UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ ET C.N.R.S.
ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES DE BESANÇON
U.M.R. 6623
25030 BESANÇON CEDEX

Programme de Recherche

SYSTÈMES DYNAMIQUES, BRUIT EN 1/f ET THÉORIE DES NOMBRES.

par Jacky CRESSON

Table des Matières

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le résumé analytique des travaux permet d'avoir un bref appercu de chacune de mes publications. La partie orginale de ce mémoire est la section 1 qui contient le programme de recherche. La section 2 reproduit le mémoire que j'avais proposé l'année dernière pour mon admission au CNRS. Il contient un programme sur la démonstration de la conjecture d'Arnold que je n'ai pas reproduit en section 1. Je me suis borné à indiquer les points qui ont évolués. De même, je parlais d'un programme sur la bifurcation des espaces de modules qui reste d'actualité et qui n'est pas repris en section 1. Comme la section 1 fait souvent référence à ce texte, j'ai cru bon de le rajouter.

SYSTÈMES DYNAMIQUES, BRUIT EN 1/f ET THÉORIE DES NOMBRES

par Jacky CRESSON

Ce texte regroupe les principaux thèmes de recherches que j'ai abordé ces dernières années. Pour chacun d'eux, je résume briévement mes résultats et les publications associées. Je donne ensuite les différentes voies de travail dans lesquelles je me suis engagée à la suite de ces travaux. La diversité des thèmes et des outils demande une disponibilité importante. Mon statut de maitre de conférence ne me permet pas, pour le moment, de développer correctement ces idées. C'est dans le but d'obtenir cette disponibilité de travail que je demande mon admission au CNRS.

Les thèmes que je vais aborder dans ce mémoire sont

1. Instabilité des systèmes hamiltoniens,
2. Synchronisation, bruit en 1/f, dynamique et théorie des nombres,
3. Formes prénormales, problème du centre et $16^{\text{ème}}$ problème de Hilbert.

Chacun de ces thèmes est en rapport étroit avec des problèmes de la physique. Certains en sont même issus directement, comme le thème 2. Ils ont donné lieu à des travaux communs avec des physiciens ou astrophysiciens. En 1998, un groupe de travail pluridisciplinaire s'est formé autour des questions abordées par le présent programme. Une école thématique du CNRS, intitulée "*Bruit des fréquences des oscillateurs et dynamique des nombres algébriques*", que je co-organise avec michel Planat du LPMO[1], aura lieu en avril 1999 sur le thème 2, regroupant des mathématiciens (en dynamique, théorie des nombres et géométrie algébrique), des physiciens et des ingénieurs. En conséquence, mon programme s'inscrit dans le cadre des "*intéractions des mathématiques avec les autres disciplines*".

Les chiffres entre parenthèses renvoient à la liste des publications ci-après.

J'ai rajouté en appendice le rapport sur mon programme de recherche au CNRS intitulé "*Systèmes dynamiques, géométrie et théorie des nombres*", que j'avais proposé l'année dernière. Dans le texte qui suit, on y fera référence comme C1.

[1]Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs.

1. Instabilité des systèmes hamiltoniens.

1. *Conjecture d'Arnold.* - Je renvoie au programme de l'année dernière où ce thème est discuté en détail dans C1, partie 1. Je me contente donc d'indiquer les points qui ont évolués entre le programme que je proposais alors et les idées que je développe maintenant.

1.1. Tout d'abord, certains des problèmes que j'avais soulevé sont aujourd'hui résolus. Notamment, j'ai démontré la *conjecture de Chirikov* [2] (problème C1, A.9) en suivant la méthode que j'indiquais. Dans le cas convexe, les exposants de stabilité du théorème de nekhoroshev sont donc optimaux. Ce travail nous a conduit (avec pierre Lochak (ENS) et Laurent Niederman (Orsay)) vers le problème de l'exposant optimal dans le cas où le hamiltonien intégrable vérifie une condition de *raideur* (steepness) introduite par Nekhoroshev dans son article original. Nous avons maintenant une réponse dans le cas quasi-raide [10] en utilisant la méthode développée par pierre Lochak pour le cas convexe. Ce travail nous permet de démontrer un cas de la *conjecture de Nekhoroshev* suivant laquelle plus les exposants de raideur sont grands, plus le temps de stabilité est petit. En ce moment, nous traduisons la condition de raideur pour les fonctions analytiques en nous aidant des travaux de Y. Ilyashenko. Ce travail, couplé à la méthode de Lochak doit nous donner les exposants optimaux dans ce cas.

1.2. Les travaux présentés en 1.1. couplés aux résultats de ma thèse ont donné lieu à un travail en collaboration avec Yannis Papaphilippou du CERN à Genève et Christophe Guillet (Univ. de Bourgogne). Nous rédigeons un article de synthèse sur les phénomènes d'instabilité en physique [12] et les différents outils permettant de quantifier cette instabilité. Nos premiers résultats sont utilisés en astrophysique pour l'étude des galaxies elliptiques; on donne aussi un apercu de la méthode dans le cas des atomes de Rydberg.

1.3. La grosse partie de C1 concerne une ébauche de démonstration de la conjecture d'Arnold sur l'instabilité générique, dans un cadre analytique, des hamiltoniens presques intégrables. J'ai pour l'instant mis en forme les résultats préliminaires et donné un premier apercu de ma méthode dans un preprint recent [7]. L'un des points qui sous tends la construction est le phénomène que j'ai nommé *phénomène de transversalité-torsion*, démontré dans [3]. La remarque, essentielle, est que le couplage, dans un voisinage d'un tore partiellement hyperbolique, de la dynamique minimale sur le tore et de la transversalité des variétés invariantes, "produit" de l'hyperbolicité. Autrement dit, il est possible de travailler dans un cadre hyperbolique, alors qu'a priori, les objets sont partiellement hyperboliques. Ce principe permet la démonstration de nombreux résultats nouveaux (dynamique symbolique, conjecture de Holmes-marsden) et une meilleure comprehension de la dynamique dans un voisinage de la variété résonnante [3],[7].

2. *Instabilité modulationelle.* - Ce travail commencé en sptembre 1998 avec christophe Guillet (université de Bourgogne) est un début de justification des travaux de Chirikov et de ses collaborateurs sur l'*instabilité modulationelle*. Le problème est, grosso modo, le rôle joué sur la dynamique par la modulation en fréquence. Ce thème est evidemment lié au thème 2 et les expériences sur la synchronisation des oscillateurs de michel Planat. Notamment, nous sommes

en train d'eclaircir les changements dans la géométrie du système provoqués par la modulation [11].

3. *Instabilité dans les EDP.* - Ce sujet proviens des recents résultats obtenus par S. Kuksin, J. Poschel et T. Kappeler (entre autres) autour de la généralisation des théorèmes de type KAM et Nekhoroshev pour les systèmes hamiltoniens en dimension infinie. Le lien aux EDP se fait via la mise en evidence de certaines structures symplectiques appropriées sur un espace des phases particulié, par exemple pour l'équation de Schrodinger ou KDV. La possibilité de mettre en forme les deux résultats précédent permet de se poser l'analogue de la conjecture d'Arnold pour ces systèmes.
Le travail en ce sens est donc découpé en plusieurs parties qui peuvent être sujet à d'importantes modifications suivant les résultats obtenus.
Le texte qui suit suppose que le lecteur est plus ou moins familié de la terminologie utilisée par jean Ecalle dans son étude des formes prénormales de champs de vecteurs. En conséquence, je renvoie à ces travaux pour une introduction, par exemple "The nilpotent and distinguished form of resonant vectors fields or diffeomorphisms" (avec D. Schlomiuk), Ann. Inst. Fourier, **43**, 5 (1993), 1407-1483 et *prenormalization, correction and linearization of resonant vector fields* (avec B. Vallet), Math. Zei. , (1998).

3.1. La première consiste à mettre en place les bons outils sur les formes prénormales d'EDP. On aimerai notamment appliquer, ou plutot généraliser les travaux de Jean Ecalle dans ce cadre. Ceci est tout a fait envisageable et l'une des différence essentielle est l'apparition de résonances spécifiques à ces systèmes. On obtiendrai notamment les formes normales sans doute optimales comme dans le cas des champs de vecteurs. Les travaux existant à ce jour concerne l'analogue de la forme normale de Birkhoff pour l'équation KDV ou Schrodinger non linéaire. Or, la forme normale de Birkhoff n'est autre qu'une forme prénormale particulière appelée (dans le cadre général, c'est à dire pas forcemment hamiltonien) *forme élaguée* par jean Ecalle. D'autres formes prénormales existent, notamment la forme royale, régale,..etc... De plus, l'analyse de la convergence ou non de ces formes se fait grace à l'amplification des moules et l'analyse de la resurgence des séries amplifiées. Outre une comprehension plus profonde des formes normales dans les EDP, c'est la mise au point de nouveaux outils d'analyse puissants.

3.2. Un travail sera de voir la forme normale associée aux resonances dans ce cas. En general, avec des conditions sur la dynamique du sous tore non résonant au tore résonnant, on démontre l'existence de tores hyperboliques, premier éléments entrant dans la construction d'Arnold. Ici, on s'attends a trouver un résultat analogue, mais rien n'existe pour le moment.

3.3. Cette premiere partie peut aussi permettre de discuter le formalisme des moules introduit par Ecalle et la difference avec les methodes arboricoles (utilisant des arbres). Notamment, savoir si le theoreme KAM decoule des methodes d'Ecalle ou non, et le lien à la correction. Le seul cas ou la relation me semble trivial est celui de la perturbation d'un hamiltonien isochrone pour lequel Gallavotti avait fait sa conjecture sur la correction. Sinon, il semble necessaire de modifier legerement la mise en forme du probleme pour l'adapter au formalisme des moules.

3.4. Dans un second temps on construira un exemple permettant de démontrer l'instabilité des systèmes hamiltoniens en dimension infinie qui sont des perturbations de systèmes proche intégrables. Cette partie sera analogue à l'exemple classique en dimension finie. On peut neanmoins s'attendre à des phénomènes nouveaux, notamment dans les problèmes de recollement de trajectoire le long d'une chaîne (et les chaînes de longueur infinie).

Bien des question se poseront en cours de route et nous verrons bien comment le tout avance. Ce travail a débuté en collaboration avec frédérique Simondon de l'équipe d'Analyse à l'Université de Franche-Comté.

2. Synchronisation, bruit en 1/f, dynamique et théorie des nombres.

Je renvoie à C1, partie 2 pour une présentation détaillée du problème de synchronisation et le rapport au bruit en 1/f. L' évolution entre le programme de recherche que je proposais alors et mes nouvelles idées est importante. Elle est due au travail commun que nous avons fourni ici, entre l'équipe de mathématiques de Besancon et le laboratoire de physique et métrologie des oscillateurs. Le groupe de travail "ouverture des mathématiques" que j'organise à l'université de Franche-Comté dans l' équipe de mathématiques de Besançon, a débuté en juin 1998. Il nous a permis de dégager les thèmes qui constituent les voies que je vais equisser. Les nombreuses discussions que nous avons eues ici avec les mathématiciens de passage pour les différents séminaires de l'équipe, nous ont permis de regrouper, autour de nos thèmes, de nombreuses personnes (M. Waldsmitt de Paris VI, P. Cohen de Lille, J-P. Allouche de Orsay, P. Moussa du CEA .....). Cette intéraction se traduit par l'école thématique du CNRS en avril 1999 que j'indiquai dans l'introduction de ce mémoire. Je conseil donc au lecteur de lire d'abord, pour la position du problème, la partie 2,I.A de C1.

1. *Espaces de résolution.* - Les expériences de michel Planat et son utilisation des fractions continues m'ont conduit à l'introduction d'espaces particuliers que j'ai appelé *espaces de résolution* [15]. Dans ses modélisations du bruit en 1/f, michel Planat introduit une troncature des fractions continues. Nous cherchions alors à relier cette troncature à une notion physique. Il était clair, d'après les expériences, que ces troncatures avaient un lien avec la physique microscopique du système, faisant entrer la physique quantique dans notre problème, tout en étant un problème de physique classique. J'ai alors penser que le problème venait de ce que la physique dépend essentiellement de quantités *résolues*, c'est à dire, calculées ou estimées à une résolution donnée. J'en profite pour noter en passant, que la théorie de la relativité d'echelle de Laurent Notale, fait justement jouer un rôle important aux différentes résolutions (en temps et en espace). La question était alors de savoir : comment agis la résolution sur un espace donné, par exemple $\mathbb{R}$. On peut visualiser cet effet, par le fait que la résolution introduit une troncature des nombres représentés par leurs fractions continues. Elle selectionne donc pour chaque nombre, et suivant ses propriétés d'approximation, une profondeur maximale, c'est à dire la taille de la fraction continue. De même, cela fixe les dénominateurs maximales que l'on peut attendre. Ces espaces se définissent assez bien au niveau formel. Par contre la géométrie et l'algèbre de ces espaces se révelle très difficile. Pour la géométrie on peut associer une représentation en arbre, qui permet

d'introduire des notions nouvelles sur les nombres. Par exemple, une résolution ϵ étant fixée, tout nombre x a un représentant résolu $x(\epsilon)$ d'une profondeur $p(\epsilon)$ donnée. Une question est : comment varie cette profondeur avec ϵ ? Ceci conduit à un exposant que j'ai appelé exposant d'instabilité qui indique comment cette profondeur bouge. De même, on peut introduire, en utilisant les opérations arithmétiques résolues (que l'on peut définir sur ces espaces) des coefficients d'instabilité vis a vis des opérations classique. ces espaces permettent de formaliser tout un cas de questions, notamment celles qui traitent des simulations numériques sur ordinateurs. Pour les prochaines années, j'espère développer la théorie de ces espaces et les applications possibles à la physique, notamment les liens à la relativité d'echelle. L'un des projets que nous sommes en train de formaliser grace a ces espaces est le suivant : le bruit en 1/f est un bruit de résolution, autrement dit, il proviens de la structure même de l'espace dans lequel nous vivons et qui est dépendant de la résolution. Ce travail permettrait d'expliquer la nature universelle du bruit en 1/f sur un concept de physique qui se révelle de plus en plus inévitable, mais mal défini aujourd'hui, celui de résolution. Mon travail et ce programme sont un premier pas en ce sens.

2. *Hypothèse de Riemann.* - Nous avons aussi fait le lien [14] entre le bruit en 1/f et l'hypothèse de Riemann via le théorème de Frasnel et Landau qui en donnent un énoncé équivalent à l'aide des séries de Farey. Ce résultat ne découle pas de mes travaux sur les espaces de résolution. J'essaie de démontrer l'existence d'une relation formel entre cette hypothèse et les expériences via une modélisation du système par une famille à un paramètre d'homeomorphismes du cercle. On sait que l'ensemble des plages de synchronisation forment un espace de mesure pleine. Le complémentaire de ces plages correspond à l'ensemble des valeurs du paramètre pour lequel le nombre de rotation est irrationle. Une conjecture de Jansen-Back-Bohr dit que la mesure de hausdorff de cet ensemble est une constant universelle. En général on essaie de calculer cette constant via des procédés de renormalisation. Or, ces procédés utilisent (le plus souvent) les séries de Farey, d'où la liaison à l'hypothèse de Riemann. Ceci dit, aucun travail n'a permis d'expliciter ou de nier ce lien. J'aimerai donc engager une recherche dans cette voie, pousser par les derniers résultats physiques que nous avons obtenus et qui mettent en lumière un lien formel.

3. *dynamique algébrique.* - C'est une des parties qui est la plus achevée avec le point 1. En étudiant le modèle de la synchronisation d'oscillateurs, on tombe sur une application de type Arnold. Dans ce cas, on peut expliquer l'existence des plages de synchronisation et leurs repartitions suivant le rapport des fréquences. Neanmoins, une analyse fine du comportement dynamique dans les plages elle même nous échappe. En écrivant differemment ce problème, on arrive à un diffeomorphisme d'Anosov du tore. Les plages de synchronisation sont les orbites periodiques de ce diffeomorphisme. La comprehension de la structure periodique des diffeomorphisme d'Anosov est effectuée par I. Percival et F. Vivaldi via la theorie des ideaux quadratiques. En fait, si ce diffeomorphisme est conservatif il est conjugué à un automorphisme du tore et ces points périodiques sont à coordonnées rationelles. On peut donc traduire l'existence d'une orbite périodique par une "multiplication" dans un corps quadratique bien choisi, dépendant

du spectre. Via cette description, la classification des orbites périodique reviens à la recherche des ideaux premiers d'une période donnée dans le corps. Je renvoie à [17] où ce travail est détaillé. Ce travail peut être poussé plus loin dans le cas des applications rationelles, ou on peut lire sur un groupe de Galois la structure périodique. Ce premier point nous a permis de justifier en partie l'approche purement combinatoire de michel Planat. On peut rendre compte du système sans parler de dynamique, mais via simplement des propriétés arithmétiques.

4. *Dynamique sur les espaces de Teichmuller.* - Ce point du programme est issu de II.C de C1, concernant la théorie des bifurcations des espaces de modules que j'entrevoyais alors. Il se trouve qu'une partie des idées informelles que j'ai développé dans C1 se sont matérisalisées dans les travaux de McMullen et D. Sullivam sur la theorie des espaces de Teichmuller associés à une application rationelle. Ce que nous proposions dans C1 était un peu plus ambitieux et concernait notamment les applications de type Arnold, de la forme $f(z) = z + a + b \sin z$, pour $z \in S^1$. J'aimerai, en suivant les travaux de McMullen et Sullivan, définir un "bon" espace de Teichmuller associé à une application d'Arnold. Les développements actuels sur les espaces de modules, notamment les descriptions "combinatoires" des déformations possibles dans l'espace des modules (engagé ici par J.N. Denardier), permettent de jeter les bases de la theorie des bifurcations que j'attendais. Le lien avec l'arithmétique, se faisant via le critère de Weil nous donnera un complément et sans doute une retraduction des phénomènes dynamiques. Tous ces aspects de la théorie des espaces des modules sont représentés à Besançon, via leila Schneps et ses éléves (notamment leonardo Zapponi). Un groupe de travail est d'ailleurs en cours sur ce sujet. Donc, vis a vis des problèmes que je posais dans C1, le tout a pris un caractère plus technique. C'est donc pour l'instant vers ces "procédés" de passage entre un espace de module et un autre, et de ce fait, les changements possibles lorsque l'on suit un chemin dans un espace de module qui occupent pour l'instant mon esprit.

3. Formes prénormales et 16$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert.

Ce thème a commencé en janvier 1998 lors d'une discussion avec bertrand Schuman (Paris VI) sur sa thèse, concernant les champs de vecteurs polynomiaux isochrones. Le problème général est celui du 16 ème problème de Hilbert : donner une borne en fonction du degré aux nombre de cycles limites existant pour une perturbation de degré n d'un centre. Ce problème a donné naissance à un sous-problème, connu sous le nom de *problème du centre* : quelles sont les perturbations d'un centre tels que localement au voisinage de l'origine toutes les orbites soient périodiques et homotopes à 0. Les centres isochrones sont ceux pour lesquels la période est constante dans le voisinage considéré.

Je renvoie à [19] pour une présentation du problème et à [20]. Je vais simplement indiqué les idées qui ont germées depuis la redaction de ces travaux.

1. *γ-variété.* - Le premier [20] donne une caractérisation geométrique des coefficients résonnants d'une forme normale de Poincaré-Birkhoff. Cette caractérisation repose sur la mise en évidence d'une action torique qui confére à la variété du centre une structure de variété torique. Dans

le cas des perturbations homogènes, elle est de plus projective. Le 16 ème problème de Hilbert demande, via un théorème de R. Roussarie, le nombre minimal des générateurs de l'ideal du centre (l'ideal d'annulation associé à la variété algébrique du centre). La description de cet idéal est loin d'être simple. Dans [20], j'ai énoncé une conjecture sur la forme attendue de la variété du centre : c'est une variété γ-binomiale, c'est à dire engendrée par des polynomes de la forme $x^\alpha - \gamma x^\beta$, où $\gamma \in \mathbb{Q}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Cette conjecture est supportée par nos résultats sur les centres symétrique qui donnent des binomes classiques, et les centres hamiltoniens qui donnent des γ-binomes. J'ai introduit cette terminologie car aucun livre traitant des variétés torique n'aborde ce cas. J'ai donc commencé ces derniers temps une étude détaillée des variétés toriques et un début de théorie des variétés γ-toriques. Ce programme fait appel aussi bien à la combinatoire, via la description par des semi-groupe de ces variétés, ou à la géométrie algébrique, via les travaux (entre autre) de Oda. Le travail s'avère immense, et mes discussions avec les spécialistes du sujet m'indique qu'il y a vraiment un travail de fondement à faire. Ce travail est d'autant plus important que , mis à part les centres reversibles qui possèdent une variété binomiale, on se trouve dès le plus petit degré (le cas quadratique), dans un cas de variété γ-torique. La presence de H. Lombardi et A. Cortella à Besançon, l'un spécialiste des aspects constructifs et combinatoire de la géométrie algébrique, l'autre travaillant (entre autre) sur les variétés toriques, permet une avance rapide du sujet.

2. *Formes prénormales et géométrie.* - Dans un récent preprint [21], j'ai généralisé l'approche de [19] et [20] au cas de tout spectre résonnant purement réel ou imaginaire. Pour ce faire, j'ai utilisé la forme élaguée définie par jean Ecalle et son formalisme des moules et comoules. Notamment, on peut définir de manière générale une action de $\mathbb{C}^*$ sur les coefficients de la forme élaguée pour laquelle ils sont invariants. Cette action, décrite de manière explicite dans [21], est associée à la mise en forme du champ opérateurs homogènes par opérateurs homogènes et aux contractions des degrés de ces opérateurs avec le spectre. Ce travail permet l'étude d'un problème du centre généralisé tel qu'il est introduit par exemple par H. Zoladek.

Janvier 1999

Jacky Cresson

Université de Franche-Comté,
Equipe de Mathématiques de Besançon,
CNRS-UMR 6623,
16 route de Gray,
25030 Besançon cedex,
France.

Couriel : cresson@math.univ-fcomte.fr

Références bibliographiques

I. Instabilité.

1. Articles acceptés

[1] A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property, Letters in Math. Phys. **42**, 363-377, (1997).

2. Articles soumis à publication.

[2] Conjecture de Chirikov et optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev, prépublication 98/40 de l'équipe de Math. de Besançon, p.1-24, (1998).
[3] Symbolic dynamics and Arnold's diffusion, prépublication 98/35 de l'équipe de Math. de Besançon, p.1-56, (1998).
[4] The transfer lemma and the transitivity problem, prépublication 98/08 de l'équipe de Math. de Besançon, p.1-19, (1998).

3. Notes aux CRAS.

[5] Dyanmique symbolique et tores de Treshchev, note aux CRAS, *soumise*, (1998).
[6] Temps d'instabilité des systèmes hamiltoniens initialement hyperboliques, note aux CRAS, *soumises*, (1998)

4. Manuscrits non soumis ou à remanier avant soumission.

[C1] Systèmes dynamiques, géométrie et théorie des nombres, programme de recherche proposé au CNRS en decembre 1997.
[7] Topogical instability of near integrable Hamiltonian systems, p.1-26, (1998).
[8] Transition entre surfaces resonnantes, p.1-25, (1995).
[9] Instabilité en mécanique céleste et dynamique galactique, p.1-40, (1996).
[10] Fonctions quasi-raides et théorème de Nekhoroshev, (avec L. Niederman), p.1-2, (1998).

5. Articles en préparation.

[11] Instabilité modulationelle, (avec C. Guillet).
[12] Instability of physical systems, (avec C. Guillet, Y. Papaphilippou).
[13] On the splitting of invariant manifolds in multidimensional near integrable Hamiltonian systems, (avec P. Lochak, J-P. Marco et D. Sauzin).

II. Synchronisation, bruit en 1/f, dynamique et théorie des nombres.

1. Articles acceptés.

[14] Close to resonance interaction of radiofrequency wawes in a Schottky diode mixer : 1/f noise and number theory, (avec M. Planat, S. Dos Santos, N. Ratier, S. Perrine), VII Van der Ziel Symposium on Quantum 1/f noise, St-Louis, (1998).

2. Manuscrits non soumis ou à remanier avant soumission.

[15] Espaces de résolution et dynamique des nombres, p.1-13, (1998).
[16] L'hypothèse de Riemann et la conjecture de Jansen-Back-Bohr sur les applications du cercle, p.1-4, (1998).

2. Manuscrits en préparation.

[17] Métrologie des oscillateurs et dynamique algébrique.
[18] Arithmetic of amplitude-frequency relationships in 1/f frequency noise, (avec M. Planat, J.M. Friedt et S. Perrine).

III. Formes prénormales et 16$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert.

1. Articles acceptés.

[19] Formes normales et problème du centre symétrique, C. R. Acad. Sci. Paris, I. 327, Série I, p. 473-478, (1998).

2. Article non soumis ou à remanier avant soumission.

[20] Formes normales et problème du centre, (avec B. Schuman), prépublication 98/37 de l'équipe de Math. de Besançon, p.1-27, (1998).
[21] Formes prénormales, langage des moules et champs de vecteurs polynomiaux, p.1-10, (1999).

SYSTÈMES DYNAMIQUES, GÉOMÉTRIE ET THÉORIE DES NOMBRES

par Jacky CRESSON

Table des matières

Introduction

Le présent mémoire regroupe les idées qui sont issues de mon travail de thèse sur la dynamique dans le complémentaire des tores de KAM en dynamique hamiltonienne et celles, plus récentes, issues d'une collaboration avec Michel Planat du L.P.M.O (Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs) à Besançon.

La première partie du mémoire expose une voie d'attaque de la conjecture formulée par V. Arnold [Ar] en 1964 sur l'instabilité toplogique générique des systèmes hamiltoniens presque intégrables, ceci avec une notion de généricité convenable et dans un cadre analytique. On aborde aussi des problèmes beaucoup plus appliqués, en rapport notamment avec les idées de Chirikov sur l'optimalité des exposants obtenus par P. Lochak [Lo2] pour le théorème de Nekhoroschev. Notre approche de chacun de ces problèmes est géométrique, même si, comme nous le verrons une utilisation des méthodes variationnelles comme celles développées par J. Mather [M] peut permettre de simplifier certains passages de notre démonstration. Dans le même ordre d'idées, nous exposons un programme d'étude des systèmes hamiltoniens à plusieurs facteurs d'échelles, initialisé par G. Gallavotti [Ga] dont les propriétés sont encore peu étudiées. L'intérêt d'une telle étude vient de la physique, où ces systèmes interviennent de manière naturelle, notamment en mécanique céleste.

La seconde partie du mémoire fait l'objet d'un travail en cours sur les problèmes de synchronisation des oscillateurs. Michel Planat [Pl] a mis en évidence la nature arithmétique de certains phénomènes, notamment une structure encore incomprise du bruit. Les résultats expérimentaux conduisent à certaines relations faisant intervenir les espaces de Teichmuller, les espaces de modules et ainsi le groupe de Teichmuller modulaire. Ce premier pas est de nature descriptive. Dans ce cadre, nous souhaitons développer une théorie des bifurcations des espaces de modules. Il va sans dire que même la mise au point formelle d'une telle théorie est loin d'être claire. Ce premier pas est suivi d'un pas de nature explicative. J'entends par là qu'il faut expliquer ce qui provoque ces bifurcations d'espace des modules. C'est ici que le lien avec la dynamique du système va avoir lieu. Ce passage peut s'effectuer de plusieurs manières, et nous en proposerons quelques une qui associent une certaine surface de Riemann à une fonction complexe bien choisie et par ce biais l'espace des modules correspondant. Ce programme de recherches va bien plus loin que la réponse aux problèmes de synchronisation, car une telle théorie pourrait avoir des conséquences en physique quantique, où des problèmes analogues se posent.

I. Instabilité en dynamique Hamiltonienne

A. La conjecture d'Arnold

1. On fera de nombreuses références à la thèse [Cr] de l'auteur, ainsi qu'aux différents chapitres. Le but de ce programme est d'étudier les propriétés d'instabilité des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables de la forme

$$\mathcal{H}_\epsilon(y,x) = H_0(y) + \epsilon H_1(y,x)$$

où $y \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{T}^n$ sont les variables action-angle et $\epsilon > 0$ est un petit paramètre.
Lorsque $\epsilon = 0$ l'espace des phases est feuilleté en tores lagrangiens invariants et les variables d'action sur une solution du système sont constantes. Lorsque $\epsilon \neq 0$, le théorème KAM assure, sous une hypothèse de non dégénescence de H_0, la persistence de beaucoup de ces tores invariants. Ces tores, appelé tores de KAM, sont de petites déformations des tores initiaux. Les variables d'action d'une solution sur un de ces tores varient très peu au cours du temps.
Lorsque $n = 2$, les solutions du système sont emprisonnées entre deux tores de KAM et de ce fait, leurs variables d'action varient encore très peu. Lorsque $n \geq 3$, le complémentaire des tores de KAM est connexe et les variables d'action ne sont plus contraintes par la présence des tores de dimension maximale. On a alors la conjecture d'Arnold (1964) [Ar2]:

Conjecture d'Arnold: *Soit $h \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{H} = H_\epsilon^{-1}(h)$ un niveau d'énergie régulier, on note $\mathcal{I}_h = p(\mathcal{H})$ la projection dans l'espace des action de $\mathcal{H}$. Soient O et O' deux ouverts dans une composante connexe de $\mathcal{I}_h$, alors pour H_1 générique, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$ il existe une solution γ du système défini par H_ϵ telle que $p(\gamma(0)) \in O$ et $p(\gamma(T)) \in O'$.*

Cette conjecture fait suite à un exemple donné par Arnold [Ar] où une dérive dans les variables d'action d'ordre 1 se produit. La construction qu'il propose repose sur la mise en évidence d'une chaîne de tores partiellement hyperboliques le long des surfaces résonnantes de multiplicité 1.
1.1. L'existence de ces tores est dûe à D. Treschev [Tr] qui les obtient comme bifurcation des tores résonant d'ordre 1 (sa démonstration étant valable quel que soit la multiplicité de la résonance). Ces tores sont effectivement des tores de transition, c'est à dire qu'ils vérifient la propriété d'obstruction (voir ([Cr], chap.1 et [Ma]).
1.2. La preuve de l'existence des chaînes est quand à elle beaucoup plus délicate. En effet, elle nécessite, dans la forme suggérée par Arnold, la mise en évidence de connexion hétéroclines entre les tores de Treschev précédents. Etant donné un tore hyperbolique, on peut montrer l'existence de connexion hétérocline seulement sur un voisinage de taille exponentiellement petite. Ceci est peut être dû à la méthode, qui consiste à calculer un splitting des variétés invariantes qui est en général exponentiellement petit (ceci est démontré dans un travail encore non publié [CLMS]). Or, l'espacement entre deux tores est au moins en $\sqrt{\epsilon}$, ce qui pose un sérieux problème.
1.3. Ce mécanisme semble donc inadapté pour aborder la conjecture. On consultera d'ailleurs l'article de revue de P. Lochak [Lo]pour discussion détaillée des différents problèmes liés à ce mécanisme.

Dans ma thèse, j'esquisse au chapitre 4, une nouvelle méthode de construction d'orbites d'instabilité le long de surfaces de résonance simple. Cette construction permet d'envisager une voie d'attaque de la conjecture d'Arnold. C'est précisément cette nouvelle construction et cette voie qui constituent notre programme de recherche.

2. On commence dans un premier temps par l'étude des systèmes hamiltoniens presques intégrables à 3 degrés de libertés.

2.1. Le point de départ de notre approche est l'intoduction d'un objet géométrique passé jusqu'ici inaperçu. Sa visualisation est plus simple sur un exemple de type Arnold, mais notre discussion est valable pour un hamiltonien presque intégrable quelconque au voisinage d'une résonance simple.

On considère le système hamiltonien de la forme:

$$H(I, \phi, p, q) = \frac{1}{2}I^2 + \frac{1}{2}p^2 + \epsilon(\cos(q) - 1) + \mu H_1(I, \phi, p, q)$$

où $(I,\phi) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{T}^2$, $(p,q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{T}$ et ϵ et μ sont des petits paramètres.

2.1.1. On note que pour $\mu = 0$, il existe, dans une surface d'énergie donnée, une famille à 1 paramètre F de tores hyperboliques. Les tores sont partiellement hyperboliques (selon la terminologie employée dans [Cr]), alors que la famille est hyperbolique.
Ce point est important car, autant la persistence des tores est sujette à des conditions de nature arithmétique, autant celle de cet ensemble est assurée par les théorèmes classiques de persistence des ensembles invariants hyperboliques.

2.1.2. Il est facile d'obtenir une description de la dynamique sur F. On effectue une section globale (par exemple en $\phi_1 = 0$) et l'application de premier retour associée n'est autre qu'une distorsion monotone de l'anneau $f(I,\theta) = (I, \theta + \omega(I))$ avec $\omega'(I) \neq 0$.

2.1.3. Lorsque $\mu \neq 0$, l'ensemble F se perturbe en F_μ et l'application de section est conjuguée à une perturbation de f. Le théorème KAM assure la persistence de beaucoup de courbes invariantes. Les théorèmes KAM hyperboliques (Graff, Treschev) donnent aussi l'existence des variétés stable et instable associées à ces tores.

2.2. Un premier pas vers la conjecture d'Arnold serait de montrer l'existence d'orbites reliant deux tores partiellement hyperboliques consécutifs (le mot consécutif étant relatif à la succession des courbes invariantes dans l'anneau). C'est le problème dit des *connecteurs*.

Le mécanisme proposé par Arnold donne une condition suffisante d'existence; il suffit qu'il existe une intersection hétérocline transverse entre les variétés stable et instable de deux tores consécutifs. Dans ce cas, l'orbite de connexion n'est autre que l'orbite hétérocline aux tores.
Cette condition est, nous l'avons déja dit, difficile (voir impossible) à vérifier dans un cadre générique. Le splitting homocline des variétés invariantes est en général exponentiellement petit en ϵ si $\mu = \epsilon^m$ où $m \in \mathbf{N}$, ce qui permet de démontrer l'existence d'orbites hétérocline dans un voisinage de même taille d'un tore donné. Or, deux tores sont au moins distant d'une quantité de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$.

3. Le point de vue géométrique que nous avons introduit, nous permet de lever cette difficultée. La résolution du problème des connecteurs revient à trouver une orbite reliant deux voisinages arbitrairement petits de deux courbes invariantes (homologue à 0) consécutives C^+ et C^- de l' anneau.
La région délimitée par ces deux courbes est appelée *région annulaire d'instabilité* depuis G.D. Birkhoff. Les travaux de J. Mather [Mat] d'un point de vue variationnel, et ceux de P. Le Calvez plus topologiques, ont montré l'existence d'orbites reliant les deux voisinages précédents. Nous appellerons *orbites de Birkhoff* ces orbites de connexion.
Le point important est qu'il est possible de choisir arbitrairement les deux voisinages de connexion (dû à une propriété de dynamique minimale).
On notera au passage que les résultats utilisés dans cette partie ne sont pas perturbative.

3.1. Les orbites de Birkhoff sont situées sur l'ensemble invariant hyperbolique F_μ. Un des points délicat sera de montrer que l'existence de ces orbites entraine dans un voisinage (petit) de F_μ l'existence d'orbites de connexion. Ici, une approche variationnelle est peut-être plus envisageable qu'une approche (perturbative) directe.

4. Nous voila maintenant au second pas de notre méthode. Elle consiste à recoller les orbites de Birkhoff, et plus généralement les orbites de connexion.

4.1. Ce problème de recollement peut s'aborder de la manière suivante. La transversalité générique des variétés stable et instable des tores hyperboliques implique, outre l'existence d'orbites homoclines au tore, l'existence d'orbites dites *sauteuses*. Etant donné un voisinage V d'une courbe γ du difféomorphisme de l'anneau précédent, on note V^+ et V^- les deux composantes de V délimitées par γ. Les orbites sauteuses vont connecter une partie de V^+ à V^-.

4.2. On peut supposer que même la condition de transversalité est trop forte, et que seule une transversalité dans la direction neutre (celle de dérive ou de "diffusion") est nécessaire.
Le point important par rapport au mécanisme d'Arnold est que nous n'avons pas besoin de l'existence d'un tore hyperbolique à proximité.

5. Les orbites sauteuses et les orbites de connexion fournissent le squelette de construction des orbites d'instabilité le long de la surface de résonance simple. Il faut maintenant, à l'aide de ce squelette, démontrer l'existence de ces orbites.

5.1. L'outil que nous allons utiliser est la *méthode des fenêtres* développée par R. Easton [Ea] et qui suit les premières idées de V. Alekseev [Al]. Cette méthode consiste à démontrer un lemme de l'ombre (ou lemme de poursuite) dans un cadre non hyperbolique.
Les fenêtres ont notamment été utilisées par J.P. Marco [Ma] pour démontrer dans un système hamiltonien initialement hyperbolique modèle l'existence d'orbites d'instabilité le long d'une chaîne de tores partiellement hyperboliques, ainsi qu'une estimation du temps de transition. J'ai obtenu au (§.6, chap.2 de ma thèse) un résultat analogue dans les systèmes hamiltoniens de type Arnold.

5.1.1. La méthode des fenêtres consiste à placer le long du squelette précédent une suite de boites, définies par des applications bien choisies qui seront justement ce que l'on appelle des fenêtres.
Ces fenêtres sont reliées entre elles par des applications. L'existence d'une orbite passant par l'ensemble des fenêtres est assurée par la vérification d'un critère dit d'*alignement*. En gros, si les fenêtres sont bien alignées alors on peut voir à travers. Dans ce cas, on peut montrer un analogue (en fait une version un peu plus faible) du lemme de l'ombre.

5.1.2. Toute la difficultée est de bien placer et de bien choisir la définition de nos fenêtres. On peut s'aider du travail déja effectué dans [Ma] et ma thèse. L'idée est de placer les fenêtres dans la direction des variables neutres, avant et après le tore hyperbolique. Notons F^+ et F^- ces fenêtres. Il existe alors entre deux tores hyperboliques consécutifs une application f_c qui va de F_1^- dans F_2^+, donnée par l'orbite de connexion. On a aussi une application f_s qui va de F_2^+ dans F_2^-, donnée par l'orbite sauteuse.

5.1.3. Notre analyse va donc se centrer sur la vérification du critère d'alignement lorsque les applications entre les fenêtres sont f_c et f_s.

5.2. Un premier pas est de donner une forme explicite de ces applications. Ceci est en partie réalisé dans ma thèse pour f_s, qui suit une trajectoire homocline au tore. La détermination de f_c me semble plus problématique. On peut sans doute dans un premier temps supposer une forme générique de cette application, par exemple en imposant une certaine forme de sa partie linéaire. Un travail consisterait alors à voir si ces conditions sont génériques.
Notons que cette approche devient vite abstraite. C'est la donnée des fenêtres et de la forme des applications qui nous interesse. En ce sens, un premier exemple pour f_c se trouve dans ma thèse (§.6, chap.2).

5.2.1. On remarque aussi que la méthode des fenêtres est très proche des méthodes variationnelles. On obtient d'ailleurs des résultats analogues à ceux obtenus par P. Bernard [Be] en utilisant la méthode variationnelle développée par U. Bessi [B] pour le calcul des temps de transition (voir chap.2 de [Cr]).

5.2.2. La vérification du critère d'alignement s'effectue en deux étapes. La première consiste à démontrer ce critère au niveau affine. C'est en ce sens que le choix de la forme linéaire de f_c est important. La seconde étape utilise un théorème de conservation de l'alignement des fenêtres sous faible perturbation.
Tout cela revient à contrôler de facon précise le comportement des restes des applications f_c et f_s. Ce type de contôle n'est possible que si l'on possède une bonne forme normale le long de la famille de tores. Dans ma thèse, j'utilise la forme normale obtenue par L. Niederman [Ni] au voisinage d'un tore de Treschev pour contrôler ces restes. On peut bien entendu utiliser de nouveau ce résultat, mais il en faut un, plus global, pour contrôler la dynamique au voisinage des tores liouviliens par exemple. On peut sans doute utiliser les travaux de M. Rudnev et S. Wiggins [RW] pour cela.

5.2.3. Evidemment, le choix de la taille des fenêtres va influencer le type de contrôle à effectuer. Les fenêtres seront très proches de l'ensemble invariant hyperbolique F_μ. Pour assurer le recollement avec les orbites sauteuses, il faudra se placer très près du tore. Le temps nécessaire à l'orbite sauteuse pour joindre les deux fenêtres F^- et F^+ va tendre vers l'infini avec la taille de la fenêtre. Le choix des différents paramètres de contrôle des fenêtres (taille, proximité à l'ensemble hyperbolique, proximité au tore) sera donc difficile, mais pas inabordable.

6. Les points précédents permettent de montrer l'existence d'orbites d'instabilité le long d'une surface de résonance simple. Bien entendu, cela ne suffit pas pour démontrer la conjecture d'Arnold. Un autre problème à résoudre est celui du passage d'une résonance simple à une autre. Là encore, l'approche géométrique permet de mieux visualiser le problème. Essentiellement, la résonance double correspond au centre de l'anneau dans lequel nous avons travaillé. Or, les orbites de Birkhoff existent aussi dans ce cas (voir P. Le Calvez [LC]). Tout le problème consiste alors à trouver la bonne orbite sauteuse pour recoller à une fenêtre le long d'une seconde résonance simple. Ce dernier point est à rapprocher des idées de V. Arnold [Ar2] sur le sujet. On pense notamment au travail de S. Bolotin [Bo] ainsi qu'à celui de H. Eliasson [El] sur le sujet. L'utilisation de ces résultats est donc à regarder en détail.

7. Tout cela nous permet d'envisager une démonstration de la conjecture d'Arnold pour les systèmes hamiltoniens à 3 degrés de liberté. Mais qu'en est-il des systèmes hamiltoniens à n degrés de liberté ? Un des points importants de notre méthode est l'utilisation des orbites de Birkhoff qui ne possèdent pas d'analogue en dimension supérieure. La démarche ne semble donc pas se généraliser.

7.1. Néanmoins, nous allons établir une construction “par récurrence” de ces orbites d'instabilité, la récurrence ayant lieu sur n.

On note tout d'abord que dans le cas à n degrés de liberté, il existe encore un ensemble normalement hyperbolique F_μ. La dynamique sur cet ensemble peut encore s'analyser au moyen d'une surface de section. On obtient comme application de premier retour une perturbation d'un difféomorphisme symplectique complètement intégrable.

7.2. L'idée est de relever ce difféomorphisme en un hamiltonien presque intégrable à $n-1$ degrés de liberté, ce qui est toujours possible, même en analytique (voir les travaux de R. Douady [Do] et plus recemment, ceux de S. Kuksin et J. Poschel [KP]). En supposant la conjecture d'Arnold démontrée au rang $n-1$, on peut montrer l'existence d'orbites reliant deux tores distincts quelconques. Ces orbites sont l'équivalent des orbites de Birkhoff dans le cas $n=3$. L'existence des orbites de connexion s'en déduit de manière analogue à $n=3$.

7.3. L'existence des orbites sauteuses est indépendante de la dimension.

7.4. Les points précédents permettent donc d'envisager la conjecture d'Arnold en dimension supérieure. Evidemment, la formalisation de ces idées et le travail technique nécessaire pour démontrer chacun des points est importants. Néanmoins, contrairement aux approches actuelles, qui consistent à chercher des endroits de l'espace des phases où le mécanisme d'Arnold a des chances de s'appliquer, nous proposons une approche unifiée et détaillée de la conjecture d'Arnold. Le seul programme existant de ce type est celui de J. Mather [Mat] utilisant des méthodes variationnelles.

8. On peut consulter le chapitre 4 de ma thèse [Cr] pour plus de détails sur les idées exposées ci-dessus.

9. Les méthodes géométriques (lemme de transfert, propriété de transfert) développées au chapitre 2 de ma thèse, permettent de calculer les temps de dérive le long d'une chaîne de transition. L'extension de cette méthode au cas presque intégrable donne un moyen de démontrer l'optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroschev, comme conjecturé par P. Lochak [Lo2]. On peut consulter le §.7 du chapitre 2, ainsi que la remarque p.69 du chapitre 1 pour plus de détails.

B. Instabilité dans les systèmes hamiltoniens à plusieurs facteurs d'échelle

1. Cette partie de notre programme se veut beaucoup plus appliquée. Elle donne aussi une grande importance aux diverses techniques numériques d'étude des systèmes dynamiques, notamment l'analyse en fréquence développée par J. Laskar au Bureau des Longitudes.
Notre but est de donner une description aussi précise que possible des spécificités des systèmes hamiltoniens à plusieurs facteurs d'échelles. On entend par là des systèmes hamiltoniens de la forme

$$H_{\alpha,\omega}(J,I,\phi,\theta)=\omega J+\alpha I^2+\epsilon h_1(J,I,\phi,\theta)$$

où $(J,I,\phi,\theta)\in \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{T}^n\times\mathbf{T}^m$ avec une dépendance de α et ω en ϵ. Par exemple, $\alpha=\sqrt{\epsilon}$ et $\omega=1$, ou toute autre combinaison.

2. Ce type de système intervient naturellement en physique, et plus spécialement en mécanique céleste. Un cas particulier interessant des systèmes précédent est celui des systèmes hamiltoniens dégénérés de la forme

$$H_\epsilon(J,I,\phi,\theta)=h_0(J)+\epsilon h_1(J,I,\phi,\theta)$$

où $(J,I,\phi,\theta)\in \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{T}^n\times\mathbf{T}^m$. Le problème des N-corps en est un exemple.
On a bien sûr quelques résultats dans des cas particuliers, notamment lorsque $\alpha=0$ ou $\omega=0$, correspondant au cas isochrone et au cas avec torsion. Une étude de ces systèmes au voisinage d'une résonance simple a recemment été entreprise par l'auteur, P.Lochak, J.P. Marco et D. Sauzin [CLMS]. Plus précisément, nous discutons en détail l'évaluation de la taille du splitting des variétés des tores

hyperboliques dans ces systèmes. Cette étude, en cours, fait apparaitre des différences significatives entre le cas isochrone, avec torsion ou mixte (des termes de torsion et des termes linéaires). Le cas mixte est d'une grande complexité et réserve sans doute beaucoup de surprises.

3. Je propose, outre une étude analytique en cours, une étude de ce type de systèmes par des outils numériques, notamment l'analyse en fréquence de J. Laskar [La]. L'idée serait de mettre en évidence, numériquement, toute une panoplie de phénomènes dynamiques, puis, d'essayer de les attraper par une étude mathématique.
J. Laskar avait déja dans son article de 1993 [La], décrit la "diffusion" dans les systèmes hamiltoniens. Cette étude avait notamment mis en évidence le rôle des résonances dites secondaires en physique, c'est à dire les résonances qui se créent après perturbation. Ce travail a donné lieu à une étude analytique de G. Haller [Ha], qui n'est pas achevée à ce jour.
Le but est bien entendu de se forger une intuition et le travail numérique nécessaire sera sans nul doute considérable.

3.1. L'autre ambition de ce travail et de fournir un certain nombre de mécanismes conduisant à des comportements dynamiques bien spécifiques. Nous pouvons alors essayer d'expliquer des phénomènes complexes, comme la possibilité que la planète Mercure s'échappe du système solaire à l'aide de ces mécanismes, et proposer un modèle mathématique simple rendant compte de celui ci. Nous avions d'ailleurs, avec J. Laskar, réfléchi à ce problème, et c'est seulement par manque de temps que ce projet n'a pas encore pris forme.

3.2. Je signale que l'étude de l'instabilité de ces systèmes est loin d'être comprise. L'existence de plusieurs échelles de temps (variable d'angle à fréquence rapide ou lente) semble faciliter la construction des chaînes de tores hyperboliques au sens d'Arnold (voir [GGM]).
Notamment, il convient d'éclaircir ce que l'on entend par instabilité topologique qui est un phénomène asymptotique, et n'a de sens que si la surface d'énergie considéré lorsque $\epsilon = 0$ et $\epsilon \neq 0$ sont proches, autrement dit, si il n'y a pas une modification trop importante de la topologie de la surface d'énergie considérée avec ϵ. Ceci n'est pas vrai, en général, pour les systèmes hamiltoniens dégénérés[2]. Dans ce cas, il est nécessaire d'introduire une autre notion d'instabilité, que j'ai appelé instabilité dégénerescente.
Notre étude aurait pour but de clarifier ces problèmes.

II. Bifurcation des espaces de modules

Le programme de recherche qui suit essaie d'expliquer certains comportement du rapport des fréquences dans des oscillateurs couplés. Toute notre discussion est centrée sur le problème de synchronisation, qui est à la base des télécommunications.
Les idées qui suivent proviennent d'un début de collaboration entre l'équipe de Mathématiques de Besancçn (notamment sa composante théorie des nombres) et le L.P.M.O. (Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs). Plus précisément, les questions que nous allons aborder font suite aux expériences de M. Planat (L.P.M.O) sur les oscillateurs.

[2]On peut par exemple, considérer le système défini par $H_\epsilon(I,\theta) = \epsilon I_1^2 + (I_2^2 + I_3^2)$. Pour une énergie fixée $h > 0$, on a dans un premier temps un cylindre, puis un ellipsoïde.

M. Planat a découvert la nature arithmétique du phénomène de synchronisation. Notamment, il semble que l'approximation diophantienne y joue un rôle fondamental. On peut aussi deviner une stucture riche liée aux espaces de modules de courbes. Le lien aux systèmes dynamiques permet d'envisager une formalisation de ces résultats. C'est précisément cela que propose notre programme de recherche. Après avoir mis en forme les problèmes electroniques que nous allons étudier, on montre comment la dynamique, la géométrie et la théorie des nombres, permettent d'expliquer la structure du bruit.

A. Le problème de la synchronisation

Le problème fondamental des télécommunications est de transmettre une information d'un endroit à un autre. Ce transport s'effectue par le biais de signaux, c'est à dire d'ondes électromagnétiques. Certains signaux sont naturellement en basse fréquence, c'est à dire que la longeur d'onde associée est grande. Un des problèmes est que ces ondes se propagent difficilement à de grande distance: il y a un phénomène d'atténuation (la fréquence décroit) et l'antenne nécessaire à la reception doit alors prendre une taille démesurée (plusieurs kilométres). Ces problèmes n'existent pas pour les signaux haute fréquence.
L'idée est alors d'effectuer une *modulation* de fréquence. On va créer un signal haute fréquence dont l'enveloppe représente le signal basse fréquence. C'est le principe de l'*onde porteuse-enveloppe*.
On se heurte maintenant, en pratique, à un problème important: celui d'extraire du signal haute fréquence que l'on recoit le signal basse fréquence qu'il porte. C'est la *démodulation*. Bien entendu, il existe des appareils qui effectuent ce travail, mais avec plus ou moins de précision. Or, l'évolution actuelle des technologies nécessite (par exemple pour le transfert d'information dans des cables ou autre) une précision de plus en plus accrue. L'étude des problèmes de modulation-démodulation n'en a que plus d'intérêt, de même que celui du bruit de fréquence. Cette étude s'effectue au moyen de montages electroniques et conduit au problème de synchronisation.

B. Système modèle: la boucle de phase

1. Le principe de la boucle de phase est un montage électronique classique. Néanmoins, son étude théorique et expérimentale réserve encore quelques surprises. Ce montage a en entrée un signal de référence de fréquence ω_0 et de phase $\theta(t)$ (représentant l'onde porteuse enveloppe). On a aussi un oscillateur contrôlé en fréquence (VCO) dont la fréquence de sortie est ω et de phase instantanée $\psi(t)$. On commence par extraire le signal basse fréquence de l'onde porteuse-enveloppe à l'aide d'un filtre. Une fois ce travail effectué, on doit s'assurer que notre signal filtré représente bien le signal d'entrée porté, notamment que les deux signaux sont en phase: c'est le problème de synchronisation.

1.1. L'équation différentielle régissant l'évolution de ce système est de la forme:

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - \Psi(\phi)$$

où $\phi = \theta - \psi$ est le déphasage entre les deux signaux.

L'obtention de cette équation suppose certaines hypothèses sur le comportement du mélangeur, ainsi que celui du filtre basse-fréquence. Il faudra donc faire attention à cette lacune dans notre approche pour interpreter correctement les résultats. Notamment, la sortie du (VCO) est souvent une fonction de t (on module la sortie), et l'équation, un peu plus générale que nous allons étudier est

$$\dot{\phi} = \gamma \cos(\tilde{\omega}t + \alpha) - K\hat{\Psi}(\phi, \omega_0 t)$$

où γ est l'amplitude de modulation, $\tilde{\omega}$ sa fréquence et α sa phase initiale.

1.2. On peut ramener l'étude de cette équation à celle d'une famille à 1 paramètre d'application du cercle. Dans un cas simple, on obtient une application de type Arnold (voir [Pl]).

2. La dynamique de ces homeomorphismes est loin d'être parfaitement comprise. Nous renvoyons notamment à l'article de revue de P. Cvitanovic [C] pour un exposé de l'état de l'art.

2.1. Les propriétés universelles s'obtiennent au moyen d'outils comme les *groupes de renormalisation.* En général, ces propriétés sont des points fixes du groupe de renormalisation utilisé. On peut imaginer (ceci a même était conjecturé) que le groupe de renormalisation étudié converge vers un *invariant* de plus grande dimension, notamment des *attracteurs étranges*. La *dimension fractale* de cet ensemble serait alors un invariant universel.

On peut donc engager l'étude des groupe de renormalisation dans le cas des applications du cercle dans le but de démontrer la convergence de ces méthodes vers des attracteurs étranges.

2.2. Dans le même ordre d'idées, nous pouvons aborder la conjecture de Jansen-Back-Bohr sur l'universalité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble des valeurs du paramètre pour lesquelles le nombre de rotation est irrationel. Ici, il convient de s'inspirer des travaux de G. Swiatek [Sw] sur la dimension de Lebesgue de l'ensemble des valeurs du paramètre pour lesquelles le nombre de rotation est irrationel. Il utilise fortement les propriétés des séries de Farey, ainsi que des estimations fines du *produits croisés* de 4 réels et de sa *distorsion* par une fonction. Ces outils avaient été utilisés par J.C. Yoccoz [Y] dans ses travaux sur la non-existence de contre-exemple de Denjoy en analytique pour les difféomorphismes du cercle. Or, les séries de Farey sont reliées de manière très simple à l'*hypothèse de Riemann*. On obtient notamment des estimations très fines sur l'écart entre la distribution des rationnels de Farey et une distribution uniforme à un ordre donné. L'utilisation de ces estimations, couplée aux travaux de Swiatek doit permettre de faire un pas vers la démonstration de la conjecture de Jansen-Back-Bohr, ou, tout au moins, de la situer par rapport à l'hypothèse de Riemann.

3. Les récents résultats expérimentaux de M. Planat et S. Dos Santos [PS] mettent en évidence de manière frappante le caractère purement arithmétique des phénomènes de blocage en fréquence. Nous en sommes pour le moment à un niveau descriptif. On peut rendre compte du spectre du rapport des fréquence par une propriété d'approximation des rationnels. Précisèment, le système dynamique étudié cherche à réaliser les meilleurs approximations des nombres rationnels. Par le biais des fractions continues, tronquées à un ordre fini (dépendant de la résolution du système) on obtient une très bonne correspondance entre l'approche purement arithmétique et les résultats expérimentaux.
L'approche dynamique suggérée aux paragraphes précédents permet de faire le lien.

3.1. On en vient naturellement aux propriétés d'approximations diophantiennes des nombres réels. La théorie de Markoff donnant une description du spectre de

$$\nu(x) = \{k \in \mathbf{R} \mid \mid x - p/q \mid < k/q^2 \text{ pour une infinité d'entiers } p \text{ et } q\}$$

lorsque $\nu(x) > 1/3$ peut s'interpréter, suivant les idées de H. Cohn et A. Schmidt comme certaines structures géométriques sur des surfaces de Riemann hyperboliques. On consultera notamment le travail de A. Haas [Ha] et de C. Series [Se] qui donnent une interpretation du spectre de Markoff comme des géodésiques simples sur un tore percé. On trouvera un panorama complet sur ce sujet dans l'article de S. Perrine [Pe], qui suggère déja l'utilisation des résultats expérimentaux de M. Planat pour obtenir des informations sur l'approximation diophantienne.

3.2. Evidemment l'étude d'un tel lien est aussi liée à la théorie de A. Connes sur les C^* algèbres ([Co], p.39-49). Cette relation semble avoir été peu explorée et peut fournir un point de départ pour un programme de recherches.

3.3. La relation entre chacune de ces théories et les systèmes dynamiques est encore peu (pour ne pas dire pas) comprise. Un de nos buts serait d'expliciter clairement le rôle de ces divers éléments: dynamique, géométrie et arithmétique.

C. Dynamique, géométrie et théorie des nombres

1. Notre volonté de développer une théorie reliant formellement la dynamique, l'arithmétique et des éléments de géométrie provient pour le moment de la seule boucle de phase, qui est le système electronique le plus simple dans lequel ce type de relation est suggérée. Michel Planat et ses collaborateurs ([PDL1],[PDL2]) ont étudié un système plus complexe permettant d'étudier de manière fine le bruit. Le dispositif expérimental fait intervenir un signal de référence de fréquence ω_0 d'amplitude u et un signal filtré (basse fréquence) et amplifié de fréquence ω_1. Le rapport des fréquences $\Omega = \omega_0/\omega_1$ est une fonction de u. Comme précédemment, on va tenter de déterminer le spectre de Ω. On constate que ce spectre possède une structure, qui varie avec le paramètre u.

2. On peut distinguer grossièrement trois zones (voir [PDL1]): La zone de Farey correspondant à une distribution du spectre suivant la construction des séries de Farey, que nous avons déja évoquée, la zone de Markoff ou certaines instabilitées sont localisées sur les irrationnels de Markoff et enfin la zone cartographique ou de Jain dans laquelle le spectre prend uniquement des valeurs de rationnelles à dénominateur impair.

3. Il est bien difficile dans un premier temps, et sans intuition, de comprendre ces changements de structure dans le spectre de Ω. Nous proposons de développer une théorie permettant d'expliquer ces spectres, ainsi que les raisons de ces changements de structure. Cette théorie passe par l'introduction d'objets géométriques appelés espaces de modules et par la mise en place d'une théorie de bifurcations de ces objets. La première formalisation est de nature descriptive, la seconde, faisant le lien avec la dynamique du système est de nature explicative. C'est l'esquisse de cette théorie que nous voulons maintenant détaillée.

3.1. On commence par regarder le cas simple où le groupe modulaire est $PSL(2,\mathbf{Z})$. Une région fondamentale de $PSL(2,\mathbf{Z})$ est définie par l'ensemble des points $z \in \mathbf{H}$ tels que $\mid z \mid > 1$ et $\mid z + \bar{z} \mid < 1$.

3.1.1. Le bord de cette région est constitué de géodésiques (pour la métrique de Poincaré) de $\mathbf{H}^3$. En regardant l'action de $PSL(2,\mathbf{Z})$ sur la région fondamentale, on recouvre $\mathbf{H}$. On obtient ainsi une triangulation de $\mathbf{H}$, invariante par $PSL(2,\mathbf{Z})$.

3.1.2. Les triangles hyperboliques ainsi mis en évidence ont leurs sommets en des rationnels dans $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ (avec la convention que l'action de $PSL(2,\mathbf{Z})$ envoie ∞ en a/c avec $a/c = \infty$ si $c = 0$). Soient r/s et $x/y \in \hat{\mathbf{Q}}$ les sommets d'un triangle, alors on a $ry - sx = \pm 1$ et le prochain sommet sera en $r + x/s + y$, correspondant à la série de Farey après une itération. Dans la terminologie de [JSW], nous avons un graphe de Farey (voir [JS], p. 119 pour une représentation).

3.1.3. Les zones de synchronisation sont ordonnées dans la zone de Farey par les séries de même nom.

[3] La droite reliant un point rationel à l'infini ∞ étant considéré comme un cas limite du cercle.

On peut rendre compte de cette hiérarchie des plages de synchronisation par l'espace des modules $bfH/PSL(2,\mathbf{Z})$.

3.2. On peut aussi associer un espace des modules particulier à la zone cartographique. A. Grothendieck [G] a introduit dans son *esquisse d'un programme* un sous-groupe de $PSL(2,\mathbf{Z})$ appelé groupe cartographique et noté C_2^+. Il admet une représentation (analogue à celle du groupe modulaire) par les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad-bc=1$ et c pair. Il est engendré par U_0, U_1, U_2 avec $U_1^2 = U_0U_1U_2 = 1$ et

$$U_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La triangulation de $\mathbf{H}$ obtenue en faisant agir C_2^+ sur la région fondamentale donne des triangles hyperboliques dont les sommets sont les rationnels à dénominateurs impair (voir [JS], p.120). L'espace des modules correspondant est donné par $\mathbf{H}/C_2^+$ et est un pantalon.

3.3. Il nous reste à associer un espace de modules à la zone de Markoff. C'est en fait de ce point que le lien entre arithmétique et surface de Riemann, et notamment géodésiques est initialement venu. On pourra consulter l'article de S. Perrine [Pe] pour un panorama sur le sujet. On peut montrer que la théorie de Markoff s'interprète sur le tore percé $T^* = \mathbf{H}/[SL(2,\mathbf{Z}), SL(2,\mathbf{Z})]$, ou $[SL(2,\mathbf{Z}), SL(2,\mathbf{Z})]$ est le sous groupe normal des commutateurs de $SL(2,\mathbf{Z})$, comme les géodésiques fermées et simples. Nous renvoyons encore une fois à [Pe] pour plus de détails, notamment une mise en perspective de ces résultats avec les travaux de J.P. Serre [Se].

4. Les points précédents suggèrent l'utilisation de ces objets universels comme moyen de caractériser le spectre des valeurs du rapport des fréquences suivant un paramètre. On peut notamment traduire les trois zones précédentes comme un espace de module particulier, à savoir, un tore, puis un tore percé et enfin un pantalon.

4.1. La notion qui vient alors à l'esprit est celle de *bifurcation*. Ce que l'on vient de mettre en évidence est une *bifurcation d'espace de module*. Bien que le cadre formel ne soit pas encore bien définie, c'est bien vers une telle théorie que nous emmènent les problèmes de synchronisation. Cette théorie n'a jamais était abordée, ni même évoquée à ma connaissance. Les études se sont surtout portées sur la description de l'espace des modules en général. On peut d'ailleurs remarquer que le groupe cartographique C_2^+ s'obtient comme un sous-groupe de $PSL(2,\mathbf{Z})$. On peut par exemple se demander comment une telle particularisation peut s'effectuer. Le transport des théories de bifurcation existantes dans les systèmes dynamiques, dans ce cadre doit permettre de jeter assez facilement les bases d'une telle théorie.

4.2. Bien entendu, il faudra particulariser certaines questions pour mieux coller à la réalité physique. Un des problèmes sous-jacent est celui de la relation avec la dynamique du système. Dans ce cadre, il faudra notamment correctement relier l'espace des modules considéré à certaines propriétés dynamiques du système. La fonction d'onde semble un candidat possible. Une autre idée serait de caractériser des familles à 1 paramètre d'applications donnant lieu au spectre observé. Les applications devront sans doute être étendues au domaine complexe, où la relation aux surfaces de Riemann sera plus facile (on peut notamment s'inspirer des travaux de A. Douady et C.J. Earle [DE] sur les extensions conformes d'homeomorphismes du cercle).

4.3. La discussion précédente, ainsi que les idées de michel Planat, suggère que la théorie que nous souhaitons développer a un potentiel très vaste d'applications à la physique ([Ho], [Wi]).

Références du I

[Ar] V.I.Arnold, Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, Dokl. Akad. Nauk. USSR, **156**, (1964), p.9-11

[Ar2] V.I. Arnold, Mathematical problems in classical physics, in Trends and perspective in Applied Mathematics, Appl. Math. Sc. Series **100**, (1992), Springer Verlag

[Al] V.M. Alekseev, Quasirandom dynamical systems, Math. USSR. Sbornik. **5**, p.73-128, (1968)

[Bir] G.D. Birkhoff, *Collected Math. Papers of G.D. Birkhoff*, Vol. II, (1935)

[Ch] B.V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, Physics reports, **52**, 5, p.263-379, (1979), North-Holland Publ.

[Cr] J. Cresson, Instabilité dans les systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables, Thèse de l'Observatoire de Paris, (1997)

[CLMS] J. Cresson, P. Lochak, J.P. Marco, D. Sauzin, On the splitting of the invariant manifolds in multidimensional near-integrable Hamiltonian systems, en préparation, (1997)

[Do] R. Douady, Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques, Annales Scientifiques ENS **21** (1988), 1-46

[Ea] R.W. Easton, Homoclinic Phenomena in Hamiltonian Systems with Several Degrees of Freedom, Journ. Diff. Equ. **29**, 241-252, (1978)

[Ea2] R.W. Easton, Orbit structure near trajectories biasymptotic to invariant tori, in *Classical mechanics and dynamical systems*, R. Devaney, Z. Nitecki Ed. Marcel Dekher, (1981), p. 55-67

[Ea3] R.W. Easton, Isolating blocks and symbolic dynamics, Journal of Diff. Equ. **17**, 96-118, (1975)

[El]L.H. Eliasson, Biasymptotic solutions of perturbed integrable Hamiltonian systems, Bol. Soc. Bras. Math., Vol. 25, N.1, (1994)

[Ga2] G. Gallavotti, Hamilton-Jacobi's equation and Arnold's diffusion near invariant tori in a priori unstable isochronous systems, preprint, (1997)

[Ga3] G. Gallavotti, Twistless KAM tori, Communication in mathematical physics 164, 145-156, (1994)

[GGM] G. Gallavotti, G. Gentile, V. Mastropietro, Pendulum separatrix splitting, preprint, (1997)

[Ha] G. Haller, Diffusion at intersecting resonances in Hamiltonian systems, preprint, (1995)

[Ha2] G. Haller, Universal homoclinic bifurcations and chaos near double resonances, preprint, (1995)

[He] M. Herman, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, Astérisque, Soc. Math. France, vol. 103-104, (1983)

[He2] M. Herman, On the dynamics on Lagrangian tori invariant by symplectic diffeomorphisms, preprint, Ecole polytechnique, (1990)

[La] J. Laskar, Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion, Physica D **67**, 257-281, 1993

[LC1] P. Le Calvez, Propriétés dynamiques des régions d'instabilité, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., **20**, (1987), 443-464

[LC2] P. Le Calvez, Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore, Astérisque **204**, (1991)

[LC3] P. Le Calvez, Les ensembles d'Aubry-Mather d'un difféomorphisme conservatif de l'anneau déviant la verticale sont en général hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris. **306**, (1988), 51-54

[Lo] P. Lochak, Arnold diffusion; a compendium of remarks and questions, *Proceedings of the N.A.T.O.'s Advanced Study Institute, 3-D Hamiltonian Systems*, S'agaro, C. Simo (Ed.), (1996), Plenum Press

[Lo2] P. Lochak, Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, Russian Math. Survey **47**, (1992), 57-133

[Lo3] P. Lochak, Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency, Nonlinearity 6, (1993), 885-904

[Ma] J.P.Marco, transition le long des chaines de tores invariants pour les systèmes hamiltonien analytiques, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique, Vol. **64**, $n°2$, p. 205-252, (1996)

[Mat1] J. Mather, Minimal action measures for positive definite Lagrangian systems, Proc. IXth Int. Cong. Math. Phys.

[Mat2] J. Mather, Variational construction of connecting orbits, Journal AMS **4** (1991), 207-263

[Ne] N.N. Nekhoroshev, An exponential estimate for the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, Russian Math. Surveys **32** (1977), 1-65

[Ni] L. Niederman, Dynamic around a chain of simple resonant tori in nearly integrable Hamiltonian systems, prépublication 97-19 de l'Université Paris-Sud, Mathématiques, Orsay, (1997)

[RW] M. Rudnev, S. Wiggins, KAM theory near multiplicity one resonant surfaces in perturbation of a-priori stable Hamiltonian systems, to appear in *Journal of Nonlinear Science.*

[RW2] M. Rudnev, S. Wiggins, Existence of exponentially small separatrix splittings and homoclinic connections between whiskered tori in weakly hyperbolic near-integrable hamiltonian systems, preprint

[Tr] D.V. Treshchev, The mechanism of destruction of resonance tori of hamiltonian systems, Math. USSR Sbornik, **68**, (1991), p. 181-203

Références du II

[Co] A. Connes, Géométrie non commutative, Inter éditions, (1990)

[Cv] P. Cvitanovic, Circle maps: irrationally windings, in *From numbers theory to physics*, (1995)

[DE] A. Douady, J. Earle, Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle, Acta. Math. 157, 23-48, (1986)

[G] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, non publié, (1984)

[Ha] A. Haas, Diophantine approximation on hyperbolic Riemann surfaces, Acta. Mathematica **156**, 33-82, (1986)

[Ho] D.R. Hofstadter, Energy levels and wave functions of Block electrons in rational and irrationel magnetic fields, Physical Review B, Vol. 14, no.6, 2239-2249, (1976)

[JS] G.A. Jones, D. Singerman, Maps, hypermaps and triangle groups, in [S], 115-145, (1994)

[JSW] G.A. Jones, D. Singerman, K. Wicks, The modular group and generalized Farey graphs, in *Groups*, St-Andrews, 1989, Lodon Math. Soc. Lectures notes **160**, 316-338, (1991)

[Lo] P. Lochak, The fundamental groups at infinity of the moduli spaces of curves, preprint, (1997)

[LS] P. Lochak, L. Schneps, *Geometric Galois Actions*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 242, Cambridge University Press, (1997)

[PDL1] M. Planat, S. Dos Santos, F. Lardet-Vieudrin, A Teichmüller approach of a pulse oscillator: fine structure of carrier-envelope interactions, in *Physical applications and mathematical aspects of geometry, groups and algebra*, World Scientif, 929, (1997)

[PDL2] M. Planat, S. Dos Santos, F. Lardet-Vieudrin, Blocage par injection de modes sous-harmoniques d'un oscillateur utilisant une ligne de retard à onde de surface, Ann. Telec. 51, 7-8, 330-335, (1996)

[Pe] S. Perrine, L'arithmétique sur une surface percée, Ann. Telec. 51, 7-8, (1996)

[Pl] M. Planat, Synchronisation, topology and oscillators, Ann. Telec. 51, 7-8, 391-407, (1996)

[PS] M. Planat, S. Dos Santos, Arithmetic of frequency mixing in an electronic loop, preprint, (1997)

[S1] L. Schneps, *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, London Math. Soc. Lectures notes series **200**, (1994)

[S2] L. Schneps, *Triangulations, Courbes algébriques et Théorie des champs*, à paraître dans *Panoramas et Synthèses*, (1998)

[S] J.P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2, Astérisque 46, SMF, (1983)

[Se] C. Series, The geometry of Markoff numbers, The Math. Intelligencer, Vol. 7, 3, (1985)

[Sw] G. Swiatek, Rational rotation numbers for maps of the circle, Comm. Math. Phys. 119, 109-128, (1988)

[Wi] M. Wilkinson, Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems, Proc. R. Soc. Lond. A. 391, 305-350, (1984)

[Y] J.C. Yoccoz, Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique, C.R.Acad. Sci. Paris, 298, Serie I, no.7, (1984)

Résumé analytique

J'ai classé les travaux que j'ai résumé sous les quatres rubriques suivantes :

1. Instabilité des systèmes hamiltoniens
2. Synchronisation des oscillateurs, géométrie et théorie des nombres
3. Singularités et intégrales premières
4. Enseignements, divers

Les chiffres entre parenthèses renvoient à la liste des publications ci-après.

1. Instabilité des systèmes Hamiltoniens ([6],[7],[8],[9],[10],[11],[12],[13],[14],[15])

Je renvoie dans un premier temps à ma thèse [12] où une introduction au sujet est donnée, ainsi qu'au résumé de celle-ci.

Mécanisme d'Arnold : Mon premier travail dans cette direction fût de décrire la dynamique au voisinage d'un tore de Treshchev. La principale difficultée étant que ces tores étaient partiellement hyperboliques. Dans ([8], [12] chap.1, §.1), je démontre la propriété d'obstruction. Les outils utilisés sont des adaptations des techniques habituelles en dynamique hyperbolique (le λ-lemme par exemple). Ce premier travail, général, donne une fois construite une chaîne de transition constitué de tores de Treshchev, l'existence des orbites d'instabilité dans un système hamiltonien presque intégrable.
Contrairement au cadre hyperbolique, ce λ-lemme ne permet pas de démontrer un analogue du théorème de Birkhoff-Smale, et ceci pour de bonnes raisons. L'une d'elle étant que ce lemme n'est valable que pour une catégorie restreintes de variétés, restriction qui provient du caractère non-isolé (dynamiquement) des tores. J'ai alors envisagé l'utilisation de méthodes beaucoup plus souples et valables dans un cadre non hyperbolique. Ces méthodes sont connus depuis Alekseev, Conley et Easton, notamment la notion de fenêtre. J'ai alors démontré un analogue du théorème de Birkhoff-Smale pour les tores de Treshchev ([9],[10]). La note [10] montre qu'en fait, certaines hypothèses dynamiques et géométriques ramènent un problème en apparence partiellement hyperbolique à un cadre hyperbolique. L'intérêt du résultat provient de son application à l'étude du méchanisme d'Arnold. On montre l'existence d'une chaîne "duale" d'orbites périodiques hyperboliques [9]. L'analyse de la dynamique, compliquée le long de la chaîne des tores de Treshchev, s'effectue maintenant avec les méthodes classiques (lemme de poursuite) et permet d'obtenir des résultats a priori hors d'atteintes dans le cas partiellement hyperbolique (voir la démonstration de la conjecture de Holmes-Marsden dans [9]).
Pour les perspectives ouvertes par ces travaux, je renvoie au dernier paragraphe de [9], ainsi que ([18], partie 1).

Temps d'instabilité : Le but de ce travail était de démontrer l'optimalité des exposants de stabilité obtenus par pierre Lochak pour le théorème de Nekhoroshev dans le cas des systèmes hamiltoniens convexes. L'idée, dicutée heuristiquement par Chirikov et reprise de manière plus claire par pierre Lochak, était de construire un système hamiltonien presque intégrable pour lequel une instabilité (d'ordre 1) des variables d'action s'effectue en un temps égale à celui du théorème de Nekhoroshev. Une présentation du problème est donnée dans [14]. Dans ma thèse, j'ai développé une méthode nouvelle,

géométrique et générale pour résoudre cette question. Elle repose sur une interprétation quantitative de la propriété d'obstruction, résumée dans le lemme de transfert et son interpretation dynamique, la propriété de transitivité [11]. Il faut noter que les difficultés qui sont discuttées et partiellement surmontées dans [11] sont passées inapperçues dans de nombreux articles (Holmes-Marsden, Xia...voir à ce sujet l'anticompendium écrit par pierre Lochak, disponible sur le serveur mp-arc et qui résume l'état des lieux lorsque j'ai entrepris mon travail) donnant lieux à des résultats non démontrés, voir faux.
Cette méthode est discutée dans ma thèse ([12], chap.2) dans un cadre initialement hyperbolique. Comme je le soulignais alors, le cas proche intégrable, nécessaire pour démontrer la conjecture de Chirikov-Lochak, devait découler des mêmes idées ([12], chap.2, §.7). J'ai recemment démontrer cette conjecture [14] dans le cas des systèmes hamiltoniens à trois degrés de liberté. Elle repose sur une adaptation de la méthode de [12] et des travaux récents sur les estimations par en dessous du splitting (M. Rudnev et S. Wiggins et A. Delshams et al.). Ces estimations sont compliquées et limitent la démonstration de la conjecture pour le moment.
J'ai aussi discuté d'autres méthodes, dont certaines sont passées en revue dans ([13], §.4). L'une d'elle utilise les résultats sur la dynamique symbolique de ([9],[10]). Un splitting δ étant fixé pour les intersections des variétés stable et instable des tores de la chaîne, on donne un critère effectif de construction de la chaîne d'orbites périodiques hyperbolique. Cela revient à fixer une proximité de l'ordre de $\delta^{1+\kappa}$, $\kappa > 0$ quelconque, des variétés stable et instable des orbites périodique en topologie C^1. Or, la position de ces dernières est reliée à la localisation des orbites périodiques, et donc à l'alphabet de la dynamique symbolique. Celui-ci dépend du vecteur fréquence sur le tore et donc du temps d'ergodisation. Le temps de dérive est donc, si l'on note p la période de chacune des orbites périodiques, Np où N est le nombre de ces orbites. On retrouve en filigrane le raisonnement précédent.

Exemples : Dans ([12], chap.3), j'ai discuté la mise en évidence de chaîne de transition dans des exemples concrets. C'est principalement en mécanique céleste [7] que mon intérêt s'est porté. Pour différentes raisons, il est difficile d'esperer obtenir un résultat significatif dans cette direction, mis à part la construction de "courtes" chaînes. Dans ([18], partie 1), je propose une étude générale des systèmes à plusieurs facteurs d'échelles, initialisée par Giovanni Gallavotti, qui permet la construction de longue chaîne de transition. Il convient de noter que ces exemples n'entrent pas formellement dans le cadre de la diffusion d'Arnold. Néanmoins, ces systèmes et la compréhension de ce type d'instabilité doit permettre de mieux comprendre certains phénomènes en mécanique céleste notamment.

Conjecture d'Arnold : La conjecture d'Arnold est discutée en détail dans ([12], chap.4). Jusqu'à présent et à de rares exceptions (john Mather), les chercheurs ont suivi la voie traçée par Arnold pour aborder cette conjecture. L'idée est d'implémenter la construction des chaînes de transition dans un cadre générique des systèmes hamiltoniens presque intégrables. Cette mise en oeuvre se heurte à des difficultés importantes, voir insurmontables si l'on veut absolument rester dans le cadre du méchanisme d'Arnold. L'un des problèmes majeure est la densité insuffisante des tores de Treshchev le long d'une surface de résonance simple vis à vis des domaines de connexions hétérocline au voisinage de chacun de ces tores. Autrement dit, on peut dire de façon lapidaire que les "trous" sont trop grands pour permettre la construction d'une chaîne de transition.
Dans ([12],chap.4), j'ai proposé une méthode permettant de résoudre ce problème, et ceci en dimension quelconque, ce qui donne un moyen de démontrer la conjecture d'Arnold. Le principe de la construction repose en partie sur une récurrence sur le nombre de degrés de liberté du hamiltonien presque intégrable

et une nouvelle vision géométrique de la construction des orbites de dérive.
On remarque que les tores de Treshchev appartiennent à un ensemble invariant normalement hyperbolique que nous allons noter $\mathcal{N}$. La dynamique sur cet ensemble est celle d'un système hamiltonien presque intégrable à $n-1$ degrés de liberté. Par exemple, pour $n=3$, les tores de Treshchev sont les tores de KAM d'un hamiltonien presque intégrable à 2 degrés de libertés. On pose désormais $n=3$. La connexion de deux tores distincts se résume à trouver des orbites reliant deux voisinages de deux tores successifs. Ces orbites sont celles discutées par G.D. Birkhoff dans son travail sur les zones d'instabilité (on renvoie à patrice Le Calvez et john Mather pour les détails). Nous avons donc un "squelette" pour la construction des orbites de dérive. En utilisant la notion de fenêtre (voir [9] et [10]), et quelques résultats sur les ensembles hyperboliques, on peut démontrer l'existence de ces orbites. Les hypothèses que j'ai faite au cours de ce travail sont encore trop restrictives, mais des idées présentées dans [10] me laisse penser qu'un résultat "générique" doit être à portée de main. L'ensemble de ces idées et les détails des démonstrations est en cours de rédaction dans [15].
Je signale au passage que la démonstration complète de la conjecture passe par une étude des résonances doubles, commencée dans [6] et développée en ce moment par J.P. Marco.

2. Synchronisation des oscillateurs, géométrie et théorie des nombres ([16],[17], [18],[19])

Ces travaux sont récents et j'ai encore peu de résultats dans cette direction. Néanmoins, un certains nombre d'approches, proposées dans [18] et développées depuis, me laisse espérer un rapide changement de la situation.

Espaces de modules et espaces de Teichmuller : Dans [18], j'envisage une approche géométrique au problème de la synchronisation des oscillateurs, initialisée par michel Planat du LPMO. L'exemple le plus simple d'un tel problème est celui de l'application d'Arnold et se ramène à l'étude des familles à un paramètre d'applications du cercle. Le nombre de rotation, introduit par H. Poincaré, permet la visualisation des plages de synchronisation. On obtient le fameux escalier du diable. L'approche géométrique de cet escalier consiste à visualiser cet escalier comme le flot géodésique associé à une certaines métrique, variant avec le paramètre de couplage des deux oscillateurs. La longueur des géodésiques sur le demi-plan de Poincaré donne la taille des plages de synchronisation, et l'action d'un groupe, par exemple $PSL(2,\mathbb{Z})$ donne au bord du demi plan les valeurs rationnelles prises sur chacune de ces plages. On retrouve ici des idées similaires à celle de Gelfand dans les années 50.
Dans [18], je discute les objets géométriques nécessaires à la mise en forme de ces idées comme les espaces de Teichmuller, les espaces de modules...etc. L'idée physique en dessous est que les changements de plages de synchronisation suivant les valeurs du paramètre sont dûes à des modification du groupe en question (le système sélectionne certains sous-groupes). Michel Planat a ainsi interprété les résultats de ces expériences au moyen de cette approche et obtenu un scénario possible de bifurcation de ces groupes.
J'ai alors introduit dans [18] l'idée de bifurcation des espaces de modules. L'idée est de se placer dans le cadre le plus universelle possible. Les espaces de Teichmuller et les espaces de modules sont en ce sens de bons candidats.

Espaces de résolution : J'ai introduit ces espaces dans [17]. Le problème que je voulais aborder était celui de la résolution et de l'échelle en physique, mais aussi les limitations de calcul des ordinateurs. Il n'y a pas de cadre à proprement parler dans lequel étudier ces problèmes. On construit, à partir de $\mathbb{R}$

un espace résolu (tenant compte de la résolution), en faisant attention à ne considérer que des nombres rationnels. On obtient alors suivant la résolution r, un espace de fractions continues limitées, dont la troncature dépend de ses propriétés arithmétiques. C'est important d'avoir ces deux aspects contenu dans la description de l'espace, car de nombreux systèmes physiques font jouer un rôle particulier à des nombres suivant leurs propriétés d'approximations.
Une fois ces espaces définis, j'ai étudié sa structure topologique, métrique...etc et surtout algébrique. On retrouve, mais cette fois de manière formelle, la non-associativité des opérations classiques (addition...) dans l'espace résolu. Cette étude n'est pas encore terminée, mais elle apporte déja des concepts nouveaux. Par exemple, celle d'instabilité d'un nombre. Cette instabilité intrinsèque des nombres n'est compréhensible qu'une fois introduit ces espaces de résolution. On peut aussi introduire divers invariants à un nombre, comme l'exposant d'approximation...Ces invariants découlent de la représentation des espaces de résolution sous forme d'arbres (au sens de J.P. Serre par exemple).
D'autres questions, en cours de développement se posent alors naturellement. L'une d'elle est la suivante : toutes les observations physique s'effectuent (a priori) dans un espace de résolution. Supposons donc que nous ayons une courbe C dans cet espace, combien existe-t-il de modèle de courbes C' dans $\mathbb{R}$ qui, une fois résolues, donnent C ? Cette question est liée à la modélisation des trajectoires par exemple en mécanique quantique. L'idée est qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une structure par exemple fractale pour obtenir une courbe résolue fractale.....le modèle différentiable serait donc possible.
J'ai aussi discuter l'interprétation des images obtenues par ordinateur des systèmes dynamiques par exemple. Le théorème que j'ai en vue est celui de l'équivalence entre existence réelle du phénomène observé (sur ordinateur) et hyperbolicité locale du système dynamique associé. Une partie fait l'objet du lemme de poursuite, l'autre découle de la traduction d'une courbe résolue dans $\mathbb{R}$.
Bien entendu, beaucoup reste à faire, et le manuscrit [17] est en ce sens très préliminaire.

Géométrie Riemannienne et chaos : Cette voie, en cours d'exploration dans [19], vient d'une méthode géométrique, mise au point par des physiciens pour détecter l'instabilité des systèmes hamiltoniens. L'idée n'est pas neuve et consiste à regarder le champ de Jacobi associé au flot géodésique pour la métrique défini par un système naturel. La note [19] donne une revue des travaux sur le sujet ainsi qu'une liste de questions et problèmes à résoudre. Le point important est que cette méthode semble la seule méthode numérique fiable pour calculer le plus grand exposant de Lyapounov d'un système. La mise au point formelle de celle-ci est donc nécessaire.

3. Singularités et intégrales premières ([3],[4],[5])

C'est le premier sujet sur lequel j'ai travaillé. Le but était de développer des idées exposées plus ou moins informellement par J.P. Marco dans sa thèse. Mon premier résultat est la caractérisation des sous-variétés isolées (au sens dynamique) de codimension 1 obtenue dans [3]. L'une des applications de ce résultat est en mécanique celeste où l'étude du flot au voisinage de la variété de collision demande la vérification de ce critère.
L'existence des intégrales première est aussi envisagée d'un point de vue topologique dans [4], toujours en suivant les idées de J.P. Marco. J'y énonce une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une intégrale première continue.
Ce travail préliminaire m'a permis d'envisager une démonstration complète de la conjecture de Thom sur la non existence générique d'intégrales premières continues. La seule démonstration existant à ce

jour est celle de Peixoto, mais elle est incomplète, car elle suppose (comme l'auteur le remarque lui même) une condition de régularité sur l'intégrale première qui est un artefact de la méthode utilisée. La méthode proposée dans [5] résout ce problème par l'utilisation des idées présentées dans [3] et [4] et les travaux de C. Conley sur la décomposition de Morse des flots sur une variété compacte. L'ébauche de démonstration donnée dans [5] se résume à deux conjectures donc j'indique une démonstration possible.

4. Enseignements, divers ([1],[2],[20],[21])

Le cours [20], rédigé pendant mon monitorat à l'IUT de Saint-Denis, donne une base pour le cours de mathématiques du département techniques de commercialisation. La principale difficulté étant que les étudiants, provenant de différentes filières (lettre, science, économie...), avaient des niveaux très disparates. Le niveau des cours étant peux élevés (terminale), j'ai pu à loisir réfléchir sur la manière de présenter des notions classiques.

Le cours [21] est beaucoup plus conséquent et ambitieux. Il a était rédigé pendant la mise au point de mon cours de mathématiques à l'ecole centrale d'électronique (ECE). Le but est de procurer aux étudiants un texte traitant des systèmes dynamiques et du chaos en général, ainsi que des différents outils existant aujourd'hui, qui permettent aux ingénieurs d'utiliser le chaos. Les textes disponibles actuellement sont soit trop formels et s'adressent à des lecteurs mathématiciens, soit trop simples et tombent dans la vulgarisation. La difficultée est aussi bien de faire le trie entre les notions importantes (conceptuellement et pas mathématiquement) que de se mettre à la page au niveau des applications possibles (en pleine explosion en ce moment). Le texte en question est en plein remaniement et devrai donner naissance à un livre une fois retravaillé.

Bibliographie

a. Divers

1. J. Cresson, *Phase de Hannay-Berry: applications à la mécanique céleste*, Mémoire de DEA, (78 p.), (1993)

2. J. Cresson, Le rôle de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement: quelques remarques, rapport de fin de contrat, CIES, (1995)

b. Etude des singularités et intégrales premières

3. J. Cresson, Sous-variétées invariantes isolées, manuscrit, (1994)

4. J. Cresson, Séparé universel et intégrales premières (d'après J.P. Marco), manuscrit, (1994)

5. J. Cresson, Théorème de Thom et décomposition de Morse, manuscrit, (1995)

c. Instabilité des systèmes hamiltoniens, conjecture d'Arnold

6. J. Cresson, Transition entre surfaces résonnantes, manuscrit, (1995)

7. J. Cresson, Instabilité en mécanique céleste et dynamique galactique, manuscrit, (1996)

8. J. Cresson, A λ-lemma for partially hyperbolic tori and the obstruction property, Letters in mathematical physics, Vol. 42, no.4, 363-377, (1997)

9. J. Cresson, Symbolic dynamics for homoclinic partially hyperbolic tori and "Arnold diffusion", prépublication no.138 de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, (1997), soumis à *Journal of Nonlinear Sciences*

10. J. Cresson, Dynamique symbolique et tores de Treshchev, projet de note aux CRAS, (1998)

11. J. Cresson, The transfer lemma for partially hyperbolic tori and the transitivity problem, prépublication 98/08 de l'équipe de mathématiques de besançon, (1998)

12. J. Cresson, *Propriétés d'instabilité dans les systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables*, Thèse, Observatoire de Paris, (188 p.), Decembre 1997

13. J. Cresson, P.Lochak, J.P. Marco, D. Sauzin, On the splitting of the invariant manifolds in higher dimensional near-integrable Hamiltonian systems, en préparation, (1997)

14. J. Cresson, Conjecture de Chirikov et optimalité des exposants de stabilité du théorème de Nekhoroshev, manuscrit, (1998)

15. J. Cresson, Some comments on the Arnold's conjecture, the Arnold's mechanism and the gaps problem, manuscrit, (1998)

d. Synchronisation, géométrie et théorie des nombres

16. J. Cresson, L'hypothèse de Riemann et la conjecture de Jansen-Back-Bohr pour les homéomorphismes du cercle, note de lecture, (1998)

17. J. Cresson, Espaces de résolution et dynamique des nombres, manuscrit, (1998)

18. J. Cresson, Systèmes dynamiques, géométrie et théorie des nombres, rapport sur le programme de recherche au CNRS, (1998)

19. J. Cresson, Géométrie riemannienne et exposants de Lyapounov, en préparation, (1998)

e. Enseignements

20. J. Cresson, *Cours de mathématiques*, notes de cours polycopiées de l'I.U.T. de Saint-Denis, (70 p.), (1994)

21. J. Cresson, *Vers la maitrise du Chaos*, notes de cours polycopiées de mathématiques en INGE4 à l'ECE (Ecole centrale d'electronique), (70 p.), (1997)