C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 325–328, 2001
Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Hyperbolicité et non-intégrabilité analytique. I. Points hyperboliques

Jacky CRESSON [a], Marc RABIET [b]

[a] **Équipe de mathématiques de Besançon, CNRS-UMR 6623, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France**
Courriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

[b] **Observatoire de Paris, 61, avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France**
Courriel : rabier@format.obspm.fr

(Reçu le 13 octobre 2000, accepté après révision le 4 décembre 2000)

Résumé. Soit f un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ possédant une structure homocline hyperbolique générique. On suppose que les valeurs propres sur la variété stable (resp. instable) satisfont une condition de non-résonance. Alors, le système défini par f n'admet pas d'intégrale première analytique locale. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Hyperbolicity and analytical non-integrability. I. Hyperbolic points

Abstract. *Let f be a diffeomorphism of $\mathbb{R}^n$ possessing a generic hyperbolic homoclinic structure. We assume that the eigenvalues associated to the stable* (*resp. unstable*) *manifold satisfy a non-resonance condition. Then, the system defined by f doesn't admit a local analytical first integral.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Intégrale première analytique et structure homocline hyperbolique

1.1. *Structure homocline hyperbolique transverse.* – Soit f un difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}^n$. On dit que f possède une *structure homocline hyperbolique transverse* si f admet un point invariant hyperbolique p dont la variété stable et la variété instable, notées $W^+(p)$ et $W^-(p)$ respectivement, se coupent transversalement.

1.2. *Sur un résultat de Moser.* – En 1973, J. Moser [3], démontre pour les difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ le théorème suivant :

THÉORÈME 1. – *Soit f un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ possédant une structure homocline hyperbolique transverse, alors le système défini par f n'admet pas d'intégrale première analytique globale.*

Sa démonstration repose sur le théorème de Birkhoff–Smale. Précisément, il utilise l'existence d'un ensemble invariant hyperbolique dans le voisinage de l'orbite homocline, sur lequel il existe une orbite dense. Cet ensemble est alors un ensemble d'unicité (key-set) pour les fonctions analytiques.

Note présentée par Charles-Michel MARLE.

S0764-4442(00)01801-2/FLA

En fait, ce résultat est encore vrai si on remplace la notion d'intégrale première analytique globale par une intégrale première de classe C^1, analytique dans un voisinage arbitrairement petit de $W^+(p) \cup W^-(p)$.

L'extension de sa démonstration au cas $n \geqslant 3$ soulève de nombreuses difficultés (*voir* [1]).

1.3. *Intégrale première analytique locale.* – Soit f un difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}^n$ possèdant une structure homocline hyperbolique transverse. On appelle intégrale première analytique locale pour f la donnée d'une intégrale première P de classe C^1, dont la restriction à un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $W^+(p) \cup W^-(p)$ est analytique. On dira que l'intégrale première analytique locale est C^ω-*triviale* si sa restriction à $\mathcal{U}$ est la fonction constante.

Dans ce cadre, nous démontrons le :

THÉORÈME 2. – *Soit f un difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}^n$ tel que p soit un point fixe hyperbolique pour f. On note $W^+(p)$ et $W^-(p)$ sa variété stable et sa variété instable respectivement. On suppose que* :

(i) *ses variétés se coupent transversalement en un point homocline générique $h \in \mathbb{R}^n$* ;

(ii) *les valeurs propres associées à $W^-(p)$ et $W^+(p)$), notées λ_i^-, $i = 1, \ldots, n^-$, et λ_i^+, $i = 1, \ldots, n^+$, respectivement, vérifient la condition de non-résonance* :

$$\left|\left(\lambda^\sigma\right)^\nu\right| \neq 1, \tag{1}$$

où $\nu \in \mathbb{Z}^{n^\sigma} \setminus \{0\}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{n^\sigma})$, $\lambda^\sigma = (\lambda_1^\sigma, \ldots, \lambda_{n^\sigma}^\sigma)$, $(\lambda^\sigma)^\nu = (\lambda_1^\sigma)^{\nu_1} \ldots (\lambda_{n^\sigma}^\sigma)^{\nu_{n^\sigma}}$ et $\sigma = \pm$.

Alors f n'admet pas d'intégrale première analytique locale autre que C^ω-triviale.

On renvoie au § 3.1 pour la définition d'un point homocline générique.

Dans le cas des difféomorphismes du plan, la condition de non-résonance est vide, de même que la condition pour le point homocline d'être générique. De ce fait, le théorème de Moser est un corollaire du théorème 2.

Un résultat moins précis est annoncé par Dovbysh [1] dans une prépublication récente.

2. Démonstration du théorème 2

2.1. *Préliminaires.* – La démonstration du théorème 2 repose sur deux résultats. L'un de nature *combinatoire*, lié à la dynamique sur la variété stable ou instable (le lemme de trivialité) et l'autre, de nature *géométrique*, lié à l'existence d'une structure transverse en chaque itéré du point homocline.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on note $\gamma(x_0)$ l'orbite de x_0 par f.

LEMME DE TRIVIALITÉ. – *Soit f un difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant l'hypothèse* (ii) *du théorème* 2. *Soit A une fonction analytique sur $W^-(p)$* (*resp.* $W^+(p)$) *telle que $A(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h^-)$* (*resp.* $x \in \gamma(h^+)$), *où h^-* (*resp.* h^+) *est un point générique de $W^-(p)$* (*resp.* $W^+(p)$), *alors $A = 0$ sur $W^-(p)$* (*resp.* $W^+(p)$).

On renvoie au § 3.1 pour la définition d'un point $h \in W^-(p)$ (resp. $W^+(p)$) générique. La démonstration est donnée dans le prochain paragraphe.

LEMME GÉOMÉTRIQUE. – *Soit f un difféomorphisme analytique satisfaisant les hypothèses du théorème* 2. *Soit A une fonction de classe C^1, constante sur $W^-(p) \cup W^+(p)$, alors $\mathrm{D}A(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$.*

En effet, $W^-(p)$ et $W^+(p)$ se coupant transversalement en tout point $x \in \gamma(h)$, l'espace tangent en x est somme de $\mathrm{T}_x W^-(P)$ et de $\mathrm{T}_x W^+(p)$. Comme A est constante sur $W^-(p)$ (resp. sur $W^+(p)$), $\mathrm{D}A(x)$ est nulle sur $\mathrm{T}_x W^-(p)$ (resp. sur $\mathrm{T}_x W^+(p)$), donc identiquement nulle.

2.2. *Démonstration.* – Soit P une intégrale première analytique pour f. L'idée est de démontrer par récurrence, l'annulation des dérivées successives de P, notées $\mathrm{D}P^i(x)$, en tous les points $x \in \gamma(h)$, où h

est un point générique. Comme P est analytique sur $\mathcal{U}$ et $W^+(p) \cup W^-(p) \subset \mathcal{U}$, on en déduit $P = const$ sur $\mathcal{U}$.

L'hypothèse de récurrence (h_n), $n \geqslant 1$, est la suivante :

(h_n) on a $\mathrm{D}P^i(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.

L'hypothèse est vérifiée en $n = 1$. En effet, on a $P(x) = \text{constante}$ sur $W^-(p) \cup W^+(p)$ par définition. Le lemme géométrique implique $\mathrm{D}P(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$.

Montrons que (h_n) implique (h_{n+1}) : d'après (h_n), on a $\mathrm{D}P^n(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$. Par le lemme de trivialité, on en déduit $\mathrm{D}P^n|_{W^-(p)} = 0$ et $\mathrm{D}P^n|_{W^+(p)} = 0$. Le lemme géométrique implique donc $\mathrm{D}P^{n+1}(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$.

Par le principe de récurrence, nous avons donc $\mathrm{D}P^i(x) = 0$ pour tout $x \in \gamma(h)$ et $i \geqslant 1$, ce qui termine la démonstration du théorème. □

3. Le lemme de trivialité

3.1. *Réduction au cas linéaire.* – Soit $f^-(x)$ la restriction de f à $W^-(p)$. L'application $\mathrm{D}f^-(p)$ admet les valeurs propres λ_i^-, $i = 1, \ldots, n^-$. Ces valeurs propres vérifient la condition de linéarisation analytique de Siegel [2]. Il existe donc un changement de variable analytique $y = z(x)$, défini sur un voisinage ouvert U de p dans $W^-(p)$, tel que $z \circ f^- \circ z^{-1} = f_{\text{lin}}^-$, où $f_{\text{lin}}^-(x) = \mathrm{D}f^-(p) \cdot x$. On note x^- le représentant du point homocline h dans ce système de coordonnées.

Comme $A((f^-)^k(x^-)) = \text{constante}$ par hypothèse, on a $A \circ z^{-1} \circ (f_{\text{lin}}^-)^k \circ z(x^-) = \text{constante}$. On note $\widetilde{A} = A \circ z^{-1}$ et $y^- = z(x^-)$, alors $\widetilde{A}\big((f_{\text{lin}}^-)^k(y^-)\big) = \text{constante}$.
La fonction $\widetilde{A}$ est encore analytique sur U. Si $\widetilde{A} \equiv 0$ sur U, alors $A \equiv 0$ sur $z^{-1}(U)$. Comme U est un ouvert de $W^-(p)$ et $W^-(p)$ est connexe, on a $A \equiv 0$ sur $W^-(p)$.

On peut toujours choisir un ouvert $V \subset U$, contenant p, tel que $\widetilde{A}(x) = \sum_\nu a_\nu x^\nu$, pour tout $x \in V$. Il suffit donc de montrer le lemme de trivialité dans le cas où f est linéaire contractante (ou dilatante).

Par un changement de variable holomorphe, on diagonalise f_{lin}^- en $F_{\text{lin}}^-(x) = \Lambda^- \cdot x$, où Λ^- est la matrice diagonale constituée des valeurs propres λ_i^-, $i = 1, \ldots, n^-$, et $x \in \mathbb{C}^n$ (car le changement de variable est holomorphe). On note h^- l'image de h par les applications de linéarisation et de diagonalisation sur $W^-(p)$. Par un raisonnement analogue on produit un point h^+.

DÉFINITION 1. – Un point $h \in W^-(p)$ (resp. $W^+(p)$) est dit *générique* si son représentant h^- (resp. h^+) a toutes ses composantes non nulles. Un point homocline h est dit générique si ses représentants h^- et h^+ ont des composantes toutes non nulles.

La démonstration du lemme de trivialité découle donc du lemme suivant :

LEMME 1. – *Soient F une application linéaire $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, définie par $x \mapsto \Lambda x$, où Λ est une matrice diagonale constituée de valeurs propres complexes λ_i, $i = 1, \ldots, n$, $|\lambda_i| < 1$ (resp. $|\lambda_i| > 1$) vérifiant la condition de non-résonance et $A(x)$ une série entière. Soit h un point de $(\mathbb{C}^*)^n$. Si $A(F^k(h)) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $A = 0$.*

La démonstration est donnée dans le prochain paragraphe.

3.2. *Démonstration du lemme* 1. – On donne la démonstration dans le cas ou F est contractante, le cas dilatant étant analogue.

Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application $x \mapsto F(x) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$, avec $0 < |\lambda_i| < 1$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Soit $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ un point tel que $h_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Soit $A(x) = \sum_\nu a_\nu x^\nu$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $x^\nu = x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}$, une fonction holomorphe. On note $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$.

On a $A(F^k(h)) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par hypothèse, soit $a_0 + \sum_\nu a_\nu \lambda^{k\nu} h^\nu = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $0 < |\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $|\lambda^{k\nu}| \to 0$ lorsque $k \to \infty$, pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\nu| \neq 0$. On a donc $a_0 = 0$.

On note $H_r(x)=\sum_{|\nu|=r} a_\nu x^\nu$ la composante homogène de degré r de A.

Les valeurs propres satisfaisant la condition de non-résonance, il est possible de les ordonner strictement en module. On suppose, sans perte de généralité, que les valeurs propres sont classées par ordre croissant en module, à savoir $0<|\lambda_1|<\cdots<|\lambda_n|<1$. On note que

$$\left|\lambda_n^r\right| \geqslant \left|\lambda^\nu\right|, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^n,\ |\nu| \geqslant r, \tag{2}$$

et $|\lambda^\nu|>|\lambda_1^r|$, pour tout $\nu\in\mathbb{N}^n$, $|\nu|=r$.

Pour démontrer l'annulation de A, nous procédons par récurrence sur les composantes homogènes $H_r(x)$, $r\geqslant 1$.

On suppose que toutes les composantes homogènes de degré $<r$ sont nulles. On a donc $A(x)=H_r(x)+\sum_{d>r} H_d(x)$, d'où

$$A(\lambda^k h)=H_r(\lambda^k h)+\sum_{d>r} H_d(\lambda^k h)=0 \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Pour éliminer les coefficients de H_r, nous allons mettre en facteur le λ^ν de A de plus grand module, à savoir λ_n^r par (2). On a alors

$$A(\lambda^k h)=\lambda_n^k\left(a_{0,\ldots,0,r}h_n^r+\sum_{|\nu|\geqslant r,\,\nu\neq(0,\ldots,0,r)} a_\nu\left(\frac{\lambda^\nu}{\lambda_n^r}\right)^k h^\nu\right)=0,$$

avec $0<\left|\frac{\lambda^\nu}{\lambda_n^r}\right|<1$. On a donc $a_{0,\ldots,0,r}h_n^r+\sum_{|\nu|\geqslant r,\,\nu\neq(0,\ldots,0,r)} a_\nu\left(\frac{\lambda^\nu}{\lambda_n^r}\right)^k h^\nu=0$. En faisant tendre $k\to\infty$, on a $a_{0,\ldots,0,r}h_n^r=0$. Comme h est générique, on a $h_n\neq 0$, d'où $a_{0,\ldots,0,r}=0$.

Pour annuler les autres coefficients de H_r, il convient de remanier la forme (3). On a

$$A(\lambda^k h)=\widetilde{H}_r(\lambda^k h)+\sum_{|\nu|>r,\,\lambda^\nu<\lambda_1^r} a_\nu\lambda^{k\nu}h^\nu=0,$$

où $\widetilde{H}_r(x)=\displaystyle\sum_{|\nu|\geqslant r,\,\nu\neq(0,\ldots,0,r)} a_\nu x^\nu+\sum_{|\nu|>r,\,\lambda^\nu>\lambda_1^r} a_\nu x^\nu.$

Remarque. – Cette décomposition met en évidence le fait que le maximum de $|\lambda^\nu|$ pour $|\nu|=r$, $\nu\neq(0,\ldots,0,r)$, n'est pas obligatoirement un maximum pour $|\lambda^\nu|$, $|\nu|>r$, comme c'était le cas pour $|\lambda_n^r|$.

Le nombre de termes tels que $|\lambda^\nu|>|\lambda_1^r|$ est fini. En effet, il existe toujours $s\in\mathbb{N}$ tel que $|\lambda_n^s|<|\lambda_1^r|$. On a donc pour tout $\nu\in\mathbb{N}^n$, $|\nu|\geqslant s$, $|\lambda^\nu|\leqslant|\lambda_n^s|<|\lambda_1^r|$. On note $N(r)$ le nombre de termes dans $\widetilde{H}_r(x)$.

Par la condition de non-résonance, les produits λ^ν intervenant dans $\widetilde{H}_r(\lambda^k h)$ sont strictement ordonnés en module. On les classe par ordre décroissant $|\lambda^{\nu_1}|>\cdots>|\lambda^{\nu_{N(r)}}|=|\lambda_1^r|$.

En procédant comme pour λ_n^r, on démontre que $a_{\nu_i}h^{\nu_i}=0$ pour $i=1,\ldots,N(r)$. Le point h étant générique, on en déduit $a_{\nu_i}=0$ pour $i=1,\ldots,N(r)$, soit $\widetilde{H}_r(x)=0$. On a donc en particulier $H_r(x)=0$.

Une simple récurrence permet de montrer $A=0$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

Références bibliographiques

[1] Dovbysh S., Transversal intersection of separatrices and branching of solutions as obstructions to the existence of an analytic integral in many-dimensional systems I, Basic result. Separatrices of hyperbolic points, Preprint, 1997.

[2] Katok A., Hassenblatt B., Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1995.

[3] Moser J., Stable and Random Motions in Dynamical Systems (with a special emphasis in celestial mechanics), Ann. Math. Stud. 77, Princeton Univ. Press, 1973.

[4] Palis J., De Melo W., Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1982.