{j+1}(P)$.

La suite des f_j définit ainsi une application g différentiable C^k remplissant les propriétés de la proposition 4.5.2.

4.5.3. Démonstration de la proposition 4.5.4. — D'après la proposition 4.5.2, il existe une immersion g de V_n dans $\mathbb{R}^{2n}$ telle que

$$\| f(M) - g(M) \| \frac{\psi(M)}{2}.$$

Donc, g est locelement injective : tout point $M \in V_n$ a un voisinage sur lequel g est injective.

Soit Ω_i une suite de tels voisinages compacts, formant un recouvrement localement fini de V_n, les Ω_i étant homéomorphes à B_ϵ.

Soit b_i une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{2n+1}$ à choisir. Disons déja qu'on prendra les b_i avec $\| b_i \| \leq 1/2^{r+2} \inf_{M \in \Omega_i} \psi(M)$ et suffisammment petit pour que les applications :

$$h_r = g + \sum_{i=1}^{r-1} b_i \gamma_i$$

soient des immersions.

D_r étant l'ouvert de $V \times V$ ensemble des couples (M_1, M_2) pour lesquels $\gamma_r(M_1) \neq \gamma_r(M_2)$, on cnsidère l'application G_r de D_r dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$(M_1, M_2) \to \frac{h_r(M_1) - h_r(M_2)}{\gamma_r(M_2) - \gamma_r(M_1)}.$$

G_r est différentiable C^2 et D_r de dimension $2n$, par conséquent $G_r(D_r)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{2n+1}$, et on choisit la suite b_r successivement de manière que $b_r \notin G_r(D_r)$ et soit suffisamment voisin de zéro comme il est prévu plus haut. Le recouvrement des Ω_i étant localement fini, pour chaque point P à partir d'un certain rang I, $h_i(P) = h_{i+1}(P)$ pour $i \geq I$; à la limite la suite des h_j définit une application h différentiable C^k.

Montrons que h st injective. Faisons une démonstration par l'absurde. Supposons qu'il existe P_1 et P_2 tels que $h(P_1) = h(P_2)$. Soit J un entier tel que pour $j \geq J$

$$\gamma_j(P_1) = \gamma_j(P_2) \text{ et } h_j(P_1) = h(P_1) = h(P_2) = h_j(P_2).$$

Or $h_{r+1}(P_1) = h_r(P_2)$ entraine

$$h_r(P_1 + b_r\gamma_r(P_1) = h_r(P_2) + b_r\gamma_r(P_2).$$

Comme $b_r \notin G_r(D_r)$ c'est que $h_r(P_1) = h_r(P_2)$ et que $\gamma_r(P_1) = \gamma_r(P_2)$. D'où pour tout i, $h_i(P_1) = h_i(P_2)$ et $\gamma_i(P_1) = \gamma_i(P_2)$. Au moins un des $\gamma_i(P_1)$ est non nul, soit $\gamma_{i_0}(P_1) \neq 0$, alors $\gamma_{i_0}(P_2)$ est non nul et P_1 et P_2 appartiennent à Ω_{i_0} où $h_1 = g$ est injective ce qui est en contradiction avec $g(P_1) = g(P_2)$.

4.6. Sous-variétés

4.6.1. Définition. — Les objets que nous rencontrons le plus frequemment dans les applications sont des sous-variétés.

Définition 4.6.1. — Un sous-ensemble N d'une variété M est une sous-variété de M, si pour tout $x \in N$, il existe une carte (ϕ, U) de M telle que

$$\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0), \tag{51}$$

où $\mathbb{R}^k \times 0 \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n_k} = \mathbb{R}^n$ représente l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ayant leur $n-k$ dernières composantes nulles.

Bien entendu (vous pouvez le faire en exercice), si N est une sous-variété de M, alors l'ensemble des applications

$$\phi \mid N \cap M : U \cap M \to \mathbb{R}^k, \tag{52}$$

où $(\phi, U) \in \Phi$, forment un atlas de N de même classe que celui de M.

Autrement dit, la sous-variété N est une variété à part entière de dimension k.

La *codimension* d'une sous-variété N de dimension k, d'une variété M de dimension n, est $n-k$.

Un exemple simple est celui de la sphère S^n. L'application $f : x \mapsto \langle x, x\rangle$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, vérifie $df(x).y = 2\langle x, y\rangle$. Elle est de rang 1 en dehors de 0. Comme $S^n = f^{-1}(1)$, c'est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}n+1$.

4.6.2. Sous-variétés de niveau et intégrales premières. — Un exemple important de sous-variétés est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.6.2. — *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^r, $1 \le r \le \omega$. Si $y \in f(U)$ est une valeur régulière de f, i.e. si f est de rang q en chaque points de $f^{-1}(y)$, alors l'ensemble $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de classe C^r de $\mathbb{R}^n$, de codimension q.*

La démonstration repose essentiellement sur le théorème des fonctions implicites.

4.6.3. Systèmes Hamiltoniens et sous-variétés. — La mécanique, et en particulier la mécanique Hamiltonienne, est une source inépuisable de sous-variétés en tout genre.

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application. On considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x,t). \tag{E}$$

Définition 4.6.3. — Une intégrale première pour (E) est une fonction $I(x)$ telle que pour toute solution $x(t)$ de (E), on a $I(x(t)) = c$, où c est une constante rélle.

Si la fonction I est la fonction constante, on dit que l'intégrale première est triviale.

Un Hamiltonien est une fonction

$$H(x,v,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

En mécanique classique, le Hamiltonien représente l'énergie totale du système, i.e. l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle. Ils sont de la forme

$$H(x,v,t) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x,t),$$

où m est la masse d'un point matériel, v sa vitesse, et U le potentiel dans lequel il évolue.

Un système Hamiltonien est une équation de la forme

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} & = & \dfrac{\partial H}{\partial x}, \end{array} \tag{S}$$

où H est un Hamiltonien.

Dans beaucoup de cas intéressants, le Hamiltonien H est indépendant du temps t. On dit alors que le système associé est *autonome*. On a alors le résultat important suivant :

Théorème 4.6.4. — *Dans le cas autonome, le Hamiltonien H est une intégrale première du système (S).*

Démonstration. On a

$$\frac{dH(x(t),y(t))}{dt} = \dot{x}\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t)) + \dot{y}\frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t)),$$

soit en utilisant les équations de (S),

$$\begin{aligned}\frac{dH(x(t),y(t))}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t)) + \frac{\partial H}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{\partial H}{\partial y}(x(t),y(t)),\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Les intégrales premières d'un système contraignent les solutions de l'équation différentielle à rester dans des surfaces de niveau de la forme $H^{-1}(c)$, ou $c \in \mathbb{R}$. Dans le cas ou c est une valeur régulière de H, le niveau $H^{-1}(c)$ est une sous variété.

• On considère le Hamiltonien $H(x,y) = x^2 + y^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $c > 0$, les niveaux $H^{-1}(c)$ sont des variétés de dimension 1. En faisant une figure, on voit que les solutions du systèmes Hamiltonien associé vivent sur des cercles concentriques.

Cette situation se généralise dans $\mathbb{R}^{2n}$ en regardant le Hamiltonien $H(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2)$. Les solutions vivent alors sur des tores de dimension n, $\mathbb{T}^n$.

4.6.3.1. Digression autour de la théorie KAM. — Les caractéristiques précédentes sont des propriétés générales des systèmes Hamiltoniens complétements intégrables (par le théorème de Liouville-Arnold). Une grande partie des efforts des mathématiciens concernent l'étude des systèmes Hamiltoniens complétement intégrables perturbés (le problème des n corps :

n points matériels en intéraction gravitationelle, en est un exemple). Par exemple, on peut étudier le Hamiltonien

$$H_\epsilon(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) + \epsilon f(x,y), \tag{53}$$

où $0 < \epsilon << 1$ est un petit paramètre.

On peut se poser la question suivante : que reste-t-il de la situation précédente ou toutes les solutions sont sur des tores ?

La réponse est connue sous le nom de théorème KAM (pour Kolmogorov-Arnold-Moser) : sous de bonnes conditions sur le hamiltonien non perturbé, il reste un ensemble de mesure pleine de tores $\mathbb{T}^n$ qui sont de petites déformations des tores initiaux. Malheureusement, ceci ne contraint pas trop les solutions. On conjecture (conjecture quasi-ergodique) qu'il existe des orbites denses dans le complémentaire de ces tores. La situation est donc loin d'être simple.

• On peut par exemple, regarder les surfaces de niveau du Hamiltonien du pendule simple :

$$H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + (\cos(q) - 1), \tag{54}$$

où $p \in \mathbb{R}$ et $q \in S^1$. On obtient une figure en forme de 8.

On voit que suivant la valeur de h, la sous-variété ne change pas de topologie jusqu'à la valeur $h = 0$, qui correspond justement à une valeur critique pour H. Ensuite, pour les autres valeurs de h, la topologie de la variété ne varie pas non plus. Ce petit exemple, suggère que les modifications de topologie des sous-variétés de niveau se font aux points critiques de la fontion. C'est précisément ces modifications qui font l'objet de la *théorie de Morse*.

4.6.4. Le théorème de Thom. — Le but de ce paragraphe[6] est de démontrer un résultat global sur les champs de vecteurs d'une variété compacte.

4.6.4.1. Le théorème général de densité. — Soit M_n une variété différentiable compacte de dimension n. On note $\mathcal{H}(M)$ l'espace des chaps de vecteurs sur M muni de la topologie C^r, $r \geq 1$. Le problème fondamental de la théorie *qualitative*[7] des équations différentielles sur M_n est d'exhiber un sous-ensemble dense de $\mathcal{H}$, dont les éléments soient faciles à classifier.

Deux champs de vecteurs X et Y dans $\mathcal{H}$ sont dits conjugués, et on note $X \sim Y$, s'il existe un homéomorphisme des trajectoires de X sur celles de Y.

Une première tentative pour résoudre le problème fondamental a été de formuler la notion de *système structurellement stable* :

Définition 4.6.5. — Un champ $X \in \mathcal{H}$ est dit strurellement stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(X, Y) > \delta$ implique $Y \sim X$, via un homéomorphisme ϵ proche de l'identité, où d est une métrique sur $\mathcal{H}$.

On note $\Sigma \subset \mathcal{H}$ l'ensemble des champs structurellement stables. Si $n = 2$, $r \geq 1$, on a :

***Théorème 4.6.6* (Peixoto)**. — *Si $n = 2$, $r \geq 1$, $X \in \Sigma$ si et seulement si X satisfait :*

(a) les points fixes et les orbites fermées sont génériques ;

(b) aucune trajectoire ne connecte deux points selles ;

(c) l'ensemble α et ω limite de toute trajectoire est soit un point fixe, soit une orbite fermée.

---

[6] La lecture de ce paragraphe nécessite la connaissance des champs de vecteurs qui sont définis au chapitre 5.

[7] Cette vision qualitative des équations différentielles commence en 1881 avec le mémoire d'Henri POincaré "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*".

Un point fixe générique x d'un champ de vecteur X est un point tel que la matrice $DX(x)$ a toute ses valeurs propres à partie réelle non nulle[(8)]. Une orbite fermée est dite générique si son application de premier retour possède un point fixe générique. On renvoie au livre de Palis-De Melo [**27**] pour plus de détails.

Pour $n = 2$, l'ensemble Σ est ouvert et dense dans $\mathcal{H}$. On renvoie à [**26**] pour la démonstration. Par ailleurs, la classification dans ce cas est possible.

On peut se demander si les systèmes structurellement stables sont denses dans $\mathcal{H}$ pour $n > 2$. Malheureusement non, comme l'a démontré Smale [**30**], en exhibant une variété de dimension 4 sur laquelle Σ n'est pas dense. La notion de stabilité structurelle est donc trop restrictive pour répondre au problème fondamental.

Après les travaux de Kupka, Smale et Pugh, il est possible de caractériser une famille de champs de vecteurs dense dans $\mathcal{H}$. On commence par rapelé la notion de *point errant* introduite par Birkhoff.

Définition 4.6.7. — Soit $\phi_t : M \to M$ le groupe à 1-paramètre engendré par le champ de vecteurs X sur M. Un point $p \in M$ est dit non-errant, si pour tout voisinage U de p, il exise une valeur arbitrairement large de t pour laquelle on a $U \cap \phi_t(U) \neq \emptyset$.

On note Ω l'ensemble des points non-errant de X dans M.

***Théorème 4.6.8* (de densité générale)**. — *Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M_n, muni de la topologie C^1. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$, le sous-ensemble des champs satisfaisant les propriétés suivantes :*

G_1 *Les points fixes sont génériques et donc en nombre fini ;*

G_2 *Les orbites fermées sont génériques ;*

(8) On dit aussi point fixe hyperbolique.

G_3 Les variétés stables et instables associées à chaque point fixe et orbites périodiques sont transverses ;

G_4 $\Omega = \bar{\Gamma}$, où Γ est l'union de tous les points critiques et toutes les orbites fermées du champ ;

Alors $\mathcal{C}$ est résiduel.

Un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ est dit *résiduel*[9], s'il contient un sous-ensemble qui est une intersection dénombrable de sous-ensemble de $\mathcal{H}$ qui sont ouverts et denses dans $\mathcal{H}$. En particulier, $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Dans la suite, une intégrale première d'un champ $X \in \mathcal{H}$ de M_n, est une fonction $f : M \to \mathbb{R}$, constante le long des trajectoires de X, mais non-constante sur tout ouvert de M.

Dans un manuscrit non publié, Thom démontre le résultat suivant :

***Théorème 4.6.9* (Thom).** — *Si $X \in \mathcal{C}$, alors X n'admet pas d'intégrale première de classe C^n.*

La démonstration repose essentiellement sur les propriétés de généricité des points fixes et des orbites périodiques, et la propriété G_4. L'hypothèse concernant la classe régularité de l'intégrale première est essentiellement technique (elle permet l'utilisation du théorème de Morse-Sard).

Démonstration. — Soit $X \in \mathcal{C}$ et $f : M \to \mathbb{R}$ une intégrale première de X de classe C^n. Par le théorème de Morse-Sard, il existe dans $f(M)$ un interval $]a, b[$ de valeurs régulières. Pour tout $x \in]a, b[$, $f^{-1}(x)$ est une variété différentiable de dimension $n - 1$, compacte, invariante sous X.

la variété $f^{-1}(x)$ ne peut pas contenir de points fixes ou d'orbites fermées. En effet, ces objets sont génériques. Les variétés stables et instables de ces points vivent dans un espace de dimension n.

Les points fixes et les orbites fermées sont donc contenus aux niveaux critiques de f. Soit γ une trajectoire de $f^{-1}(x)$, on a $\omega(\gamma) \subset f^{-1}(x)$ qui n'est pas

[9] On dit aussi un ensemble de Baire.

contenue dans l'adhérence de l'ensemble des points fixes et des orbites fermées, en contradiction avec G_4. □

La démonstration précédente se transpose dans le cas suivant :

Théorème 4.6.10. — *Aucun système structurellement stable n'admet d'intégrale première de classe C^n.*

La raison essentielle est que les champs structurellement stables satisfont la condition G_4.

Pour des résultats plus difficiles et des perspectives, on renvoie à l'article de Peixoto [**25**].

4.7. Exercices

1. On identifie $\mathbb{R}^4$ et l'ensemble des matrices 2×2, noté $M_2(\mathbb{R})$. Montrez que dans cette identification, le sous ensemble $SL_2(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 est une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ (on dit une 3-surface). Cette sous-variété est-elle compacte ? Montrez que l'espace tangent en la matrice identité peut être identifié au sous-espace des matrices 2×2 de trace nulle. Quel est l'espace tangent en un point quelconque de $SL_2(\mathbb{R})$? Généraliser aux dimensions plus grandes.

2. Dans $M_n(\mathbb{R})$, on considère le groupe spécial orthogonal des matrices orthogonales de détrminant égal à 1. Montrez que c'est une $n(n-1)/2$ sous variété de $\mathbb{R}^{n^2}$. Répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent.

3. Soit S la sphère unité centrée à l'origine de $\mathbb{R}^3$ et C le cylindre d'axe Oz tangent à la sphère. Pour chaque point de S, on considère l'intersection de C avec la demi-droite passant par p dont l'origine est sur Oz et orthogonale à Oz. Montrez que ceci définit une application différentiable d'une partie de la sphère dans le cylindre.

4. Pour chaque point $p \in \mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble des vecteurs de longueur 1. Montrez que cet ensemble s'identifie à une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.

CHAPITRE 5

ESPACE TANGENT ET CHAMPS DE VECTEURS

L'analyse sur les variétés suit l'étude classique des graphes de fonctions, ou plus généralement des courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Un outil essentiel de l'analyse locale de ces objets et la tangente à la courbe ou plan tangent à la surface. Intuitivement, ils donnent une approximation linéaire de l'objet sur un petit domaine. Cette idée se généralise à l'étude des variétés et conduit à la notion d'espace tangent, et de fibré tangent. Cette construction permet l'introduction de deux objets importants : les champs de vecteurs et les groupes à un paramètre de difféomorphismes. Au niveau algèbrique, on voit apparître les algèbres et groupes de Lie dont le prochain chapitre discutera plus amplement.

5.1. Fibré tangent

5.1.1. Germes de fonctions. — L'analyse locale sur une variété demande la définition de l'algèbre des fonctions sur lequel nous allons travailler sur le voisinage d'un point de la variété. La notion de *germe* prend en compte cet aspect local.

Soient M et N deux variétés et x un point de M. On considère l'ensemble des applications $f : U_f \to N$, de classe C^∞, définies sur un voisinage U_f de x dans M.

On peut définir une relation d'équivalence sur cet ensemble, en posant :

$$f \underset{x}{\sim} g \text{ s'il existe un voisinage } V \text{ de } x \text{ tel que } f \mid V = g \mid V. \tag{55}$$

C'est une relation d'équivalence (à faire en exercice).

Une classe déquivalence d'une application f est appelée le *germe* de f en x. On le note $germ_x$. L'ensemble de tous ces germes est noté $C_x^\infty(M;N)$.

Tout germe de fonctions dans $C_x^\infty(M;\mathbb{R})$ admet un représentant dans $C^\infty(M)$. Cette e propriété n'est pas vrai pour les germes de fonctions analytiques ou holomorphes[(1)]. L'algèbre $C_x^\infty(M;\mathbb{R})$ est donc le quotient de l'algèbre $C^\infty(M)$ par l'idéal de toutes les fonctions $f : M \to \mathbb{R}$, de classe C^∞ qui s'annulent sur un voisinage (dépendant de f) de x.

5.1.2. Espace tangent à $\mathbb{R}^n$. — Un *vecteur tangent* en un point $p \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ partant de p. C'est donc la donnée d'une paire (p, X), où $X \in \mathbb{R}^n$, que l'on note aussi X_p.

On définit une action de X_p sur l'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $X_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ en posant

$$X_p(f) = df(p).X_p. \tag{56}$$

On note que l'action de X_p sur f dépend seulement de la valeur du germe de f au point p.

Cette action est une *dérivation* sur $C^\infty(M)$. En effet, on a :

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g). \tag{57}$$

Réciproquement, il est possible d'associer à toute dérivation de $C^\infty(M)$ en un point p de M, un vecteur tangent.

[(1)]La possibilité d'étendre un germe $C_x^\infty(M)$ à $C^\infty(M)$ est l'existence de *fonctions plateau* C^∞. Ce type de fonctions n'existent pas en classe analytique ou holomorphe (sinon, par le principe du maximum, elles devraient être identiquement nulles). Ce phénomène provoque une césure entre les résultats en classe analytique et ceux en classe C^∞.

Définition 5.1.1. — Une dérivation en un point $p \in M$ sur $C^\infty(M)$, est une application $D_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ linéaire, qui vérifie

$$D_p(fg) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g), \tag{58}$$

pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty(M)$.

On note que pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, on a

$$D_p(c) = 0. \tag{59}$$

Lemme 5.1.2. — *Toute dérivation D_p en un point $p \in \mathbb{R}^n$ est associé au champ de vecteur*

$$(p, \sum_{i=1}^{n} D_p(x^i)e_i), \tag{60}$$

où les x^i sont les fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ et e_i représente la base canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Pour toute fonction$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x-p))dt, \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))dt(x^i - p^i), \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x)(x^i - p^i), \end{aligned} \tag{61}$$

avec $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))dt$.

Par l'action de D, on obtient

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{i=1}^{n} D(h_i)(p^i - p^i) + \sum_{i=1}^{n} h_i(p)D(x^i), \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)D(x^i). \end{aligned} \tag{62}$$

On a donc

$$D = \sum_{i=1}^{n} D(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p .. \tag{63}$$

Un simple calcul montre alors que la dérivation D est induite par le champ de vecteurs

$$(p, \sum_{i=1}^{n} D(x^i)e_i),$$

où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. □

5.1.3. Définition algébrique de l'espace tangent à une variété. — En suivant la construction précédente, il est facile de généraliser la notion d'espace tangent à une variété. Il me semble que cette définition algébrique est la plus simple. On perd evidemment la représentation géométrique classique de l'espace tangent à une courbe ou à une surface. On retrouvera une représentation géométrique dans la prochaine section.

Soit M une variété de dimension n et x un point de M.

Définition 5.1.3. — On appelle espace tangent au point x, et on note T_xM, l'ensemble de toutes les dérivations en x de $C_x(M, \mathbb{R})$.

C'est l'ensemble des applications $\mathbb{R}$ linéaires $X_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ telles que $X_x(fg) = X_x(f)g(x) + f(x)X_x(g)$.

L'espace tangent en un point x hérite de la structure de $\mathbb{R}$ espace vectoriel de l'ensemble des dérivations.

Soit (U, ϕ) une carte de M avec $x \in U$. A toute fonction $f \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$, on peut associer la fonction $\phi^*(f)$ définie par

$$\phi^*(f) = f \circ \phi. \tag{64}$$

On a donc un isomorphisme d'algèbres entre $C_{\phi(x)}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $C_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Cela induit un isomorphisme $T_x\phi : T_xM \to T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n$, défini par

$$(T_x\phi . X_x)(f) = X_x(f \circ \phi). \tag{65}$$

L'espace tangent T_xM est donc un espace vectoriel de dimension n.

On peut exhiber une base de cet espace vectoriel. On note $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$, ou ϕ^i est la i-ème fonction coordonnée sur U, et

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} |_x = (T_x\phi)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} |_{\phi(x)} \right) = (T_x\phi)^{-1}(\phi(x), e_i), \tag{66}$$

où $(\phi(x), e_i)$ désigne le champ de vecteur.

Le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial \phi^i} |_x$ est donc défini par

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} |_x (f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(x)). \tag{67}$$

Lemme 5.1.4. — *Soit (U, ϕ) une carte de M, et $x \in U$. Une base de l'espace tangent T_xM est donnée par les vecteurs tangents $\frac{\partial}{\partial \phi^i} |_x$, $i = 1, \dots, n$.*

Démonstration. On utilise encore l'isomorphisme induit par $T_x\phi$. On a

$$\begin{aligned} T_x\phi.X_x &= \sum_{i=1}^n (T_x\phi.X_x)(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\phi(x)} \\ &= \sum_{i=1}^n X_x(x^i \circ \phi) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\phi(x)}, \\ &= \sum_{i=1}^n X_x(\phi^i) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\phi(x)} . \end{aligned} \tag{68}$$

On en déduit

$$X_x = (T_x\phi)^{-1}.T_x\phi.X_x = \sum_{i=1}^n X_x(\phi^i) \frac{\partial}{\partial \phi^i} |_x . \ \square \tag{69}$$

5.1.4. Définition géométrique de l'espace tangent à une variété. — On note $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ l'ensemble des germes en 0 des courbes $\gamma : \mathbb{R} \to M$ de classe C^∞. On définit la relation d'équivalence suivante sur ces germes :

Définition 5.1.5. — Deux germes γ_1 et γ_2 de $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ sont équivalents si et seulement si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et pour toute carte (U, ϕ) de M telle que $\gamma_1(0), \gamma_2(0) \in U$, on a

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0). \tag{70}$$

Une classe d'équivalence s'appelle un *vecteur vitesse*.

On définit un isomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, M)/\sim$ sur TM en posant pour toute courbe $\gamma : \mathbb{R} \to M$, le champ de vecteurs $\alpha(\gamma)$ défini par

$$\alpha(\gamma)(f) = \frac{df \circ \gamma}{dt}(0), \tag{71}$$

et une application β de TM dans $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ par $\beta(T\phi)^{-1}(y, Y)$ est le germe en zéro de la courbe $t \to \phi^{-1}(y + tY)$.

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, M)/\sim & \leftarrow & C^\infty(\mathbb{R}, M), \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM & \stackrel{\pi_M}{\to} & M. \end{array} \tag{72}$$

L'ensemble TM s'identifie donc à l'ensemble des vecteurs vitesses possibles pour les courbes sur M.

5.1.5. Application linéaire tangente. — Soit $f : M \to N$ une application de classe C^∞ entre variétés. L'application f induit une application linéaire $T_x f : T_x M \to T_x N$ pour tout $x \in M$ en posant

$$(T_x f.X_x)(h) = X_x(h \circ f), \tag{73}$$

pour $h \in C^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R})$.

Cette application est bien définie et linéaire. En effet, l'application $f^* : C^\infty_{f(x)}(N, \mathbb{R}) \to C^\infty_x(M, \mathbb{R})$, définie par $h \mapsto h \circ f$, est linéaire et un homomorphisme d'algèbre, et $T_x f$ est l'application adjointe, restreinte au sous-espace des dérivations.

Soit (U, ϕ) une carte en x et (V, ψ) une carte en $f(x)$, alors

$$(T_x f.\frac{\partial}{\partial \phi^i}\mid_x)(\psi^j) = \frac{\partial}{\partial \phi^i}\mid_x (\psi^j \circ f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\psi^j \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x)). \tag{74}$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} T_x f.\tfrac{\partial}{\partial \phi^i}\mid_x &= \sum_j (T_x f.\frac{\partial}{\partial \phi^i}\mid_x)(\psi^j)\frac{\partial}{\partial \psi^j}\mid_{f(x)}, \\ &= \sum_j \frac{\partial(\psi^j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(x))\frac{\partial}{\partial \psi^j}\mid_{f(x)} . \end{aligned} \tag{75}$$

La matrice de $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ dans les bases $\partial/\partial\phi^i \mid_x$ et $\partial/\partial\psi^j \mid_{f(x)}$ est la matrice Jacobienne de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ au point $\phi(x)$.

On note $Tf : TM \to TN$ l'application définie par $Tf \mid T_xM = T_xf$.

Si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont des applications de classe C^∞, alors on a

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf. \tag{76}$$

C'est une conséquence directe de l'égalité

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*. \tag{77}$$

On a de plus $T(id_M) = id_{TM}$.

Si $f \in C^\infty(M)$, alors $Tf : TM \to T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On définit la *différentielle* de f par $df = \pi_2 \circ Tf : TM \to \mathbb{R}$, où $\pi_2(x, y) = y$ est la projection sur la seconde composante de $T\mathbb{R}$. Soit $id : t \to t$ l'application identité de $\mathbb{R}$. On a $(Tf.X_x)(id) = X_x(id \circ f) = X_x(f)$. On en déduit

$$df(X_x) = X_x(f). \tag{78}$$

5.1.6. Fibré tangent. — Soit M une variété de dimension n. On pose

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM, \tag{79}$$

l'union disjointe de tous les espaces tangents à M. C'est le *fibré tangent à* M.

C'est une famille d'espaces vectoriels paramétrisés par la variété M. On peut le munir d'une projection $\pi_M : TM \to M$ définie par $\pi_M(T_xM) = x$. Il n'est pas a priori évident que cet espace soit encore muni d'une structure de variété.

Soit (U, ϕ) une carte de M. On définit une carte sur TM en posant $(\pi_M^{-1}(U), T\phi)$, où $T\phi : \pi_M^{-1}(U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ est définie par

$$T\phi.X = (\phi(\pi_M(X)), T_{\pi_M(X)}\phi.X). \tag{80}$$

Le fibré tangent est donc une variété. Pour étudier sa régularité, on doit étudier les changements de cartes. On a :

$$\begin{aligned} T\phi_j \circ (T\phi_i)^{-1} \quad : \quad & T\phi_i(\pi_M^{-1}(U_{i,j})) = \phi_i(U_{i,j}) \times \mathbb{R}^n \\ & \to \phi_j(U_{i,j}) \times \mathbb{R}^n = T\phi_j(\pi_M^{-1}(U_{i,j})), \end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} ((T\phi_j \circ (T\phi_i)^{-1})(y,Y))(f) \quad = \quad & ((T\phi_i)^{-1}(y,Y))(f \circ \phi_j), \\ & (y,Y)(f \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1}) = d(f \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1})(y).Y, \\ & df(\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y)).d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(y).Y, \\ & (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y), d(\phi_j \circ d\phi_i^{-1})(y).Y)(f). \end{aligned} \tag{82}$$

Les changements de cartes sont donc de classe C^∞. On choisit une topologie sur TM telle que tous les $T\phi_i$ soient des homéomorphismes.

En fait, la construction du fibré tangent illustre une structure géométrique très générale appellée *fibré vectoriel*.

5.1.7. Fibré vectoriel. — On étudie maintenant l'objet géométrique général sous-jascent au fibré tangent.

5.1.7.1. Définition. —

Définition 5.1.6. — Un fibré vectoriel est la donnée d'un triplet (E, p, M) tel que $p : E \to M$, et pour tout ouvert U de M, $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times V$, où V est un espace vectoriel de dimension fini.

L'espace E est l'espace total, l'espace M la base du fibré et l'application p la projection. L'espace vectoriel V est appellé la *fibre standard* ou *fibre typique* du fibré.

Si E et M sont des variétés et p est une application de classe C^∞, on peut munir le fibré vectoriel d'une structure de variété.

Une carte d'un fibré vectoriel est la donnée d'une paire (U, ϕ), où U est un ouvert de M et ϕ est une application telle que $\phi \circ p^{-1}(U) = U \times V$, où V est un espace vectoriel de dimension finie.

Deux cartes du fibrés sont dites compatibles, si $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ est un isomorphisme linéaire sur les fibres, i.e.

(83) $$(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(x, v) = (x, \phi_{12}(x)v),$$

où $\phi_{12} : U_{12} = U_1 \cap U_2 \to GL(V)$. L'application ϕ_{12} est alors unique et de classe C^∞ et s'appelle la *fonction de transition* entre deux cartes du fibré.

Un atlas du fibré (U_i, ϕ_i) est la donnée d'une famille de cartes deux à deux compatibles et telles que les U_i forment un recouvrement de M. Deux atlas sont dits équivalents si leur union est encore un atlas du fibré.

5.1.7.2. Sections du fibré. — Soit (E, p, M) un fibré vectoriel. Sur chaque fibre $E_x = p^{-1}(x)$, $x \in M$, il existe une unique structure d'espace vectoriel réel, induite par toute carte (U, ϕ) telle que $x \in U$. L'élément $0_x \in E_x$ est un élément spécial et l'application $0 : M \to E$, définie par $0(x) = 0_x$, est une application C^∞ appellée la *section nulle.*

Définition 5.1.7. — Une section s d'un fibré vectoriel (E, p, M) est une application $s : M \to E$ de classe C^∞ telle que $p \circ s = id_M$.

Le support d'une section s est la fermeture de l'ensemble $\{x \in M, s(x) \neq 0_x\}$ dans M.

L'ensemble de toutes les sections lisses d'un fibré (E, p, M) se note

(84) $$\Gamma(E) = \Gamma(E, p, M).$$

On peut chercher à décrire tous les fibrés vectoriels de base M et de fibre standard V à isomorphisme près. Cette question conduit naturellement à la notion de cocycles cohomologues et de *classes de cohomologie*. La *cohomologie de Cech* et plus tard la *cohomologie de De Rham* sont des outils classiques pour ces questions.

5.2. Champs de vecteurs

5.2.1. Définition. —

Définition 5.2.1. — Un champ de vecteur X est une section C^∞ du fibré tangent, i.e. une application $X : M \to TM$ de classe C^∞ et $\pi_M \circ X = Id_M$. Un champ de vecteur local est une section lisse définie sur un voisinage ouvert. On note $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs.

On peut munir $\mathcal{H}(M)$ d'une structure d'espace vectoriel, induite par celle de l'espace tangent.

Lemme 5.2.2. — *Soit X un champ de vecteur sur M et (U, ϕ) une carte locale de M. Soit $x \in U$, on a*

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X(x)(\phi^i) \frac{\partial}{\partial \phi^i} \mid_x . \tag{85}$$

On écrit aussi

$$X \mid U = \sum_{i=1}^{n} X(x)(\phi^i) \frac{\partial}{\partial \phi^i}. \tag{86}$$

Ce lemme découle de la définition même des vecteurs tangents $\partial / \partial \phi^i$.

De la même façon, on a le lemme suivant, qui provient de la définition algébrique des vecteurs tangents :

Lemme 5.2.3. — *L'ensemble $\mathcal{H}(M)$ des champs de vecteurs sur M coincide avec l'ensemble $Der(M)$ des dérivations sur l'algèbre des fonctions $C^\infty(M)$.*

On se rapelle la construction algèbrique. A tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}(M)$, on associe une dérivation en posant $X(f)(x) = X(x).f = df.X(x)$.

5.2.2. Crochet de Lie. — L'ensemble des dérivations, muni de l'addition de deux dérivations, et de la multiplication par les scalaires, forme un espace vectoriel. Une opération naturelle sur les dérivations (ou tout opérateur différentiel) est la *composition* : soient D_1 et D_2 deux dérivations, on définit $D_2 \circ D_1$ en posant

$$D_2 \circ D_1(f) = D_2(D_1(f)).$$

L'ensemble $Der(M)$ muni de la composition $\circ$ ne forme pas une *algèbre*. Pour le voir, il suffit de voir si $D_2 \circ D_1$ vérifie la relation de Leibniz. Or, on a :

$$D_2 \circ D_1(df) = D_2(D_1 f.g + f.D_1 g) = D_2 \circ D_1 f.g + D_1 f D_2 g + D_2 f D_1 g + f.D_2 \circ D_1 g. \tag{87}$$

On voit donc, qu'il y a deux termes en trop : $D_1 f D_2 g$ et $D_2 f D_1 g$.

On peut remédier à ce problème en symétrisant la situation. Pour cela, on introduit une nouvelle loi $[,]$, appellé *crochet de Lie*, et qui a l'avantage de faire de $(Der(M), [,])$ une algèbre.

Définition 5.2.4. — On appelle crochet de Lie, et on note $[.,.]$, la loi interne sur $Der(M)$ définie par

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1. \tag{88}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que le crochet de deux dérivations est une dérivation. Comme

$$D_1 \circ D_2(df) = D_1(D_2 f.g + f.D_2 g) = D_1 \circ D_2 f.g + D_2 f D_1 g + D_1 f D_2 g + f.D_1 \circ D_2 g,$$

on voit que la soustraction avec (87) fait disparaître les termes symétriques. On a ainsi

$$[D_1, D_2](fg) = [D_1, D_2](f).g + f.[D_1, D_2](g). \tag{89}$$

C'est donc bien une dérivation. □

Autrement dit, le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y, est encore un champ de vecteurs, que l'on note $[X, Y]$.

L'expression locale du crochet de Lie de deux champs s'obtient facilement. Soit (U, ϕ) une carte locale de la variété M et $X \mid U = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial/\partial\phi^i$, $Y \mid U = \sum_{i=1}^{n} Y^i \partial/\partial\phi^i$ l'expression locale de deux champs de vecteurs X et Y sur M.

On a :

$$[X,Y] \mid U = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial \phi^i} \right) - Y^i \left(\frac{\partial X^j}{\partial \phi^i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \phi^j}.. \tag{90}$$

On a donc bien une dérivation comme prévu (faire le calcul en exercice pour voir que les termes faisant intervenir les dérivées seconde $\partial^2/\partial\phi^i\phi^j$ s'annulent par commutation).

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs possède de nombreuses propriétés :

Proposition 5.2.5. — *Le crochet de Lie* $[.,.] : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \to \mathcal{H}(M)$ *a les prorpiétés suivantes :*

i) $[X,Y] = -[Y,X]$,

ii) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ *(identité de Jacobi),*

iii) $[fX,Y] = f[X,Y] - (Yf)X$,

iv) $[X,fY] = f[X,Y] + (Xf)Y$.

L'identité de Jacobi peut paraître mystérieuse. En fait, elle s'écrit sous une autre forme, qui fait apparaître sa vraie nature :

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]. \tag{91}$$

L'identité de Jacobi est donc une retraduction du résultat suivant :

Lemme 5.2.6. — *L'opérateur adjoint de* X, $ad(X) : Y \mapsto [X,Y]$ *est une dérivation sur l'algèbre* $(\mathcal{H}(M),[.,.])$.

Toutes ces propriétés ne sont pas spécifiques de l'algèbre des champs de vecteurs, mais des *algèbres de Lie* en général. Nous renvoyons au prochain chapitre pour plus de détails.

5.2.3. Flot d'un champ de vecteurs. — Une variété étant donnée, on aimerai bien savoir comment on "bouge" dessus. Les contraintes sur un mouvement sont données par la vitesse et l'objet lui même. Dans notre langage, c'est la donnée d'un champ de vecteur sur la variété. Déterminer le mouvement, c'est déterminer les courbes sur la variété telles que les tangentes en les points de la courbes soient données par le champ de vecteurs.

Soit $\gamma : J \to M$ une courbe de classe C^∞ sur la variété M, définie sur un intervalle J. On note

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = T_t\gamma.1.$$

L'application $\gamma' : J \to TM$ est de classe C^∞. On appelle γ' le champ de vecteur le long de γ car $\pi_M \circ \gamma' = \gamma$.

Définition 5.2.7. — Soit X un champ de vecteur de $\mathcal{H}(M)$. Une courbe $\gamma : J \to M$ est une courbe intégrale du champ X si $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ pour tout $t \in J$.

L'existence locale des courbes intégrales pour un champ de vecteurs donné découle facilement du théorème classique d'existence des solutions d'une équation différentielle ordinaire :

Lemme 5.2.8. — *Soit X un champ de vecteur sur M. Pour tout $x \in M$, il existe un intervalle ouvert J_x contenant* 0 *et une courbe intégrale $\gamma_x : J_x \to M$ tel que $\gamma_x(0) = x$. Si J_x est maximal alors γ_x est unique.*

On rappel qu'un domaine de définition d'une courbe intégrale est maximal si la solution ne peut pas être étendu au dela de ce domaine.

Démonstration. Il suffit de se placer dans un système de coordonnées locales. Soit (U, ϕ) une carte locale de M telle que $x \in U$. L'équation $\gamma'(t) = X(\gamma(t)$ est alors un système d'équations différentielles ordinaires avec la condition initiale $\gamma(0) = x$. Comme X est de classe C^∞, il existe une unique solution locale qui dépend continuement des conditions initiales (Cauchy-Lipshitz).

La construction globale se fait par recollement dans les cartes. On suppose que $J_x =]a, b[$ et $\lim_{t \to b} \gamma(t) = \gamma(b)$ existe et $\gamma(b) \in U \cap V$, ou (V, ψ) est une seconde carte locale. On construit une solution locale γ_2 dans la carte (V, ψ) telle que $\gamma_2(b) = \gamma(b)$. Dans $U \cap V$, on a $\gamma_2(b) = \gamma(b)$ et $\gamma_2 = \gamma$ par unicité des solutions d'une équation différentielle ordinaire. Par itération, on construit donc sur M une courbe intégrale de X. □

Si J_x est le domaine maximal, alors soit $J_x = \mathbb{R}$, soit il est fini (c'est le cas si la limite à droite ou à gauche n'existe pas dans le raisonnement ci-dessus) et la courbe intégrale quitte la variété.

La notion essentielle qui découle de tout cela est celle du *flot* d'un champ de vecteurs.

Soit $X \in \mathcal{H}(M)$ un champ de vecteurs. On note $F_t^X(x) = F(t, x)$ la courbe intégrale maximale de X telle que $F(0, x) = x$. On note J_x le domaine de définition de $F(t, x)$ en t.

Théorème 5.2.9. — *Pour tout champ de vecteur X sur M, l'application $F^X : D(X) \to M$ est C^{infty}, où $D(X) = \cup_{x \in M} J_x \times \{x\}$ est un voisinage ouvert de $0 \times M$. On a*

$$F^X(t + s, x) = F^X(t, F^X(s, x)). \tag{92}$$

Bien entendu, la dernière équation n'a de sens que si les deux cotés ont un sens.

Soit X un champ de vecteur. Le flot F^X est dit *global* ou *complet*, si son domaine de définition $D(X)$ est $\mathbb{R} \times M$. Le champ de vecteurs associé est alors dit complet. Dans ce cas, on note le flot

$$F_t^X = \exp(tX).$$

C'est un *difféomorphisme* de M.

On appelle *support* de X et on note *supp*(X), l'ensemble $\{x \in M : X(x) \neq 0\}$.

Lemme 5.2.10. — *Un champ de vecteur à support compact sur M est complet.*

Sur une variété compacte, tout champ de vecteurs est donc complet. Si M n'est pas compact et de dimension ≥ 2, alors l'ensemble des champs de vecteurs complets n'a pas de structure particulière en général (il n'est pas fermé, ou clos sous le crochet de Lie). Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$, le champ de vecteur $X = y\partial/\partial x + (x^2/2)\partial/\partial y$ n'est pas complet.

Un autre exemple est donné par l'étude du problème des deux corps (deux points matériels en intéraction gravitationelle). Les points où le champ de vecteur n'est pas complet sont les points de collision entre les deux corps. On peut étudier ce type de champs en plongeant la variété sur lequel ils sont dḿinit dans une variété plus grande, ou en collant une variété. Toutes ces méthodes sont appelées des *régularisations*.

5.3. Exercices

1. Démontrer l'identité de Jacobi.

2. Montrer que les champs de vceteurs sur une variété compacte sont complets.

3. Reprendre l'exercie 3 du chapitre précédent. Expliciter l'application induite sur les plans tangents.

4. Soit X un champ de vecteurs complet de classe C^∞ sur un ouvert U d'un espace de Banach E. Pour chaque $x \in U$, on note $\phi(t, x)$ la courbe intégrale maximale de X telle que $\phi(0, x) = x$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold V.I, *Équations différentielles ordinaires*, Ed. MIR, Moscou, 1988.

[2] Avez A., *Calcul différentiel*, Maitrise de Mathématiques pures, Masson, 1983.

[3] Avez A., *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Ed. Masson, 1993.

[4] Berger M, Gostiaux B, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF, 1987.

[5] Connes A, *Noncommutative geometry*, Academic press, 1994.

[6] Cougnard J, *Cours de géométrie différentielle*, Maitrise, Université de Franche-Comté, 1989-1992.

[7] Demazure M, *Catastrophe et bifurcations*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Ed. Ellipse, 1989.

[8] Do Carmo M.P., *Differential geometry of curvs and surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[9] Donaldson S, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, J. Diff. Geo. 18, 1983, 269-316.

[10] Doss-Bachelet C, Françoise J-P, Piquet C, *Géométrie différentielle*, avec 80 figures, Ellipses, 2000.

[11] El Kacimi Alaoui A, Queffélc H, Sacré C, Vassallo V, *Quelques aspects des mathématiques actuelles*, Ellipses, 1998.

[12] Federer H, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, 1969.

[13] Freedman M. H, The topology of four dimensional manifolds, J. Diff. Geo. 17 (1982), 357-454.

[14] Gonnord S, Tosel N, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Calcul différentiel*, Ed. Ellipses, 1998.

[15] Gonnord S, Tosel N, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation, Topologie et analyse fonctionnelle*, Ed. Ellipses, 1996.

[16] Haefliger A, Reeb G, Variétés (non-séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, Ens. Math. 3, 107-126, 1957.

[17] Lafontaine J, *Introduction aux variétés différentiables*, PUG, 1996.

[18] Lelong-Ferrand J, *Géométrie différentielle*, Masson ed., 1963.

[19] Lesnievski A, Noncommutative geometry, Notices of the AMS, Vol. 44, no. 7, pp. 800-805.

[20] Hirsch M, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics no.33, 4 ed., 1991.

[21] Hubbard J, West B, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Ed. Cassini, 1999.

[22] Michor P. W, *Topics in differential geometry*, 312.p, 2001.

[23] Milnor J, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Annals of Math. 64 (1956), 399-405.

[24] Milnor J, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[25] Peixoto M.M, Qualitative theory of differential equations and structural stability, dans *Dynamical systems*, p.469-480, 1964.

[26] Peixoto M.M, Strucral stability on 2-dimensional manifolds, Topology 2, 101-121, 1962.

[27] Palis J, De Melo W, *Geometric theory of dynamical systems ; an introduction*, Springer, 1982.

[28] Quinn F, Ends III, J. Diff. Geo. 17 (1982), 503-521.

[29] Schwartz L, *Analyse ; topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1970.

[30] Smale S, Structurally stable systems are not dense, Amer. J. Math. 86, 491-496, 1966.

[31] Tricot C, *Courbes et dimension fractales*, Springer, 1999.

[32] Vauthier J, Prat J-J, *Cours d'analyse mathématique de l'agrégation*, Ed. Masson, 1994.